

ELEKTRODYNAMIK UND RELATIVITÄTSTHEORIE

Kapitel 16: Elektrodynamik bewegter Materie

Vorlesung für Studenten der Technischen Physik

Helmut Nowotny

Technische Universität Wien

Institut für Theoretische Physik

7., von A. Rebhan korrigierte Auflage

Wien, Februar 2006

XVI. ELEKTRODYNAMIK BEWEGTER MATERIE

XVI.1. Grundgleichungen

XVI.1.A. Feldgleichungen

Wie aus der Herleitung der **makroskopischen Maxwellgleichungen** in Kapitel XI zu ersehen ist, benötigt man zur Lösung dieser Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi \varrho & , & & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} & , \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} & , & & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & , \end{aligned} \quad (1)$$

immer zusätzliche **Materialgleichungen**, die in ihrer einfachsten Form durch

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad , \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad , \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (2)$$

gegeben sind, wenn wir nur Materialien betrachten, deren Verhalten durch die drei Materialkonstanten ε (Dielektrizitätskonstante), μ (magnetische Permeabilität) und σ (elektrische Leitfähigkeit) allein bestimmt sind. Die in Gl. 2 angegebenen Materialgleichungen gelten für ruhende Materialien.

Ihre Verwendung für bewegte Materie erfolgt dadurch, daß wir eine Lorentztransformation auf das Ruhesystem der Materie durchführen, in diesem Ruhesystem die Materialgleichungen 2 verwenden und dann wieder zurücktransformieren. Hiezu benötigen wir aber eine Viererformulierung der makroskopischen Maxwellgleichungen, welche zuerst von Minkowski in Analogie zu den entsprechenden Vakuumgleichungen (siehe Kapitel IX) angegeben wurde.

Da die **homogenen** makroskopischen Maxwellgleichungen

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0 \quad (3)$$

genau den homogenen Vakuumgleichungen XI.1 entsprechen, legt dies wieder die Einführung eines Feldstärketensors entsprechend Gl. IX.14 nahe

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (4)$$

für den (in Analogie zu Gl. IX.19) die Feldgleichungen

$$\partial^\sigma F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\sigma} + \partial^\nu F^{\sigma\mu} = 0 \quad (5)$$

gelten. Unter Einführung des **dualen** Feldstärketensors

$$\hat{F}^{\mu\nu} := \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} F_{\sigma\tau} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} \quad (4a)$$

können die homogenen makroskopischen Maxwellgleichungen 5 auch in der Form

$$\partial_\mu \widehat{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (5a)$$

geschrieben werden.

Die **inhomogenen** makroskopischen Maxwellgleichungen

$$\operatorname{div} \vec{D} = \frac{4\pi}{c} c\rho \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (6)$$

entsprechen formal den inhomogenen Vakuumgleichungen IX.3, wenn wir in diesen Gleichungen \vec{E} durch \vec{D} und \vec{B} durch \vec{H} ersetzen. Dies legt die Einführung eines weiteren Tensors

$$H^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -D_x & -D_y & -D_z \\ D_x & 0 & -H_z & H_y \\ D_y & H_z & 0 & -H_x \\ D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (7)$$

nahe, für den die zu den inhomogenen Vakuumgleichungen IX.15 analogen Feldgleichungen

$$\partial_\mu H^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad (8)$$

gelten. Der zum Tensor H duale Tensor ist durch

$$\widehat{H}^{\mu\nu} := \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} H_{\sigma\tau} = \begin{pmatrix} 0 & -H_x & -H_y & -H_z \\ H_x & 0 & D_z & -D_y \\ H_y & -D_z & 0 & D_x \\ H_z & D_y & -D_x & 0 \end{pmatrix} \quad (7a)$$

gegeben und wird im nächsten Kapitel zur Formulierung der Materialgleichungen benötigt.

Transformation der Felder

Bewegt sich die Materie mit der Geschwindigkeit v in positiver x -Richtung, so können wir die Feldstärketensoren gemäß Gl. IX.31 transformieren und erhalten den Gleichungen IX.33a und IX.33b entsprechende Transformationsgleichungen. Kennzeichnen wir die Größen im Ruhesystem der Materie mit dem Index (r) , so gelten die Transformationsgleichungen

$$E_x^{(r)} = E_x \quad , \quad E_y^{(r)} = \gamma(E_y - \beta B_z) \quad , \quad E_z^{(r)} = \gamma(E_z + \beta B_y) \quad , \quad (9a)$$

$$B_x^{(r)} = B_x \quad , \quad B_y^{(r)} = \gamma(B_y + \beta E_z) \quad , \quad B_z^{(r)} = \gamma(B_z - \beta E_y) \quad , \quad (9b)$$

bzw.

$$D_x^{(r)} = D_x \quad , \quad D_y^{(r)} = \gamma(D_y - \beta H_z) \quad , \quad D_z^{(r)} = \gamma(D_z + \beta H_y) \quad , \quad (10a)$$

$$H_x^{(r)} = H_x \quad , \quad H_y^{(r)} = \gamma(H_y + \beta D_z) \quad , \quad H_z^{(r)} = \gamma(H_z - \beta D_y) \quad . \quad (10b)$$

XVI.1.B. Materialgleichungen

Zur Aufstellung der Materialgleichungen könnten wir mittels der Transformationsgleichungen 9a bis 10b auf das Ruhesystem der Materie übergehen und in diesem Ruhesystem die Materialgleichungen

$$\vec{D}^{(r)} = \varepsilon \vec{E}^{(r)} \quad , \quad \vec{B}^{(r)} = \mu \vec{H}^{(r)} \quad (11)$$

verwenden.

Eine andere Möglichkeit zur Aufstellung der Materialgleichungen besteht darin, die im Ruhesystem der Materie geltenden Materialgleichungen 11 unter Verwendung der Feldstärketensoren und der Vierergeschwindigkeit der Materie kovariant anzuschreiben. Da die Vierergeschwindigkeit der Materie im Ruhesystem durch

$$v_\nu^{(r)} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

gegeben ist, kann man unter Verwendung der Definitionsgleichungen 4 und 7 für die Tensoren F und H bzw. der Definitionsgleichungen 4a und 7a für die Tensoren \widehat{F} und \widehat{H} leicht nachrechnen, daß die beiden Verknüpfungsgleichungen

$$H^{\mu\nu} v_\nu = \varepsilon F^{\mu\nu} v_\nu \quad , \quad \widehat{H}^{\mu\nu} v_\nu = \mu \widehat{H}^{\mu\nu} v_\nu \quad (13)$$

genau die Materialgleichungen 11 im Ruhesystem der Materie darstellen. Für ein Bezugssystem, in dem die Materie die Geschwindigkeit \vec{v} aufweist, erhalten wir aus diesen Gleichungen unter Beachtung von

$$v_\nu = \gamma \begin{pmatrix} c \\ -\vec{v} \end{pmatrix} \quad (14)$$

sofort die Beziehungen

$$\begin{pmatrix} 0 & -D_x & -D_y & -D_z \\ D_x & 0 & -H_z & H_y \\ D_y & H_z & 0 & -H_x \\ D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ -v_x \\ -v_y \\ -v_z \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ -v_x \\ -v_y \\ -v_z \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ -v_x \\ -v_y \\ -v_z \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 & -H_x & -H_y & -H_z \\ H_x & 0 & D_z & -D_y \\ H_y & -D_z & 0 & D_x \\ H_z & D_y & -D_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ -v_x \\ -v_y \\ -v_z \end{pmatrix} \quad ,$$

deren raumartige Komponenten wir unter Verwendung von Dreiervektoren in der Form

$$\vec{D} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H} = \varepsilon \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) \quad , \quad (15a)$$

$$\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E} = \mu \left(\vec{H} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{D} \right) \quad (15b)$$

schreiben können. Die zeitartigen Komponenten dieser Gleichungen

$$\vec{D} \cdot \vec{v} = \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{v} \quad , \quad \vec{B} \cdot \vec{v} = \mu \vec{H} \cdot \vec{v} \quad (16)$$

folgen auch direkt aus den Gleichungen 15a und 15b und stellen somit keine neuen Beziehungen dar. Lösen wir die Gleichungen 15a und 15b nach den beiden Vektoren \vec{D} und \vec{B} auf, so erhalten wir

$$\vec{D} = \frac{1}{1 - \varepsilon\mu\beta^2} \left\{ \varepsilon \vec{E} (1 - \beta^2) + (\varepsilon\mu - 1) \left[\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H} - \varepsilon \frac{\vec{v}}{c} \left(\frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{E} \right) \right] \right\} \quad , \quad (17a)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{1 - \varepsilon\mu\beta^2} \left\{ \mu \vec{H} (1 - \beta^2) - (\varepsilon\mu - 1) \left[\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E} + \mu \frac{\vec{v}}{c} \left(\frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{H} \right) \right] \right\} \quad . \quad (17b)$$

Diese Gleichungen stellen die Materialgleichungen in einem Bezugssystem dar, in dem sich das Material mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegt.

Elektrischer Strom

Eine besondere Betrachtung verlangt der Viererstrom

$$j^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} \quad . \quad (18)$$

Die drei räumlichen Komponenten des Viererstromes stellen im Ruhesystem der Materie den **Leitungsstrom** dar, während die zeitliche Komponente der Ladungsdichte proportional ist. Beim Übergang auf ein bewegtes Bezugssystem tritt nun durch die Bewegung der Ladungsdichte ρ ein **Konvektionsstrom** auf, welcher zum Leitungsstrom hinzutritt. Da wir im Ohm'schen Gesetz

$$\vec{j}^{(r)} = \sigma \vec{E}^{(r)} \quad (19)$$

den Leitungsstrom im Ruhesystem der Materie benötigen, zerlegen wir den gesamten Viererstrom in die Summe aus einem Vierer-Konvektionsstrom und einem Vierer-Leitungsstrom

$$j^\mu = j_{(K)}^\mu + j_{(L)}^\mu \quad , \quad (20a)$$

wobei im Ruhesystem der Materie

$$j_{(K)}^\mu = \begin{pmatrix} c\rho^{(r)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad j_{(L)}^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{j}^{(r)} \end{pmatrix} \quad (20b)$$

gilt. Das in Gl. 19 angegebene Ohmsche Gesetz können wir unter Verwendung der Vierergeschwindigkeit der Materie im Ruhesystem (siehe Gl. 12) in der Form

$$j_{(L)}^\mu = \frac{\sigma}{c} F^{\mu\nu} v_\nu \quad (21)$$

schreiben, woraus sofort für die mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegte Materie die Beziehung

$$\begin{pmatrix} c\rho_{(L)} \\ j_{(L)x} \\ j_{(L)y} \\ j_{(L)z} \end{pmatrix} = \frac{\sigma}{c} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \gamma \begin{pmatrix} c \\ -v_x \\ -v_y \\ -v_z \end{pmatrix} \quad (21a)$$

folgt. Die räumlichen Komponenten dieser Gleichung ergeben die Dreiergleichung

$$\vec{j}_{(L)} = \sigma \gamma \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) \quad , \quad (22a)$$

während die zeitliche Komponente dieser Gleichung die Beziehung

$$c \rho_{(L)} = \frac{1}{c} \sigma \gamma \vec{E} \cdot \vec{v} = \frac{1}{c} \vec{j}_{(L)} \cdot \vec{v} \quad (22b)$$

ergibt. Diese Gleichungen stellen das Ohmsche Gesetz für bewegte Materie dar.

XVI.1.C. Näherungsgleichungen für langsam bewegte Materie

Ist die Geschwindigkeit der Materie wesentlich kleiner als die Lichtgeschwindigkeit, so genügt es, in allen abgeleiteten Gleichungen nur Terme erster Ordnung in v/c zu betrachten.

Die Transformationsgleichungen 9a bis 10b vereinfachen sich dann auf die Gleichungen

$$\vec{E}^{(r)} = \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \quad , \quad \vec{B}^{(r)} = \vec{B} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E} \quad , \quad (23)$$

bzw.

$$\vec{D}^{(r)} = \vec{D} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H} \quad , \quad \vec{H}^{(r)} = \vec{H} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{D} \quad . \quad (24)$$

Die Materialgleichungen 17a und 17b vereinfachen sich zu

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + (\varepsilon \mu - 1) \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H} \quad , \quad (25a)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} - (\varepsilon \mu - 1) \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E} \quad . \quad (25b)$$

Schließlich ergeben sich für das Ohmsche Gesetz aus den Gleichungen 22a und 22b die Ausdrücke

$$\vec{j}_{(L)} = \sigma \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) \quad , \quad (26a)$$

$$c \rho_{(L)} = \frac{1}{c} \sigma \vec{E} \cdot \vec{v} = \frac{1}{c} \vec{j}_{(L)} \cdot \vec{v} \quad . \quad (26b)$$

XVI.2. Momententensor

XVI.2.A. Elektrische Polarisation und Magnetisierung

Schreiben wir die Materialgleichungen 11 im Ruhesystem der Materie entsprechend den allgemeinen Gleichungen XI.23 in der Form

$$\vec{D}^{(r)} = \vec{E}^{(r)} + 4\pi\vec{P}^{(r)} \quad , \quad \vec{H}^{(r)} = \vec{B}^{(r)} - 4\pi\vec{M}^{(r)} \quad , \quad (27)$$

so legt dies im Hinblick auf den aus den Feldstärken \vec{E} und \vec{B} gebildeten Tensor F (siehe Gleichung 4) sowie den aus \vec{D} und \vec{H} gebildeten Tensor H (siehe Gleichung 7) die Einführung eines **Vierer-Momententensors** nahe, welcher aus der elektrischen Polarisation \vec{P} und der Magnetisierung \vec{M} gebildet wird:

$$M^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & P_x & P_y & P_z \\ -P_x & 0 & -M_z & M_y \\ -P_y & M_z & 0 & -M_x \\ -P_z & -M_y & M_x & 0 \end{pmatrix} . \quad (28)$$

Die Materialgleichungen können mittels dieses Momententensors in der vierdimensionalen Formulierung

$$F^{\mu\nu} = H^{\mu\nu} + 4\pi M^{\mu\nu} \quad (29)$$

angegeben werden.

XVI.2.B. Transformation des Momententensors

Aus der vierdimensionalen Schreibweise ergeben sich sofort die allgemeinen Transformationsformeln für die Polarisation und die Magnetisierung. Bewegt sich die Materie mit der Geschwindigkeit v in positiver x -Richtung, so gelten die Transformationsgleichungen (Größen im Ruhesystem der Materie sind mit dem Index (r) gekennzeichnet)

$$P_x = P_x^{(r)} \quad , \quad P_y = \gamma(P_y^{(r)} - \beta M_z^{(r)}) \quad , \quad P_z = \gamma(P_z^{(r)} + \beta M_y^{(r)}) \quad , \quad (30a)$$

$$M_x = M_x^{(r)} \quad , \quad M_y = \gamma(M_y^{(r)} + \beta P_z^{(r)}) \quad , \quad M_z = \gamma(M_z^{(r)} - \beta P_y^{(r)}) \quad . \quad (30b)$$

Diese Formeln zeigen direkt eine Verknüpfung zwischen den beiden dreidimensionalen Vektoren \vec{P} und \vec{M} . Insbesondere erscheint ein im Ruhesystem elektrisch polarisierter, jedoch **nicht magnetisierter** Körper einem bewegten Beobachter auch **magnetisiert**. Umgekehrt zeigt ein im Ruhesystem nur **magnetisierter** Körper bei seiner Bewegung ein **elektrisches Moment**.

Ist die Bewegungsgeschwindigkeit v der Materie wesentlich kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c , dann können die Gleichungen 30a und 30b wieder vereinfacht in der folgenden Form angegeben werden:

$$\vec{P} = \vec{P}^{(r)} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{M}^{(r)} \quad , \quad \vec{M} = \vec{M}^{(r)} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{P}^{(r)} \quad . \quad (31)$$

XVI.3. Experimente

XVI.3.A. Unipolarinduktion

Gemäß Gleichung 31 weist ein Magnet mit der Ruhemagnetisierung $\vec{M}^{(r)}$ bei Bewegung eine elektrische Polarisation

$$\vec{P} = \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{M}^{(r)} \quad (32)$$

auf. Dieser Effekt ist in der Technik unter dem Namen *Unipolarinduktion* bekannt. Die Polarisation gemäß Gleichung 32 ist nicht etwa eine nur mit subtilen Hilfsmitteln nachweisbare Erscheinung, sondern gestattet vielmehr die technische Erzeugung von Stromstärken, die nach Tausenden von Ampere zählen.

Die technische Ausführung einer Unipolarmaschine ist in Fig. 16.1 angedeutet. Sie besteht aus einem zylindrischen magnetischen Eisenkörper, der um seine Achse rotiert (die Magnetisierung ist parallel zur Zylinderachse). Die entstehende elektrische Polarisation ist radial gerichtet und führt zu einer Potentialdifferenz in radialer Richtung. Mit Hilfe von zwei Schleifkontakten A (an der Achse) und B (an der Außenseite) kann man einen Strom abnehmen bzw. die entstehende elektrische Spannung messen.

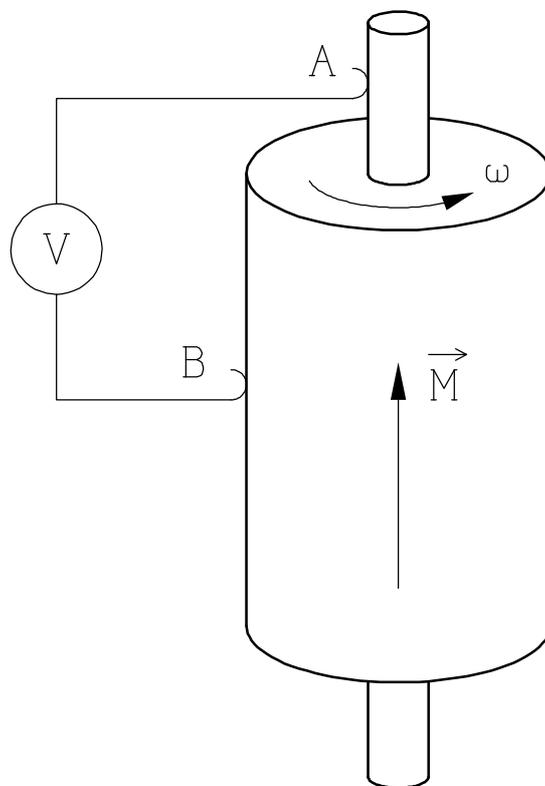


Fig. 16.1 Schema einer Unipolarmaschine

XVI.3.B. Der Versuch von Fizeau

Beim Versuch von Fizeau wird die Ausbreitung von Licht in einem bewegten Medium gemessen. Betrachten wir ein dielektrisches Material mit der Dielektrizitätskonstanten ε und setzen $\mu = 1$, so gelten im bewegten Medium näherungsweise die Materialgleichungen (siehe Gleichungen 25a und 25b)

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + (\varepsilon - 1) \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H} \quad , \quad \vec{B} = \vec{H} - (\varepsilon - 1) \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E} \quad . \quad (33)$$

Lösen wir diese Gleichungen nach \vec{E} und \vec{H} auf, so erhalten wir bei Vernachlässigung quadratischer Terme in \vec{v}/c die Gleichungen

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon} \vec{D} - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \quad , \quad \vec{H} = \vec{B} + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{D} \quad . \quad (34)$$

Betrachten wir nun **ladungsfreie Raumbereiche**, so lauten die Maxwellgleichungen

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0 \quad , \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad , \quad (35a)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \quad . \quad (35b)$$

Verwenden wir in den Gleichungen 35b die Materialgleichungen 34 und berücksichtigen die Gleichungen 35a, so erhalten wir für \vec{D} und \vec{B} die folgenden Beziehungen:

$$\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot} \vec{D} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \left(\frac{\vec{v}}{c} \cdot \nabla \right) \vec{B} \quad , \quad (36a)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \left(\frac{\vec{v}}{c} \cdot \nabla \right) \vec{D} \quad . \quad (36b)$$

Durch Rotorbildung können wir nun jeweils eine Größe aus diesen Gleichungen eliminieren und erhalten unter Beachtung von

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{D} = -\Delta \vec{D} \quad , \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B} = -\Delta \vec{B} \quad , \quad (37)$$

die für \vec{D} und \vec{B} identischen Wellengleichungen

$$\frac{1}{\varepsilon} \Delta \vec{D}(\vec{r}, t) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \left(\frac{\vec{v}}{c} \cdot \nabla \right) \right)^2 \vec{D}(\vec{r}, t) \quad , \quad (38a)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \Delta \vec{B}(\vec{r}, t) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \left(\frac{\vec{v}}{c} \cdot \nabla \right) \right)^2 \vec{B}(\vec{r}, t) \quad , \quad (38b)$$

die die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in bewegten Dielektrika beschreiben.

Mit dem Ansatz für ebene Wellen

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{D}_o e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} + c.c. \quad , \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_o e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} + c.c. \quad , \quad (39)$$

ergibt sich aus diesen Wellengleichungen die Dispersionsrelation

$$\frac{1}{\varepsilon} k^2 = \left(\frac{\omega}{c} - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{k} \right)^2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} k = \omega - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \vec{v} \cdot \vec{k} \quad , \quad (40)$$

die zu der Wellengeschwindigkeit

$$w = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} v \cos \alpha \quad (41)$$

im mit der Geschwindigkeit v bewegten Dielektrikum führt (der Winkel α kennzeichnet den Winkel zwischen der Ausbreitungsrichtung der Welle und der Bewegungsrichtung der Materie). Da der erste Term in dieser Gleichung der Wellengeschwindigkeit

$$w_o = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{n} \quad (41a)$$

im ruhenden Medium entspricht, können wir Gleichung 41 unter Verwendung des Brechungsindex n in der Form

$$w = w_o + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v \cos \alpha \quad (41b)$$

schreiben. Wir sehen hieraus, daß nicht eine totale Addition von Geschwindigkeit der Welle im ruhenden Medium und der Bewegungsgeschwindigkeit des Mediums vorliegt, sondern nur eine teilweise, die durch den **Fizeauschen Mitführungskoeffizienten**

$$\eta = 1 - \frac{1}{n^2} \quad (42)$$

charakterisiert ist.

Berücksichtigt man die Frequenzänderung beim Übergang vom bewegten System auf das Ruhesystem der Materie in linearer Näherung in der Frequenzabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon(\omega)$ bzw. der Frequenzabhängigkeit des Brechungsindex (Dispersion),

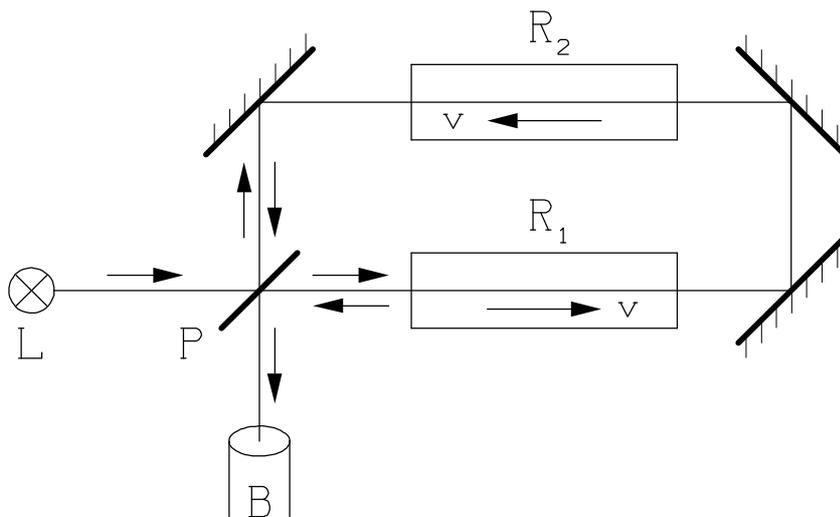


Fig. 16.2 Schematische Versuchsanordnung zur Messung des Mitführungskoeffizienten

so ergibt sich für den Fizeauschen Mitführungskoeffizienten anstelle von Gleichung 42 der Ausdruck

$$\eta = 1 - \frac{1}{n^2} + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega} . \quad (42a)$$

Dieser Mitführungskoeffizient wurde bereits 1851 (siehe Kapitel I.1.C und I.4.D) von Fizeau experimentell bestimmt. Die schematische Versuchsanordnung dieser Messung ist in Fig. 16.2 angegeben. Der von der Lichtquelle L kommende Strahl wird durch eine halbversilberte Glasplatte P in zwei Teilstrahlen zerlegt, die den in der Abbildung angegebenen Weg in entgegengesetzter Richtung durchlaufen. Durch die halbversilberte Platte werden sie wieder vereinigt und gelangen zum Beobachtungspunkt B. Die beiden Teilstrahlen durchlaufen auf ihrem Weg die beiden Röhren R₁ und R₂, durch die Wasser in entgegengesetzter Richtung mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v strömt. Beide Röhren weisen die gleiche Länge l auf. Da der eine Strahl die beiden Röhren immer in der Strömungsrichtung des Wassers durchläuft und der andere Strahl immer in entgegengesetzter Richtung, ergibt sich zwischen diesen beiden Teilstrahlen der Laufzeitunterschied

$$\Delta t = \frac{2l}{w_o - \eta v} - \frac{2l}{w_o + \eta v} \approx \frac{4l\eta v}{w_o^2} . \quad (43)$$

Durch die auftretenden Interferenzen kann dieser Laufzeitunterschied und hiemit der Fizeausche Mitführungskoeffizient η gemessen werden.

Nach M.v.Laue kann der Fizeausche Mitführungskoeffizient als Ergebnis der relativistischen Geschwindigkeitsaddition verstanden werden. Vernachlässigen wir die Dispersion, so haben wir die Geschwindigkeit $w_o = c/n$ der Welle im ruhenden Medium zu der Bewegungsgeschwindigkeit v zu addieren. Nach Gleichung VII.44 ergibt dies bei gleichgerichteten Geschwindigkeiten

$$w = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{1}{n} \frac{v}{c}} = \left(\frac{c}{n} + v \right) \left(1 - \frac{v}{nc} + \dots \right) = \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) + \dots \quad (44)$$

in Übereinstimmung mit Gleichung 41b bzw. 42 (bei Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung in v/c).