

Man berechne $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \Phi)$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \Phi) \equiv \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \Phi = \varepsilon_{ikj} \partial_k \partial_j \Phi = \varepsilon_{ikj} \partial_j \partial_k \Phi = -\varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \Phi = 0.$$

Mit anderen Worten: da $\partial_j \partial_k$ symmetrisch und ε_{ikj} total antisymmetrisch ist, ergeben die Gesamtsummen null.

Man beweise, daß das Vektorprodukt nicht assoziativ ist, dh.
 $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} \neq \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z})$

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} \equiv \varepsilon_{ijl} \varepsilon_{jkm} x_k y_m z_l = -\varepsilon_{ilj} \varepsilon_{jkm} x_k y_m z_l = -(\delta_{ik} \delta_{lm} - \delta_{im} \delta_{lk}) x_k y_m z_l = -x_i \vec{y} \cdot \vec{z} + y_i \vec{x} \cdot \vec{z}$$

Andererseits gilt:

$$\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) \equiv \varepsilon_{ilj} \varepsilon_{jkm} x_l y_k z_m = (\delta_{ik} \delta_{lm} - \delta_{im} \delta_{lk}) x_l y_k z_m = y_i \vec{x} \cdot \vec{z} - z_i \vec{x} \cdot \vec{y}.$$

Allgemein (für beliebige $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) gilt $x_i (\vec{y} \cdot \vec{z}) \neq z_i (\vec{x} \cdot \vec{y})$.

Man berechne $\vec{\nabla}(\frac{\vec{r}}{r^3})$

$$\partial_i \left(\frac{r_i}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} \underbrace{\partial_i r_i}_{=3} + r_i \left(-3 \frac{1}{r^4} \right) \left(\frac{1}{2r} \right) 2r_i = 3 \frac{1}{r^3} - 3 \frac{1}{r^3} = 0$$

Man berechne $\Delta(\frac{1}{r})$

Mit der Lösung $\partial_i \left(\frac{r_i}{r^3} \right) = 0$ erhält man:

$$\partial_i \partial_i \frac{1}{r} = \partial_i \left(-\frac{1}{r^2} \right) \left(\frac{1}{2r} \right) 2r_i = -\partial_i \frac{r_i}{r^3} = 0$$

Man berechne ($\vec{p}$ ein fix vorgegebener Vektor ist und $r \neq 0$) $\Delta\left(\frac{\vec{r}\vec{p}}{r^3}\right)$

Auch hier benützt man die Lösung $\partial_i \left(\frac{r_i}{r^3}\right) = 0$:

$$\begin{aligned}
 \partial_i \partial_i \frac{r_j p_j}{r^3} &= \partial_i \left[\frac{p_i}{r^3} + r_j p_j \left(-3 \frac{1}{r^5} \right) r_i \right] = \\
 &= p_i \left(-3 \frac{1}{r^5} \right) r_i + p_i \left(-3 \frac{1}{r^5} \right) r_i + \\
 &\quad + r_j p_j \left[\left(15 \frac{1}{r^6} \right) \left(\frac{1}{2r} \right) 2r_i \right] r_i + r_j p_j \left(-3 \frac{1}{r^5} \right) \underbrace{\partial_i r_i}_{=3} = \\
 &= r_i p_i \frac{1}{r^5} (-3 - 3 + 15 - 9) = 0
 \end{aligned}$$

Man berechne ($\vec{p}$ ein fix vorgegebener Vektor ist und $r \neq 0$) $\vec{\nabla} \times (\vec{p} \times \frac{\vec{r}}{r^3})$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (\vec{p} \times \frac{\vec{r}}{r^3}) &= \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} p_l \frac{r_m}{r^3} = p_l \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \left[\partial_j \frac{r_m}{r^3} \right] = \\ &= p_l \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \left[\frac{1}{r^3} \partial_j r_m + r_m \left(-3 \frac{1}{r^4} \right) \left(\frac{1}{2r} \right) 2r_j \right] = \\ &= p_l \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \left[\frac{1}{r^3} \partial_j r_m - 3 \frac{r_j r_m}{r^5} \right] =\end{aligned}$$

[Mit Formel [(1.3/28)]] kann man $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm}$ umformen zu $\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$ und damit vereinfachen:]

$$\begin{aligned}&= p_i \underbrace{\left(3 \frac{1}{r^3} - 3 \frac{1}{r^3} \right)}_{=0} - p_j \left(\frac{1}{r^3} \underbrace{\partial_j r_i}_{=\delta_{ij}} - 3 \frac{r_j r_i}{r^5} \right) = \\ &= -\frac{\vec{p}}{r^3} + 3 \frac{(\vec{r} \vec{p}) \vec{r}}{r^5}\end{aligned}$$