Man untersuche, welche Gestalt das Tensorfeld zweiter Stufe
$A_{ij}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} -x_1x_2 & -x_2^2 \\ x_1^2 & x_1x_2 \end{pmatrix}$
bezüglich der Basis $\{(1,0),(0,1)\}$ gegenüber einem Basiswechsel annimmt, welcher durch *Drehung* der Basisvektoren, d.h. gegenüber Transformationen
$\overline{x_i} = a_{ij}x_j$ mit $a_{ij} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$
zustandekommt. Ist A_{ij} forminvariant?

Man untersuche, ob A_{ij} als ein Produkt von Tensorfeldern erster Stufe gegenüber obigen Transformationen dargestellt werden kann.

Wenn A ein Tensorfeld zweiter Stufe [bezüglich der Basis $\{(1,0),(0,1)\}$] ist, dann ist $\overline{A}_{ij}(\overline{x}_m) = a_{ik}a_{jl}A_{kl}(x_n)$.

A ist forminvariant genau dann, wenn $\overline{A}_{ij}(\overline{x}_m)$ dieselbe Form als $A_{ij}(x_m)$ hat.

Äußere Transformation der Matrixelemente: Man kann die Transformation a_{ik} als *Matrix* mit Zeilenindex i und Spaltenindex k interpretieren. Man kann auch A_{ij} als Matrix mit Zeilenindex i und Spaltenindex j interpretieren. Dann kann $a_{ik}a_{jl}A_{kl}(x_n)$ umgeschrieben werden als inneres Matrixprodukt; und zwar wie folgt

$$a_{ik}a_{jl}A_{kl}(x_n) = a_{ik}A_{kl}a_{jl} = a_{ik}A_{kl}\left(a^t\right)_{lj} \equiv a\cdot A\cdot a^t.$$

a^t steht für die transponierte Matrix; d.h. in Komponentenschreibweise $(a^t)_{ij} = a_{ji}$.

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x_1x_2 & -x_2^2 \\ x_1^2 & x_1x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -x_1x_2\cos\varphi + x_1^2\sin\varphi & -x_2^2\cos\varphi + x_1x_2\sin\varphi \\ x_1x_2\sin\varphi + x_1^2\cos\varphi & x_2^2\sin\varphi + x_1x_2\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{matrix} \cos\varphi\left(-x_1x_2\cos\varphi + x_1^2\sin\varphi\right) + \\ +\sin\varphi\left(-x_2^2\cos\varphi + x_1x_2\sin\varphi\right) \end{matrix} & \begin{matrix} -\sin\varphi\left(-x_1x_2\cos\varphi + x_1^2\sin\varphi\right) + \\ +\cos\varphi\left(-x_2^2\cos\varphi + x_1x_2\sin\varphi\right) \end{matrix} \\ & \\ \begin{matrix} \cos\varphi\left(x_1x_2\sin\varphi + x_1^2\cos\varphi\right) + \\ +\sin\varphi\left(x_2^2\sin\varphi + x_1x_2\cos\varphi\right) \end{matrix} & \begin{matrix} -\sin\varphi\left(x_1x_2\sin\varphi + x_1^2\cos\varphi\right) + \\ +\cos\varphi\left(x_2^2\sin\varphi + x_1x_2\cos\varphi\right) \end{matrix} \end{pmatrix} =$$

$$
= \begin{pmatrix} x_1x_2\left(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi\right) + & 2x_1x_2\sin\varphi\cos\varphi \\ +\left(x_1^2 - x_2^2\right)\sin\varphi\cos\varphi & -x_1^2\sin^2\varphi - x_2^2\cos^2\varphi \\ & \\ 2x_1x_2\sin\varphi\cos\varphi + & -x_1x_2\left(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi\right) - \\ +x_1^2\cos^2\varphi + x_2^2\sin^2\varphi & -\left(x_1^2 - x_2^2\right)\sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix}
$$

Innere Transformation:

$$
\overline{x}_i = a_{ij}x_j \Longrightarrow \begin{array}{rcl} \overline{x}_1 & = & x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi \\ \overline{x}_2 & = & -x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi. \end{array}
$$

Ein Vergleich ergibt, daß

$$
\begin{aligned}
-\overline{x}_1\overline{x}_2 &= -\left(x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi\right)\left(-x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi\right) = \\
&= -\left(-x_1^2\sin\varphi\cos\varphi + x_2^2\sin\varphi\cos\varphi - x_1x_2\sin^2\varphi + x_1x_2\cos^2\varphi\right) = \\
&= x_1x_2\left(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi\right) + \left(x_1^2 - x_2^2\right)\sin\varphi\cos\varphi \\
\overline{x}_1^2 &= \left(x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi\right)\left(x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi\right) = \\
&= x_1^2\cos^2\varphi + x_2^2\sin^2\varphi + 2x_1x_2\sin\varphi\cos\varphi \\
\overline{x}_2^2 &= \left(-x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi\right)\left(-x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi\right) = \\
&= x_1^2\sin^2\varphi + x_2^2\cos^2\varphi - 2x_1x_2\sin\varphi\cos\varphi
\end{aligned}
$$

und daß deshalb

$$
\overline{A}(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = \begin{pmatrix} -\overline{x}_1\overline{x}_2 & -\overline{x}_2^2 \\ \overline{x}_1^2 & \overline{x}_1\overline{x}_2 \end{pmatrix}
$$

bezüglich der gedrehten Basis

$$
\{(\cos\varphi, -\sin\varphi), (\sin\varphi, \cos\varphi)\}
$$

ist. Dies ist dieselbe Form als $A(x_1, x_2)$.

Daraus folgt, daß A ein forminvariantes Tensorfeld zweiter Stufe gegenüber Drehungen ist.

A kann faktorisiert werden, wenn A als Produkt zweier Tensorfelder b und c erster Stufe [bezüglich der Basis $\{(1,0),(0,1)\}$] geschrieben werden kann:

$$
A_{ij}(x) = b_i(x)c_j(x).
$$

Im gegebenen Fall

$$
A(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_1x_2 & -x_2^2 \\ x_1^2 & x_1x_2 \end{pmatrix}
$$

ist

$$b(x_1,x_2) = (-x_2,x_1),$$

und

$$c(x_1,x_2) = (x_1,x_2).$$

Das ist leicht einsehbar, wenn man die Komponenten berechnet:

$$\begin{aligned}
b_1c_1 &= -x_1x_2 = A_{11},\\
b_1c_2 &= -x_2^2 = A_{12},\\
b_2c_1 &= x_1^2 = A_{21},\\
b_2c_2 &= x_1x_2 = A_{22}.
\end{aligned}$$

b und c sind selbst Tensorfelder erster Stufe bezüglich der Basis $\{(1,0),(0,1)\}$, welche sich bei Basiswechsel durch eine orthogonale Koordinatentransformation transformieren zu

$$\begin{aligned}
a_{ij}b_j &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2\cos\varphi + x_1\sin\varphi \\ x_2\sin\varphi + x_1\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{x}_2 \\ \overline{x}_1 \end{pmatrix}\\
a_{ij}c_j &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi \\ -x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Mit beliebigen Tensoren erster Stufe $x = (x_1,x_2)$ überschnitten, ergeben sich skalare Invarianten:

$$\begin{aligned}
b_ix_i &= -x_2x_1 + x_1x_2 = 0\\
c_ix_i &= x_1^2 + x_2^2.
\end{aligned}$$

Die Faktorisierung ist jedoch nicht eindeutig; z.B. gilt

$$A(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} -x_1x_2 & -x_2^2 \\ x_1^2 & x_1x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2^2 \\ x_1x_2 \end{pmatrix} \otimes \left(\frac{x_1}{x_2}, 1\right).$$