

# ELEKTRODYNAMIK UND RELATIVITÄTSTHEORIE

## **Kapitel 15: Ausbreitung elektromagnetischer Wellen**

Vorlesung für Studenten der Technischen Physik

Helmut Nowotny

Technische Universität Wien

Institut für Theoretische Physik

7., von A. Rebhan korrigierte Auflage

Wien, Februar 2006

## XV. AUSBREITUNG ELEKTROMAGNETISCHER WELLEN

### XV.1. Interferenzerscheinungen

#### XV.1.A. Lichtintensität und Lichtemission

Man beobachtet in einem Interferenzexperiment immer die **Lichtintensität**, welche durch den Poyntingvektor am Beobachtungsort gegeben ist. Für eine monochromatische ebene Welle im Vakuum haben wir den Poyntingvektor in Gleichung V.22 berechnet:

$$|\vec{S}(\vec{r}, t)| = \frac{c}{16\pi} \left( |\vec{E}_o|^2 + \vec{E}_o^2 e^{2i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \right) + c.c. \quad (1)$$

Die über eine Periodendauer zeitlich gemittelte Intensität ist durch den Ausdruck

$$I = \langle |\vec{S}(\vec{r}, t)| \rangle = \frac{c}{8\pi} |\vec{E}_o|^2 \quad (2)$$

gegeben und somit dem **Absolutquadrat** der elektrischen Feldstärkeamplitude proportional.

In einem durch die Materialkonstanten  $\varepsilon$  und  $\mu$  gekennzeichneten Medium ist der Poyntingvektor entsprechend Gleichung XI.62 zu berechnen. Mit den in Kapitel XIV.1.C. angegebenen Gleichungen für eine ebene Welle in Materie erhalten wir für den zeitlich gemittelten Poyntingvektor den geringfügig modifizierten Ausdruck

$$I = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |\vec{E}_o|^2 \quad , \quad (2a)$$

welcher wieder eine Proportionalität zwischen Intensität und dem Absolutquadrat der elektrischen Feldstärkeamplitude aufzeigt.

#### Lichtemission

Die Lichtemission erfolgt in Quanten. Die Dauer eines Emissionsaktes wurde zu  $\approx 10^{-8}$  sec gemessen. Hieraus ergibt sich für einen Wellenzug eine Länge von  $\approx 3$  m (sogenannte Kohärenzlänge). Infolge der völlig willkürlichen Phasenbeziehungen zwischen mehreren verschiedenen Wellenzügen können Interferenzerscheinungen nur beobachtet werden, wenn Licht eines einzigen Emissionsaktes überlagert wird (Lichtstrahlen in verschiedene Richtungen werden z.B. durch Spiegeln zusammengeführt oder Lichtstrahl in einer einzigen Richtung wird z.B. durch einen halbdurchlässigen Spiegel in zwei Teilstrahlen zerlegt, die anschließend wieder zusammengeführt werden).

### XV.1.B. Interferenz mehrerer Lichtwellen

Betrachten wir die Superposition von mehreren Wellen

$$\vec{E}^{(l)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{E}_o^{(l)} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c. \quad , \quad (3)$$

so ist die Intensität wieder dem Absolutquadrat der gesamten elektrischen Feldstärkeamplitude proportional:

$$I = \frac{c}{8\pi} |\vec{E}_o|^2 \quad \text{mit} \quad \vec{E}_o = \sum_l \vec{E}_o^{(l)} \quad . \quad (4)$$

Schreiben wir dieses Absolutquadrat von  $\vec{E}_o$  in der Form

$$|\vec{E}_o|^2 = \left( \sum_l \vec{E}_o^{(l)} \right) \cdot \left( \sum_m \vec{E}_o^{(m)} \right)^* = \sum_l |\vec{E}_o^{(l)}|^2 + \sum_{l < m} \left( \vec{E}_o^{(l)} \cdot \vec{E}_o^{(m)*} + c.c. \right) \quad , \quad (5)$$

so sehen wir, daß die erste Summe einer einfachen Intensitätssummation der Einzelwellen entspricht, die immer einen positiven Beitrag liefert. Man bezeichnet diese Summe auch als inkohärente Summation, da sie auch bei Wellen, die nicht interferieren, also inkohärent sind, auftritt.

Der zweite Summenterm wird äußerst stark von den Phasen der Teilwellen beeinflusst und kann sowohl positive als auch negative Werte annehmen. Er führt somit für die Gesamtintensität zu einer Abweichung von der Additivität der Einzelintensitäten. Diese Erscheinung wird als **Interferenz** bezeichnet.

#### Interferenz von zwei Lichtwellen

Wir betrachten zwei in der gleichen Richtung linear polarisierte ebene Wellen, deren komplexe Amplituden durch

$$\vec{E}_o^{(1)} = a_1 e^{i\delta_1} \vec{e} \quad , \quad \vec{E}_o^{(2)} = a_2 e^{i\delta_2} \vec{e} \quad , \quad (6)$$

gegeben sind. Hierbei kennzeichnen die reellen Zahlen  $a_1$  und  $a_2$  die Beträge der Amplituden, die reellen Zahlen  $\delta_1$  und  $\delta_2$  die Phasen der Amplituden und der Einheitsvektor  $\vec{e}$  die Polarisationsrichtung. Aus Gleichung 5 ergibt sich für diesen sehr einfachen Fall der Ausdruck

$$|\vec{E}_o|^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\delta_1 - \delta_2) \quad , \quad (7)$$

in dem der letzte Term für die Interferenz verantwortlich ist. Man sieht, daß in speziellen Fällen ( $a_1 = a_2$ ,  $\delta_1 - \delta_2 = \pi$ ) ein völliges Verschwinden der Lichtintensität möglich ist. Keine Interferenz tritt zwischen zwei linear polarisierten Wellen auf, deren Polarisationsrichtungen senkrecht zueinander stehen.

### Optische Weglänge

Das Auftreten von Interferenz ist ganz wesentlich von den Phasenbeziehungen der Teilwellen abhängig. Handelt es sich um Licht eines Emissionsaktes, so kann mittels verschiedener optischer Wege über den Wellenfaktor  $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$  eine definierte Phasendifferenz  $\delta_1 - \delta_2$  erzeugt werden. Dieser Wellenfaktor ist z.B. für die Wellenausbreitung in  $x$ -Richtung durch

$$e^{i(kx - \omega t)} = e^{i\omega\left(\frac{k}{\omega}x - t\right)} = e^{i\omega\left(\frac{nx}{c} - t\right)} \quad (8)$$

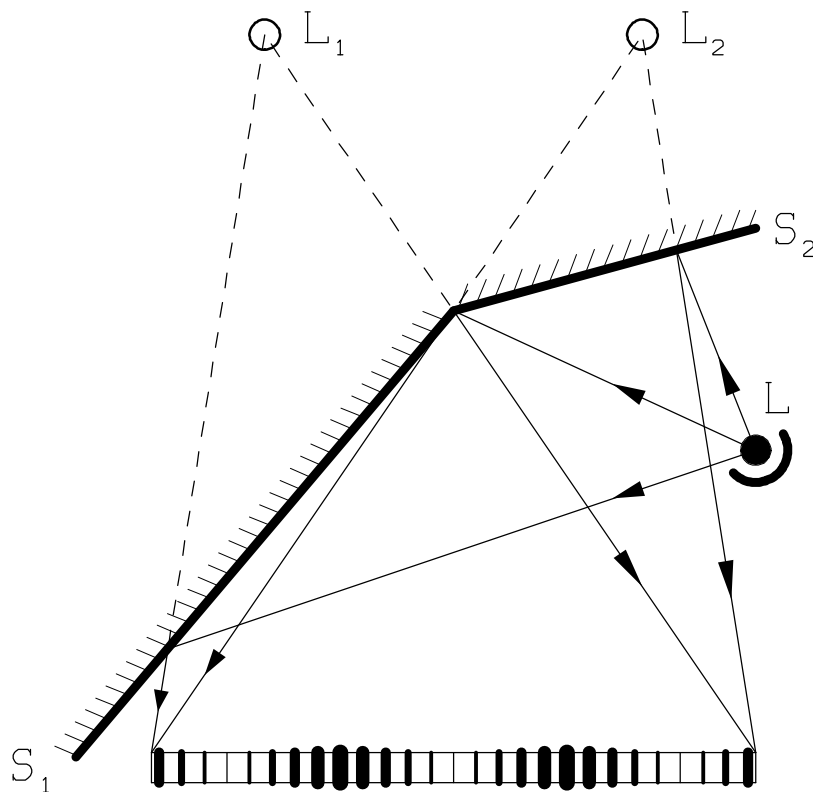
gegeben. Durchlaufen somit zwei Wellen, die an  $x = 0$  keine Phasendifferenz hatten, die Strecke  $x$  in Medien mit Brechungsindex  $n_1$  bzw.  $n_2$ , so ist ihre für die Interferenz maßgebliche Phasendifferenz durch

$$\delta_1 - \delta_2 = \frac{\omega}{c} (n_1x - n_2x) \quad (9)$$

gegeben. Dies führt zu der Regel

$$\text{optischer Weg} = \text{Brechungsindex } n \cdot \text{geometrischer Weg} \quad (10)$$

Ein einfaches Beispiel zur Interferenz kohärenten Lichtes ist der historische Fresnelsche Spiegelversuch (siehe Fig. 15.1), bei dem eine definierte Phasenbeziehung durch einen verschieden langen geometrischen Weg erzielt wird.



**Fig. 15.1** Fresnelscher Spiegelversuch (durch die Spiegel  $S_1$  bzw.  $S_2$  wird die Lichtquelle  $L$  zu zwei scheinbaren Lichtquellen  $L_1$  und  $L_2$ , die kohärentes Licht aussenden)

## XV.2. Skalare Beugungstheorie

### XV.2.A. Kirchhoff–Identität, Kirchhoff–Verfahren

Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen ist als Randwertaufgabe der Maxwellgleichungen aufzufassen. Im Rahmen der von Kirchhoff eingeführten Näherung wird statt der elektromagnetischen Felder  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  eine **skalare komplexwertige Lichterregung**  $u(\vec{r}, t)$  verwendet, deren **Absolutquadrat** proportional zur **Intensität** der Lichtwelle ist.

Diese skalare Lichterregung genügt in einem ladungs- und stromfreien Volumen  $V$  der homogenen Wellengleichung

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(\vec{r}, t) = 0 \quad (11)$$

bzw. für einen rein periodischen eingeschwungenen Zustand

$$u(\vec{r}, t) = u(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (12)$$

der Gleichung

$$(\Delta + k^2) u(\vec{r}) = 0 \quad \text{mit} \quad k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad . \quad (13)$$

#### Kirchhoff–Identität

Zur Herleitung der Kirchhoff–Identität verwenden wir den zweiten Greenschen Satz (siehe Gleichung I.12b)

$$\int_V d^3r' \left[ u(\vec{r}') \Delta' \chi(\vec{r}') - \chi(\vec{r}') \Delta' u(\vec{r}') \right] = \oint_{R(V)} d^2\vec{f}' \cdot \left[ u(\vec{r}') \vec{\nabla}' \chi(\vec{r}') - \chi(\vec{r}') \vec{\nabla}' u(\vec{r}') \right]$$

und wählen als Funktion  $\chi(\vec{r}')$  die Greensche Funktion  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  zum Operator  $\Delta + k^2$ :

$$(\Delta + k^2) G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad , \quad (14a)$$

$$(\Delta' + k^2) G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad . \quad (14b)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen 13 und 14b ergibt sich

$$-4\pi u(\vec{r}) = \oint_{R(V)} d^2\vec{f}' \cdot \left[ u(\vec{r}') \vec{\nabla}' G(\vec{r}, \vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{\nabla}' u(\vec{r}') \right] \quad . \quad (15)$$

Verwenden wir nun die Greenfunktion für den unendlichen Raum

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad , \quad (16)$$

so können wir mit

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}' G(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \left( -ik \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) \\ &= -ik \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \left( 1 + \frac{i}{k|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \end{aligned} \quad (16a)$$

diese Gleichung weiter umformen:

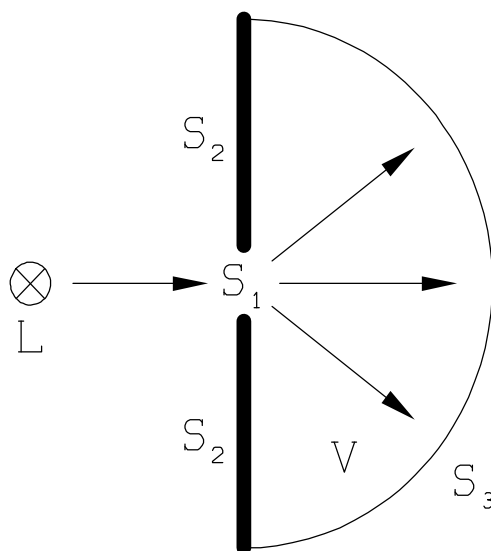
$$u(\vec{r}) = \oint_{R(V)} d^2\vec{f}' \cdot \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \left[ \vec{\nabla}' u(\vec{r}') + ik \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} u(\vec{r}') \left( 1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \right] . \quad (17)$$

Diese Gleichung wird als **Kirchhoff-Identität** bezeichnet. Jede Lösung der Wellengleichung erfüllt unabhängig von den jeweiligen Randbedingungen diese Beziehung, wenn nur  $\vec{r}$  innerhalb des quellenfreien Volumens  $V$  liegt.

### Kirchhoff-Verfahren

Beim Kirchhoff-Verfahren benützt man die Identität 17 zur Berechnung der Lichterregung  $u(\vec{r})$ . Da die Identität 17 zwar **notwendig aber nicht hinreichend** zur Bestimmung der Lichterregung  $u(\vec{r})$  ist, muß das Verfahren festgelegt werden. Diese Festlegung besteht in **Annahmen über die Randwerte** der Lichterregung. Hierzu betrachten wir eine Standardanordnung, wie sie in Fig. 15.2 schematisch dargestellt ist: ein leitender ebener Schirm  $S_2$  erlaubt durch die Öffnung  $S_1$  die Einstrahlung elektromagnetischer Wellen in das Volumen  $V$  (welches eine durch den ebenen Schirm begrenzte Halbkugel sein soll, deren Radius gegen unendlich gehen kann, sodaß praktisch ein Halbraum vorliegt). Die Begrenzungsfläche  $R(V)$  dieses Volumens wird also durch die Öffnung  $S_1$ , den Schirm  $S_2$  und die Halbkugeloberfläche  $S_3$  gebildet.

Die **Kirchhoffschen Randbedingungen** auf dieser Begrenzungsfläche  $R(V)$  werden nun folgendermaßen angenommen:



- auf  $S_1$ :**  $u(\vec{r}')$  und  $\frac{\partial}{\partial n'} u(\vec{r}')$  sollen der einfallenden Lichtwelle entsprechen;
- auf  $S_2$ :**  $u(\vec{r}')$  und  $\frac{\partial}{\partial n'} u(\vec{r}')$  sollen verschwinden, d.h. direkt hinter dem Schirm soll  $u = 0$  und  $\frac{\partial}{\partial n'} u = 0$  gelten;
- auf  $S_3$ :** die im Volumen  $V$  vorhandene Welle soll wie eine auslaufende Kugelwelle abklingen:  
 $u(\vec{r}') \rightarrow f(\theta', \varphi') \frac{e^{ikr'}}{r'}$  für  $r' \rightarrow \infty$ .

**Fig. 15.2** Standardanordnung für die Beugung von Lichtwellen

Bei Verwendung dieser Randbedingungen verschwinden in Gleichung 17 die Oberflächenintegrale über  $S_2$  und  $S_3$  und es verbleibt nur das Oberflächenintegral über die Öffnung  $S_1$ :

$$u(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_1} d^2f' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \left[ \frac{\partial u_o(\vec{r}')}{\partial n'} + ik \frac{\vec{n}' \cdot (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} u_o(\vec{r}') \left( 1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \right] \quad (18)$$

(die Normalenrichtung  $\vec{n}'$  zeigt in das Volumen  $V$ ,  $u_o$  ist die bekannte einfallende Lichterregung).

Damit in der Öffnung  $S_1$  die ungestörte einfallende Lichtwelle vorhanden ist muß die Abmessung der Öffnung  $S_1$  (z.B. Durchmesser  $d$ ) viel größer als die Wellenlänge  $\lambda$  sein:  $d \gg \lambda$ .

Bei der Auswertung von Gleichung 18 unterscheidet man für  $r \gg d \gg \lambda$  die Fälle

- a)  $\frac{r}{d} \gg \frac{d}{\lambda} \gg 1$  (Fraunhofer-Beugung),  
 b)  $\frac{r}{d} \gg \frac{d}{\lambda}$  gilt nicht (Fresnelsche Beugung),

wobei  $r$  die Entfernung des Aufpunktes von dem Mittelpunkt der Öffnung  $S_1$  ist. Wir werden den Fall a) im Kapitel XV.2.C und den Fall b) im Kapitel XV.2.D näher betrachten.

### Reziprozitätssatz der Beugungstheorie

Nehmen wir eine punktförmige Lichtquelle der Stärke 1 an der Stelle  $\vec{R}$  an, so gilt für die ungestörte Lichtwelle (auslaufende Kugelwelle vom Punkt  $\vec{R}$ )

$$u_o(\vec{r}') = \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{r}'|}}{|\vec{R}-\vec{r}'|} \quad (19)$$

Verwenden wir nun noch

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_o(\vec{r}')}{\partial n'} &= \vec{n}' \cdot \vec{\nabla}' u_o(\vec{r}') = \vec{n}' \cdot \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{r}'|}}{|\vec{R}-\vec{r}'|} \left( -ik \frac{\vec{R}-\vec{r}'}{|\vec{R}-\vec{r}'|} + \frac{\vec{R}-\vec{r}'}{|\vec{R}-\vec{r}'|^2} \right) \\ &= -ik \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{r}'|}}{|\vec{R}-\vec{r}'|} \frac{\vec{n}' \cdot (\vec{R}-\vec{r}')}{|\vec{R}-\vec{r}'|} \left( 1 + \frac{i}{k|\vec{R}-\vec{r}'|} \right) \quad , \quad (19a) \end{aligned}$$

so folgt aus Gleichung 18

$$\begin{aligned} u(\vec{r}) &= -\frac{ik}{4\pi} \int_{S_1} d^2f' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{r}'|}}{|\vec{R}-\vec{r}'|} \times \\ &\quad \times \left[ \frac{\vec{n}' \cdot (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \left( 1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) - \frac{\vec{n}' \cdot (\vec{R}-\vec{r}')}{|\vec{R}-\vec{r}'|} \left( 1 + \frac{i}{k|\vec{R}-\vec{r}'|} \right) \right] \quad . \quad (20) \end{aligned}$$

Diese Beziehung zeigt, daß bei Vertauschung von Lichtquelle und Beobachtungspunkt, d.h. von  $\vec{R}$  und  $\vec{r}$ , das Absolutquadrat von  $u$ , d.h. die Lichtintensität, unverändert bleibt. Diese Aussage wird als **Reziprozitätssatz** der Beugungstheorie bezeichnet.

**Kirchhoffsche Beugungsformel**

Ist der Abstand der Lichtquelle von der Beugungsöffnung  $S_1$  viel größer als die Wellenlänge des Lichtes, so kann der zweite Summenterm in dem runden Klammerausdruck vernachlässigt werden:

$$1 + \frac{i}{k|\vec{R} - \vec{r}'|} = 1 + \frac{i}{2\pi} \frac{\lambda}{|\vec{R} - \vec{r}'|} \approx 1 \quad \text{für } |\vec{R} - \vec{r}'| \gg \lambda \quad . \quad (21a)$$

Analoges gilt bei hinreichender Entfernung des Beobachtungspunktes für

$$1 + \frac{i}{k|\vec{r} - \vec{r}'|} = 1 + \frac{i}{2\pi} \frac{\lambda}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx 1 \quad \text{für } |\vec{r} - \vec{r}'| \gg \lambda \quad . \quad (21b)$$

Beachten wir ferner, daß bei der Integration über die Öffnung  $S_1$  die geringfügige Änderung von  $(\vec{R} - \vec{r}')$  bzw.  $(\vec{r} - \vec{r}')$  nur in den Exponentialfunktionen wesentliche Auswirkungen zeigt, so können wir diese Vektoren an den weiteren Stellen ihres Auftretens näherungsweise durch ihren Wert für einen mittleren Punkt der Öffnung  $S_1$  ersetzen. Wählen wir diesen Punkt als **Koordinatenursprung**, so können wir schreiben

$$u(\vec{r}) = -\frac{ik}{4\pi} \frac{1}{rR} \left[ \frac{\vec{n}' \cdot \vec{r}}{r} - \frac{\vec{n}' \cdot \vec{R}}{R} \right] \int_{S_1} d^2f' e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{ik|\vec{R} - \vec{r}'|} \quad . \quad (22)$$

In der Nähe des geometrischen Schattens, wo die Beugungserscheinungen vor allem zu beobachten sind, gilt näherungsweise

$$\frac{\vec{n}' \cdot \vec{r}}{r} \approx -\frac{\vec{n}' \cdot \vec{R}}{R} \quad , \quad (23)$$

sodaß wir die folgende Näherungsgleichung für die Berechnung von Beugungseffekten erhalten:

$$\begin{aligned} u(\vec{r}) &= -\frac{ik}{4\pi} \frac{1}{rR} 2 \frac{\vec{n}' \cdot \vec{r}}{r} \int_{S_1} d^2f' e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{ik|\vec{R} - \vec{r}'|} \\ &= -\frac{i}{\lambda r R} \frac{\vec{n}' \cdot \vec{r}}{r} \int_{S_1} d^2f' e^{ik(|\vec{r} - \vec{r}'| + |\vec{R} - \vec{r}'|)} \quad . \end{aligned} \quad (24)$$

Diese Gleichung wird als **Kirchhoffsche Beugungsformel** bezeichnet.



### XV.2.B. Babinetsches Theorem

Das Babinetsche Theorem betrifft die Beugungsbilder komplementärer Schirme (z.B. Öffnung in Schirm komplementär zu Scheibchen von der Größe der Öffnung in derselben Lage). Wir betrachten hierzu die in Fig. 15.3 skizzierte Anordnung.

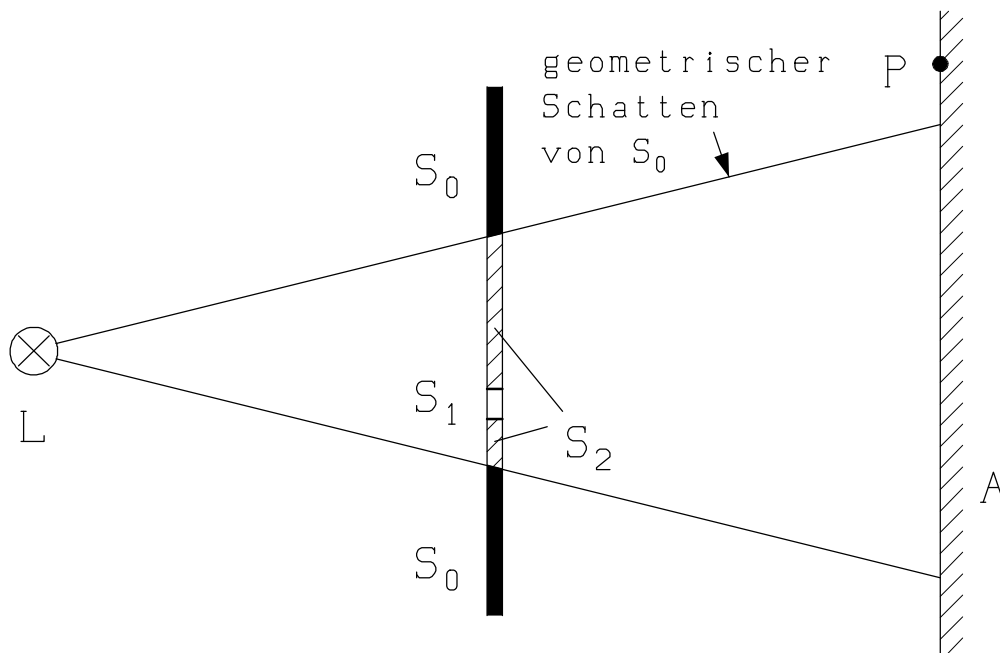
Gegeben sei eine Vorblende  $S_o$  mit so großer Öffnung, daß eine Lichtquelle  $L$  praktisch ohne Beugungserscheinungen eine durch den geometrischen Schatten begrenzte Fläche auf einen Schirm  $A$  beleuchtet. Wir erhalten dann für einen Punkt  $P$  des Schirmes die Lichterregung  $u_o(P)$ . Jetzt geben wir in die große Öffnung einen Schirm  $S_2$  mit einer kleinen Öffnung  $S_1$ . Die Lichterregung im Punkt  $P$  sei dann  $u_1(P)$ . Anschließend geben wir in die große Öffnung den komplementären Schirm hinein (Schirm  $S_1$ , Öffnung  $S_2$ ). Die Lichterregung im Punkt  $P$  sei nun  $u_2(P)$ . Wegen der Additivität der Integrale über die einzelnen Teile der Öffnung gilt

$$u_o(P) = u_1(P) + u_2(P) \quad . \quad (25)$$

Wählt man wie in der Abbildung angedeutet den Punkt  $P$  außerhalb des direkten Bildes der Vorblende  $S_o$ , so gilt

$$u_o(P) = 0 \quad \text{und somit} \quad u_1(P) = -u_2(P) \quad \text{bzw.} \quad |u_1(P)|^2 = |u_2(P)|^2 \quad . \quad (26)$$

Wir erhalten somit die als **Babinetsches Theorem** bezeichnete Aussage, daß komplementäre Schirme im Beugungsbereich dasselbe Beugungsbild liefern.



**Fig. 15.3** Schirmanordnung für das Babinetsche Theorem

### XV.2.C. Fraunhofer-Beugung

Für die Auswertung der Kirchhoffschen Beugungsformel (Gleichung 24) verwenden wir unter der Voraussetzung  $r \gg r'$  die Reihenentwicklung

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}')^2} = \sqrt{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2} = r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r} + \frac{r'^2}{2r} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2}{2r^3} + \dots \quad (27)$$

Eine analoge Entwicklung gilt für  $|\vec{R} - \vec{r}'|$ , wenn die Lichtquelle hinreichend weit entfernt ist.

Die Fraunhofersche Beugung beschreibt nun die Beugungserscheinungen in weiter Entfernung (bei gleichzeitiger weiter Entfernung der Lichtquelle), sodaß es genügt, nur die beiden ersten Terme der obigen Reihenentwicklung bei der Auswertung zu berücksichtigen. Die Verwendung von

$$|\vec{r} - \vec{r}'| + |\vec{R} - \vec{r}'| = r + R - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r} - \frac{\vec{R} \cdot \vec{r}'}{R} \quad (28)$$

ergibt nun die folgende Gleichung für die Fraunhofersche Beugung:

$$u(\vec{r}) = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikr}}{r} \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\vec{n}' \cdot \vec{r}}{r} \int_{S_1} d^2f' e^{-ik\left(\frac{\vec{r}}{r} + \frac{\vec{R}}{R}\right) \cdot \vec{r}'} \quad (29)$$

#### Beugung am Spalt

Betrachten wir den einfachen Fall der Beugung an einem Spalt, wie er in Fig. 15.4 angedeutet ist (Spaltbreite  $a$  in  $x$ -Richtung, keine Abhängigkeiten in  $y$ -Richtung, Normalenrichtung des Spaltes sowie Lagevektor  $\vec{R}$  der Lichtquelle in  $z$ -Richtung), so vereinfacht sich Gleichung 29 zu

$$u(\alpha) = C \int_{-a/2}^{a/2} dx' e^{-ik\alpha x'} \quad \text{mit} \quad \alpha := \frac{x}{r}, \quad (30)$$

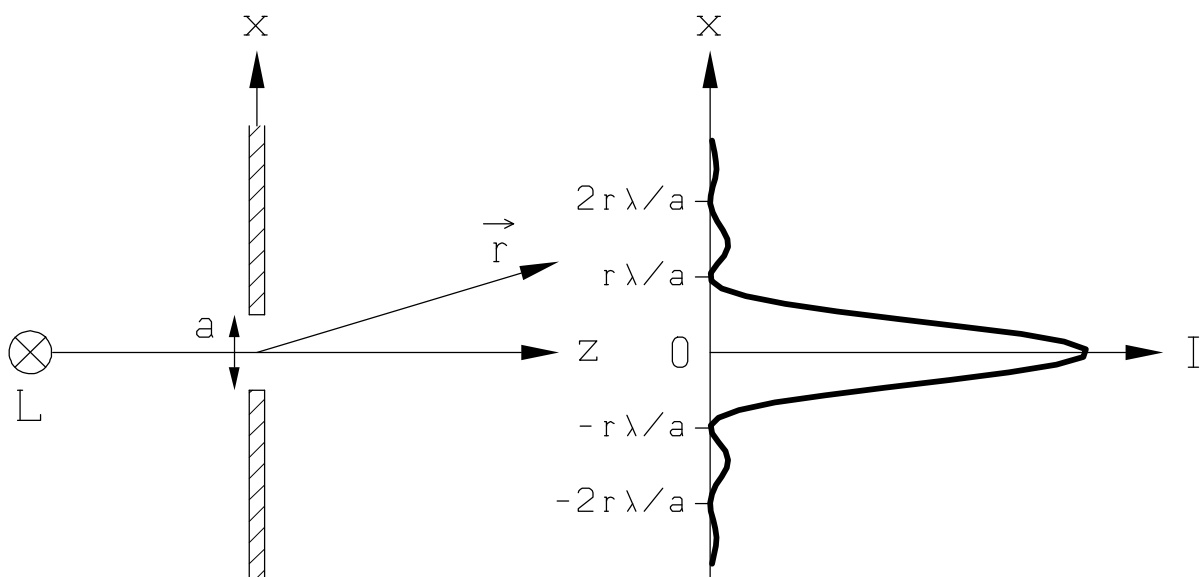


Fig. 15.4 Beugung an einem Spalt

wobei der schwach richtungsabhängige Faktor vor dem Integral konstant gesetzt wurde und in der Konstanten  $C$  enthalten ist. Die Auswertung des verbleibenden Integrales ist elementar und ergibt

$$|u(\alpha)|^2 = C' \left( \frac{\sin \frac{\pi \alpha a}{\lambda}}{\frac{\pi \alpha}{\lambda}} \right)^2 . \quad (31)$$

Diese Intensitätsfunktion ist am rechten Rand von Fig. 15.4 skizziert. Für diese Intensitätsfunktion gilt

$$|u(\alpha)|^2 = 0 \quad \text{für} \quad \frac{x}{r} = \alpha = n \frac{\lambda}{a} \quad , \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad . \quad (31a)$$

Zwischen diesen Nullstellen liegen Maxima (ihre Lage kann in guter Näherung in der Mitte zwischen zwei benachbarten Nullstellen angenommen werden), wobei das Maximum bei  $\alpha = 0$  als **Hauptmaximum** bezeichnet wird und den bei weitem größten Wert besitzt (der Wert des ersten Nebenmaximum beträgt ungefähr 5 % dieses Maximalwertes).

### Fraunhofersche Beugung an einer kreisförmigen Blende

Wir betrachten nun die Beugung an einer kreisförmigen Blende, die sich in der  $x$ - $y$ -Ebene befinden soll und deren Öffnung den Radius  $a$  hat, wobei der Mittelpunkt der Öffnung mit dem Koordinatenursprung zusammenfallen soll. Positionieren wir die Lichtquelle wieder in weiter Entfernung auf der  $z$ -Achse, so können wir wegen der Rotationssymmetrie der gesamten Anordnung den Beobachtungspunkt ohne Beschränkung der Allgemeinheit in die  $x$ - $z$ -Ebene legen. Aus Gleichung 29 erhalten wir nun

$$u(\alpha) = C \int_{r' < a} d^2 f' e^{-ik\alpha x'} \quad \text{mit} \quad \alpha := \frac{x}{r} \quad . \quad (32)$$

Führen wir für die Flächenintegration Polarkoordinaten ein ( $x' = \rho \cos \phi$ ,  $y' = \rho \sin \phi$ ), so können wir die Integration analytisch durchführen:

$$u(\alpha) = C \int_0^a \rho d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi e^{-ik\alpha\rho \cos \phi}}_{2\pi J_0(k\alpha\rho)} \quad . \quad (32a)$$

Die Verwendung der Integralformel

$$\int_0^x d\rho \rho J_0(\rho) = x J_1(x) \quad (32b)$$

ergibt nun die Intensitätsgleichung

$$|u(\alpha)|^2 = C' \left( \frac{J_1\left(\frac{2\pi\alpha a}{\lambda}\right)}{\frac{2\pi\alpha}{\lambda}} \right)^2 , \quad (33)$$

aus der wir ersehen, daß die Minima der Lichtintensität durch die Nullstellen der Besselfunktion  $J_1(x)$  bestimmt sind. Da die erste Nullstelle dieser Besselfunktion bei  $x = 1.22\pi$  liegt, ergibt sich für die Lage des ersten Intensitätsminimum der Wert

$$\frac{x}{r} = \alpha = 0.61 \frac{\lambda}{a} \quad . \quad (33a)$$

### XV.2.D. Fresnelsche Beugung

Bei der Fresnelschen Beugung muß man in der Reihenentwicklung von Gleichung 27 die gestrichelten Koordinaten bis zur zweiten Ordnung berücksichtigen. Somit setzen wir in dieser Näherung

$$|\vec{r} - \vec{r}'| + |\vec{R} - \vec{r}'| = r + R - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r} - \frac{\vec{R} \cdot \vec{r}'}{R} + \frac{r'^2}{2r} + \frac{r'^2}{2R} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2}{2r^3} - \frac{(\vec{R} \cdot \vec{r}')^2}{2R^3} \quad (34)$$

und erhalten aus der Kirchhoffschen Gleichung 24 nun die folgende Gleichung für die Fresnelsche Beugung:

$$u(\vec{r}) = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikr}}{r} \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\vec{n}' \cdot \vec{r}}{r} \int_{S_1} d^2f' e^{-ik\left(\frac{\vec{r}}{r} + \frac{\vec{R}}{R}\right) \cdot \vec{r}'} e^{ik\left(\frac{1}{2r} + \frac{1}{2R}\right) r'^2} e^{-ik\left(\frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2}{2r^3} + \frac{(\vec{R} \cdot \vec{r}')^2}{2R^3}\right)} \quad (35)$$

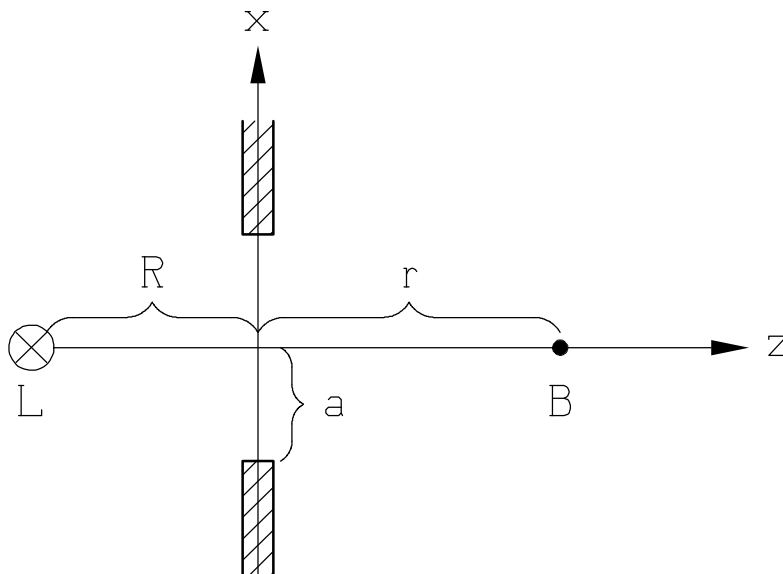
#### Fresnelsche Beugung an einer kreisförmigen Blende

Wir wollen die Fresnelsche Beugung an einer kreisförmigen Blende mit dem Radius  $a$  betrachten, wenn sich sowohl Lichtquelle als auch Beobachtungspunkt auf der Achse der kreisförmigen Blende befinden (siehe Fig. 15.5). Dann vereinfacht sich wegen

$$\vec{r} \cdot \vec{r}' = 0 \quad , \quad \vec{R} \cdot \vec{r}' = 0$$

Gleichung 35 beträchtlich:

$$u(r) = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikr}}{r} \frac{e^{ikR}}{R} \int_{r' < a} d^2f' e^{ik\left(\frac{1}{2r} + \frac{1}{2R}\right) r'^2} \quad (36)$$



**Fig. 15.5** Fresnelsche Beugung an einer kreisförmigen Blende

Diese Lichterregung  $u$  hängt nur mehr von  $r$ , der Entfernung des Beobachtungspunktes auf der  $z$ -Achse vom Mittelpunkt der Blende, und von  $R$ , der Entfernung der Lichtquelle, ab. Zur Auswertung des Integrals in Gleichung 36 führen wir wieder Polarkoordinaten ein ( $x' = \rho \cos \phi$ ,  $y' = \rho \sin \phi$ )

$$u(r) = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikr}}{r} \frac{e^{ikR}}{R} \int_0^a 2\pi \rho \, d\rho \, e^{ik\left(\frac{1}{2r} + \frac{1}{2R}\right)\rho^2} . \quad (36a)$$

Die Variablensubstitution

$$s = k \left( \frac{1}{2r} + \frac{1}{2R} \right) \rho^2 \quad , \quad ds = k \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right) \rho \, d\rho \quad (36b)$$

ergibt nun

$$u(r) = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikr}}{r} \frac{e^{ikR}}{R} \frac{2\pi}{k \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right)} \int_0^{s_a} ds \, e^{is} = -\frac{e^{ik(r+R)}}{r+R} \left( e^{is_a} - 1 \right) \quad (36c)$$

mit

$$s_a = \frac{\pi a^2 (r+R)}{\lambda r R} . \quad (36d)$$

Somit erhalten wir für die Intensität die Gleichung

$$|u(r)|^2 = \left( \frac{2 \sin \frac{\pi a^2 (r+R)}{2\lambda r R}}{r+R} \right)^2 . \quad (37)$$

Wir erkennen aus Gleichung 37, daß bei geeigneter Wahl von  $r$ , d.h. des Beobachtungspunktes auf der Blendenachse, oder mit wachsenden Blendenradius  $a$  die Lichtintensität völlig verschwinden kann. Dieser Fall tritt für

$$\frac{\pi a^2 (r+R)}{2\lambda r R} = n\pi \quad \text{bzw.} \quad a^2 \frac{(r+R)}{rR} = 2n\lambda \quad (38)$$

ein, wobei  $n = 1, 2, 3, \dots$  gilt.

Herrscht somit für einen gewählten Beobachtungspunkt auf der Achse bei einem bestimmten Blendenradius  $a$  maximale Helligkeit, so kann durch eine Vergrößerung der Blendenöffnung wieder Dunkelheit geschaffen werden. Das heißt, daß das von der hinzugefügten Zone stammende Licht in Gegenphase war und zur Auslöschung führte. Deckt man daher in einer Lochblende jene Zonen ab, die zur Schwächung führen, so wird die Helligkeit im Beobachtungspunkt ähnlich steigen, als hätte man eine Sammellinse in die Öffnung gegeben. Ein derartiger Aufbau wird daher als **Fresnelsche Zonenlinse** bezeichnet.