

# ELEKTRODYNAMIK UND RELATIVITÄTSTHEORIE

## **Kapitel 14: Wellen in Materie**

Vorlesung für Studenten der Technischen Physik

Helmut Nowotny

Technische Universität Wien

Institut für Theoretische Physik

7., von A. Rebhan korrigierte Auflage

Wien, Februar 2006

## XIV. WELLEN IN MATERIE

### XIV.1. Wellenausbreitung in materiellen Medien

#### XIV.1.A. Telegraphengleichungen

Haben wir ein homogenes Medium mit den Materialgleichungen

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad , \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad , \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (1)$$

vorliegen, so lauten die Maxwellgleichungen **in ladungsfreien Raumgebieten**

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} \quad , \quad (2a)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} + \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{E} \quad . \quad (2b)$$

Bilden wir bei den Rotorgleichungen nochmals den Rotor, so erhalten wir die folgenden Bestimmungsgleichungen für die elektromagnetischen Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} + \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{E} \right) \quad ,$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \left( \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} \right) \operatorname{rot} \vec{E} = - \left( \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} \right) \frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} \quad ,$$

welche auf Grund der verschwindenden Divergenz dieser Felder auch in der folgenden Form geschrieben werden können:

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) = \left( \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \vec{E}(\vec{r}, t) \quad , \quad (3a)$$

$$\Delta \vec{H}(\vec{r}, t) = \left( \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \vec{H}(\vec{r}, t) \quad . \quad (3b)$$

Diese Gleichungen werden als **Telegraphengleichungen** bezeichnet, da sie die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen entlang von Drähten bestimmen.

#### Isolatoren

Für Isolatoren, bei denen  $\sigma = 0$  gilt, vereinfachen sich diese Telegraphengleichungen zu den **Wellengleichungen**

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(\vec{r}, t) \quad , \quad \Delta \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{H}(\vec{r}, t) \quad , \quad (4)$$

die die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (< c) \quad (5)$$

beschreiben.

### XIV.1.B. Zeitliche Fouriertransformation

Bei Berücksichtigung der Frequenzabhängigkeit der Materialkonstanten gelten die Materialgleichungen 1 nur für die einzelnen Fourierkomponenten der Felder

$$\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \varepsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) \quad , \quad \vec{B}(\vec{r}, \omega) = \mu(\omega) \vec{H}(\vec{r}, \omega) \quad . \quad (6)$$

Die Verwendung der Fourierdarstellung der elektromagnetischen Felder

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega t} \vec{E}(\vec{r}, \omega) \quad , \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega t} \vec{H}(\vec{r}, \omega) \quad (7)$$

ergibt in **ladungsfreien Raumgebieten** die fouriertransformierten Maxwellgleichungen

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, \omega) = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, \omega) = i \frac{\omega \mu}{c} \vec{H}(\vec{r}, \omega) \quad , \quad (8a)$$

$$\operatorname{div} \vec{H}(\vec{r}, \omega) = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}, \omega) = -i \frac{\omega}{c} \underbrace{\left( \varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right)}_{\eta} \vec{E}(\vec{r}, \omega) \quad . \quad (8b)$$

Die in der letzten Gleichung auftretende Größe

$$\eta(\omega) = \varepsilon(\omega) + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \quad (9)$$

wird als **verallgemeinerte Dielektrizitätskonstante** bezeichnet (siehe hierzu auch das Unterkapitel Leiter im Kapitel XI.3.C).

Die fouriertransformierten Telegraphengleichungen ergeben sich wieder durch Rotorbildung zu

$$\left( \Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \mu \eta \right) \vec{E}(\vec{r}, \omega) = 0 \quad , \quad \left( \Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \mu \eta \right) \vec{H}(\vec{r}, \omega) = 0 \quad . \quad (10)$$

### XIV.1.C. Dispersionsrelationen für monochromatische ebene Wellen

Mit dem Ansatz für ebene Wellen

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{E}_o e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} + c.c. \quad , \quad (11a)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{H}_o e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} + c.c. \quad , \quad (11b)$$

der über die Materialgleichungen zu

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \varepsilon(\omega) \vec{E}_o e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} + c.c. \quad , \quad (12a)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \mu(\omega) \vec{H}_o e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} + c.c. \quad (12b)$$

führt, ergeben sich aus den Maxwellgleichungen in ladungsfreien Raumgebieten die folgenden Beziehungen für die Amplituden  $\vec{E}_o$  und  $\vec{H}_o$ :

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{E}_o = 0 \quad , \quad (13a)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{H}_o = 0 \quad , \quad (13b)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad \rightarrow \quad \vec{k} \times \vec{E}_o = \frac{\omega}{c} \mu \vec{H}_o \quad , \quad (13c)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} + \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{E} \quad \rightarrow \quad \vec{k} \times \vec{H}_o = -\frac{\omega}{c} \eta \vec{E}_o \quad . \quad (13d)$$

### Dispersionsrelation

Diese Gleichungen für  $\vec{E}_o$  und  $\vec{H}_o$  können nur dann eine nichttriviale, von Null verschiedene Lösung besitzen, wenn die Beziehung

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \mu \eta \quad (14)$$

zwischen der Wellenzahl  $k$  und der Kreisfrequenz  $\omega$  erfüllt ist. Diese Beziehung wird als **Dispersionsrelation** für ebene Wellen in einem homogenen Material bezeichnet.

Unter Einführung des **verallgemeinerten Brechungsindex**  $p$

$$p(\omega) = \sqrt{\mu(\omega) \eta(\omega)} = n(\omega) + i \kappa(\omega) \quad (n, \kappa \text{ reell}) \quad (15)$$

kann die allgemeine Dispersionsrelation für ebene Wellen in einem Medium in der Form

$$k = \frac{\omega}{c} p(\omega) \quad (16)$$

geschrieben werden. Man beachte, daß in einem Medium  $\vec{E}_o$  und  $\vec{H}_o$  nicht mehr betragsgleich sind und im allgemeinen auch eine verschiedene Phase besitzen.

### Dielektrikum

In einem Dielektrikum mit

$$\sigma = 0 \quad , \quad \varepsilon(\omega) \quad \text{und} \quad \mu(\omega) \quad \text{reell} \quad (17a)$$

ergibt sich ein reeller Brechungsindex  $n$  sowie eine reelle Dispersionsrelation

$$k = \frac{\omega}{c} n(\omega) \quad \text{mit} \quad n(\omega) = \sqrt{\mu(\omega) \varepsilon(\omega)} \quad . \quad (17b)$$

Zwischen der elektrischen Feldstärke und der magnetischen Feldstärke besteht in einem Dielektrikum die Beziehung

$$\vec{H}_o = \frac{c}{\omega} \frac{\vec{k} \times \vec{E}_o}{\mu} = \frac{n}{\mu} \frac{\vec{k} \times \vec{E}_o}{k} \quad \text{bzw.} \quad \vec{B}_o = \frac{c}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_o \quad . \quad (18)$$

Analog wie bei der Wellenausbreitung im Vakuum sind daher die Vektoren  $\vec{E}_o$  und  $\vec{H}_o$  senkrecht zueinander und (als Folge der Gleichungen 13a und 13b) auch senkrecht auf den Wellenzahlvektor  $\vec{k}$  (diese drei Vektoren bilden in der Folge  $\vec{k}$ ,  $\vec{E}_o$  und  $\vec{H}_o$  ein Rechtssystem von orthogonalen Vektoren).

Weitere mögliche Lösungen für ein reelles  $k^2$  können mit einem komplexen Vektor

$$\vec{k} = \vec{k}_r + i \vec{k}_i$$

erhalten werden, wenn gilt

$$\vec{k}_r \cdot \vec{k}_i = 0 \quad \left( \text{folgt aus} \quad \vec{k}^2 = k^2 = k_r^2 - k_i^2 + 2i \vec{k}_r \cdot \vec{k}_i \quad \right) \quad .$$

Diese Lösungen sind inhomogene ebene Wellen und treten z.B. bei der Totalreflexion auf.

## XIV.2. Reflexion und Brechung von Wellen

### XIV.2.A. Reflexionsgesetz, Brechungsgesetz

Wir betrachten nun zwei Dielektrika, welche verschiedene reelle Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon$  und  $\varepsilon'$ , aber die gleichen Werte  $\sigma = 0$  für die elektrische Leitfähigkeit und  $\mu = 1$  für die magnetische Permeabilität besitzen sollen. Diese beiden Dielektrika sollen an der ebenen Grenzfläche  $z = 0$  ( $x$ - $y$ -Ebene) zusammenstoßen, wobei das Material mit der Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon'$  den Halbraum  $z > 0$  und das Material mit der Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon$  den Halbraum  $z < 0$  ausfüllen soll, wie dies in Fig. 14.1 angedeutet ist..

Wir werden nun zeigen, daß der Ansatz einer **einfallenden ebenen Welle**

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{E}_o e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t} + c.c. \quad \text{mit} \quad \vec{E}_o \cdot \vec{k} = 0 \quad (19a)$$

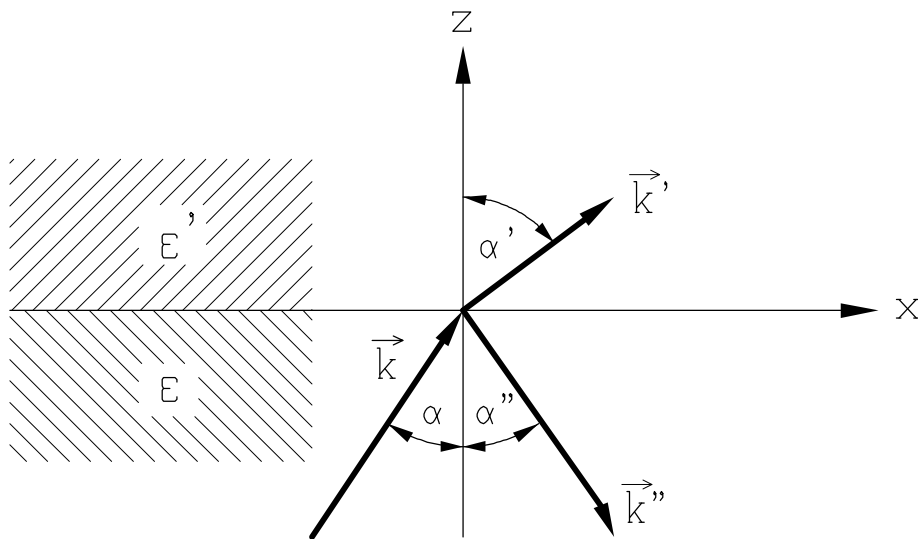
und einer **reflektierten ebenen Welle**

$$\vec{E}''(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{E}_o'' e^{i\vec{k}''\cdot\vec{r} - i\omega'' t} + c.c. \quad \text{mit} \quad \vec{E}_o'' \cdot \vec{k}'' = 0 \quad (19b)$$

im Halbraum des Materials mit der Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon$  zusammen mit einer **gebrochenen ebenen Welle**

$$\vec{E}'(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{E}_o' e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r} - i\omega' t} + c.c. \quad \text{mit} \quad \vec{E}_o' \cdot \vec{k}' = 0 \quad (19c)$$

im Halbraum des Materials mit der Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon'$  ausreicht, die Maxwellgleichungen unter Einschluß der Materialgleichungen sowie die Randbedingungen an der Grenzfläche der beiden Dielektrika zu erfüllen.



**Fig. 14.1** Brechung und Reflexion einer ebenen Welle an der ebenen Grenzfläche zweier Dielektrika

### Maxwellgleichungen und Materialgleichungen

Zur Erfüllung der Maxwellgleichungen unter Einschluß der Materialgleichungen genügt es, wenn die einzelnen ebenen Wellen Dispersionsrelationen entsprechend Gleichung 17b erfüllen und die magnetische Feldstärke zu jeder ebenen Welle entsprechend Gleichung 18 gebildet wird. Im einzelnen bedeutet dies die Erfüllung der Gleichungen

$$k = \frac{\omega}{c} n(\omega) \quad , \quad k'' = \frac{\omega''}{c} n(\omega'') \quad , \quad k' = \frac{\omega'}{c} n'(\omega') \quad (20)$$

mit den Brechungsindizes

$$n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)} \quad , \quad n'(\omega) = \sqrt{\varepsilon'(\omega)} \quad (21)$$

sowie die Berechnung der magnetischen Feldstärken entsprechend den Gleichungen

$$\vec{H}_o = \frac{c}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_o \quad , \quad \vec{H}_o'' = \frac{c}{\omega''} \vec{k}'' \times \vec{E}_o'' \quad , \quad \vec{H}_o' = \frac{c}{\omega'} \vec{k}' \times \vec{E}_o' \quad . \quad (22)$$

### Randbedingungen

Da an der Grenzfläche der beiden Dielektrika keine Oberflächenladungen und keine Oberflächenströme vorhanden sind, ergeben sich die Randbedingungen aus den Gleichungen XI.30 zu

$$\varepsilon \left( \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{E}''(\vec{r}, t) \right) \cdot \vec{e}_z = \varepsilon' \vec{E}'(\vec{r}, t) \cdot \vec{e}_z \quad , \quad (23a)$$

$$\left( \vec{H}(\vec{r}, t) + \vec{H}''(\vec{r}, t) \right) \cdot \vec{e}_z = \vec{H}'(\vec{r}, t) \cdot \vec{e}_z \quad , \quad (23b)$$

$$\left( \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{E}''(\vec{r}, t) \right) \times \vec{e}_z = \vec{E}'(\vec{r}, t) \times \vec{e}_z \quad , \quad (23c)$$

$$\left( \vec{H}(\vec{r}, t) + \vec{H}''(\vec{r}, t) \right) \times \vec{e}_z = \vec{H}'(\vec{r}, t) \times \vec{e}_z \quad . \quad (23d)$$

Da diese Randbedingungen für alle Zeiten  $t$  und für alle Vektoren  $\vec{r}$  in der  $x$ - $y$ -Ebene gelten müssen, erhalten wir aus der entsprechenden Gleichheit der Exponentialfunktionen in den Gleichungen 19a, 19b und 19c Aussagen über die Frequenzen und die Wellenzahlvektoren, die zum Reflexions- und zum Brechungsgesetz führen. Die dann noch verbleibenden Beziehungen zwischen den Amplituden der einzelnen Wellen führen auf die Fresnelschen Formeln.

### Reflexionsgesetz

Damit die Randbedingungen 23a bis 23d für alle Zeiten  $t$  und für alle Vektoren  $\vec{r}$  in der Grenzfläche gelten können, muß die Gleichheit

$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} = e^{i\vec{k}'' \cdot \vec{r} - i\omega'' t} = e^{i\vec{k}' \cdot \vec{r} - i\omega' t} \quad (24)$$

(mit der Einschränkung  $\vec{r} \cdot \vec{e}_z = 0$ ) gelten. Hieraus folgt einerseits

$$\omega = \omega'' = \omega' \quad , \quad (25)$$

d.h. die Gleichheit der Frequenz für einfallende, reflektierte und gebrochene Welle, sowie

$$\vec{k} \times \vec{e}_z = \vec{k}'' \times \vec{e}_z = \vec{k}' \times \vec{e}_z \quad , \quad (26)$$

d.h. die Gleichheit der  $x$ -Komponente und der  $y$ -Komponente des Wellenzahlvektors für einfallende, reflektierte und gebrochene Welle. Die drei Wellenzahlvektoren  $\vec{k}$ ,  $\vec{k}''$  und  $\vec{k}'$  liegen somit in einer Ebene, der sogenannten **Einfallsebene**, welche von dem Wellenzahlvektor  $\vec{k}$  der einfallenden Welle und der Flächennormalen  $\vec{e}_z$  aufgespannt wird. Wir können für diese Einfallsebene ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit der Ergebnisse z.B. die  $x$ - $z$ -Ebene wählen und die drei Wellenzahlvektoren in der Form

$$\vec{k} = k \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{k}'' = k'' \begin{pmatrix} \sin \alpha'' \\ 0 \\ -\cos \alpha'' \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{k}' = k' \begin{pmatrix} \sin \alpha' \\ 0 \\ \cos \alpha' \end{pmatrix} \quad (27)$$

angeben. Die Winkel  $\alpha$ ,  $\alpha''$  und  $\alpha'$  bezeichnen hierbei den Winkel zwischen dem jeweiligen Wellenzahlvektor und der Flächennormalen, wobei die Wellenzahlvektoren von reflektierter Welle und von gebrochener Welle von der Grenzfläche weggerichtet sind. Gleichung 26 kann nun in der Form

$$k \sin \alpha = k'' \sin \alpha'' = k' \sin \alpha' \quad (28)$$

geschrieben werden. Da aus den Gleichungen 25 und 20 die Gleichheit von  $k$  und  $k''$  folgt, ergibt sich aus der ersten Gleichheit von Gleichung 28 das **Reflexionsgesetz**

$$\sin \alpha = \sin \alpha'' \quad \text{bzw.} \quad \alpha = \alpha'' \quad , \quad (29)$$

d.h. die Gleichheit von Einfallswinkel und Reflexionswinkel.

### Brechungsgesetz

Für den Betrag des Wellenzahlvektors der gebrochenen ebenen Welle ergibt sich aus den Gleichungen 25 und 20

$$k' = \frac{\omega}{c} n' = \frac{k}{n} n' = \frac{n'}{n} k \quad , \quad (30)$$

womit aus Gleichung 28 die Beziehung

$$k \sin \alpha = k' \sin \alpha' = \frac{n'}{n} k \sin \alpha' \quad , \quad \text{d.h.} \quad n \sin \alpha = n' \sin \alpha' \quad (31a)$$

folgt, welche das **Brechungsgesetz von Snellius** darstellt. Dieses Brechungsgesetz kann in verschiedenen Formulierungen angegeben werden

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{n'}{n} = \frac{k'}{k} = \frac{v}{v'} = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\sqrt{\varepsilon'}}{\sqrt{\varepsilon}} \quad . \quad (31b)$$

Für  $n' < n$  gilt  $\alpha' > \alpha$ , d.h. beim Übergang in ein optisch dünneres Medium erfolgt eine Brechung vom Lot. Analog erfolgt beim Übergang in ein optisch dichteres Medium eine Brechung zum Lot.

### XIV.2.B. Randbedingungen für die Wellenamplituden

Unter Berücksichtigung von Gleichung 22 sowie der bisherigen Ergebnisse erhalten wir für die Wellenamplituden  $\vec{E}_o$ ,  $\vec{E}''_o$  und  $\vec{E}'_o$  aus Gleichung 23a

$$\varepsilon \left( \vec{E}_o + \vec{E}''_o \right) \cdot \vec{e}_z = \varepsilon' \vec{E}'_o \cdot \vec{e}_z \quad , \quad (32)$$

aus Gleichung 23c

$$\left( \vec{E}_o + \vec{E}''_o \right) \cdot \vec{e}_x = \vec{E}'_o \cdot \vec{e}_x \quad , \quad \left( \vec{E}_o + \vec{E}''_o \right) \cdot \vec{e}_y = \vec{E}'_o \cdot \vec{e}_y \quad , \quad (33)$$

sowie aus den Gleichungen 23b und 23d

$$\vec{k} \times \vec{E}_o + \vec{k}'' \times \vec{E}''_o = \vec{k}' \times \vec{E}'_o \quad . \quad (34)$$

#### Zerlegung in parallele und senkrechte Komponenten

Zerlegen wir den Vektor  $\vec{E}_o$  in eine Komponente  $E_s$  senkrecht zur Einfallsebene und in eine Komponente  $E_p$  parallel zur Einfallsebene entsprechend der Gleichung

$$\vec{E}_o = E_s \vec{e}_y + E_p \frac{\vec{k} \times \vec{e}_y}{k} \quad , \quad (35)$$

so erhalten wir unter Berücksichtigung der Lage von  $\vec{k}$  in der  $x$ - $z$ -Ebene die folgenden Ausdrücke für die in den obigen Gleichungen auftretenden Terme:

$$\vec{E}_o \cdot \vec{e}_x = E_p \frac{\vec{k} \times \vec{e}_y}{k} \cdot \vec{e}_x = E_p \frac{\vec{k}}{k} \cdot (\vec{e}_y \times \vec{e}_x) = -E_p \frac{k_z}{k} = -E_p \cos \alpha \quad , \quad (36a)$$

$$\vec{E}_o \cdot \vec{e}_y = E_s \quad , \quad (36b)$$

$$\left( \vec{k} \times \vec{E}_o \right) \cdot \vec{e}_x = E_s \left( \vec{k} \times \vec{e}_y \right) \cdot \vec{e}_x = E_s \vec{k} \cdot (\vec{e}_y \times \vec{e}_x) = -E_s k_z = -E_s k \cos \alpha \quad , \quad (36c)$$

$$\left( \vec{k} \times \vec{E}_o \right) \cdot \vec{e}_y = E_p \vec{k} \cdot \frac{(\vec{k} \times \vec{e}_y) \times \vec{e}_y}{k} = -E_p k \quad . \quad (36d)$$

Nehmen wir eine der Gleichung 35 entsprechende Zerlegung von  $\vec{E}'_o$  und  $\vec{E}''_o$  vor

$$\vec{E}'_o = E'_s \vec{e}_y + E'_p \frac{\vec{k}' \times \vec{e}_y}{k'} \quad , \quad \vec{E}''_o = E''_s \vec{e}_y + E''_p \frac{\vec{k}'' \times \vec{e}_y}{k''} \quad , \quad (37)$$

so ergeben sich die zu den Gleichungen 36a bis 36d analogen Gleichungen

$$\vec{E}'_o \cdot \vec{e}_x = -E'_p \cos \alpha' \quad , \quad \vec{E}''_o \cdot \vec{e}_x = E''_p \cos \alpha'' \quad , \quad (38a)$$

$$\vec{E}'_o \cdot \vec{e}_y = E'_s \quad , \quad \vec{E}''_o \cdot \vec{e}_y = E''_s \quad , \quad (38b)$$

$$\left( \vec{k}' \times \vec{E}'_o \right) \cdot \vec{e}_x = -E'_s k' \cos \alpha' \quad , \quad \left( \vec{k}'' \times \vec{E}''_o \right) \cdot \vec{e}_x = E''_s k'' \cos \alpha'' \quad , \quad (38c)$$

$$\left( \vec{k}' \times \vec{E}'_o \right) \cdot \vec{e}_y = -E'_p k' \quad , \quad \left( \vec{k}'' \times \vec{E}''_o \right) \cdot \vec{e}_y = -E''_p k'' \quad . \quad (38d)$$

Hiemit können wir die Gleichungen 33 in der Form

$$-E_p \cos \alpha + E''_p \cos \alpha'' = -E'_p \cos \alpha' \quad , \quad (39a)$$

$$E_s + E''_s = E'_s \quad (39b)$$



sowie die  $x$ - und  $y$ -Komponente von Gleichung 34 in der Form

$$-E_s k \cos \alpha + E_s'' k'' \cos \alpha'' = -E_s' k' \cos \alpha' \quad , \quad (40a)$$

$$-E_p k - E_p'' k'' = -E_p' k' \quad , \quad (40b)$$

schreiben. Aus den beiden Gleichungen 39a und 40b können nun die Parallelkomponente  $E_p'$  der gebrochenen ebenen Welle und die Parallelkomponente  $E_p''$  der reflektierten ebenen Welle als Funktion der Parallelkomponente  $E_p$  der einfallenden ebenen Welle ausgerechnet werden. Unabhängig davon können aus den Gleichungen 39b und 40a die Komponenten  $E_s'$  und  $E_s''$  als Funktion von  $E_s$  bestimmt werden.

## XIV.2.C. Fresnelsche Formeln

### Parallelkomponenten

Die Berücksichtigung des Reflexionsgesetzes  $\alpha = \alpha''$ , der Gleichheit von  $k$  und  $k''$  sowie des Brechungsgesetzes  $k \sin \alpha = k' \sin \alpha'$  ergibt aus den Gleichungen 39a und 40b die Beziehungen

$$\left(E_p - E_p''\right) \cos \alpha = E_p' \cos \alpha' \quad , \quad \left(E_p + E_p''\right) \sin \alpha' = E_p' \sin \alpha \quad , \quad (41)$$

welche zu den beiden folgenden Ausdrücken für  $E_p'$  führen:

$$E_p' = \left(E_p - E_p''\right) \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} = \left(E_p + E_p''\right) \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} \quad .$$

Die Auflösung der letzten Gleichheitsbeziehung nach  $E_p''$  ergibt

$$\frac{E_p''}{E_p} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha' \cos \alpha'}{\sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha' \cos \alpha'} = \frac{n' \cos \alpha - n \cos \alpha'}{n' \cos \alpha + n \cos \alpha'} \quad , \quad (42)$$

womit auch  $E_p'$  sofort angegeben werden kann:

$$\frac{E_p'}{E_p} = \left(1 - \frac{E_p''}{E_p}\right) \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} = \frac{2 \sin \alpha' \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha' \cos \alpha'} = \frac{2 n \cos \alpha}{n' \cos \alpha + n \cos \alpha'} \quad . \quad (43)$$

### Normalkomponenten

Die Verwendung des Reflexions- und des Brechungsgesetzes liefert aus den Gleichungen 39b und 40a die Beziehungen

$$E_s + E_s'' = E_s' \quad , \quad (E_s - E_s'') \sin \alpha' \cos \alpha = E_s' \sin \alpha \cos \alpha' \quad , \quad (44)$$

aus denen  $E_s''$

$$\frac{E_s''}{E_s} = \frac{\sin \alpha' \cos \alpha - \sin \alpha \cos \alpha'}{\sin \alpha' \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha'} = \frac{n \cos \alpha - n' \cos \alpha'}{n \cos \alpha + n' \cos \alpha'} \quad (45)$$

sowie  $E_s'$

$$\frac{E_s'}{E_s} = 1 + \frac{E_s''}{E_s} = \frac{2 \sin \alpha' \cos \alpha}{\sin \alpha' \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha'} = \frac{2 n \cos \alpha}{n \cos \alpha + n' \cos \alpha'} \quad (46)$$

berechnet werden können.

### Zusammenfassung der Fresnelschen Formeln

Die Gleichungen 42, 43, 45 und 46 geben die Amplituden von gebrochener und reflektierter ebener Welle in linearer Abhängigkeit von der Amplitude der einfallenden ebenen Welle an und stellen die sogenannten Fresnelschen Formeln dar. Diese Gleichungen können mit Hilfe der Winkelfunktionsbeziehungen

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \alpha') &= \sin \alpha \cos \alpha' \pm \cos \alpha \sin \alpha' \quad , \\ \cos(\alpha \mp \alpha') &= \cos \alpha \cos \alpha' \pm \sin \alpha \sin \alpha' \quad , \\ \sin(\alpha \pm \alpha') \cos(\alpha \mp \alpha') &= \sin \alpha \cos \alpha \pm \sin \alpha' \cos \alpha' \quad ,\end{aligned}$$

für den **gebrochenen Strahl** in der Form

$$\frac{E'_p}{E_p} = \frac{2 \sin \alpha' \cos \alpha}{\sin(\alpha + \alpha') \cos(\alpha - \alpha')} \quad , \quad \frac{E'_s}{E_s} = \frac{2 \sin \alpha' \cos \alpha}{\sin(\alpha' + \alpha)} \quad , \quad (47)$$

und für den **reflektierten Strahl** in der Form

$$\frac{E''_p}{E_p} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \alpha')}{\operatorname{tg}(\alpha + \alpha')} \quad , \quad \frac{E''_s}{E_s} = \frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{\sin(\alpha' + \alpha)} \quad , \quad (48)$$

angegeben werden.

Aus diesen Fresnelschen Formeln ist ersichtlich, daß die Feldstärkeamplituden des gebrochenen Strahles immer das gleiche Vorzeichen wie die Feldstärkeamplituden des einfallenden Strahles aufweisen, während beim reflektierten Strahl immer eine der beiden Komponenten das Vorzeichen ändert. Dies bedeutet für die entsprechende Komponente einen Phasensprung um  $\pi$  (bei Reflexion an einem optisch dichteren Material, d.h. für  $n' > n$  bzw.  $\alpha' < \alpha$ , tritt dieser Phasensprung bei der senkrecht zur Einfallsebene liegenden Komponente auf).

### Reflexions- und Transmissionskoeffizient

Der Reflexionskoeffizient  $R$  bzw. der Transmissionskoeffizient  $T$  sind als Verhältniswerte von reflektierter bzw. durchgelassener zeitlich gemittelter Energie zu einfallender zeitlich gemittelter Energie definiert. Da in unserem Fall die Flächennormale in  $z$ -Richtung zeigt, brauchen wir nur die  $z$ -Komponenten der Poyntingvektoren zu betrachten:

$$R := \frac{\langle -S''_z \rangle}{\langle S_z \rangle} \quad , \quad T := \frac{\langle S'_z \rangle}{\langle S_z \rangle} \quad . \quad (48a)$$

Die Berechnung des Reflexionskoeffizienten ergibt wegen der Gleichheit von Einfallswinkel und Reflexionswinkel sowie der Tatsache, daß beide Strahlen sich im selben Medium bewegen, das einfache Ergebnis

$$R = \frac{|\vec{E}''_o|^2}{|\vec{E}_o|^2} = \frac{|E''_p|^2 + |E''_s|^2}{|E_p|^2 + |E_s|^2} \quad , \quad (48b)$$

welches mit Hilfe der Fresnelschen Formeln weiter ausgewertet werden kann.

Für den Transmissionskoeffizienten  $T$  gilt eine analoge Formel (Ersetzung der doppelt gestrichenen Größen durch einfach gestrichene Größen) nicht, da einfallender und gebrochener Strahl verschiedene Ausbreitungsrichtungen besitzen und sich in verschiedenen Medien ausbreiten. Unter Verwendung der Stetigkeitsbedingungen der Tangentialkomponenten von  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  kann aber die einfache Beziehung

$$\langle S_z \rangle + \langle S''_z \rangle = \langle S'_z \rangle \quad (48c)$$

hergeleitet werden, aus der sofort

$$T = 1 - R \quad (48d)$$

folgt. Es ist meistens sehr zweckmäßig, die Berechnung des Transmissionskoeffizienten mittels dieser Gleichung vorzunehmen.

#### XIV.2.D. Brewster–Winkel, Totalreflexion

Wir wollen nun zwei spezielle Aspekte von Reflexion und Brechung betrachten.

##### Brewster–Winkel

Aus Gleichung 48 ist zu erkennen, daß für

$$\alpha + \alpha' = \frac{\pi}{2} \quad (49)$$

im reflektierten Strahl keine Parallelkomponente  $E''_p$  auftritt (wegen  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \rightarrow \infty$ ). Für diesen als Brewster–Winkel bezeichneten Einfallswinkel  $\alpha_B$  ist somit der reflektierte Strahl (unabhängig von der Polarisation des einfallenden Strahles) senkrecht zur Einfallsebene linear polarisiert. Dieses Verhalten kann man sich zunutze machen, um linear polarisiertes Licht zu erzeugen. Deshalb wird dieser Winkel  $\alpha_B$  auch als Polarisationswinkel bezeichnet.

Zur Bestimmung des Brewster–Winkels verwenden wir Gleichung 49 im Brechungsgesetz 31a

$$n \sin \alpha_B = n' \sin \alpha' = n' \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha_B \right) = n' \cos \alpha_B \quad .$$

Der Brewster–Winkel  $\alpha_B$  wird somit durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha_B = \frac{n'}{n} \quad (50)$$

festgelegt. Diese Gleichung hat für beliebige Materialwerte  $n$  und  $n'$  immer eine Lösung.

Bei einem unter dem Brewster–Winkel  $\alpha_B$  einfallenden Strahl ergibt sich aus Gleichung 49, daß der reflektierte Strahl senkrecht zum gebrochenen Strahl ist. Für einen in der Einfallsebene linear polarisierten einfallenden Strahl kann diese geometrische Beziehung das Verschwinden des reflektierten Strahles erklären.

### Totalreflexion

Haben wir den Übergang eines Lichtstrahls von einem optisch dichteren zu einem optisch dünneren Medium vorliegen ( $n > n'$ ), dann ist der Brechungswinkel  $\alpha'$  größer als der Einfallswinkel  $\alpha$ :  $\alpha' > \alpha$ . Der Grenzfall  $\alpha' = \pi/2$  tritt auf, wenn der Einfallswinkel  $\alpha$  gleich einem Grenzwinkel  $\alpha_g$  wird, welcher der Gleichung

$$n \sin \alpha_g = n' \quad \text{bzw.} \quad \sin \alpha_g = \frac{n'}{n} \quad (51)$$

genügt. Fällt eine Welle unter diesem Winkel ein, so bewegt sich die gebrochene Welle "streifend" entlang der Grenzfläche. Wird der Einfallswinkel noch größer, dann tritt überhaupt kein Licht mehr ein und es kommt zur **Totalreflexion**.

### Verhalten der gebrochenen Welle bei Totalreflexion

Um das Verhalten der gebrochenen Welle bei der Totalreflexion zu beschreiben, beachten wir zuerst, daß für einen Einfallswinkel  $\alpha > \alpha_g$  offenbar

$$\sin \alpha' = \frac{n}{n'} \sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_g} > 1 \quad (52a)$$

gilt. Dies bedeutet, daß  $\alpha'$  ein komplexer Winkel mit rein imaginärem Kosinus ist:

$$\cos \alpha' = i \sqrt{\left(\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_g}\right)^2 - 1} \quad (52b)$$

Die Bedeutung dieser komplexen Größen wird klar, wenn man den Ausbreitungsfaktor der gebrochenen Welle betrachtet:

$$e^{i\vec{k}' \cdot \vec{r}} = e^{izk' \cos \alpha'} e^{ixk' \sin \alpha'} = e^{-zk' \sqrt{\left(\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_g}\right)^2 - 1}} e^{ixk' \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_g}} \quad (53)$$

Dieser Ausdruck zeigt, daß sich die gebrochene Welle längs der Grenzfläche ausbreitet und in Richtung des optisch dünneren Mediums exponentiell abklingt (innerhalb einiger Wellenlängen, wenn der Winkel  $\alpha$  nicht zu knapp beim Grenzwinkel  $\alpha_g$  liegt).

Obwohl in das optisch dünnere Medium elektrische Felder eindringen, ergibt sich durch die Grenzfläche **kein Energiestrom**. Setzt man die Winkelfunktionen des Brechungswinkel  $\alpha'$  aus den Gleichungen 52a und 52b in die Fresnelschen Formeln ein, so ergibt sich für den reflektierten Strahl

$$\left| \frac{E_p''}{E_p} \right| = 1 \quad , \quad \left| \frac{E_s''}{E_s} \right| = 1 \quad , \quad (54)$$

d.h. die Energiedichte des reflektierten Strahls entspricht genau der Energiedichte des einfallenden Strahls.

## XIV.3. Elektrodynamik in Metallen

### XIV.3.A. Ladungen und Wellen in Metallen

Wir betrachten ein homogenes isotropes Metall mit den skalaren Materialkonstanten  $\varepsilon$ ,  $\mu$  und  $\sigma$ . Das elektromagnetische Verhalten dieses Materials wird durch die Maxwellgleichungen

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \varrho \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} \quad , \quad (55a)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} + \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{E} \quad (55b)$$

beschrieben.

#### Zerfließen von Ladungsverteilungen

Bilden wir die Divergenz der Gleichung für  $\operatorname{rot} \vec{H}$  und verwenden dann die Maxwellgleichung für die Divergenz von  $\vec{E}$ , so erhalten wir

$$\underbrace{\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H}}_0 = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E} + \frac{4\pi\sigma}{c} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \left( \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} \varrho \right) \quad , \quad (56)$$

d.h. die folgende ortsunabhängige Bewegungsgleichung für die zeitliche Änderung einer beliebigen Ladungsverteilung  $\varrho(\vec{r}, t)$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho(\vec{r}, t) + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \varrho(\vec{r}, t) = 0 \quad . \quad (57)$$

Diese Gleichung besitzt die Lösung

$$\varrho(\vec{r}, t) = \varrho(\vec{r}, 0) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma} \quad , \quad (58)$$

d.h. sie beschreibt ein zeitlich exponentielles Verschwinden einer vorhandenen Ladungsdichte an jeder Stelle  $\vec{r}$  (im Inneren eines Leiters).

Man beachte die Geschwindigkeit des Zerfließens von Ladungsverteilungen in einem Metall. So gilt z.B. für Kupfer  $\tau/\varepsilon \approx 2 \cdot 10^{-19}$  s, dies ist eine um den Faktor  $10^4$  kürzere Zeit als die Periodendauer von orangen Licht, welche  $2 \cdot 10^{-15}$  s beträgt.

#### Ebene Wellen in Metallen

Der Ansatz für ebene Wellen ist wie in Kapitel XIV.1.C möglich und führt auf die Dispersionsrelation

$$k = \frac{\omega}{c} (n + i\kappa) \quad , \quad (59)$$

wobei der Brechungsindex  $n$  und der Extinktionskoeffizient  $\kappa$  den Real- bzw. den Imaginärteil des verallgemeinerten komplexen Brechungsindex darstellen:

$$n + i\kappa = \sqrt{\mu \left( \varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right)} \quad . \quad (60)$$

### Komplexer Brechungsindex

Betrachten wir in Gleichung 60  $\mu$  und  $\varepsilon$  als reelle Größen (indem wir einen allfälligen Imaginärteil von  $\varepsilon$  zu dem Leitfähigkeitsterm hinzufügen, d.h.  $\sigma$  zu einer reellen Funktion  $\sigma(\omega)$  abändern), so können wir durch Quadrieren von Gleichung 60 die Werte von  $n$  und  $\kappa$  berechnen:

$$n^2 = \frac{1}{2} \mu \left( \sqrt{\varepsilon^2 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)^2} + \varepsilon \right) , \quad (61a)$$

$$\kappa^2 = \frac{1}{2} \mu \left( \sqrt{\varepsilon^2 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)^2} - \varepsilon \right) . \quad (61b)$$

In einem Leiter gilt meistens  $\frac{4\pi\sigma}{\omega} \gg \varepsilon$ , so daß anstelle der Gleichungen 61a und 61b die Näherung

$$n^2 \approx \kappa^2 \approx \frac{2\pi\sigma}{\omega} \mu \quad (62)$$

verwendet werden kann.

### XIV.3.B. Metalloptik

Wir betrachten die ebene Grenzfläche eines Metalls zu Vakuum, auf die eine ebene Welle auftrifft und so zu einer reflektierten und einer gebrochenen ebenen Welle Anlaß gibt. Wir können in gleicher Weise wie in Kapitel XIV.2 vorgehen und die reflektierte und die gebrochene Welle berechnen. Der wesentliche Unterschied tritt beim Wellenzahlvektor  $\vec{k}'$  der gebrochenen Welle auf, da dieser aufgrund der Dispersionsrelation

$$k' = \frac{\omega}{c} (n + i\kappa) \quad (63)$$

nicht mehr reell ist. Zur Erfüllung der Randbedingungen an allen Punkten der Grenzfläche muß

$$k \sin \alpha = k' \sin \alpha' \quad , \quad \text{d.h.} \quad \sin \alpha' = \frac{\sin \alpha}{n + i\kappa} \quad (64a)$$

gelten, woraus

$$\cos \alpha' = \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \alpha}{n + i\kappa}\right)^2} =: q e^{i\gamma} = q (\cos \gamma + i \sin \gamma) \quad (64b)$$

folgt. Hiemit ergibt sich für den Ausbreitungsfaktor der gebrochenen Welle der Ausdruck

$$\begin{aligned} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{r}} &= e^{ixk' \sin \alpha'} e^{izk' \cos \alpha'} \\ &= e^{ix \frac{\omega}{c} (n + i\kappa) \frac{\sin \alpha}{n + i\kappa}} e^{iz \frac{\omega}{c} (n + i\kappa) q (\cos \gamma + i \sin \gamma)} \\ &= e^{i \frac{\omega}{c} (x \sin \alpha + zqn \cos \gamma - zq\kappa \sin \gamma)} e^{-z \frac{\omega}{c} q (n \sin \gamma + \kappa \cos \gamma)} . \end{aligned} \quad (65)$$

Während nun der zweite Faktor in der letzten Gleichungszeile eine exponentielle Dämpfung der gebrochenen Welle in  $z$ -Richtung erkennen läßt, beschreibt der erste Faktor eine Welle, bei der eine Ebene konstanter Phase durch

$$\frac{x}{z} = q \frac{\kappa \sin \gamma - n \cos \gamma}{\sin \alpha} \quad (66a)$$

gegeben ist. Dementsprechend ist die Normalenrichtung dieser Phasenebene durch einen Winkel  $\beta'$  gekennzeichnet, welcher aus der Gleichung

$$\begin{pmatrix} \sin \beta' \\ 0 \\ \cos \beta' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \alpha + q^2 (n \cos \gamma - \kappa \sin \gamma)^2}} \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ 0 \\ qn \cos \gamma - q\kappa \sin \gamma \end{pmatrix} \quad (66b)$$

bestimmt werden muß. Die erste Komponente dieser Vektorgleichung

$$\sin \alpha = \sqrt{\sin^2 \alpha + q^2 (n \cos \gamma - \kappa \sin \gamma)^2} \sin \beta' \quad (67)$$

kann formal als Brechungsgesetz für die Phasenebenen angesehen werden, wobei der Wurzelausdruck einen vom Einfallswinkel  $\alpha$  abhängigen Brechungsindex darstellt.

### Bestimmung von $q$ und $\gamma$

Die in der Definitionsgleichung 64b eingeführten Größen  $q$  und  $\gamma$  können mittels dieser Gleichung in der folgenden Form angegeben werden:

$$q^2 \cos 2\gamma = 1 - \left( \frac{\sin \alpha}{n^2 + \kappa^2} \right)^2 (n^2 - \kappa^2) \quad , \quad (68a)$$

$$q^2 \sin 2\gamma = 2 n \kappa \left( \frac{\sin \alpha}{n^2 + \kappa^2} \right)^2 \quad . \quad (68b)$$

### XIV.3.C. Skineffekt

Haben wir einen von einem Strom  $I$  durchflossenen Leiter vorliegen, so wird infolge des Abklingens des  $\vec{E}$ -Feldes im Inneren des Leiters auch die Stromdichte  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  kleiner werden. Dieser Effekt wird als **Skineffekt** bezeichnet.

#### Zylinderförmiger Leiter

Wir wollen diesen Skineffekt an einem geraden zylinderförmigen Leiter mit dem Radius  $R$  näher betrachten. Wir verwenden hierzu die Telegraphengleichung 3a mit  $\mu = 1$  und vernachlässigen den Term mit  $\varepsilon$ :

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) \quad . \quad (69)$$

Verwenden wir in Zylinderkoordinaten den Ansatz

$$\vec{E}(\rho, \varphi, z, t) = E(\rho) \vec{e}_z e^{-i\omega t} \quad , \quad (70)$$

so ergibt sich aus Gleichung 69 die folgende Differentialgleichung für die Radialfunktion  $E(\rho)$

$$\left( \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \alpha^2 \right) E(\rho) = 0 \quad \text{mit} \quad \alpha^2 = i\omega \frac{4\pi\sigma}{c^2} . \quad (71)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist eine Besselfunktion nullter Ordnung

$$E(\rho) = E_o J_o(\alpha\rho) = E_o J_o\left(\frac{1+i}{\delta} \rho\right) = E(R) \frac{J_o\left(\frac{1+i}{\delta} \rho\right)}{J_o\left(\frac{1+i}{\delta} R\right)} , \quad (72)$$

wobei wir die Eindringtiefe  $\delta$

$$\delta := \frac{1+i}{\alpha} = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}} \quad (73)$$

eingeführt haben und in der letzten Gleichheitsbeziehung als Normierungsgröße das am Drahttrand  $\rho = R$  zugängliche elektrische Feld  $E(R)$  verwendet haben.

Der gesamte durch den Leiter fließende Strom  $I$  ergibt sich zu

$$I = 2\pi\sigma \int_0^R d\rho \rho E(\rho) \quad (74a)$$

und führt zu einem komplexen Widerstand  $Z(\omega)$  des Leiters:

$$Z(\omega) = l \frac{E(R)}{I} . \quad (74b)$$

### Skineffekt für $\delta \ll R$

Wenn die Eindringtiefe  $\delta$  wesentlich kleiner als der Radius des Leiters ist (starker Skin-effekt), dann kann die Näherungslösung

$$E(r) = E_o e^{-i\alpha r} = E_o e^{-i\frac{r}{\delta}} e^{\frac{r}{\delta}} = E(R) e^{i\frac{R-r}{\delta}} e^{-\frac{R-r}{\delta}} , \quad (75)$$

verwendet werden, die den komplexen Leiterwiderstand

$$Z(\omega) = l \frac{1-i}{2\pi\sigma R\delta} \quad (76)$$

ergibt (dies ist ein **induktiver Widerstand**, da wir den Zeitfaktor  $e^{-i\omega t}$  verwendet haben).

Vergleichen wir den wegen des Skineffektes frequenzabhängigen Widerstand  $Z(\omega)$  mit dem Gleichstromwiderstand  $Z(0)$

$$Z(0) = \frac{l}{\sigma \pi R^2} , \quad (77)$$

so können wir die infolge des Skineffektes auftretende Widerstandserhöhung in der Form

$$\frac{Z(\omega)}{Z(0)} = \frac{1-i}{2} \frac{R}{\delta} \quad (78)$$

angeben.

Für Kupfer gilt  $\sigma \approx 5 \cdot 10^{17} \text{ s}^{-1}$ . Hiemit ergibt sich der folgende Zusammenhang zwischen der Frequenz  $f$  in Hertz und der Eindringtiefe  $\delta$  in Zentimeter:  $\delta \approx 7/\sqrt{f}$ . Dies bedeutet für die Frequenzen 50 Hz, 5kHz, 0.5 Mhz und 50 Mhz Eindringtiefen von 1 cm, 1mm, 0.1 mm und 0.01 mm.



## XIV.4. Kristalloptik

### XIV.4.A. Ebene Wellen in Kristallen

Wir betrachten einen homogenen Kristall, bei dem eine tensorielle Beziehung zwischen den Größen  $\vec{D}$  und  $\vec{E}$

$$\vec{D} = \overleftrightarrow{\varepsilon} \cdot \vec{E} \quad \text{bzw.} \quad D_i = \varepsilon_{ij} E_j \quad (79)$$

vorhanden sein soll (die weiteren Materialkonstanten seien durch  $\mu = 1$  und  $\sigma = 0$  gegeben). Der dielektrische Tensor zweiter Stufe  $\varepsilon_{ij}$  ist symmetrisch

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (80)$$

und bewirkt, daß im allgemeinen  $\vec{D}$  nicht parallel zu  $\vec{E}$  ist.

#### Ebene Wellen

Machen wir für die elektromagnetischen Felder innerhalb dieses Kristalls den Wellenansatz

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{E}_o e^{ik\vec{s}\cdot\vec{r} - i\omega t} + c.c. \quad , \quad (81a)$$

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{D}_o e^{ik\vec{s}\cdot\vec{r} - i\omega t} + c.c. \quad , \quad (81b)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{H}_o e^{ik\vec{s}\cdot\vec{r} - i\omega t} + c.c. \quad , \quad (81c)$$

wobei  $\omega$  die Kreisfrequenz der Welle,  $\vec{s}$  die Richtung des Wellenzahlvektors (mit  $\vec{s}^2 = 1$ ) und  $k$  den Betrag des Wellenzahlvektors angeben, so erhalten wir aus den Maxwellgleichungen in ladungsfreien Raumgebieten die folgenden Beziehungen:

$$\text{div } \vec{D} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{s} \cdot \vec{D}_o = 0 \quad , \quad (82a)$$

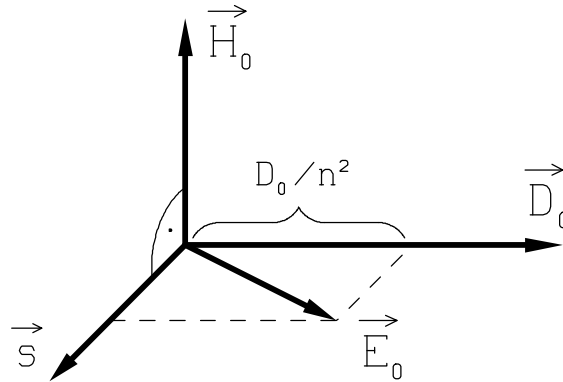
$$\text{div } \vec{H} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{s} \cdot \vec{H}_o = 0 \quad , \quad (82b)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} \quad \rightarrow \quad \vec{s} \times \vec{E}_o = \frac{\omega}{kc} \vec{H}_o \quad , \quad (82c)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \quad \rightarrow \quad \vec{s} \times \vec{H}_o = -\frac{\omega}{kc} \vec{D}_o \quad . \quad (82d)$$

#### Gegenseitige Lage der Amplitudenvektoren

Aus Gleichung 82d folgt  $\vec{D}_o \cdot \vec{H}_o = 0$ , sodaß sich zusammen mit den Gleichungen 82a und 82b wieder die Feststellung treffen läßt, daß die drei Vektoren  $\vec{s}$ ,  $\vec{D}_o$  und  $\vec{H}_o$  in der angegebenen Reihenfolge ein Rechtssystem von orthogonalen Vektoren bilden. Da aus Gleichung 82c die Beziehung  $\vec{H}_o \cdot \vec{E}_o = 0$  folgt, liegt der Vektor  $\vec{E}_o$  in einer Ebene senkrecht zu  $\vec{H}_o$ , d.h. in der von den Vektoren  $\vec{s}$  und  $\vec{D}_o$  aufgespannten Ebene. Der Vektor  $\vec{E}_o$  weist somit im allgemeinen eine Komponente in Richtung  $\vec{s}$  als auch eine zu dieser Richtung senkrechte Komponente auf (diese zu  $\vec{s}$  senkrechte Komponente ist parallel zu  $\vec{D}_o$ ). In Fig. 14.2 sind diese Amplitudenvektoren hinsichtlich ihrer Lage zur Richtung des Wellenzahlvektors graphisch angegeben.



**Fig. 14.2** Lage der Amplitudenvektoren einer ebenen Welle in einem Kristall

Die Berechnung der zu  $\vec{s}$  senkrechten Komponente von  $\vec{E}_o$  kann in einfacher Weise z.B. dadurch erfolgen, daß wir mit beiden Seiten von Gleichung 82c das äußere Produkt mit  $\vec{s}$  bilden und dann Gleichung 82d verwenden:

$$(\vec{s} \times \vec{E}_o) \times \vec{s} = \frac{\omega}{kc} \vec{H}_o \times \vec{s} = \frac{\omega^2}{k^2 c^2} \vec{D}_o \quad . \quad (83)$$

#### XIV.4.B. Fresnelsche Normalengleichung

Verwenden wir die Materialgleichung 79 sowie die Abkürzung

$$n = \frac{kc}{\omega} \quad , \quad (84)$$

so können wir die Gleichung 83 in der Form

$$\vec{E}_o - \vec{s}(\vec{E}_o \cdot \vec{s}) = \frac{1}{n^2} \overleftrightarrow{\varepsilon} \cdot \vec{E}_o \quad (85)$$

schreiben. Wir haben somit ein homogenes lineares Gleichungssystem für die Komponenten von  $\vec{E}_o$  vorliegen, welches nur dann eine von Null verschiedene Lösung besitzt, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet. Dies ergibt eine quadratische Gleichung für  $n^2$  und liefert im allgemeinen zwei verschiedene Lösungen für  $n^2$ . Die Tatsache, daß es in optisch anisotropen Medien zu jeder gewählten Richtung  $\vec{s}$  des Wellenzahlvektors zwei im allgemeinen verschiedene Werte für den Betrag des Wellenzahlvektors gibt, führt zu der als **Doppelbrechung** bezeichneten Erscheinung der Strahlensplattung beim Eintritt einer ebenen Welle in den Kristall. Richtungen  $\vec{s}$ , für die die beiden Lösungen für  $n^2$  zusammenfallen, bezeichnet man als **optische Achsen**.

#### Bestimmungsgleichung für $n^2$

Auf Grund der Symmetrieeigenschaft von Gleichung 80 gibt es immer ein kartesisches Koordinatensystem, das sogenannte **Hauptachsensystem**, in dem der  $\varepsilon$ -Tensor Diagonalform besitzt. In diesem Hauptachsensystem vereinfacht sich die Materialgleichung 79

zu

$$\begin{pmatrix} D_{ox} \\ D_{oy} \\ D_{oz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{ox} \\ E_{oy} \\ E_{oz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x E_{ox} \\ \varepsilon_y E_{oy} \\ \varepsilon_z E_{oz} \end{pmatrix}, \quad (86)$$

sodaß wir die kartesischen Komponenten von Gleichung 85 in der Form

$$D_{oi} \left( \frac{1}{\varepsilon_i} - \frac{1}{n^2} \right) = s_i \left( \vec{E}_o \cdot \vec{s} \right) \quad (i = x, y, z)$$

schreiben können. Hieraus ergeben sich die Komponenten von  $\vec{D}_o$  zu

$$D_{oi} = \frac{s_i}{\frac{1}{\varepsilon_i} - \frac{1}{n^2}} \left( \vec{E}_o \cdot \vec{s} \right) \quad (i = x, y, z) \quad (87)$$

und die Bildung des inneren Produktes dieses Vektors  $\vec{D}_o$  mit dem Richtungsvektor  $\vec{s}$  ergibt auf Grund der Maxwellgleichung 82a die Gleichung

$$\frac{s_x^2}{\frac{1}{\varepsilon_x} - \frac{1}{n^2}} + \frac{s_y^2}{\frac{1}{\varepsilon_y} - \frac{1}{n^2}} + \frac{s_z^2}{\frac{1}{\varepsilon_z} - \frac{1}{n^2}} = 0, \quad (88a)$$

welche als **Fresnelsche Normalengleichung** bezeichnet wird und eine Bestimmungsgleichung für die möglichen Werte von  $n^2$  ist. Eine einfache Umformung dieser Gleichung führt zu

$$n^4 \left( \varepsilon_x s_x^2 + \varepsilon_y s_y^2 + \varepsilon_z s_z^2 \right) - n^2 \left( \varepsilon_y \varepsilon_z (1 - s_x^2) + \varepsilon_z \varepsilon_x (1 - s_y^2) + \varepsilon_x \varepsilon_y (1 - s_z^2) \right) + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z = 0, \quad (88b)$$

also einer quadratischen Gleichung für  $n^2$ , welche die beiden Lösungen  $n_{(1)}^2$  und  $n_{(2)}^2$  besitzt. Entsprechend Gleichung 84 ergeben sich somit die beiden Werte  $k_{(1)}$  und  $k_{(2)}$  für die Beträge von Wellenzahlvektoren, welche beide in die Richtung von  $\vec{s}$  zeigen.

### Polarisationsrichtungen der beiden Wellen zu einer gegebenen Richtung $\vec{s}$

Jede der beiden Lösungen von Gleichung 88b legt nach dem Einsetzen in Gleichung 85 das Verhältnis  $E_{ox}:E_{oy}:E_{oz}$ , d.h. die Richtung von  $\vec{E}_o$  fest. Bei einem reellen  $\varepsilon$ -Tensor erhalten wir so zwei Lösungen  $\vec{E}_o^{(1)}$  und  $\vec{E}_o^{(2)}$ , welche zwei **linear polarisierte Wellen** beschreiben.

Wir wollen nun zeigen, daß die Polarisationsrichtungen dieser beiden linear polarisierten Wellen **senkrecht zueinander** sind, wenn wir zur Kennzeichnung der Polarisationsrichtung die auf den Vektor  $\vec{s}$  senkrechten Vektoren  $\vec{D}_o^{(1)}$  bzw.  $\vec{D}_o^{(2)}$  verwenden. Für diese beiden Vektoren gilt entsprechend Gleichung 85

$$\vec{D}_o^{(1)} = n_{(1)}^2 \left( \vec{E}_o^{(1)} - \vec{s} (\vec{E}_o^{(1)} \cdot \vec{s}) \right), \quad \vec{D}_o^{(2)} = n_{(2)}^2 \left( \vec{E}_o^{(2)} - \vec{s} (\vec{E}_o^{(2)} \cdot \vec{s}) \right). \quad (89)$$

Berechnen wir nun das innere Produkt von  $\vec{D}_o^{(1)}$  mit  $\vec{D}_o^{(2)}$  auf zwei Arten, indem wir einerseits die erste Gleichung mit  $\vec{D}_o^{(2)}$  und andererseits die zweite Gleichung mit  $\vec{D}_o^{(1)}$  multiplizieren, so ergibt sich unter Beachtung von  $\vec{s} \cdot \vec{D}_o^{(i)} = 0$  ( $i = 1, 2$ , siehe Gleichung 82a) die Beziehung

$$\vec{D}_o^{(1)} \cdot \vec{D}_o^{(2)} = n_{(1)}^2 \vec{E}_o^{(1)} \cdot \vec{D}_o^{(2)} = n_{(2)}^2 \vec{E}_o^{(2)} \cdot \vec{D}_o^{(1)}. \quad (90a)$$

Da nun aber die Gleichheit

$$\begin{aligned}\vec{E}_o^{(1)} \cdot \vec{D}_o^{(2)} &= E_{ox}^{(1)} (\varepsilon_x \vec{E}_{ox}^{(2)}) + E_{oy}^{(1)} (\varepsilon_y \vec{E}_{oy}^{(2)}) + E_{oz}^{(1)} (\varepsilon_z \vec{E}_{oz}^{(2)}) \\ &= E_{ox}^{(2)} (\varepsilon_x \vec{E}_{ox}^{(1)}) + E_{oy}^{(2)} (\varepsilon_y \vec{E}_{oy}^{(1)}) + E_{oz}^{(2)} (\varepsilon_z \vec{E}_{oz}^{(1)}) = \vec{E}_o^{(2)} \cdot \vec{D}_o^{(1)}\end{aligned}\quad (90b)$$

gilt, können wir Gleichung 90a auch in der Form

$$n_{(1)}^2 \vec{E}_o^{(1)} \cdot \vec{D}_o^{(2)} = n_{(2)}^2 \vec{E}_o^{(1)} \cdot \vec{D}_o^{(2)} \quad (90c)$$

schreiben, woraus für  $n_{(1)}^2 \neq n_{(2)}^2$  die Beziehungen

$$\vec{E}_o^{(1)} \cdot \vec{D}_o^{(2)} = 0 \quad \text{sowie} \quad \vec{E}_o^{(2)} \cdot \vec{D}_o^{(1)} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{D}_o^{(1)} \cdot \vec{D}_o^{(2)} = 0 \quad (91)$$

folgen. Die letzte Gleichung gibt die zueinander senkrechte Polarisation der beiden linear polarisierten ebenen Wellen an, die zu einer vorgegebenen Richtung  $\vec{s}$  des Wellenzahlvektors gehören.

### XIV.4.C. Doppelbrechung

Wir betrachten nun Wellenzahlvektoren in der  $x$ - $z$ -Ebene des Hauptachsensystems des  $\varepsilon$ -Tensors, wobei wir

$$\varepsilon_x < \varepsilon_y < \varepsilon_z \quad (92)$$

voraussetzen (dies ist durch eine geeignete Bezeichnung des Hauptachsensystems immer möglich).

Die Fresnelsche Normalengleichung 88a vereinfacht sich für diesen Fall wegen

$$s_x = \frac{x}{r}, \quad s_y = 0, \quad s_z = \frac{z}{r} \quad (93)$$

auf die Gleichung

$$\left[ x^2 \left( \frac{1}{\varepsilon_z} - \frac{1}{n^2} \right) + z^2 \left( \frac{1}{\varepsilon_x} - \frac{1}{n^2} \right) \right] \left( \frac{1}{\varepsilon_y} - \frac{1}{n^2} \right) = 0, \quad (94)$$

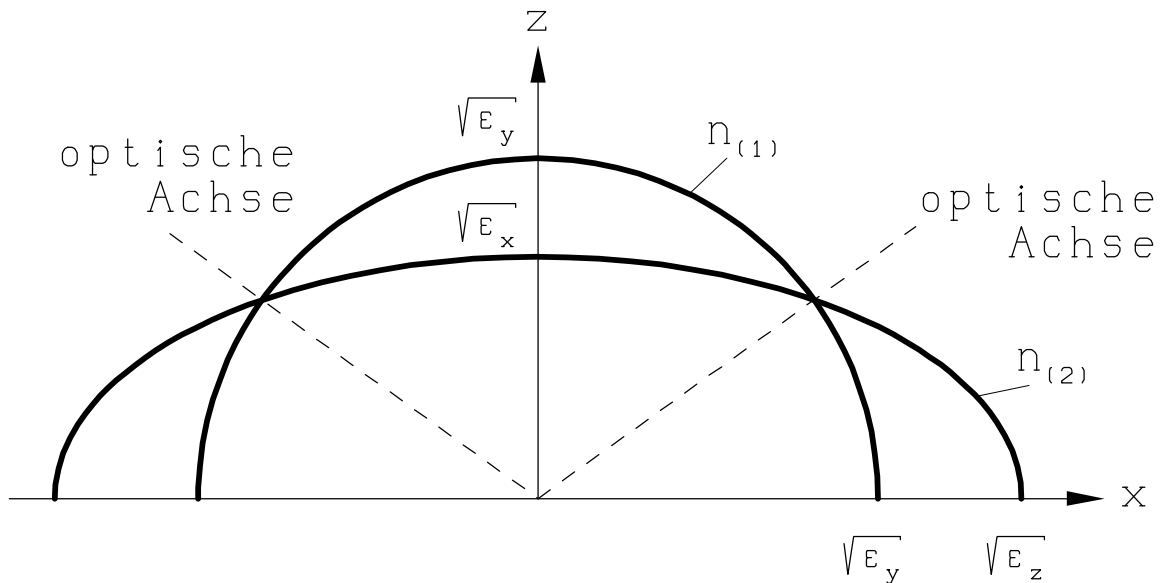
welche die richtungsunabhängige Lösung  $n_{(1)}$

$$\left( \frac{1}{\varepsilon_y} - \frac{1}{n_{(1)}^2} \right) = 0 \quad (94a)$$

sowie die richtungsabhängige Lösung  $n_{(2)}$

$$x^2 \left( \frac{1}{\varepsilon_z} - \frac{1}{n_{(2)}^2} \right) + z^2 \left( \frac{1}{\varepsilon_x} - \frac{1}{n_{(2)}^2} \right) = 0 \quad (94b)$$

besitzt. Diese beiden Lösungen sind in Fig. 14.3 in Form von Wellenzahlflächen (Normalenflächen) angegeben, die sich wegen der Voraussetzung von Gl. 92 in zwei Punkten schneiden und so zu **zwei optischen Achsen** führen. Einachsige Kristalle (mit nur einer



**Fig. 14.3** Wellenzahlflächen eines zweiachsigen Kristalls

optischen Achse) ergeben sich für  $\epsilon_x = \epsilon_y$  oder  $\epsilon_y = \epsilon_z$  (im Falle von  $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z$  haben wir ein isotropes Material vorliegen).

Die **Richtungen der optischen Achsen** können wir leicht aus den Gleichungen 94a und 94b bestimmen:

$$n_{(1)} = n_{(2)} \quad \longrightarrow \quad \frac{z^2}{x^2} = \frac{\frac{1}{\epsilon_y} - \frac{1}{\epsilon_z}}{\frac{1}{\epsilon_x} - \frac{1}{\epsilon_y}} \quad . \quad (95)$$

Jeder ebene Schnitt, der eine optische Achse enthält, heißt Hauptschnitt.

### Reflexion und Doppelbrechung

Wir betrachten eine ebene Welle, welche aus dem Vakuum kommend auf die ebene Grenzfläche eines Kristalls auftrifft (siehe Fig. 14.4). Es kann gezeigt werden, daß man mit dieser **einfallenden ebenen Welle**

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{E}_o e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} + c.c. \quad (96a)$$

und einer **reflektierten ebenen Welle**

$$\vec{E}''(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{E}_o'' e^{i\vec{k}'' \cdot \vec{r} - i\omega'' t} + c.c. \quad (96b)$$

sowie **zwei gebrochenen ebenen Wellen**

$$\vec{E}_{(1)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{E}_{o(1)} e^{i\vec{k}_{(1)} \cdot \vec{r} - i\omega_{(1)} t} + c.c. \quad , \quad \vec{E}_{(2)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{E}_{o(2)} e^{i\vec{k}_{(2)} \cdot \vec{r} - i\omega_{(2)} t} + c.c. \quad (96c)$$

die Randbedingungen an der Grenzfläche des Kristalls erfüllen kann. Da an der Grenzfläche des Kristalls keine Oberflächenladungen und keine Oberflächenströme vorhanden sind, ergeben sich die Randbedingungen zu

$$\left(\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{E}''(\vec{r}, t)\right) \cdot \vec{e}_z = \left(\vec{D}_{(1)}(\vec{r}, t) + \vec{D}_{(2)}(\vec{r}, t)\right) \cdot \vec{e}_z \quad , \quad (97a)$$

$$\left(\vec{H}(\vec{r}, t) + \vec{H}''(\vec{r}, t)\right) \cdot \vec{e}_z = \left(\vec{B}_{(1)}(\vec{r}, t) + \vec{B}_{(2)}(\vec{r}, t)\right) \cdot \vec{e}_z \quad , \quad (97b)$$

$$\left(\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{E}''(\vec{r}, t)\right) \times \vec{e}_z = \left(\vec{E}_{(1)}(\vec{r}, t) + \vec{E}_{(2)}(\vec{r}, t)\right) \times \vec{e}_z \quad , \quad (97c)$$

$$\left(\vec{H}(\vec{r}, t) + \vec{H}''(\vec{r}, t)\right) \times \vec{e}_z = \left(\vec{H}_{(1)}(\vec{r}, t) + \vec{H}_{(2)}(\vec{r}, t)\right) \times \vec{e}_z \quad . \quad (97d)$$

Damit diese Randbedingungen 97a bis 97d für alle Zeiten  $t$  und für alle Vektoren  $\vec{r}$  in der Grenzfläche gelten können, muß die Gleichheit

$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} = e^{i\vec{k}'' \cdot \vec{r} - i\omega'' t} = e^{i\vec{k}_{(1)} \cdot \vec{r} - i\omega_{(1)} t} = e^{i\vec{k}_{(2)} \cdot \vec{r} - i\omega_{(2)} t} \quad (98)$$

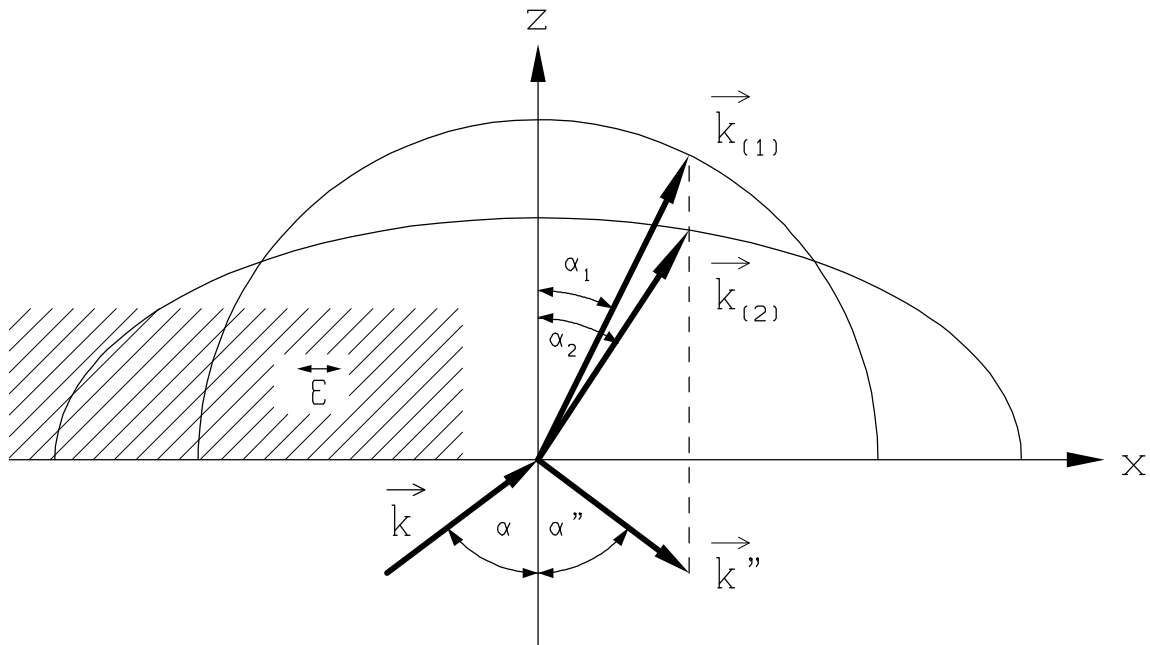
(mit der Einschränkung  $\vec{r} \cdot \vec{e}_z = 0$ ) gelten. Hieraus folgt einerseits

$$\omega = \omega'' = \omega_{(1)} = \omega_{(2)} \quad , \quad (99)$$

d.h. die Gleichheit der Frequenz für einfallende, reflektierte und beide gebrochenen Wellen, sowie

$$\vec{k} \times \vec{e}_z = \vec{k}'' \times \vec{e}_z = \vec{k}_{(1)} \times \vec{e}_z = \vec{k}_{(2)} \times \vec{e}_z \quad , \quad (100)$$

d.h. die Gleichheit der  $x$ -Komponente und der  $y$ -Komponente des Wellenzahlvektors für einfallende, reflektierte und beide gebrochenen Wellen. Die vier Wellenzahlvektoren  $\vec{k}$ ,



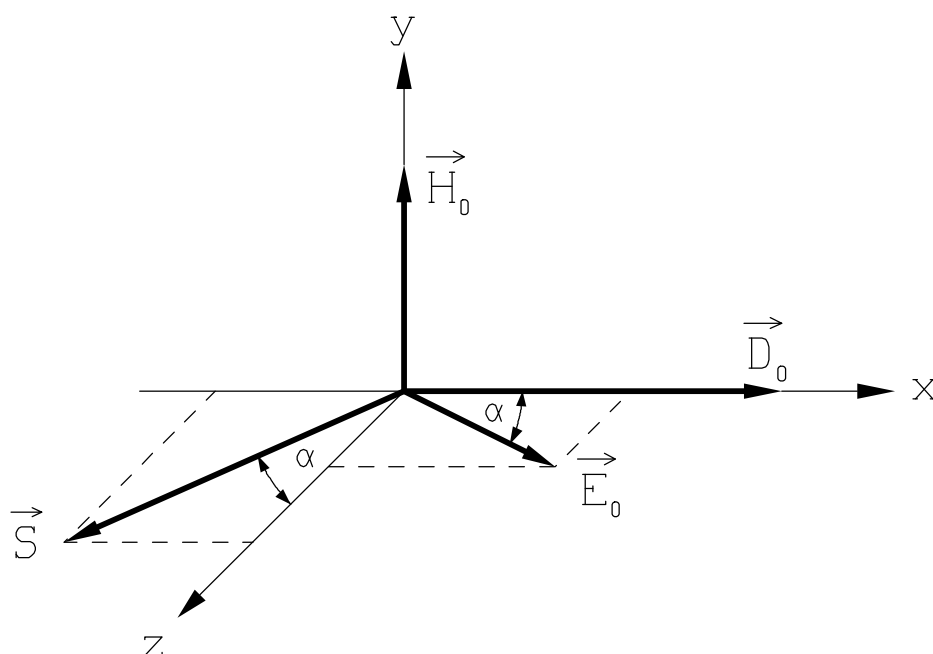
**Fig. 14.4** Doppelbrechung und Reflexion einer ebenen Welle an der ebenen Grenzfläche eines zweiachsigen Kristalls

$\vec{k}''$ ,  $\vec{k}_{(1)}$  und  $\vec{k}_{(2)}$  liegen somit in einer Ebene, der sogenannten **Einfallebene**, welche von dem Wellenzahlvektor  $\vec{k}$  der einfallenden Welle und der Flächennormalen  $\vec{e}_z$  aufgespannt wird.

In Fig. 14.4 ist die Konstruktion der Wellenzahlvektoren für die reflektierte und die beiden gebrochenen Wellen angedeutet. Man erkennt wieder das Reflexionsgesetz in seiner unveränderten Gestalt (Einfallswinkel = Ausfallswinkel). Für die erste gebrochene Welle ergibt sich wegen der Richtungsunabhängigkeit von  $n_{(1)} = \sqrt{\varepsilon_y}$  das gleiche Brechungsgesetz wie bei einem homogenen Medium mit der Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon = \varepsilon_y$ . Man bezeichnet daher diesen gebrochenen Strahl als **ordentlichen Strahl**. Der zweite gebrochene Strahl wird als **außerordentlicher Strahl** bezeichnet. Seine Richtungsberechnung erfordert die implizite Verwendung von Gleichung 94b.

### Brechung von Lichtstrahlen

Noch etwas schwieriger wird die Rechnung, wenn wir tatsächlich einen Lichtstrahl in Form eines kleinen ausgeblendeten Stückes einer ebenen Welle betrachten. Der Energietransport erfolgt in Richtung des Poyntingvektors  $\vec{S}$ , wie dies in Fig. 14.5 angedeutet ist. Diese Richtung stimmt in einem Kristall im allgemeinen nicht mit der Richtung des Wellenzahlvektors überein.



**Fig. 14.5** Lage des Poyntingvektors einer ebenen Welle in einem Kristall