

# ELEKTRODYNAMIK UND RELATIVITÄTSTHEORIE

## **Kapitel 13: Elektrotechnik**

Vorlesung für Studenten der Technischen Physik

Helmut Nowotny

Technische Universität Wien

Institut für Theoretische Physik

7., von A. Rebhan korrigierte Auflage

Wien, Februar 2006

## XIII. ELEKTROTECHNIK

### XIII.1. Elektrodynamik quasistationärer Ströme

#### XIII.1.A. Lineare Stromkreise

Lineare Stromkreise, bei denen die Stromstärke zu einem beliebigen Zeitpunkt an jedem Querschnitt des Leitungsdrahtes dieselbe ist, besitzen eine große praktische Bedeutung. Die Stromstärke ist hierbei an jeder Stelle des Drahtes gleich, kann sich aber zeitlich ändern. Solche Ströme heißen **quasistationär**, falls zusätzlich noch die Bedingung erfüllt ist, daß die Stromfäden zeitlich unveränderliche Linien sind. Die Stromdichte  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  soll also durch den Ansatz

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}) g(t) \quad (1)$$

gegeben sein, wobei  $g(t)$  die ortsunabhängige zeitliche Änderung und  $\vec{j}(\vec{r})$  die zeitlich unveränderlichen Stromfäden beschreibt, für die

$$\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}) = 0 \quad . \quad (2)$$

gelten soll. Diese Beziehung ist mit der Maxwellgleichung für  $\operatorname{rot} \vec{H}$  nur verträglich, wenn wir den Verschiebungsstrom vernachlässigen dürfen:

$$\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) + \underbrace{\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\vec{r}, t)}_{\text{vernachlässigen}} \quad . \quad (3)$$

Für eine zeitlich periodische Lösung der Maxwellgleichungen bedeutet dies aber auf jeden Fall, daß die linearen Abmessungen der Stromkreise wesentlich kleiner sein müssen als die zur Periodendauer gehörige Wellenlänge  $\lambda$  der elektromagnetischen Felder.

#### XIII.1.B. Ohmsches Gesetz

Integrieren wir die Materialgleichung für die elektrische Stromdichte

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (4)$$

über das Leitervolumen, so erhalten wir die Gleichung

$$\underbrace{\int d^2 f \int d\vec{s} \cdot \vec{j}}_{\int ds \int d^2 f \cdot \vec{j}} = \underbrace{\int d^2 f \int d\vec{s} \cdot \sigma \vec{E}}_F \quad , \quad (5a)$$

welche wir in der Form

$$\frac{l}{F\sigma} I = \int d\vec{s} \cdot \vec{E} \quad (5b)$$

schreiben können. Bezeichnen wir mit

$$R := \frac{l}{F \sigma} \quad (6)$$

den **Ohmschen Widerstand** und mit

$$V^{(ein)} := \int d\vec{s} \cdot \vec{E} \quad (7)$$

die gesamte (von außen) **eingepreßte Spannung**, so kann Gleichung 5b in der Form

$$RI = V^{(ein)} \quad (8)$$

geschrieben werden. Dies ist das **Ohmsche Gesetz für stationäre Ströme**.

### Induzierte Spannung

Haben wir zeitabhängige elektromagnetische Felder vorliegen, so erhalten wir aus der Maxwellgleichung

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (9a)$$

durch Integration eine zusätzliche induzierte Spannung  $V^{(ind)}$

$$V^{(ind)} := \oint d\vec{s} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{c} \int d^2\vec{f} \cdot \vec{B} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad , \quad (9b)$$

welche durch die zeitliche Änderung des von dem linearen Stromkreis eingeschlossenen magnetischen Fluß  $\Phi$  gegeben ist. Für lineare Stromkreise ist dieser magnetische Fluß durch die von dem Stromkreis begrenzte Fläche linear mit dem Strom  $I$  verknüpft (siehe Gleichung IV.50)

$$\frac{1}{c} \int d^2\vec{f} \cdot \vec{B} = \frac{1}{c} \Phi = LI \quad . \quad (10)$$

In dieser Gleichung ist  $L$  der Selbstinduktionskoeffizient des Stromkreises, welcher analog zu Gleichung IV.47 durch

$$L = \frac{\mu}{c^2} \oint \oint \frac{d\vec{r} \cdot d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (11)$$

gegeben ist, wenn innerhalb des Stromkreises ein Material mit der Permeabilitätskonstanten  $\mu$  vorhanden ist. Wir können somit die induzierte Spannung  $V^{(ind)}$  in der Form

$$V^{(ind)} := \oint d\vec{s} \cdot \vec{E} = -L \frac{dI}{dt} \quad . \quad (12)$$

schreiben und haben das Ohmsche Gesetz in der Form

$$RI = V^{(ein)} + V^{(ind)} \quad (13)$$

vorliegen.

### Kondensatorspannung

Ist in einem linearen Stromkreis ein Kondensator vorhanden, dann ist der Leitungsstrom nicht geschlossen und wir müssen im Ohmschen Gesetz die Kondensatorspannung explizit hinzufügen. Wir erhalten so die Gleichung

$$RI = V^{(ein)} + V^{(ind)} + \phi_1 - \phi_2 \quad , \quad (14)$$

wobei  $\phi_1$  und  $\phi_2$  die elektrischen Potentiale der Kondensatorplatte 1 und der Kondensatorplatte 2 sind. Diese Potentiale sind mit den elektrischen Ladungen auf den Kondensatorplatten über die lineare Beziehung (siehe Gleichung III.54)

$$Q_2 = C (\phi_2 - \phi_1) \quad (15)$$

verknüpft. Da  $Q_2$  die elektrische Ladung auf der Kondensatorplatte 2 ist, zu der der Strom  $I$  fließt, gilt die Beziehung

$$I = \frac{dQ_2}{dt} = C \frac{d}{dt} (\phi_2 - \phi_1) \quad , \quad (16)$$

aus der durch Zeitintegration der folgende Ausdruck für die Potentialdifferenz zwischen den beiden Kondensatorplatten erhalten werden kann:

$$\phi_1 - \phi_2 = -\frac{1}{C} \int_{t_o}^t dt' I(t') \quad (17)$$

( $t_o$  ist hierbei ein Zeitpunkt, zu dem auf dem Kondensator keine Ladung vorhanden ist).

### Allgemeines Ohmsches Gesetz

Setzen wir nun aus den Gleichungen 12 und 17 in die Gleichung 14 ein, so ergibt sich das **allgemeine Ohmsche Gesetz**

$$RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_o}^t I(t') dt' = V^{(ein)} \quad . \quad (18)$$

Dieses Ohmsche Gesetz besagt in Worten, daß die Summe aller Spannungsabfälle gleich der eingepprägten elektrischen Spannung ist. Die drei Terme der linken Seite von Gleichung 17 beschreiben hierbei den Spannungsabfall an einem Ohmschen Widerstand, den Spannungsabfall an einer Spule und den Spannungsabfall an einem Kondensator.

### XIII.1.C. Beispiel: Kondensatorentladung

Wir wollen nun die Entladung eines geladenen Kondensators mit der Kapazität  $C$  betrachten, der über einen Widerstand  $R$  und eine Spule mit der Induktivität  $L$  kurzgeschlossen wird. Diese Schaltung ist in Fig. 13.1 angegeben. Wir haben in diesem Fall keine eingepprägte äußere Spannung  $V^{(ein)}$  vorliegen, so daß sich Gleichung 18 zu

$$RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int I dt = 0 \quad (19a)$$

vereinfacht. Nach nochmaliger Differentiation nach der Zeit erhalten wir die Differentialgleichung

$$\left[ L \frac{d^2}{dt^2} + R \frac{d}{dt} + \frac{1}{C} \right] I(t) = 0 \quad , \quad (19b)$$

die wir mit dem allgemeinen Ansatz

$$I(t) = I_o e^{-\alpha t} \quad (20)$$

lösen können. Dieser Ansatz führt auf die charakteristische Gleichung

$$L \alpha^2 - R \alpha + \frac{1}{C} = 0 \quad , \quad (21a)$$

welche die beiden folgenden Lösungen für den Parameter  $\alpha$  besitzt:

$$\alpha_{1,2} = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad . \quad (21b)$$

Führen wir zwecks kürzerer Schreibung die Bezeichnungen

$$\delta := \frac{R}{2L} \quad , \quad \omega^2 := \frac{1}{LC} \quad (22)$$

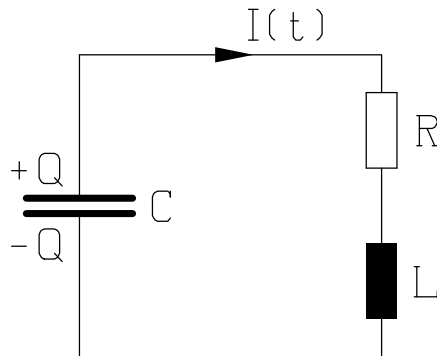
ein, so können wir die allgemeine Lösung von Gleichung 19b für den Fall  $\delta^2 > \omega^2$  in der Form

$$I(t) = e^{-\delta t} \left( I_1 e^{\sqrt{\delta^2 - \omega^2} t} + I_2 e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega^2} t} \right) \quad (23a)$$

und für den Fall  $\delta^2 < \omega^2$  in der Form

$$I(t) = I_p e^{-\delta t} \cos \left( \sqrt{\omega^2 - \delta^2} t + \varphi_p \right) \quad (23b)$$

schreiben. Man bezeichnet den ersten Fall als **aperiodische Entladung** und den zweiten Fall als **periodische Entladung** des Kondensators. Aus diesen Lösungen ist ersichtlich, daß  $\delta$  einer zeitlichen Dämpfungskonstanten und  $\omega$  einer Schwingungskreisfrequenz (bei verschwindender Dämpfung  $\delta$ ) entspricht.



**Fig. 13.1** Kondensatorentladung über die Serienschaltung eines Widerstandes und einer Spule

## XIII.2. Elektrotechnische Stromkreise

### XIII.2.A. Kirchhoffsche Gesetze

#### Periodische Vorgänge

Eine besonders wichtige Rolle spielen in der Elektrotechnik zeitlich periodische Vorgänge, welche sich z.B. bei zeitlich periodischen Quellen nach dem Abklingen allfälliger Einschwingvorgänge einstellen. Solche zeitlich periodische Vorgänge werden in der Elektrotechnik konventionellerweise durch den Ansatz

$$g(t) = e^{i\omega t} \quad (24)$$

für den ortsunabhängigen Zeitfaktor  $g(t)$  von Gleichung 1 beschrieben (man **beachte** das **positive Vorzeichen** des Exponenten). Zusätzlich trifft man die Vereinbarung, daß stets **nur der Realteil** aller Gleichungen die physikalischen Größen beschreibt (der Zeitfaktor  $e^{i\omega t}$  wird meistens nicht explizit angegeben und nur bei Bedarf hinzugefügt).

Für die in Gleichung 24 angegebene Zeitabhängigkeit ergeben sich im allgemeinen Ohmschen Gesetz die folgenden Vereinfachungen:

$$L \frac{dI}{dt} \quad \text{wird zu} \quad i\omega L I \quad , \quad \frac{1}{C} \int I dt \quad \text{wird zu} \quad \frac{1}{i\omega C} I \quad . \quad (25)$$

Dies bedeutet, daß der frequenzabhängige **induktive Widerstand** einer Spule durch  $i\omega L$  und der frequenzabhängige **kapazitive Widerstand** eines Kondensators durch  $1/(i\omega C)$  gegeben ist.

#### Kirchhoffsche Gesetze

Zur Analyse passiver linearer Netzwerke, welche aus einer beliebigen Zusammenschaltung von Widerständen, Spulen und Kondensatoren bestehen, genügen immer die folgenden beiden Kirchhoffschen Gesetze:

1. Die Summe aller zu einem Stromknoten fließender Ströme ist Null (**Knotensatz**).
2. In jeder geschlossenen Stromschleife ist die Summe der Spannungsabfälle gleich der Summe der eingepprägten Spannungen (**Maschensatz**).

In Gleichungsform lauten diese beiden Kirchhoffschen Gesetze

$$\sum_n I_n = 0 \quad \text{für jeden Stromknoten} \quad (26)$$

und

$$\sum_n Z_n I_n = \sum V^{(ein)} \quad \text{für jede Stromschleife} \quad , \quad (27)$$

wobei für die Widerstände  $Z_n$  die folgenden Werte zu verwenden sind:

$$Z_n = \begin{cases} R & \text{für einen Widerstand,} \\ i\omega L & \text{für eine Spule,} \\ -i\frac{1}{\omega C} & \text{für einen Kondensator.} \end{cases} \quad (28)$$

### Netzwerk mit zwei Zuführungen

Das elektrische Verhalten eines linearen Netzwerkes mit zwei Zuführungen kann immer durch die Angabe eines frequenzabhängigen komplexen Gesamtwiderstandes  $Z(\omega)$  beschrieben werden, welcher das Verhältnis zwischen der an diesen Zuführungen angelegten elektrischen Spannung und dem zufließenden Strom angibt:

$$V^{(ein)} = Z(\omega) I \quad \text{mit} \quad Z(\omega) = R(\omega) + i X(\omega) \quad . \quad (29)$$

Die Darstellung von  $Z(\omega)$  in einer komplexen  $Z$ -Ebene wird als **Ortskurve** bezeichnet ( $\omega$  ist der Kurvenparameter dieser Darstellung).

Man bezeichnet  $Z$  auch als Impedanz und den Betrag der Impedanz, also  $|Z|$ , als Scheinwiderstand. Die Komponente  $R$  wird als elektrischer Widerstand, Wirkwiderstand oder Resistanz, die Komponente  $X$  als Blindwiderstand oder Reaktanz bezeichnet.

Die Umkehrung der Beziehung zwischen eingprägter Spannung und Strom führt auf den komplexen Leitwert  $Y(\omega)$ :

$$I = Y(\omega) V^{(ein)} \quad \text{mit} \quad Y(\omega) = \frac{1}{Z(\omega)} = G(\omega) + i B(\omega) \quad . \quad (29a)$$

Man bezeichnet  $Y$  auch als Admittanz und den Betrag der Admittanz, also  $|Y|$ , als Scheinleitwert. Die Komponente  $G$  wird als elektrischer Leitwert, Wirkleitwert oder Konduktanz, die Komponente  $B$  als Blindleitwert oder Suszeptanz bezeichnet.

### XIII.2.B. Elektrische Leistung

Die zugeführte elektrische Leistung  $P$  ist durch (siehe hierzu auch Gleichung II.44b)

$$P = \int d^3r \vec{j} \cdot \vec{E} = \int d^2f \vec{j} \cdot \int d\vec{s} \cdot \vec{E} = I V^{(ein)} \quad (30)$$

gegeben. Wir können diese Gleichung unter Verwendung der Gleichungen 18 und 17

$$V^{(ein)} = R I + L \frac{dI}{dt} + (\phi_2 - \phi_1) \quad (31a)$$

sowie der Gleichung 16

$$I = C \frac{d(\phi_2 - \phi_1)}{dt} \quad (31b)$$

in der Form

$$\begin{aligned} P &= I V^{(ein)} = R I^2 + L I \frac{dI}{dt} + C (\phi_2 - \phi_1) \frac{d(\phi_2 - \phi_1)}{dt} \\ &= R I^2 + \underbrace{\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} L I^2 + \frac{1}{2} C (\phi_2 - \phi_1)^2 \right]}_{\text{gespeicherte Feldenergie}} \end{aligned} \quad (32)$$

schreiben, d.h. die zugeführte elektrische Leistung entspricht der Jouleschen Verlustwärme in den Ohmschen Widerständen  $R$  sowie der zeitlichen Änderung der gespeicherten Feldenergie (siehe hierzu die Gleichungen III.53 und IV.48).

### Wirkleistung und Blindleistung

Stellen wir den Strom  $I$  und die Spannung  $V^{(ein)}$  durch komplexe Größen dar

$$I(t) = I_o e^{i\omega t} \quad , \quad V^{(ein)}(t) = V_o e^{i\varphi} e^{i\omega t} \quad , \quad (33)$$

so haben wir bei der Leistungsberechnung zuerst den Realteil dieser beiden Größen zu nehmen und dann die Produktbildung durchzuführen:

$$P(t) = I_o \cos \omega t \ V_o \cos (\omega t + \varphi) = I_o V_o \cos \varphi \cos^2 \omega t - I_o V_o \sin \varphi \sin \omega t \cos \omega t \quad . \quad (34)$$

Betrachten wir die über eine Periodendauer  $T = 2\pi/\omega$  gemittelte zugeführte elektrische Leistung

$$\langle P \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T dt P(t) \quad , \quad (35)$$

so erkennen wir, daß nur der erste Term der rechten Seite von Gleichung 34 einen Beitrag zu diesem Mittelwert liefert (der zeitliche Mittelwert von  $\cos^2 \omega t$  beträgt  $1/2$ ). Somit ergibt sich für die tatsächlich zugeführte Leistung, welche auch als **Wirkleistung**  $P_{wirk}$  bezeichnet wird, die Beziehung

$$P_{wirk} := \langle P \rangle = \frac{1}{2} I_o V_o \cos \varphi \quad . \quad (36)$$

Bezeichnet man die Wurzel aus dem zeitlichen Mittelwert von  $I^2$  als effektive Stromstärke  $I_{\text{eff}}$  und analog die Wurzel aus dem zeitlichen Mittelwert von  $V^2$  als effektive Spannung  $V_{\text{eff}}$

$$I_{\text{eff}} := \sqrt{\langle I^2 \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_o \quad , \quad V_{\text{eff}} := \sqrt{\langle V^{(ein)2} \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_o \quad , \quad (37)$$

so kann die Wirkleistung auch als

$$P_{wirk} = I_{\text{eff}} V_{\text{eff}} \cos \varphi \quad (38)$$

geschrieben werden. Der zweite Term auf der rechten Seite von Gleichung 34 beschreibt eine zeitlich zwischen der Spannungsquelle und dem Netzwerk hin- und herbewegte Energie, welche als **Blind- oder Scheinleistung**  $P_{blind}$

$$P_{blind} = I_{\text{eff}} V_{\text{eff}} \sin \varphi \quad (39)$$

bezeichnet wird. Da diese Blindleistung keiner tatsächlichen Energieübertragung entspricht, sondern nur zu Leitungsverlusten führt, versucht man in vielen technischen Anwendungen diese Blindleistung möglichst klein zu halten.

Die Aufteilung der gesamten Leistung in Wirkleistung und Blindleistung wird durch den Phasenwinkel  $\varphi$  bestimmt, welcher gemäß den Gleichungen 33 die Phasenverschiebung zwischen dem Strom und der eingepprägten Spannung angibt. Diese Phasenverschiebung wird entsprechend Gleichung 29 durch den komplexen Gesamtwiderstand  $Z = R + iX$  bestimmt. Die Verwendung dieser Gleichung ergibt für den Phasenwinkel

$$\text{tg } \varphi = \frac{X}{R} \quad , \quad \varphi = \text{arc tg } \frac{X}{R} \quad (40)$$



und für die Leistungen

$$P_{\text{wirk}} = \frac{1}{2} R I_o^2 = R I_{\text{eff}}^2 \quad , \quad (41a)$$

$$P_{\text{blind}} = \frac{1}{2} X I_o^2 = X I_{\text{eff}}^2 \quad . \quad (41b)$$

### XIII.2.C. Beispiel: Parallelresonanzkreis

Wir betrachten ein Netzwerk, bei dem zwischen den beiden Eingangsklemmen sowohl ein Kondensator mit der Kapazität  $C$  als auch die Serienschaltung eines Widerstandes  $R$  und einer Spule mit der Induktivität  $L$  vorhanden ist. Dieser Parallelresonanzkreis mit äußerer eingepprägter periodischer Spannung ist in Fig. 13.2 dargestellt. Der gesamte zufließende Strom  $I$  teilt sich in den Strom  $I_1$ , welcher über den Kondensator fließt, und den Strom  $I_2$ , welcher über den Zweig mit dem Widerstand und der Spule fließt.

Wenden wir nun die Kirchhoffschen Gesetze auf dieses Netzwerk an, so ergibt das erste Kirchhoffsche Gesetz die Gleichung

$$I = I_1 + I_2 \quad , \quad (42)$$

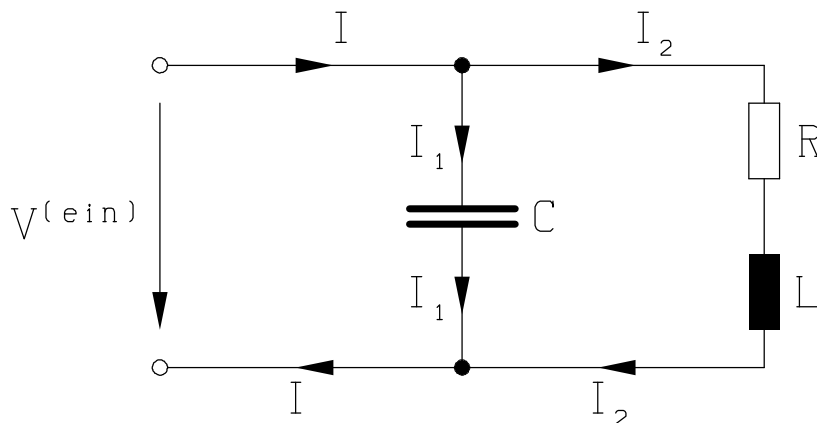
während das zweite Kirchhoffsche Gesetz auf drei geschlossene Stromkreise (Spannungsquelle–Kondensator, Spannungsquelle–Spule–Widerstand sowie Spule–Widerstand–Kondensator) angewendet werden kann:

$$V^{(\text{ein})} = -i \frac{1}{\omega C} I_1 \quad , \quad (43a)$$

$$V^{(\text{ein})} = R I_2 + i \omega L I_2 \quad , \quad (43b)$$

$$0 = R I_2 + i \omega L I_2 + i \frac{1}{\omega C} I_1 \quad . \quad (43c)$$

Diese Gleichungen sind nicht unabhängig voneinander und es ist eine Frage der Zweckmässigkeit, welche Gleichungen man verwendet (für die Berechnung der drei unbekannt



**Fig. 13.2** Parallelresonanzkreis mit äußerer eingepprägter periodischer Spannung

Ströme  $I$ ,  $I_1$  und  $I_2$  benötigt man nur drei Gleichungen). Setzt man z.B.  $I_2 = I - I_1$  in die letzte Gleichung ein, so ergibt sich der folgende Zusammenhang zwischen den Strömen  $I$  und  $I_1$ :

$$(R + i\omega L)I = \left(R + i\omega L - i\frac{1}{\omega C}\right)I_1 \quad .$$

Hiemit ergibt sich aus Gleichung 43a der folgende Zusammenhang zwischen der angelegten Spannung  $V^{(ein)}$  und dem Gesamtstrom  $I$ :

$$V^{(ein)} = \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{R+i\omega L}} I \quad . \quad (44)$$

Der frequenzabhängige Gesamtwiderstand  $Z(\omega)$  dieses Parallelresonanzkreises ist somit durch den Ausdruck

$$Z(\omega) = \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{R+i\omega L}} = \frac{R + i\omega L \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_o^2} - \tau^2\omega_o^2\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_o^2}\right)^2 + \tau^2\omega^2} \quad (45a)$$

gegeben, wobei wir die Abkürzungen

$$\omega_o^2 := \frac{1}{LC} \quad , \quad \tau := RC \quad (45b)$$

verwendet haben. Die Admittanz des Parallelresonanzkreises ist durch

$$Y(\omega) = i\omega C + \frac{1}{R + i\omega L} = \frac{R - i\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} + i\omega C \quad (46)$$

gegeben.

### XIII.3. Elektromagnetische Zweipole

#### XIII.3.A. Energiebilanz für lineare Medien

##### Periodische Vorgänge

Wir betrachten nun mit der Kreisfrequenz  $\omega$  periodische elektromagnetische Felder und machen hierfür entsprechend der in der Elektrotechnik üblichen Konvention (siehe Kapitel XIII.2.A.) den Ansatz

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re \vec{E}(\vec{r}) e^{i\omega t} = \frac{1}{2} [\vec{E}(\vec{r}) e^{i\omega t} + \vec{E}(\vec{r})^* e^{-i\omega t}] \quad (47)$$

und analog für alle anderen zeitabhängigen physikalischen Größen. Das Feld  $\vec{E}(\vec{r})$  ist im allgemeinen komplex und sein Betrag ebenso wie seine Phase ortsabhängig.

Für elektromagnetische Felder mit harmonischer Zeitabhängigkeit gehen die Maxwell'schen Gleichungen XI.24 über in

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) &= 4\pi \rho(\vec{r}) & , & & \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) - i \frac{\omega}{c} \vec{D}(\vec{r}) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}) & , \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) &= 0 & , & & \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) + i \frac{\omega}{c} \vec{B}(\vec{r}) &= 0 & . \end{aligned} \quad (48)$$

Dabei sind sämtliche Größen komplexe Funktionen von  $\vec{r}$ , die entsprechend der rechten Seite von Gleichung 47 definiert sind.

Für Produkte wie  $\vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)$  gilt bei periodischer Zeitabhängigkeit (siehe hierzu auch Kapitel V.3.A.)

$$\begin{aligned} \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4} [\vec{j}(\vec{r}) e^{i\omega t} + \vec{j}(\vec{r})^* e^{-i\omega t}] [\vec{E}(\vec{r}) e^{i\omega t} + \vec{E}(\vec{r})^* e^{-i\omega t}] \\ &= \frac{1}{2} \Re [\vec{j}(\vec{r})^* \cdot \vec{E}(\vec{r}) + \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) e^{2i\omega t}] \end{aligned} \quad (49)$$

Das zeitliche Mittel von Produkten komplexer Variablen erhält man also, indem man die Hälfte des Realteils des Produktes der einen Größe mit dem Konjugiertkomplexen der anderen bildet.

##### Poyntingscher Satz

Entsprechend Gleichung 49 betrachten wir jetzt das Volumenintegral

$$\frac{1}{2} \int_V \vec{j}(\vec{r})^* \cdot \vec{E}(\vec{r}) d^3r \quad , \quad (50)$$

dessen Realteil das zeitliche Mittel der von den Feldern im Volumen  $V$  geleisteten Arbeit darstellt. In Analogie zu den Rechenschritten in Kapitel XI.4.A. erhalten wir nun unter Verwendung der Maxwellgleichungen 48 zuerst

$$\frac{1}{2} \int_V \vec{j}(\vec{r})^* \cdot \vec{E}(\vec{r}) d^3r = \frac{c}{8\pi} \int_V \vec{E}(\vec{r}) \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r})^* + i \frac{\omega}{c} \vec{D}(\vec{r})^*] d^3r \quad (51)$$

und mittels der Vektoridentität

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r})^*) &= -\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r})^*) + \vec{H}(\vec{r})^* \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r})) \\ &= -\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r})^*) - i \frac{\omega}{c} \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{H}(\vec{r})^*\end{aligned}\quad (52)$$

(wir haben hierbei in der zweiten Zeile das Faradaysche Induktionsgesetz verwendet) ergibt sich der Ausdruck

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int_V \vec{j}(\vec{r})^* \cdot \vec{E}(\vec{r}) \, d^3r &= \\ \frac{c}{8\pi} \int_V \left[ -\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r})^*) + i \frac{\omega}{c} (\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{D}(\vec{r})^* - \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{H}(\vec{r})^*) \right] d^3r\end{aligned}\quad (53)$$

Definieren wir nun den **komplexen Poyntingschen Vektor**

$$\vec{S}(\vec{r}) = \frac{c}{8\pi} (\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r})^*) \quad (54)$$

und die komplexen elektrischen und magnetischen Energiedichten für Felder mit harmonischer Zeitabhängigkeit

$$w_e(\vec{r}) = \frac{1}{16\pi} (\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{D}(\vec{r})^*) \quad , \quad w_m(\vec{r}) = \frac{1}{16\pi} (\vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{H}(\vec{r})^*) \quad , \quad (55)$$

so läßt sich Gleichung 53 in der Form

$$\frac{1}{2} \int_V \vec{j}(\vec{r})^* \cdot \vec{E}(\vec{r}) \, d^3r - 2i\omega \int_V (w_e(\vec{r}) - w_m(\vec{r})) \, d^3r + \oint_F \vec{S}(\vec{r}) \cdot d^2\vec{f} = 0 \quad (56)$$

schreiben.  $F$  ist hierbei die das Volumen  $V$  einschließende Oberfläche und  $d^2\vec{f}$  zeigt aus dem Volumen (siehe auch Fig. 13.3). Die Gleichung 56 ist die **komplexe Version des Poyntingschen Satzes** für Felder mit harmonischer Zeitabhängigkeit. Der Realteil dieser Gleichung beschreibt die Energieerhaltung für die zeitgemittelten Felder, während der Imaginärteil die Blindleistung mit dem sich ändernden Fluß verknüpft.

Sind die Volumenintegrale der Energiedichten  $w_e$  und  $w_m$  reell, wie es bei verlustfreien Dielektrika und idealen Leitern der Fall ist, dann liefert der Realteil von Gleichung 56 die Beziehung:

$$\int_V \frac{1}{2} \Re (\vec{j}(\vec{r})^* \cdot \vec{E}(\vec{r})) \, d^3r + \oint_F (\Re \vec{S}(\vec{r})) \cdot d^2\vec{f} = 0 \quad . \quad (57)$$

Hiernach ist also das stationäre zeitliche Mittel der von den Feldern an den Quellen in  $V$  geleisteten Arbeit gleich dem Leistungsstrom, der durch die Begrenzungsfläche  $F$  in das Volumen **eintritt** und sich aus der Normalkomponente von  $\Re \vec{S}$  berechnet. Treten im betrachteten System Verluste auf, so hat der zweite Term der linken Seite von Gleichung 56 einen nichtverschwindenden Realteil, der diesen Verlusten Rechnung trägt.

### XIII.3.B. Eingangsimpedanz eines linearen Zweipols

#### Linearer Zweipol

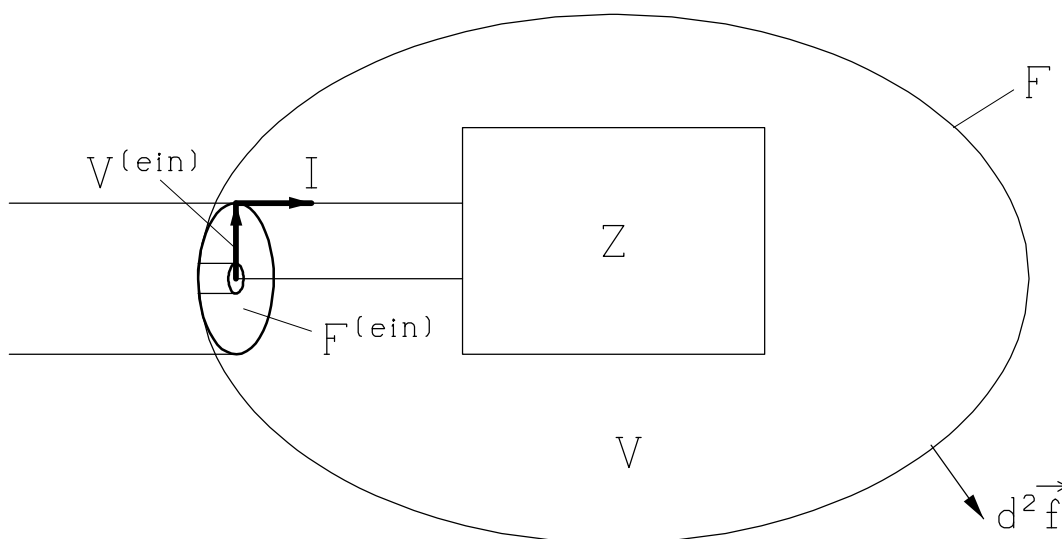
Die komplexe Version des Poyntingschen Satzes kann man dazu benutzen, um die Eingangsimpedanz eines beliebigen linearen, passiven elektromagnetischen Zweipols zu definieren. Wir stellen uns dazu das System in einem Volumen  $V$  mit der Begrenzungsfläche  $F$  vor; nur seine beiden Anschlüsse mögen aus dieser Fläche herausragen (siehe Fig. 13.3). Ist  $I$  der harmonisch schwingende komplexe Eingangsstrom und  $V^{(ein)}$  die entsprechende Spannung, so ist die komplexe Eingangsleistung durch  $I^*V^{(ein)}/2$  gegeben. Wendet man jetzt Gleichung 56 auf den Außenraum von  $V$  an, dann läßt sich diese Leistung auch durch den Poyntingschen Vektor ausdrücken:

$$\frac{1}{2} I^* V^{(ein)} = - \oint_{F^{(ein)}} \vec{S}(\vec{r}) \cdot d^2\vec{f} \quad . \quad (58)$$

Das Flächenelement  $d^2\vec{f}$  ist dabei nach außen gerichtet (siehe Fig. 13.3) und es wurde vorausgesetzt, daß die Eingangsleistung auf die Fläche  $F^{(ein)}$  des gezeigten Koaxialkabels begrenzt ist. Wendet man jetzt Gleichung 56 auf das von der Fläche  $F$  begrenzte Volumen  $V$  an, so läßt sich die rechte Seite von Gleichung 58 durch Integrale über die Felder innerhalb von  $V$  ausdrücken:

$$\frac{1}{2} I^* V^{(ein)} = \frac{1}{2} \int_V \vec{j}(\vec{r})^* \cdot \vec{E}(\vec{r}) d^3r - 2i\omega \int_V (w_e(\vec{r}) - w_m(\vec{r})) d^3r + \oint_{F-F^{(ein)}} \vec{S}(\vec{r}) \cdot d^2\vec{f} \quad . \quad (59)$$

Das Oberflächenintegral stellt hierbei einen Leistungsstrom dar, der aus dem Volumen  $V$  durch die Fläche  $F - F^{(ein)}$  tritt. Wird  $F - F^{(ein)}$  unendlich groß, dann wird dieses Integral reell und beschreibt die Abstrahlungsleistung. Bei kleinen Frequenzen kann dieses Oberflächenintegral im allgemeinen vernachlässigt werden (wie dies auch in den Kapiteln XIII.1. und XIII.2. geschehen ist).



**Fig. 13.3** Passiver linearer elektromagnetischer Zweipol (schematisch)

### Eingangsimpedanz

Wie in Gleichung 29 bereits angegeben wurde, kann das elektrische Verhalten eines linearen Systems mit zwei Zuführungen durch die Angabe eines frequenzabhängigen komplexen Gesamtwiderstandes  $Z(\omega)$  beschrieben werden:

$$V^{(ein)} = Z(\omega) I \quad \text{mit} \quad Z(\omega) = R(\omega) + i X(\omega) \quad . \quad (60)$$

Verwenden wir diese Beziehung auf der linken Seite von Gleichung 59, dann erhalten wir unmittelbar einen Ausdruck für die Eingangsimpedanz  $Z(\omega)$ . Durch Zerlegen in Real- und Imaginärteil erhalten wir Ausdrücke für den Wirkwiderstand  $R(\omega)$  und den Blindwiderstand  $X(\omega)$ :

$$R(\omega) = \frac{1}{|I|^2} \left\{ \Re \int_V \vec{j}^* \cdot \vec{E} \, d^3r + 2 \oint_{F-F^{(ein)}} \vec{S} \cdot d^2\vec{f} + 4\omega \Im \int_V (w_e - w_m) \, d^3r \right\} \quad (61a)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{|I|^2} \left\{ 4\omega \Re \int_V (w_m - w_e) \, d^3r + \Im \int_V \vec{j}^* \cdot \vec{E} \, d^3r \right\} \quad . \quad (61b)$$

Hiebei wurde angenommen, daß der durch die Fläche  $F$  nach außen fließende Leistungsstrom reell ist. Dementsprechend beschreibt der zweite Term auf der rechten Seite von Gleichung 61a den für hohe Frequenzen wichtigen **Strahlungswiderstand**. Treten in dem betrachteten System im wesentlichen nur Ohmsche Verluste auf, dann vereinfachen sich die Ausdrücke 61a und 61b bei niedrigen Frequenzen zu

$$R(\omega) = \frac{1}{|I|^2} \int_V \sigma |\vec{E}|^2 \, d^3r \quad , \quad (62a)$$

$$X(\omega) = \frac{4\omega}{|I|^2} \int_V (w_m - w_e) \, d^3r \quad . \quad (62b)$$

Dabei bedeutet  $\sigma$  die reelle Leitfähigkeit und die durch die Gleichungen 55 gegebenen Energiedichten  $w_e$  und  $w_m$  sind nahezu über das ganze Volumen reell. Der Wirkwiderstand hat natürlich den Wert, den man auf Grund der Ohmschen Verluste erwartet. Aber auch der Ausdruck für den Blindwiderstand ist plausibel: überwiegt die gespeicherte magnetische Energie die elektrische, wie im Fall einer Induktivität, so ist der Blindwiderstand positiv. Die verschiedenen Frequenzabhängigkeiten der niederfrequenten induktiven und kapazitiven Blindwiderstände ( $X = \omega L$  bzw.  $X = -1/\omega C$ ) gehen darauf zurück, daß  $L$  durch den Strom und die Spannung definiert ist ( $V = LdI/dt$ ),  $C$  hingegen durch die Ladung und die Spannung ( $V = Q/C$ ).

### Eingangsadmittanz

Die Umkehrung der Beziehung zwischen Spannung und Strom führt auf den komplexen Leitwert  $Y(\omega)$ , der auch als Admittanz bezeichnet wird:

$$I = Y(\omega) V^{(ein)} \quad \text{mit} \quad Y(\omega) = \frac{1}{Z(\omega)} = G(\omega) + i B(\omega) \quad . \quad (63)$$

Explizite Ausdrücke für den Wirkleitwert  $G$  und den Blindleitwert  $B$  erhält man, indem man Gleichung 59 komplex konjugiert nimmt, aus Gleichung 63 den Strom  $I$  einsetzt und die so erhaltene Gleichung in Real- und Imaginärteil zerlegt:

$$G(\omega) = \frac{1}{|V^{(ein)}|^2} \left\{ \Re \int_V \vec{j}^* \cdot \vec{E} \, d^3r + 2 \oint_{F-F^{(ein)}} \vec{S} \cdot d^2\vec{f} + 4\omega \Im \int_V (w_e - w_m) \, d^3r \right\} \quad (64a)$$

$$B(\omega) = -\frac{1}{|V^{(ein)}|^2} \left\{ 4\omega \Re \int_V (w_m - w_e) \, d^3r + \Im \int_V \vec{j}^* \cdot \vec{E} \, d^3r \right\} \quad (64b)$$

Hiebei wurden die gleichen Voraussetzungen wie bei der Berechnung des Widerstandes gemacht. Für niedrige Frequenzen vereinfachen sich diese Ausdrücke zu

$$G(\omega) = \frac{1}{|V^{(ein)}|^2} \int_V \sigma |\vec{E}|^2 \, d^3r \quad , \quad (65a)$$

$$B(\omega) = -\frac{4\omega}{|V^{(ein)}|^2} \int_V (w_m - w_e) \, d^3r \quad . \quad (65b)$$

### XIII.3.C. Strahlungswiderstand von Antennen

Wir wollen im folgenden kurz für zwei verschiedene Antennentypen den Strahlungswiderstand  $R_s(\omega)$  entsprechend Gleichung 61a berechnen,

$$R_s(\omega) = \frac{1}{|I|^2} 2 \oint_{F-F^{(ein)}} \vec{S} \cdot d^2\vec{f} \quad , \quad (66)$$

wobei wir die Berechnung in der Strahlungszone vornehmen (siehe Kapitel VI.2 und VI.3).

#### Halbwellendipol mit sinusförmiger Stromverteilung

Zuerst betrachten wir eine linienförmige gerade Dipolantenne der Länge  $\lambda/2$ , die in der Mitte symmetrisch angespeist wird (siehe Fig. 13.4), wobei  $\lambda = 2\pi c/\omega$  gilt. Der Antennenstrom sei durch

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \Re \vec{j}(\vec{r}) e^{i\omega t} \quad (67a)$$

$$\text{mit} \quad \vec{j}(\vec{r}) = I \delta(x) \delta(y) \Theta\left(\frac{\lambda}{4} - |z|\right) \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right) \vec{e}_z \quad (67b)$$

gegeben. Entsprechend der im Kapitel VI.2 angegebenen Berechnungsmethode für das Strahlungsfeld erhalten wir aus Gleichung VI.34 das Magnetfeld in der Strahlungszone zu

$$\vec{B}_s(\vec{r}, t) = \Re \vec{B}_s(\vec{r}) e^{i\omega t_r} \quad (68a)$$

$$\text{mit} \quad \vec{B}_s(\vec{r}) = -\frac{i}{c r} \vec{k} \times \int d^3r' e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}'} \vec{j}(\vec{r}') \quad . \quad (68b)$$

Hiebei wurden entsprechend der Notation von Kapitel VI. die Abkürzungen

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \frac{\vec{r}}{r} \quad , \quad t_r = t - \frac{r}{c}$$

verwendet. Aus den Gleichungen VI.39, VI.40 und VI.41 ergibt sich für den zeitgemittelten komplexen Poyntingvektor der in der Strahlungszone reelle Ausdruck

$$\vec{S}(\vec{r}) = \frac{c}{8\pi} |\vec{B}_s(\vec{r})|^2 \frac{\vec{r}}{r} \quad , \quad (69)$$

mittels dessen wir den Strahlungswiderstand in der Form

$$R_s(\omega) = \frac{1}{|I|^2} \frac{c}{4\pi} \int d\Omega r^2 |\vec{B}_s(\vec{r})|^2 \quad (70)$$

schreiben können. Das bei der Berechnung von  $\vec{B}_s$  auftretende Integral

$$\int d^3r' e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'} \vec{j}(\vec{r}') = I \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} dz' e^{ikz' \cos \vartheta} \cos kz' \vec{e}_z$$

kann mittels der Zerlegung

$$\cos kz' = \frac{1}{2} [e^{ikz'} + e^{-ikz'}]$$

elementar ausgewertet werden und führt zu

$$\vec{B}_s(\vec{r}) = -i \frac{2I}{c r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin^2 \vartheta} \left[ \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{e}_z \right] \quad . \quad (71)$$

Auch das hiemit bei der Berechnung des Strahlungswiderstandes auftretende Integral läßt sich für die Halbwellendipolantenne auf tabellierte Funktionen zurückführen:

$$R_s(\omega) = \frac{2}{c} \int_0^\pi d\vartheta \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta} = \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} du \frac{1 - \cos u}{u} = \frac{1}{c} [\ln 2\pi + C - \text{Ci}(2\pi)] \quad . \quad (72a)$$

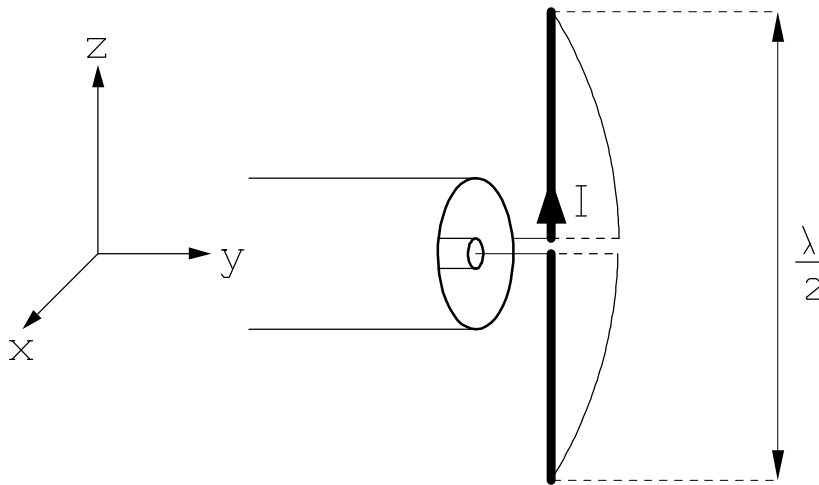


Fig. 13.4 Halbwellendipol mit sinusförmiger Stromverteilung



$C = 0.57721566\dots$  ist hierbei die Eulersche Konstante und Ci bezeichnet den Integralcosinus:

$$\text{Ci}(z) = \int_{\infty}^z \frac{\cos u}{u} du \quad .$$

Der Wert des Strahlungswiderstandes, wie er in Gleichung 72a angegeben ist, ist entsprechend der verwendeten Formeln in Gaußschen Einheiten. Rechnen wir diesen Wert entsprechend der Tabelle B.3.2. in SI-Einheiten um (Widerstandswert in Ohm), so ergibt sich

$$R_s(\omega) = 30 [\ln 2\pi + C - \text{Ci}(2\pi)] = 73.2 \text{ Ohm} \quad . \quad (72b)$$

### Kreisförmige Schleifenantenne

Eine Antenne bestehe aus einer kreisförmigen Drahtschleife vom Radius  $a$ , die sich in der  $x$ - $y$ -Ebene mit ihrem Mittelpunkt im Ursprung befindet (siehe Fig. 13.5). Der im Draht fließende Strom sei durch

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \Re I \delta(z) \delta(\rho - a) e^{i\omega t} (-\vec{e}_\varphi) \quad (73)$$

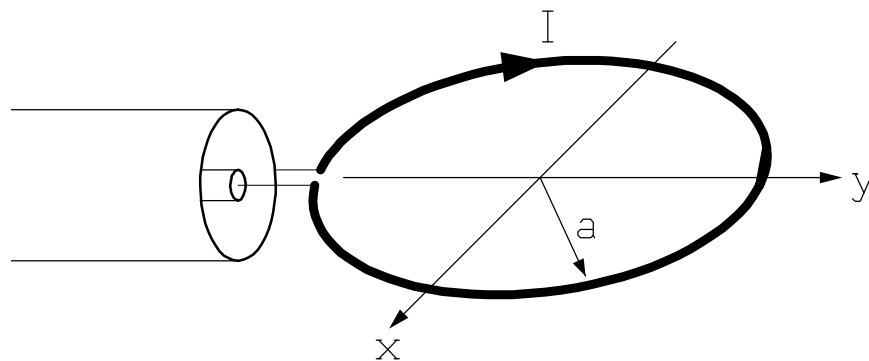
gegeben (bitte beachten, daß Zylinderkoordinaten verwendet werden).

Das bei der Berechnung von  $\vec{B}_s$  (siehe Gleichung 67b) auftretende Integral

$$\begin{aligned} \int d^3r' e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'} \vec{j}(\vec{r}') &= I a \int_0^{2\pi} d\varphi' e^{ika \sin \vartheta \cos(\varphi' - \varphi)} [\vec{e}_x \sin \varphi' - \vec{e}_y \cos \varphi'] \\ &= I a \int_0^{2\pi} d\phi e^{ika \sin \vartheta \cos \phi} [\vec{e}_x \sin(\phi + \varphi) - \vec{e}_y \cos(\phi + \varphi)] \end{aligned}$$

kann unter Verwendung der bestimmten Integrale

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\phi e^{ika \sin \vartheta \cos \phi} \cos \phi &= 2\pi i J_1(ka \sin \vartheta) \\ \int_0^{2\pi} d\phi e^{ika \sin \vartheta \cos \phi} \sin \phi &= 0 \end{aligned}$$



**Fig. 13.5** Kreisförmige Schleifenantenne

( $J_1$  ist eine Besselfunktion erster Art, siehe Anhang A.3.2) in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\int d^3r' e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'} \vec{j}(\vec{r}') = I a 2\pi i J_1(ka \sin \vartheta) [\vec{e}_x \sin \varphi - \vec{e}_y \cos \varphi] \quad .$$

Aus Gleichung 68b folgt nun

$$\vec{B}_s(\vec{r}) = \frac{2\pi I}{cr} ka J_1(ka \sin \vartheta) [\vec{e}_\rho \cos \vartheta - \vec{e}_z \sin \vartheta] \quad (74)$$

und die Berechnung des Strahlungswiderstandes entsprechend Gleichung 70 ergibt

$$R_s(\omega) = \frac{\pi}{c} k^2 a^2 \int d\Omega [J_1(ka \sin \vartheta)]^2 \quad . \quad (75)$$

Dieses Integral kann nur in der für  $a \ll \lambda$ , d.h.  $ka \ll 1$  gültigen Näherung

$$J_1(ka \sin \vartheta) \approx \frac{1}{2} ka \sin \vartheta \quad \text{für } ka \ll 1$$

exakt ausgewertet werden. In dieser Näherung gilt dann

$$R_s(\omega) = \frac{2\pi^2}{3c} k^4 a^4 = \frac{32\pi^4}{3c} \left(\frac{F}{\lambda^2}\right)^2 \quad (76a)$$

bzw. im SI-System

$$R_s(\omega) = 320 \pi^4 \left(\frac{F}{\lambda^2}\right)^2 = 20 \pi^2 \left(\frac{U}{\lambda}\right)^4 \quad \text{Ohm} \quad . \quad (76b)$$

Hiebei ist  $U = 2\pi a$  der Umfang der Ringantenne. Beträgt z.B. der Umfang der Ringantenne 15 % der Wellenlänge, so ergibt sich aus Gleichung 76b ein Strahlungswiderstand von 0.1 Ohm. Damit der immer vorhandene Ohmsche Widerstand (erster Term von Gleichung 61a) nicht allzu stark überwiegt (und somit die zugeführte Energie nicht nur zur Wärmeerzeugung verwendet wird), müssen derartige magnetische Ringantennen aus dicken, gut leitenden Drähten (besser: Rohren) hergestellt werden.

Ist der Umfang größer als 0.15 Wellenlängen, so sind Strom und Spannung auf dem Leiter ortsabhängig. Bei größeren Längen entstehen Strom- bzw. Spannungsknoten und -bäuche entlang der Ringleitung; solche Antennengebilde werden als elektrische Antennen bezeichnet, sie strahlen wie ein normaler Dipol das sogenannte elektrische Feld (E-Feld) ab. Sinkt der Umfang unter ca. 0.15 Wellenlängen, so wird die Strom- bzw. Spannungsverteilung entlang des Leiters allmählich ortsunabhängig, d.h. an jeder Stelle der Schleife fließt (etwa) der gleiche Strom. In solchen Fällen spricht man von magnetischen Antennen, da die nunmehr vorliegende Spule überwiegend ein magnetisches Feld (H-Feld) abstrahlt. Ideale Verhältnisse vorausgesetzt, ist auch die kleine magnetische Antenne ein Strahler mit gutem Wirkungsgrad (hiebei wird als Wirkungsgrad das Verhältnis von abgestrahlter Energie zu Joulscher Verlustwärme verstanden). Da der Ohmsche Widerstand meistens nur einige 100 Milliohm beträgt, liegt der Wirkungsgrad eines Halbwellendipols (mit ca. 70 Ohm Strahlungswiderstand) oder einer sehr großen Ringantenne (Strahlungswiderstand bis 100 Ohm) annähernd bei 100 %.