

# ELEKTRODYNAMIK UND RELATIVITÄTSTHEORIE

## **Kapitel 12: Elektro– und Magnetostatik**

Vorlesung für Studenten der Technischen Physik

Helmut Nowotny

Technische Universität Wien

Institut für Theoretische Physik

7., von A. Rebhan korrigierte Auflage

Wien, Februar 2006

## XII. ELEKTRO– UND MAGNETOSTATIK

### XII.1. Elektrostatik

#### XII.1.A. Gleichungen, Randbedingungen, Feldlinienverlauf

In der Elektrostatik gelten die beiden Maxwellgleichungen

$$\operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}) = 4\pi \varrho(\vec{r}) \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad , \quad (1)$$

innerhalb des Raumbereiches eines homogenen Mediums die Materialgleichung

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon \vec{E}(\vec{r}) \quad \vec{D}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) + 4\pi \vec{P}(\vec{r}) \quad (2)$$

und an der Grenzfläche zweier Materialien die Randbedingungen

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 4\pi \sigma \quad , \quad \vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad . \quad (3)$$

#### Potentialgleichung

Die Gültigkeit der homogenen Maxwellgleichung  $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$  erlaubt wieder den Ansatz

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\operatorname{grad} \phi(\vec{r}) \quad . \quad (4)$$

Als Bestimmungsgleichung für das elektrostatische Potential  $\phi$  ergibt sich aus der inhomogenen Maxwellgleichung unter Beachtung der Materialgleichung 2 die Poissongleichung

$$\Delta \phi(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \varrho(\vec{r}) \quad , \quad (5)$$

welche die allgemeine Lösung

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \int d^3r' \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \phi_{hom}(\vec{r}) \quad (6)$$

besitzt (vergleiche Kapitel III.1.A). Die homogene Lösung  $\phi_{hom}$  erfüllt die Differentialgleichung

$$\Delta \phi_{hom}(\vec{r}) = 0 \quad (7)$$

und dient zur Erfüllung der Randbedingungen an der Oberfläche des Materials. Zu beachten ist, daß die Volumintegration in Gleichung 6 nur über den Raumbereich ausgeführt werden darf, den das Material (mit der Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon$ ) ausfüllt.

#### Feldlinienverlauf an der Grenzfläche zweier Medien

Wir betrachten die Grenzfläche zweier Medien, welche die skalaren Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_1$  bzw.  $\varepsilon_2$  besitzen. Die Winkel zwischen der elektrischen Feldstärke und der Flächennormalen sei im Medium 1 durch  $\alpha_1$  und im Medium 2 durch  $\alpha_2$  gegeben. Falls

keine Oberflächenladungsdichte vorhanden ist, folgen aus der Stetigkeit der Tangentialkomponenten von  $\vec{E}$  und der Stetigkeit der Normalkomponenten von  $\vec{D}$  die Gleichungen

$$E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2 \quad , \quad \varepsilon_1 E_1 \cos \alpha_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos \alpha_2 \quad , \quad (8)$$

aus denen sofort das Brechungsgesetz für die Feldlinien

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\varepsilon_1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\varepsilon_2} \quad (9)$$

folgt. Bezeichnet man als das dichtere Medium jenes mit dem größeren Wert von  $\varepsilon$ , dann folgt aus Gleichung 9 die Feststellung, daß beim Übergang in ein dichteres Medium die Feldlinien von der Flächennormalen weggebrochen werden.

## XII.1.B. Lösungsmethoden für Probleme der Elektrostatik

### Bildladungsmethode

Bei dieser Lösungsmethode werden fiktive Ladungen (Spiegelladungen) so geeignet angeordnet gewählt, daß in einem bestimmten Raumbereich die gleiche Differentialgleichung und die gleichen Randbedingungen erfüllt werden wie von den wirklichen Ladungen (siehe hierzu auch Kapitel III.1.D.).

### Potentialmethode

Die allgemeinste Methode zur Lösung elektrostatischer Probleme besteht in der Lösung der Poissongleichung für das elektrostatische Potential und der Anpassung an die Randbedingungen durch die Verwendung einer homogenen Lösung.

Wir wollen im folgenden je ein Beispiel zu diesen Lösungsmethoden betrachten.

## XII.1.C. Punktladung vor einem dielektrischen Halbraum

Wir betrachten eine elektrische Punktladung  $q$ , welche sich an der Stelle  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = d$  befindet. Der Halbraum  $z < 0$  sei mit einem Dielektrikum erfüllt, welches die Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$  aufweist. Diese Anordnung ist auf der linken Seite von Fig. 12.1 angegeben, während die rechte Seite die Bildladungsanordnungen zeigt.

### Berechnung für den Halbraum $z > 0$

Für die Berechnung des elektrostatischen Potentials im Halbraum  $z > 0$  nehmen wir die in diesem Halbraum gegebene Punktladung  $q$  sowie eine fiktive Ladung  $q'$  an der Stelle  $(0, 0, -d)$  (diese fiktive Spiegelladung soll die gesamte Wirkung des Dielektrikums im Halbraum  $z > 0$  beschreiben). Für das Potential  $\phi$  ergibt sich somit der Ausdruck

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - d\vec{e}_z|} + \frac{q'}{|\vec{r} + d\vec{e}_z|} \quad , \quad (10)$$

woraus die elektrische Feldstärke

$$\vec{E}(\vec{r}) = q \frac{\vec{r} - d\vec{e}_z}{|\vec{r} - d\vec{e}_z|^3} + q' \frac{\vec{r} + d\vec{e}_z}{|\vec{r} + d\vec{e}_z|^3} \quad (11)$$

folgt.

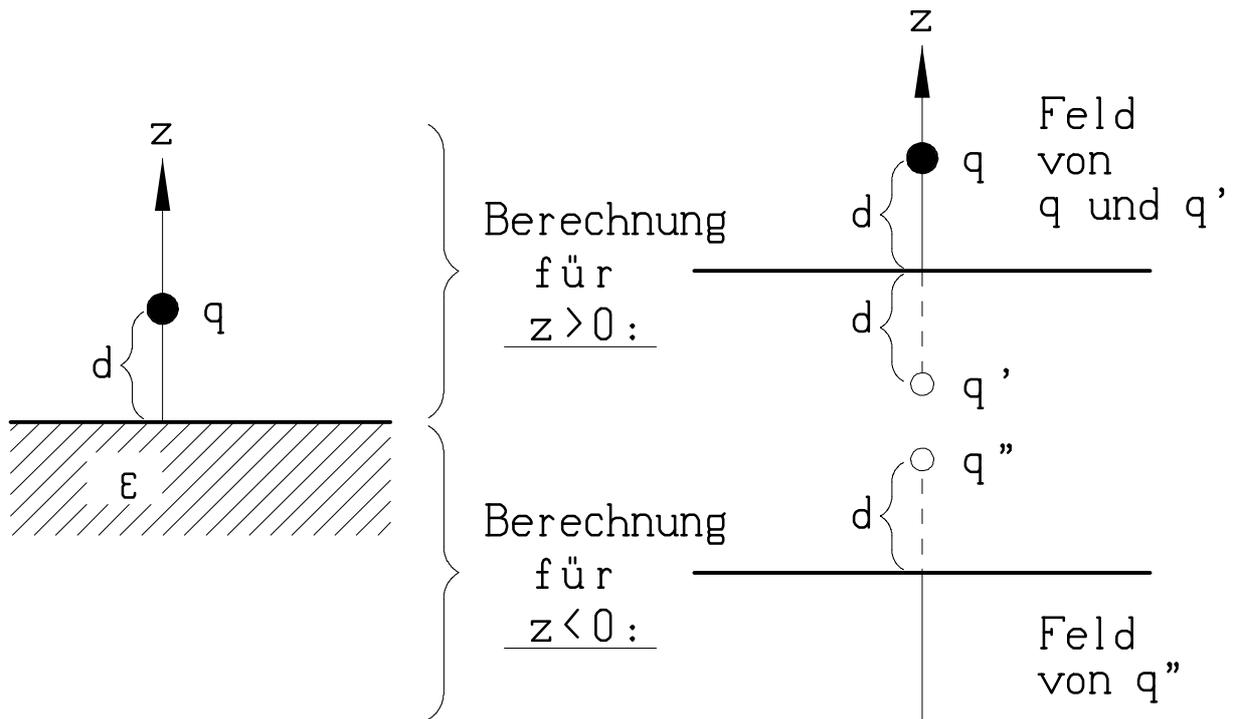


Fig. 12.1 Bildladungsmethode am Beispiel einer Punktladung vor einem Dielektrikum

**Berechnung für den Halbraum  $z < 0$**

Für die Berechnung des elektrostatischen Potentials im Halbraum  $z < 0$  nehmen wir eine fiktive Ladung  $q''$  an der Stelle  $(0, 0, d)$  der wirklichen Ladung  $q$ . Für das Potential  $\phi$  ergibt sich somit der einfache Ausdruck

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q''}{|\vec{r} - d\vec{e}_z|} \quad , \quad (12)$$

aus dem wir die elektrische Feldstärke

$$\vec{E}(\vec{r}) = q'' \frac{\vec{r} - d\vec{e}_z}{|\vec{r} - d\vec{e}_z|^3} \quad (13)$$

erhalten.

**Stetigkeitsbedingungen an der Grenzfläche  $z = 0$**

Aus der Stetigkeit der Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke folgt aus den Gleichungen 11 und 13 die Beziehung

$$q \frac{\vec{r}}{\sqrt{r^2 + d^2}^3} + q' \frac{\vec{r}}{\sqrt{r^2 + d^2}^3} = q'' \frac{\vec{r}}{\sqrt{r^2 + d^2}^3} \quad , \quad (14a)$$

wobei  $\vec{r}$  in der  $x$ - $y$ -Ebene liegt. Diese Gleichung ist somit in der gesamten Grenzfläche erfüllt, wenn für die fiktiven Ladungen  $q'$  und  $q''$  die Beziehung

$$q + q' = q'' \quad (14b)$$

gilt.

Analog folgt aus der Stetigkeit der Normalkomponente der dielektrischen Verschiebung bei Verwendung der Materialgleichung  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$  aus den Gleichungen 11 und 13 die Beziehung

$$-q \frac{d\vec{e}_z}{\sqrt{r^2 + d^2}^3} + q' \frac{d\vec{e}_z}{\sqrt{r^2 + d^2}^3} = -\varepsilon q'' \frac{d\vec{e}_z}{\sqrt{r^2 + d^2}^3} \quad , \quad (15a)$$

welche wieder in der gesamten Grenzfläche  $z = 0$  erfüllt ist, wenn für die fiktiven Ladungen  $q'$  und  $q''$  die Beziehung

$$-q + q' = -\varepsilon q'' \quad (15b)$$

gilt. Diese beiden Gleichungen 14b und 15b legen somit die fiktiven Ladungen fest:

$$q' = -q \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \quad , \quad q'' = q \frac{2}{\varepsilon + 1} \quad . \quad (16)$$

Einsetzen dieser Werte in die Gleichungen 10 bis 13 ergibt nun die explizite Lösung des vorliegenden Problems.

## XII.1.D. Dielektrische Kugel in einem homogenen Feld

In einem homogenen elektrischen Feld  $\vec{E}_o = E_o \vec{e}_z$  befinde sich im Koordinatenursprung eine dielektrische Kugel (Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$ ) mit dem Radius  $R$ . Wir verwenden dem Problem angepaßte Kugelkoordinaten  $r, \vartheta, \varphi$  und betrachten den Außenraum  $r > R$  und den Innenraum  $r < R$  getrennt.

### Potential im Innenraum

Da keine freien Ladungen vorhanden sind, gilt für das elektrostatische Potential  $\phi_i$  im Innenraum die Gleichung

$$\Delta \phi_i(r, \vartheta, \varphi) = 0 \quad , \quad (17)$$

welche die folgende im Ursprung reguläre allgemeine Lösung besitzt:

$$\phi_i(r, \vartheta, \varphi) = - \sum_{lm} b_{lm} r^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad . \quad (18)$$

### Potential im Außenraum

Da auch im Außenraum keine freien Ladungen vorhanden sind, gilt für das elektrostatische Potential  $\phi_a$  gleichfalls die Gleichung

$$\Delta \phi_a(r, \vartheta, \varphi) = 0 \quad . \quad (19)$$

Wir benötigen nun die allgemeine Lösung dieser Gleichung, welche im Unendlichen mit dem vorgegebenen homogenen elektrischen Feld

$$\vec{E}_o = E_o \vec{e}_z = \text{grad } E_o z = -\text{grad } (-E_o r \cos \vartheta) \quad (20)$$

übereinstimmt. Diese Lösung lautet

$$\phi_a(r, \vartheta, \varphi) = -E_o r \underbrace{\sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}(\vartheta)}_{\cos \vartheta} + \sum_{lm} a_{lm} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad . \quad (21)$$

### Randbedingungen auf der Kugeloberfläche

Die Randbedingungen auf der Kugeloberfläche  $r = R$  ergeben sich aus der Stetigkeit der Normalkomponente (= Radialkomponente) der dielektrischen Verschiebung und der Stetigkeit der Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke zu

$$\varepsilon \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{\partial \phi_a}{\partial r} \Big|_{r=R} \quad , \quad \frac{\partial \phi_i}{\partial \vartheta} \Big|_{r=R} = \frac{\partial \phi_a}{\partial \vartheta} \Big|_{r=R} \quad , \quad \frac{\partial \phi_i}{\partial \varphi} \Big|_{r=R} = \frac{\partial \phi_a}{\partial \varphi} \Big|_{r=R} \quad . \quad (22)$$

Der Koeffizientenvergleich bei den Kugelflächenfunktionen  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  ergibt nun unter der Voraussetzung, daß  $lm \neq 10$  gilt, die Gleichungen

$$-\varepsilon b_{lm} l R^{l-1} = -a_{lm} \frac{l+1}{R^{l+2}} \quad , \quad -b_{lm} R^l = a_{lm} \frac{1}{R^{l+1}} \quad , \quad (23a)$$

welche nur die triviale Lösung

$$a_{lm} = 0 \quad , \quad b_{lm} = 0 \quad (\text{für } lm \neq 10) \quad (23b)$$

besitzen.

Der Koeffizientenvergleich bei  $Y_{10}(\vartheta)$  ergibt die folgenden Gleichungen

$$-\varepsilon b_{10} = -E_o \sqrt{\frac{4\pi}{3}} - a_{10} \frac{2}{R^3} \quad , \quad -b_{10} R = -E_o R \sqrt{\frac{4\pi}{3}} + a_{10} \frac{1}{R^2} \quad , \quad (24a)$$

aus denen die Koeffizienten  $a_{10}$  und  $b_{10}$  bestimmt werden können:

$$a_{10} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} R^3 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} E_o \quad , \quad b_{10} = \frac{3}{\varepsilon + 2} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} E_o \quad . \quad (24b)$$

Die gesamte Lösung für das elektrostatische Potential kann somit in der folgenden Form geschrieben werden

$$\phi_i(\vec{r}) = -\frac{3}{\varepsilon + 2} E_o r \cos \vartheta \quad , \quad \phi_a(\vec{r}) = -E_o r \cos \vartheta + \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3} \quad , \quad (25a)$$

wobei

$$\vec{p} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} R^3 E_o \vec{e}_z \quad (25b)$$

das gesamte induzierte Dipolmoment der dielektrischen Kugel ist.

## XII.2. Energie und Kräfte im elektrischen Feld

### XII.2.A. Elektrostatische Energie in dielektrischen Medien

Gemäß der allgemeinen Gleichung XI.63 ergibt sich für ein Dielektrikum mit einer skalaren, feldunabhängigen Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon$  die gesamte elektrostatische Energie zu

$$W = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \frac{\vec{D}(\vec{r})^2}{\varepsilon(\vec{r})} . \quad (26)$$

#### Änderung der Feldenergie bei einer Verschiebung der Materie

Betrachten wir eine hinreichend kleine Bewegung der Materie, wobei sich an der Stelle  $\vec{r}$  die dielektrische Verschiebung  $\vec{D}(\vec{r})$  um  $\delta\vec{D}(\vec{r})$ , die Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon(\vec{r})$  um  $\delta\varepsilon(\vec{r})$  und die Ladungsdichte  $\rho(\vec{r})$  um  $\delta\rho(\vec{r})$  ändert, so ergibt sich für die Änderung der gesamten elektrostatischen Feldenergie bei alleiniger Berücksichtigung von Termen erster Ordnung der Ausdruck

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int d^3r \vec{E}(\vec{r}) \cdot \delta\vec{D}(\vec{r}) - \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{E}(\vec{r})^2 \delta\varepsilon(\vec{r}) . \quad (27)$$

Verwendung von

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \phi(\vec{r}) \quad \text{und} \quad \text{div } \vec{D}(\vec{r}) = 4\pi \rho(\vec{r})$$

ergibt nun

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \delta\vec{D}(\vec{r}) &= -\text{div} \left( \phi(\vec{r}) \delta\vec{D}(\vec{r}) \right) + \phi(\vec{r}) \text{div } \delta\vec{D}(\vec{r}) \\ &= -\text{div} \left( \phi(\vec{r}) \delta\vec{D}(\vec{r}) \right) + 4\pi \phi(\vec{r}) \delta\rho(\vec{r}) , \end{aligned}$$

so daß wir Gleichung 27 in der Form

$$\delta W = \int d^3r \phi(\vec{r}) \delta\rho(\vec{r}) - \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{E}(\vec{r})^2 \delta\varepsilon(\vec{r}) \quad (28)$$

schreiben können (wir haben hierbei das Verschwinden des Oberflächenintegrals für eine hinreichend weit entfernte Oberfläche verwendet).

### XII.2.B. Kraftdichte in einem dielektrischen Medium

Wir betrachten eine kleine Verschiebung  $\delta\vec{s}(\vec{r})$  der an der Stelle  $\vec{r}$  befindlichen Materieteilchen. Die bei dieser kleinen Verschiebung aufgrund der Kraftdichte  $\vec{f}(\vec{r})$  an der Materie geleistete Arbeit muß der Abnahme der elektrostatischen Feldenergie entsprechen:

$$\int d^3r \vec{f}(\vec{r}) \cdot \delta\vec{s}(\vec{r}) = -\delta W . \quad (29)$$

Zur Berechnung der Kraftdichte müssen wir nun den in Gleichung 28 angegebenen Ausdruck für die Änderung der elektrostatischen Feldenergie durch die Verschiebungen  $\delta\vec{s}(\vec{r})$  ausdrücken.

Betrachten wir die **Massendichte**  $\sigma(\vec{r})$ , so gilt für die gesamte Änderung der Masse in einem Volumen  $\Delta V$  bei Durchführung der Verschiebungen  $\delta\vec{s}(\vec{r})$

$$\int_{\Delta V} d^3r \delta\sigma(\vec{r}) = - \oint_{F(\Delta V)} d^2\vec{f} \cdot \sigma(\vec{r}) \delta\vec{s}(\vec{r}) = - \int_{\Delta V} d^3r \operatorname{div} (\sigma(\vec{r}) \delta\vec{s}(\vec{r})) \quad , \quad (30a)$$

woraus wegen der Willkürlichkeit des gewählten Volumens  $\Delta V$  die Beziehung

$$\delta\sigma(\vec{r}) = - \operatorname{div} (\sigma(\vec{r}) \delta\vec{s}(\vec{r})) \quad (30b)$$

folgt. Ganz analog ergibt sich für die Änderung der Ladungsdichte  $\varrho(\vec{r})$  die Beziehung

$$\delta\varrho(\vec{r}) = - \operatorname{div} (\varrho(\vec{r}) \delta\vec{s}(\vec{r})) \quad . \quad (31)$$

Unter der Voraussetzung, daß die skalare Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$  nur eine Funktion der Massendichte  $\sigma$  ist

$$\varepsilon = \varepsilon(\sigma) \quad , \quad (32a)$$

können wir die Änderung dieser Dielektrizitätskonstanten in der folgenden Form schreiben:

$$\delta\varepsilon = \frac{d\varepsilon}{d\sigma} \delta\sigma = - \frac{d\varepsilon}{d\sigma} \operatorname{div} (\sigma(\vec{r}) \delta\vec{s}(\vec{r})) \quad . \quad (32b)$$

Einsetzen in Gleichung 28 ergibt nun

$$\begin{aligned} -\delta W &= - \int d^3r \phi(\vec{r}) \delta\varrho(\vec{r}) + \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{E}(\vec{r})^2 \delta\varepsilon(\vec{r}) \\ &= \int d^3r \phi(\vec{r}) \vec{\nabla} \cdot (\varrho(\vec{r}) \delta\vec{s}(\vec{r})) - \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{E}(\vec{r})^2 \frac{d\varepsilon}{d\sigma} \vec{\nabla} \cdot (\sigma(\vec{r}) \delta\vec{s}(\vec{r})) \\ &= - \int d^3r \varrho(\vec{r}) \delta\vec{s}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \phi(\vec{r}) + \frac{1}{8\pi} \int d^3r \sigma(\vec{r}) \delta\vec{s}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \left( \vec{E}(\vec{r})^2 \frac{d\varepsilon}{d\sigma} \right) \quad , \end{aligned}$$

woraus durch Vergleich mit Gleichung 29 der folgende Ausdruck für die Kraftdichte  $\vec{f}'(\vec{r})$  gewonnen werden kann:

$$\vec{f}'(\vec{r}) = \varrho(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) + \frac{\sigma(\vec{r})}{8\pi} \vec{\nabla} \left( \vec{E}(\vec{r})^2 \frac{d\varepsilon}{d\sigma} \right) \quad . \quad (33a)$$

Eine einfache Umformung dieser Gleichung ergibt nun den üblicherweise in der Literatur angegebenen Ausdruck für die Kraftdichte in einem Dielektrikum:

$$\vec{f}'(\vec{r}) = \varrho(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) - \frac{1}{8\pi} \vec{E}(\vec{r})^2 \vec{\nabla} \varepsilon(\vec{r}) + \frac{1}{8\pi} \vec{\nabla} \left( \vec{E}(\vec{r})^2 \frac{d\varepsilon}{d\sigma} \sigma(\vec{r}) \right) \quad . \quad (33b)$$

Der letzte Term in diesem Ausdruck gibt den Effekt der **Elektrostriktion** an. Er ist im allgemeinen keineswegs so klein, daß er vernachlässigt werden kann. Bei der Berechnung der Gesamtkraft auf ein Dielektrikum gibt er jedoch keinen Beitrag. Für die Berechnung der Gesamtkraft können wir daher formal auch die aus dem Maxwell'schen Spannungstensor (siehe Gleichung XI.65) folgende Kraftdichte

$$f_k(\vec{r}) = \partial_i T_{ik}(\vec{r}) = \partial_i \frac{1}{4\pi} D_i(\vec{r}) E_k(\vec{r}) - \partial_i \delta_{ik} \frac{1}{8\pi} E_j(\vec{r}) D_j(\vec{r}) \quad (34a)$$

verwenden, welche den beiden ersten Termen der rechten Seite von Gleichung 33b entspricht:

$$\vec{f}'(\vec{r}) = \varrho(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) - \frac{1}{8\pi} \vec{E}(\vec{r})^2 \vec{\nabla} \varepsilon(\vec{r}) \quad . \quad (34b)$$

### XII.2.C. Beispiel: Dielektrikum in einem Plattenkondensator

Wir betrachten einen Plattenkondensator, dessen Platten den Abstand  $d$  haben. Die Platten sollen eine Länge  $l$  und eine Breite  $b$  aufweisen. Ein Dielektrikum mit der Breite  $b$  und der Dicke  $d$  wird nun zwischen diese beiden Kondensatorplatten eingebracht. Diese Anordnung ist in Fig. 12.2 skizziert. Wir wollen nun die Feldenergieänderung und die auf das Dielektrikum ausgeübte Kraft unter der Voraussetzung bestimmen, daß die elektrische Ladung  $Q$  auf den Kondensatorplatten bzw. die Spannung  $U$  zwischen den Kondensatorplatten erhalten bleibt (der Kondensator ist in diesem Fall mit einer Spannungsquelle verbunden).

**Ladung  $Q$  bleibt erhalten** ( $E = E(\xi)$ )

Wir berechnen zuerst die gesamte elektrostatische Feldenergie, wenn das Dielektrikum bis zu einer Länge  $\xi$  in den Plattenkondensator eingeschoben ist:

$$W(\xi) = \frac{1}{8\pi} E^2 l b d \left( \varepsilon \frac{\xi}{l} + \frac{l-\xi}{l} \right) . \quad (35)$$

Um die elektrische Feldstärke  $E$  durch die Gesamtladung  $Q$  ausdrücken zu können, berechnen wir die Gesamtladung

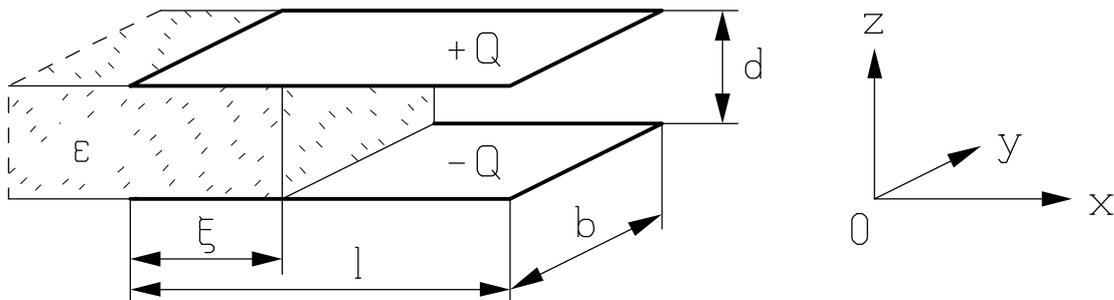
$$Q = \frac{1}{4\pi} E l b \left( \varepsilon \frac{\xi}{l} + \frac{l-\xi}{l} \right) . \quad (36)$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich

$$W(\xi) = \frac{1}{2} E d Q = 2\pi Q^2 \frac{d}{b} \frac{1}{l + (\varepsilon - 1)\xi} . \quad (37)$$

Die Berechnung der auf das Dielektrikum (in Längsrichtung) einwirkenden Gesamtkraft ergibt nun

$$F_x = - \frac{\partial W}{\partial \xi} = 2\pi Q^2 \frac{d}{b} \frac{\varepsilon - 1}{(l + (\varepsilon - 1)\xi)^2} = \frac{1}{8\pi} E^2 b d (\varepsilon - 1) . \quad (38)$$



**Fig. 12.2** Rechteckiger Plattenkondensator mit teilweise eingeschobenem Dielektrikum

Das gleiche Ergebnis erhalten wir auch durch eine Volumintegration über die Kraftdichte, wie sie z.B. in Gleichung 34b angegeben ist. Mittels der Beziehung

$$\vec{\nabla}\varepsilon(\vec{r}) = -(\varepsilon - 1) \delta(\vec{r} \cdot \vec{e}_x - \xi) \vec{e}_x \quad (39)$$

ergibt sich

$$\vec{F} = \int d^3r \vec{f}(\vec{r}) = -\frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{E}(\vec{r})^2 \vec{\nabla}\varepsilon(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi} E^2 (\varepsilon - 1) b d \vec{e}_x \quad . \quad (40)$$

### Spannung $U$ bleibt erhalten $(Q = Q(\xi))$

Für diesen Fall können wir die Ergebnisse von Gleichung 35 und 38 übernehmen, wenn wir die elektrische Feldstärke  $E$  durch  $U/d$  ausdrücken:

$$W(\xi) = \frac{1}{8\pi} U^2 \frac{b}{d} (l + (\varepsilon - 1) \xi) \quad , \quad (41)$$

$$F_x = \frac{1}{8\pi} U^2 \frac{b}{d} (\varepsilon - 1) \quad . \quad (42)$$

Betrachten wir in diesem Fall (Kondensator an Batterie angeschlossen) die jeweilige Gesamtladung des Kondensator als Funktion  $Q$  beim Einschieben des Dielektrikums, so ergibt sich

$$Q(\xi) = \frac{1}{4\pi} U \frac{b}{d} (l + (\varepsilon - 1) \xi) \quad , \quad (43)$$

d.h. die von der Batterie zugeführte Energie

$$U Q(\xi) = \frac{1}{4\pi} U^2 \frac{b}{d} (l + (\varepsilon - 1) \xi) = 2 W(\xi) \quad (44)$$

ist doppelt so groß als die gespeicherte Feldenergie. Es wird somit Arbeit am Dielektrikum geleistet und zugleich die Feldenergie um den gleichen Betrag erhöht.

## XII.3. Magnetostatik

### XII.3.A. Gleichungen, Randbedingungen, Feldlinienverlauf

In der Magnetostatik gelten die beiden Maxwellgleichungen

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad , \quad (45)$$

innerhalb des Raumbereiches eines homogenen Mediums die Materialgleichung

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu \vec{H}(\vec{r}) \quad \text{bzw.} \quad \vec{B}(\vec{r}) = \vec{H}(\vec{r}) + 4\pi \vec{M}(\vec{r}) \quad (46)$$

und an der Grenzfläche zweier Materialien die Randbedingungen

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad , \quad \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \vec{k} \quad . \quad (47)$$

#### Potentialgleichung

Die Gültigkeit der homogenen Maxwellgleichung  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  erlaubt den Ansatz

$$\vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) \quad . \quad (48)$$

Als Bestimmungsgleichung für dieses Vektorpotential  $\vec{A}$  ergibt sich aus der inhomogenen Maxwellgleichung unter Beachtung der Materialgleichung 46 die Gleichung

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \mu \vec{j}(\vec{r}) \quad , \quad (49a)$$

welche mit der **Coulombeichung**  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$  auf die Poissongleichung

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{c} \mu \vec{j}(\vec{r}) \quad (49b)$$

führt, die die allgemeine Lösung

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{A}_{hom}(\vec{r}) \quad (50)$$

besitzt (vergleiche Kapitel IV.1.A). Die homogene Lösung  $\vec{A}_{hom}$  erfüllt die Differentialgleichung

$$\Delta \vec{A}_{hom}(\vec{r}) = 0 \quad (51)$$

und dient zur Erfüllung der Randbedingungen an der Oberfläche des Materials. Zu beachten ist, daß die Volumsintegration in Gleichung 50 wieder nur über den Raumbereich ausgeführt werden darf, den das Material (mit der Permeabilitätskonstanten  $\mu$ ) ausfüllt.

### Feldlinienverlauf an der Grenzfläche zweier Medien

Der magnetische Feldlinienverlauf an der Grenzfläche zweier magnetischer Materialien ergibt sich analog wie in Kapitel XII.1.A der elektrische Feldlinienverlauf an der Grenzfläche zweier dielektrischer Materialien.

Wir betrachten wieder die Grenzfläche zweier Medien, welche die skalaren Permeabilitätskonstanten  $\mu_1$  bzw.  $\mu_2$  besitzen. Die Winkel zwischen der magnetischen Feldstärke und der Flächennormalen sei im Medium 1 durch  $\alpha_1$  und im Medium 2 durch  $\alpha_2$  gegeben. Falls keine Oberflächenstromdichte vorhanden ist, folgen aus der Stetigkeit der Tangentialkomponenten von  $\vec{H}$  und der Stetigkeit der Normalkomponenten von  $\vec{B}$  die Gleichungen

$$H_1 \sin \alpha_1 = H_2 \sin \alpha_2 \quad , \quad \mu_1 H_1 \cos \alpha_1 = \mu_2 H_2 \cos \alpha_2 \quad , \quad (52)$$

aus denen sofort das Brechungsgesetz für die magnetischen Feldlinien

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\mu_1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\mu_2} \quad (53)$$

folgt. Bezeichnet man als das magnetisch dichtere Medium wieder jenes mit dem größeren Wert von  $\mu$ , dann folgt aus Gleichung 53 die Feststellung, daß beim Übergang in ein dichteres Medium die Feldlinien von der Flächennormalen weggebrochen werden.

## XII.3.B. Lösungsmethoden für Probleme der Magnetostatik

### Methode der direkten Integration

Bei Problemen mit entsprechender Symmetrie (z.B. gerader zylinderförmiger Leiter) können die Gleichungen 45 direkt integriert werden (Stokes'scher Integralsatz).

### Methode des Bildströme

Bei dieser Lösungsmethode werden fiktive Stromdichten (Spiegelströme) so geeignet angeordnet gewählt, daß in einem bestimmten Raumbereich die gleiche Differentialgleichung und die gleichen Randbedingungen erfüllt werden wie von den wirklichen Stromdichten.

### Methode des skalaren magnetischen Potentials

In allen Raumgebieten, in denen keine Quellstromdichte  $\vec{j}$  vorhanden ist, in denen also  $\vec{j}(\vec{r}) = 0$  gilt, folgt aus der dann gültigen Maxwellgleichung  $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$  die Möglichkeit, die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  als Gradient eines skalaren magnetischen Potentials  $\phi_M$  darzustellen:

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\operatorname{grad} \phi_M(\vec{r}) \quad . \quad (54)$$

### Vektorpotentialmethode

Die allgemeinste Methode zur Lösung magnetostatischer Probleme besteht in der Lösung der Poissongleichung für das Vektorpotential  $\vec{A}$  und der Anpassung an die Randbedingungen durch die Verwendung einer homogenen Lösung.

Wir wollen im folgenden ein Beispiel betrachten, bei dem die Methode des skalaren magnetischen Potentials verwendet wird.

### XII.3.C. Homogen magnetisierte Kugel

Im Koordinatenursprung befinde sich eine homogen magnetisierte Kugel mit dem Radius  $R$ , deren Magnetisierung durch

$$\vec{M}(\vec{r}) = \begin{cases} M \vec{e}_z & \text{für } r < R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (55)$$

gegeben sei.

#### Skalares magnetisches Potential

Da für das vorliegende Problem die Stromdichte  $\vec{j}$  im gesamten Raum Null ist, können wir die magnetische Feldstärke überall im Raum als Gradientenfeld darstellen:

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\text{grad } \phi_M(\vec{r}) \quad . \quad (56)$$

Aus der homogenen Maxwellgleichung für  $\text{div } \vec{B}$  folgt unter Verwendung der Materialgleichung 46 die Beziehung

$$\text{div } \vec{B}(\vec{r}) = \text{div} \left( \vec{H}(\vec{r}) + 4\pi \vec{M}(\vec{r}) \right) = 0 \quad \text{d.h.} \quad \text{div } \vec{H}(\vec{r}) = -4\pi \text{div } \vec{M}(\vec{r}) \quad . \quad (57)$$

Somit ergibt sich für das skalare magnetische Potential die Bestimmungsgleichung

$$\Delta \phi_M(\vec{r}) = 4\pi \text{div } \vec{M}(\vec{r}) \quad . \quad (58)$$

#### Potential im Innenraum und im Außenraum

Wir verwenden dem Problem angepaßte Kugelkoordinaten  $r$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$  und betrachten den Außenraum  $r > R$  und den Innenraum  $r < R$  getrennt.

Da sowohl im Innenraum als auch im Außenraum die Divergenz der Magnetisierung  $\vec{M}$  verschwindet, gilt in beiden Bereichen die homogene Gleichung

$$\Delta \phi_M(r, \vartheta, \varphi) = 0 \quad , \quad (59)$$

welche die folgende spezielle Lösung besitzt:

$$\phi_{Ma}(r, \vartheta) = \frac{a}{r^2} \cos \vartheta \quad (\text{für } r > R) \quad , \quad \phi_{Mi}(r, \vartheta) = b r \cos \vartheta \quad (\text{für } r < R) \quad (60)$$

(wir haben diese spezielle Lösung in Anlehnung an die Lösung der Aufgabe XII.1.D gewählt und können mit dieser Lösung die Randbedingungen auf der Kugeloberfläche erfüllen, womit dieser spezielle Lösungsansatz gerechtfertigt ist).

#### Randbedingungen auf der Kugeloberfläche

Die Randbedingungen auf der Kugeloberfläche  $r = R$  ergeben sich aus der Stetigkeit der Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärke  $\vec{H}$  und der Stetigkeit der Normalkomponente (= Radialkomponente) der magnetischen Induktion  $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M}$  zu

$$-\frac{\partial \phi_{Mi}}{\partial \vartheta} \Big|_{r=R} = -\frac{\partial \phi_{Ma}}{\partial \vartheta} \Big|_{r=R} \quad , \quad -\frac{\partial \phi_{Mi}}{\partial r} \Big|_{r=R} + 4\pi \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r} \Big|_{r=R} = -\frac{\partial \phi_{Ma}}{\partial r} \Big|_{r=R} \quad . \quad (61)$$

Durch Einsetzen aus den Gleichungen 60 und 55 in diese Randbedingungen ergeben sich die beiden folgenden Gleichungen

$$b R \sin \vartheta = \frac{a}{R^2} \sin \vartheta \quad , \quad -b \cos \vartheta + 4\pi M \cos \vartheta = \frac{2a}{R^3} \cos \vartheta \quad , \quad (62a)$$

aus denen die Koeffizienten  $a$  und  $b$  bestimmt werden können:

$$a = \frac{4\pi R^3}{3} M \quad , \quad b = \frac{4\pi}{3} M \quad . \quad (62b)$$

Die gesamte Lösung für das skalare magnetische Potential kann somit in der Form

$$\phi_{Ma}(\vec{r}) = \frac{\vec{r} \cdot \vec{m}}{r^3} \quad , \quad \phi_{Mi}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{3} M r \cos \vartheta \quad , \quad (63a)$$

geschrieben werden, wobei

$$\vec{m} = \frac{4\pi R^3}{3} M \vec{e}_z \quad (63b)$$

das gesamte magnetische Dipolmoment der Kugel ist. Innerhalb der Kugel besitzen somit  $\vec{H}$  als auch  $\vec{B}$  nur eine  $z$ -Komponente und es gelten die Gleichungen

$$\vec{H} = -\frac{4\pi}{3} \vec{M} \quad , \quad \vec{B} = \frac{8\pi}{3} \vec{M} \quad . \quad (64)$$

Außerhalb der Kugel haben wir ein reines Dipolfeld vorliegen, dessen Stärke durch das magnetische Dipolmoment  $\vec{m}$  entsprechend Gleichung 63b gegeben ist.

### XII.3.D. Kugel in einem homogenen magnetischen Feld

Wir betrachten nun eine Kugel, welche sich in einem äußeren homogenen Magnetfeld

$$\vec{B}_o(\vec{r}) = \vec{B}_o = B_o \vec{e}_z \quad (65)$$

befindet. Mittels der Ergebnisse von Beispiel XII.3.C können wir die magnetischen Felder **innerhalb der Kugel** sofort angeben:

$$\vec{H} = \vec{B}_o - \frac{4\pi}{3} \vec{M} \quad , \quad \vec{B} = \vec{B}_o + \frac{8\pi}{3} \vec{M} \quad . \quad (66)$$

#### Dia- oder paramagnetische Kugel

Für eine dia- oder paramagnetische Kugel gilt die Materialbeziehung

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad , \quad (67)$$

welche unter Verwendung der Gleichungen 66 in der Form

$$\vec{B}_o + \frac{8\pi}{3} \vec{M} = \mu \left( \vec{B}_o - \frac{4\pi}{3} \vec{M} \right) \quad (68)$$

geschrieben werden kann. Hieraus folgt die Magnetisierung  $\vec{M}$  zu

$$\vec{M} = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \frac{3}{4\pi} \vec{B}_o \quad . \quad (69)$$

### Ferromagnetische Kugel

Bei einem ferromagnetischen Material gilt anstelle einer linearen Materialgleichung eine nichtlineare Beziehung, welche z.B. in der Form einer **Magnetisierungskurve**

$$\vec{M} = \vec{M}(\vec{H}) \quad (70)$$

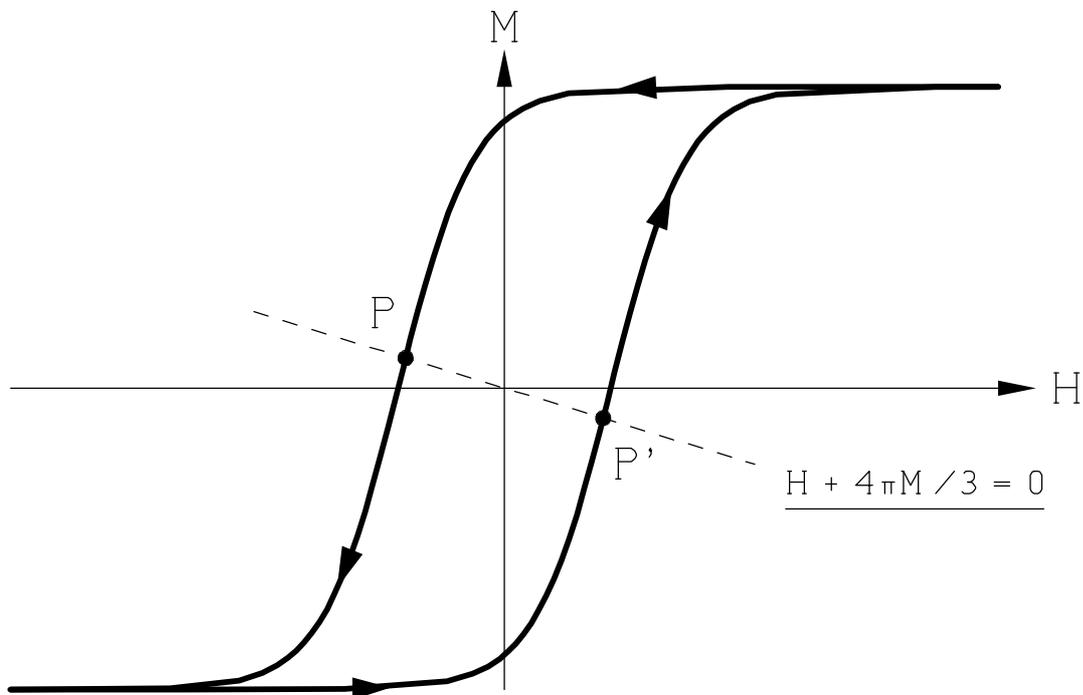
vorliegen kann. Zusammen mit der Beziehung von Gl. 66

$$\vec{H} = \vec{B}_o - \frac{4\pi}{3} \vec{M}$$

legt diese Magnetisierungskurve die Werte von  $\vec{H}$  und  $\vec{M}$  (und somit auch von  $\vec{B}$ ) bei gegebenem äußeren Feld  $\vec{B}_o$  fest. Auch ohne äußeres Feld ergeben sich bei einer Magnetisierungskurve mit Hysterese von Null verschiedene Werte für  $\vec{B}$  und  $\vec{H}$ , wie dies in Fig. 12.3 angedeutet ist.

Eliminieren wir die Magnetisierung  $\vec{M}$  aus den Gleichungen 66, so erhalten wir einen linearen Zusammenhang zwischen  $\vec{B}$  und  $\vec{H}$  :

$$\vec{B} + 2\vec{H} = 3\vec{B}_o \quad . \quad (71)$$



**Fig. 12.3** Magnetisierungskurve eines ferromagnetischen Materials mit den Einstellpunkten einer Kugel ohne äußeres Magnetfeld (schematisch, nicht maßstabsgetreu)

## XII.4. Energie und Kräfte im magnetischen Feld

### XII.4.A. Feldenergie in einem magnetisierbaren Medium

Gemäß der allgemeinen Gleichung XI.63 ergibt sich für ein magnetisierbares Material mit einer skalaren, feldunabhängigen Permeabilitätskonstanten  $\mu$  die gesamte magnetostatische Energie zu

$$W = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{H}(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \frac{\vec{B}(\vec{r})^2}{\mu(\vec{r})} \quad . \quad (72)$$

#### Änderung der Feldenergie bei einer Bewegung der Materie

Betrachten wir eine hinreichend kleine Bewegung der Materie, wobei sich an der Stelle  $\vec{r}$  die magnetische Induktion  $\vec{B}(\vec{r})$  um  $\delta\vec{B}(\vec{r})$  und die Permeabilitätskonstante  $\mu(\vec{r})$  um  $\delta\mu(\vec{r})$  ändert, so ergibt sich für die Änderung der gesamten magnetostatischen Feldenergie bei alleiniger Berücksichtigung von Termen erster Ordnung der Ausdruck

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int d^3r \vec{H}(\vec{r}) \cdot \delta\vec{B}(\vec{r}) - \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{H}(\vec{r})^2 \delta\mu(\vec{r}) \quad . \quad (73)$$

Betrachten wir ein **nichtleitendes Material**, so gilt im Bereich des Materials die Maxwellgleichung  $\text{rot } \vec{H} = 0$  und die magnetische Feldstärke kann somit als Gradientenfeld eines skalaren magnetischen Potentials  $\phi_M$  dargestellt werden:

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\text{grad } \phi_M(\vec{r}) \quad .$$

Hiemit folgt aber nun

$$\begin{aligned} \int d^3r \vec{H} \cdot \delta\vec{B} &= - \int d^3r \delta\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \phi_M \\ &= - \int d^3r \vec{\nabla} \cdot (\delta\vec{B} \phi_M) + \int d^3r \phi_M \underbrace{\text{div } \delta\vec{B}}_0 = 0 \quad , \end{aligned}$$

so daß wir Gleichung 73 in der Form

$$\delta W = -\frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{H}(\vec{r})^2 \delta\mu(\vec{r}) \quad (74)$$

schreiben können.

### XII.4.B. Kraftdichte in einem magnetisierbaren Material

Wir betrachten analog zu der Ableitung der elektrostatischen Kraftdichte in Kapitel XII.2.B wieder eine kleine Verschiebung  $\delta\vec{s}(\vec{r})$  der an der Stelle  $\vec{r}$  befindlichen Materieteilchen. Die bei dieser kleinen Verschiebung aufgrund der Kraftdichte  $\vec{f}(\vec{r})$  an der Materie geleistete Arbeit entspricht wieder der Abnahme der magnetostatischen Feldenergie:

$$\int d^3r \vec{f}(\vec{r}) \cdot \delta\vec{s}(\vec{r}) = -\delta W \quad . \quad (75)$$

Zur Berechnung der Kraftdichte drücken wir wieder den in Gleichung 74 angegebenen Ausdruck für die Änderung der magnetostatischen Feldenergie durch die Verschiebungen  $\delta\vec{s}(\vec{r})$  aus.

Unter der Voraussetzung, daß die skalare Permeabilitätskonstante  $\mu$  wieder nur eine Funktion der Massendichte  $\sigma$  ist, erhalten wir für die Änderung dieser Konstanten den zu Gleichung 32b analogen Ausdruck

$$\delta\mu = \frac{d\mu}{d\sigma} \delta\sigma = -\frac{d\mu}{d\sigma} \operatorname{div}(\sigma(\vec{r}) \delta\vec{s}(\vec{r})) \quad . \quad (76)$$

Einsetzen in Gleichung 74 ergibt nun

$$\begin{aligned} -\delta W &= \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{H}(\vec{r})^2 \delta\mu(\vec{r}) \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{H}(\vec{r})^2 \frac{d\mu}{d\sigma} \vec{\nabla} \cdot (\sigma(\vec{r}) \delta\vec{s}(\vec{r})) \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d^3r \sigma(\vec{r}) \delta\vec{s}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \left( \vec{H}(\vec{r})^2 \frac{d\mu}{d\sigma} \right) \quad , \end{aligned}$$

woraus für die Kraftdichte  $\vec{f}(\vec{r})$  der folgende Ausdruck gewonnen werden kann:

$$\vec{f}(\vec{r}) = \frac{\sigma(\vec{r})}{8\pi} \vec{\nabla} \left( \vec{H}(\vec{r})^2 \frac{d\mu}{d\sigma} \right) \quad (77a)$$

bzw. nach einer Umformung

$$\vec{f}(\vec{r}) = -\frac{1}{8\pi} \vec{H}(\vec{r})^2 \vec{\nabla}\mu(\vec{r}) + \frac{1}{8\pi} \vec{\nabla} \left( \vec{H}(\vec{r})^2 \frac{d\mu}{d\sigma} \sigma(\vec{r}) \right) \quad . \quad (77b)$$

Der letzte Term in diesem Ausdruck gibt wieder den Effekt der **Magnetostriktion** an. Dieser Term gibt bei der Berechnung der Gesamtkraft auf ein magnetisches Material keinen Beitrag, so daß für die Berechnung der Gesamtkraft wieder die formal aus dem Maxwell'schen Spannungstensor (siehe Gleichung XI.65) folgende Kraftdichte

$$f_k(\vec{r}) = \partial_i T_{ik}(\vec{r}) = \partial_i \frac{1}{4\pi} B_i(\vec{r}) H_k(\vec{r}) - \partial_i \delta_{ik} \frac{1}{8\pi} H_j(\vec{r}) B_j(\vec{r}) = -\frac{1}{8\pi} \vec{H}(\vec{r})^2 \partial_k \mu(\vec{r}) \quad (78)$$

verwendet werden kann.