

ELEKTRODYNAMIK UND RELATIVITÄTSTHEORIE

Kapitel 11: Grundgleichungen (Materie)

Vorlesung für Studenten der Technischen Physik

Helmut Nowotny

Technische Universität Wien

Institut für Theoretische Physik

7., von A. Rebhan korrigierte Auflage

Wien, Februar 2006

Teil 3: ELEKTRODYNAMIK IN MATERIE

XI. GRUNDGLEICHUNGEN (Materie)

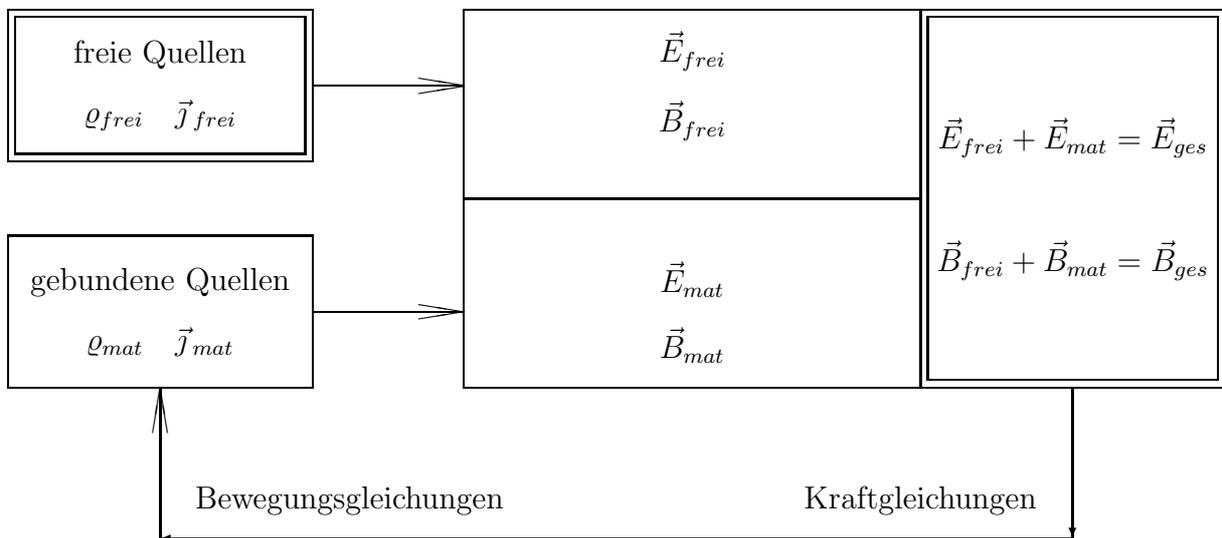
XI.1. Aufteilung der Quellen, Elektronentheorie

XI.1.A. Übersicht

Die bisher formulierte Theorie war eine Theorie von **Ladungen und Strömen im Vakuum**. Diese Theorie entspricht weitgehend der **mikroskopischen Struktur der Welt**.

Bei Anwesenheit von materiellen Medien müssen wir aber nun die Quellen der elektromagnetischen Felder in die **freien Quellen**, welche direkt experimentell steuerbar sind, und in die **gebundenen Quellen der Materie** aufteilen. Diese gebundenen Quellen sind nicht direkt experimentell steuerbar, sondern sie werden durch die **Rückwirkung der elektromagnetischen Felder** geändert. Eine Berechnung dieser Rückwirkung ist nur unter Zugrundelegung von Modellen für die Materie möglich und auch dann meistens nur näherungsweise durchführbar.

Aufteilung der Quellen



Für die von den freien Quellen verursachten Teilfelder gelten die folgenden Maxwellgleichungen:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \vec{E}_{frei} &= 4\pi \rho_{frei} & , & \quad \operatorname{rot} \vec{E}_{frei} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_{frei} & , \\
 \operatorname{rot} \vec{B}_{frei} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{frei} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_{frei} & , & \quad \operatorname{div} \vec{B}_{frei} = 0 & .
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Analog gelten für die von den gebundenen Quellen verursachten Teilfelder \vec{E}_{mat} und \vec{B}_{mat} die mikroskopischen Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E}_{mat} &= 4\pi \varrho_{mat} & , & \quad \operatorname{rot} \vec{E}_{mat} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_{mat} & , \\ \operatorname{rot} \vec{B}_{mat} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{mat} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_{mat} & , & \quad \operatorname{div} \vec{B}_{mat} = 0 & . \end{aligned} \quad (2)$$

Die Gleichungen für die Gesamtfelder \vec{E}_{ges} und \vec{B}_{ges} entsprechen jeweils der Summe zweier Teilgleichungen (und stellen somit keine weiteren unabhängigen Gleichungen dar):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E}_{ges} &= 4\pi (\varrho_{frei} + \varrho_{mat}) & , & \quad \operatorname{rot} \vec{E}_{ges} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_{ges} & , \\ \operatorname{rot} \vec{B}_{ges} &= \frac{4\pi}{c} (\vec{j}_{frei} + \vec{j}_{mat}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_{ges} & , & \quad \operatorname{div} \vec{B}_{ges} = 0 & . \end{aligned} \quad (3)$$

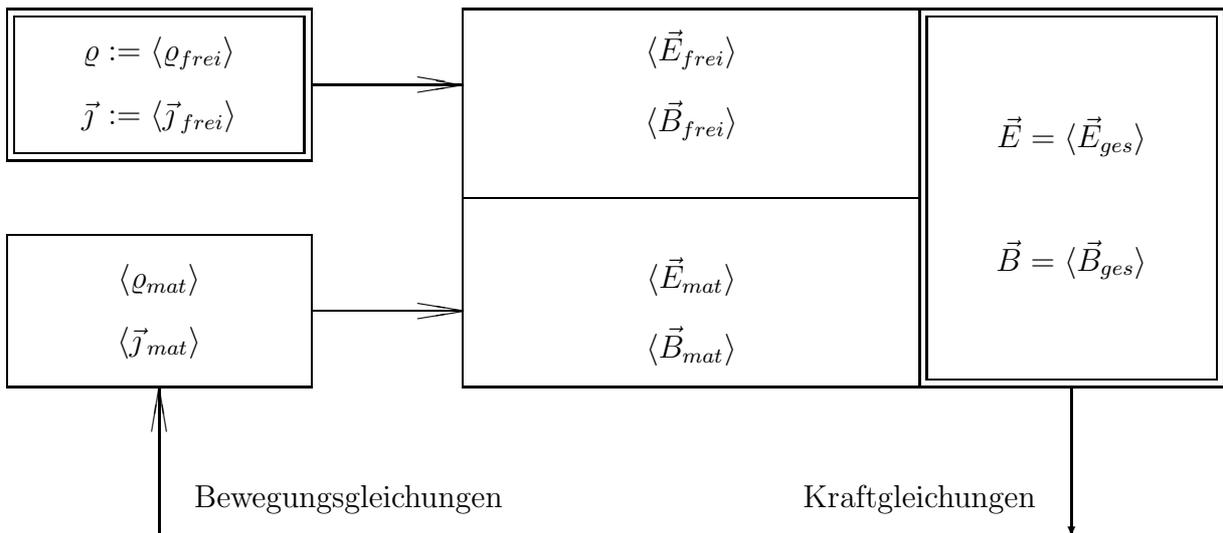
XI.1.B. Mittelwertbildung

Um die Rückwirkung der Felder auf die gebundenen Quellen der Materie zu beschreiben, müssen die Felder \vec{E}_{mat} und \vec{B}_{mat} als Funktionale der Gesamtfelder berechnet werden:

$$\vec{E}_{mat} = \vec{E}_{mat}[\vec{E}_{ges}, \vec{B}_{ges}] \quad , \quad \vec{B}_{mat} = \vec{B}_{mat}[\vec{E}_{ges}, \vec{B}_{ges}] \quad . \quad (4)$$

Eine derartige Berechnung ist innerhalb eines materiellen Mediums nicht sehr sinnvoll, da sich die Werte dieser Felder räumlich sehr stark ändern, wenn man von einem Atom zum nächsten Atom geht.

Gemittelte Quellen und Felder



Nach der Elektronentheorie von Lorentz ist eine derartige Berechnung erst dann sinnvoll möglich, wenn wir die von der atomistischen Struktur der Materie stammenden starken Schwankungen in diesen Feldgrößen durch einen räumlichen und gegebenenfalls auch

zeitlichen **Glättungsprozess** eliminieren, hiebei aber nicht die von den freien Quellen verursachte raumzeitliche Veränderung verwischen.

Die Mittelung erfolgt mit einer geeigneten, auf Eins normierten Gewichtsfunktion $f(\vec{r}', t')$ entsprechend der Gleichung

$$\langle \vec{E}_{mat}(\vec{r}, t) \rangle := \int d^3r' dt' f(\vec{r}', t') \vec{E}_{mat}(\vec{r} + \vec{r}', t + t') \quad . \quad (5)$$

Da diese Mittelwertbildung mit den Differentialoperationen $\vec{\nabla}$ und $\frac{\partial}{\partial t}$ vertauschbar ist, können wir die folgenden **gemittelten Maxwellgleichungen** für die freien Quellterme

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \langle \vec{E}_{frei} \rangle &= 4\pi \varrho & , & \quad \operatorname{rot} \langle \vec{E}_{frei} \rangle = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{B}_{frei} \rangle & , \\ \operatorname{rot} \langle \vec{B}_{frei} \rangle &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{E}_{frei} \rangle & , & \quad \operatorname{div} \langle \vec{B}_{frei} \rangle = 0 & , \end{aligned} \quad (6)$$

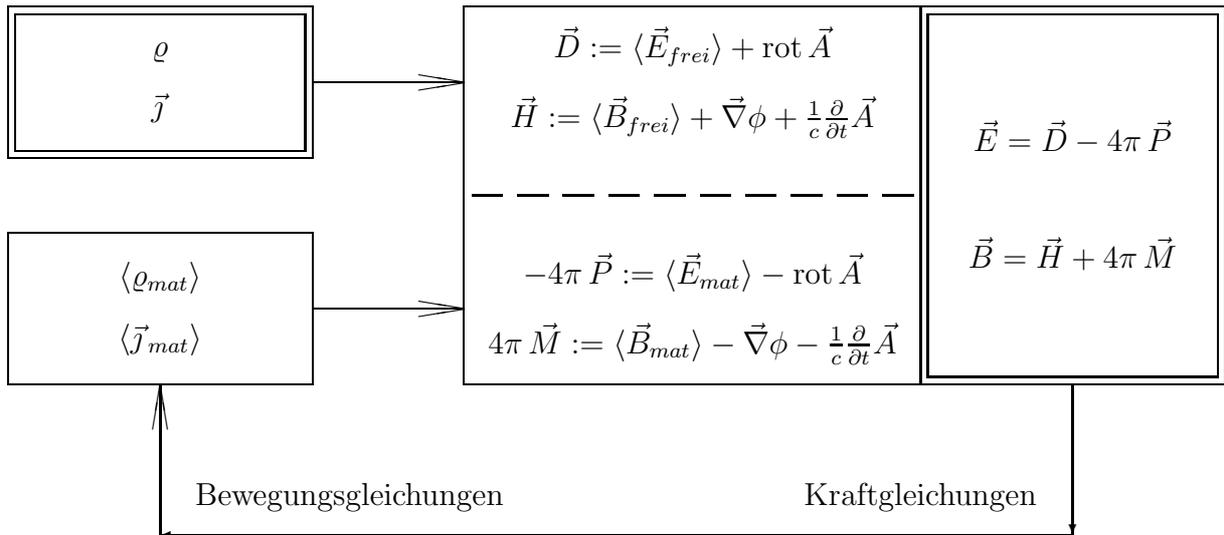
und für die gemittelten gebundenen Quellterme

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \langle \vec{E}_{mat} \rangle &= 4\pi \langle \varrho_{mat} \rangle & , & \quad \operatorname{rot} \langle \vec{E}_{mat} \rangle = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{B}_{mat} \rangle & , \\ \operatorname{rot} \langle \vec{B}_{mat} \rangle &= \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j}_{mat} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{E}_{mat} \rangle & , & \quad \operatorname{div} \langle \vec{B}_{mat} \rangle = 0 & , \end{aligned} \quad (7)$$

anschreiben. Für die Gesamtfelder \vec{E} und \vec{B} folgen hieraus die Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi \varrho + 4\pi \langle \varrho_{mat} \rangle & , & \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} & , \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j}_{mat} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} & , & \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 & . \end{aligned} \quad (8)$$

XI.1.C. Modifikation der Teilfelder



Mit den von den freien und den gebundenen Quellen stammenden Teilfeldern können die in der graphischen Darstellung angegebenen neuen Größen

\vec{D} : dielektrische Verschiebung, elektrische Verschiebung, elektrische Induktion

\vec{H} : magnetische Feldstärke

\vec{P} : (dielektrische) Polarisierung

\vec{M} : Magnetisierung

gebildet werden. In Fig. 11.1 ist diese Modifikation der Teilfelder für ein konkretes Beispiel (dielektrische Kugel in einem homogenen elektrischen Feld) graphisch veranschaulicht (dieses Beispiel wird im Kapitel XII.1.D. noch ausführlicher behandelt).

Hiemit können nun die **gemittelten Maxwellgleichungen umgeschrieben** werden.

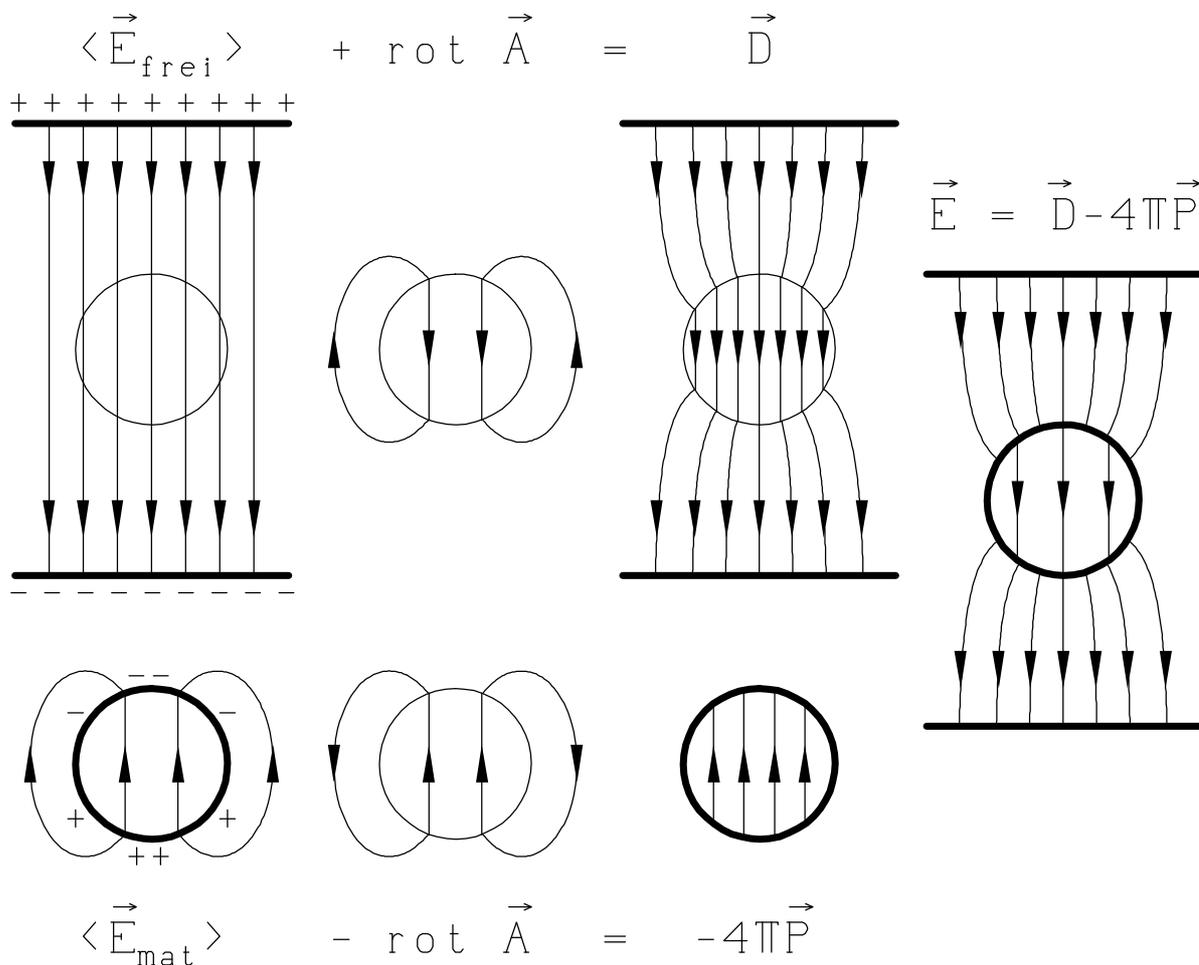


Fig. 11.1 Modifikation der Teilfelder am Beispiel einer dielektrischen Kugel in einem homogenen elektrischen Feld
(die zugehörigen Gleichungen sind im Kapitel XII.1.D. angegeben)

Die Gleichungen, welche weder die gebundenen Quellen noch die Umformungsgrößen ϕ oder \vec{A} enthalten, lauten

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi \varrho & , & \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} & , \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} & , & \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 & . \end{aligned} \quad (9)$$

Die Gleichungen, welche die gebundenen Quellterme beinhalten, sind

$$\operatorname{div} (-4\pi \vec{P}) = 4\pi \langle \varrho_{mat} \rangle , \quad (10a)$$

$$\operatorname{rot} (4\pi \vec{M}) = \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j}_{mat} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (-4\pi \vec{P}) , \quad (10b)$$

sowie

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \varrho + 4\pi \langle \varrho_{mat} \rangle , \quad (11a)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j}_{mat} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} . \quad (11b)$$

Wie leicht zu sehen ist, sind die Gleichungen 11a und 11b durch einfache Addition aus den Gleichungen 9 und 10a bzw. 10b zu erhalten und müssen daher im folgenden nicht mehr gesondert beachtet werden.

Nicht ausgewertet werden im allgemeinen die Gleichungen, welche die Umformungsgrößen ϕ und \vec{A} enthalten:

$$\operatorname{rot} \vec{D} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} + \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi \right) - \square \vec{A} , \quad (12a)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = \operatorname{div} \left(\operatorname{grad} \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) , \quad (12b)$$

$$\operatorname{rot} (-4\pi \vec{P}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (4\pi \vec{M}) - \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi \right) + \square \vec{A} , \quad (12c)$$

$$\operatorname{div} (4\pi \vec{M}) = -\operatorname{div} \left(\operatorname{grad} \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) . \quad (12d)$$

Vielmehr legt man die Größen ϕ und \vec{A} indirekt durch Forderungen an die Polarisation \vec{P} und die Magnetisierung \vec{M} fest.

Festlegung von \vec{P} und \vec{M}

Die Polarisation \vec{P} und die Magnetisierung \vec{M} werden so festgelegt, daß diese Größen **außerhalb der gebundenen Quellbereiche Null sind**. Innerhalb der Quellbereiche sind die Polarisation \vec{P} und die Magnetisierung \vec{M} aus den Gleichungen 10a und 10b als Funktionale der Felder \vec{E} und \vec{B} zu bestimmen:

$$\vec{P} = \vec{P}[\vec{E}, \vec{B}] , \quad \vec{M} = \vec{M}[\vec{E}, \vec{B}] . \quad (13)$$

Auf Grund der Beziehungen

$$\vec{E} = \vec{D} - 4\pi \vec{P} \quad , \quad \vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M} \quad , \quad (14)$$

können die Funktionale in Gleichung 13 auch in den Variablen \vec{E} , \vec{H} oder \vec{D} , \vec{B} oder auch \vec{D} , \vec{H} angegeben werden. Diese Funktionale stellen zusammen mit den Gleichungen 9 und 14 ein vollständiges System von Bestimmungsgleichungen für alle Feldgrößen bei gegebenen freien Quellen ϱ und \vec{j} dar.

Die Gleichungen 10a und 10b können unter Verwendung der Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \varrho_P &:= \langle \varrho_{mat} \rangle && \text{Polarisationsladungsdichte} \\ \vec{j}_P &:= \frac{\partial}{\partial t} \vec{P} && \text{Polarisationsstromdichte} \\ \vec{j}_M &:= \langle \vec{j}_{mat} \rangle - \vec{j}_P && \text{Magnetisierungsstromdichte} \end{aligned} \quad (15)$$

in der Form

$$\text{div } \vec{P} = -\varrho_P \quad , \quad \text{rot } \vec{M} = \frac{1}{c} \vec{j}_M \quad (16)$$

geschrieben werden. Integrieren wir diese Gleichungen über ein Volumen, welches den gesamten gebundenen Quellbereich umschließt, bzw. über eine Fläche, welche diesen gebundenen Quellbereich völlig durchschneidet, so erhalten wir

$$\int d^3r \varrho_P = 0 \quad , \quad \int d^2f \cdot \vec{j}_M = 0 \quad . \quad (17)$$

Diese Gleichungen stellen somit bestimmte Bedingungen an die gebundenen Quellen der Materie: die Gesamtladung der Materie muß Null sein und es darf insgesamt durch keine Schnittfläche ein Magnetisierungsstrom fließen.

Schreiben wir die Gleichungen 16 in der Form

$$-\vec{r} \text{ div } \vec{P} = \vec{r} \varrho_P \quad , \quad \vec{r} \times \text{rot } \vec{M} = \frac{1}{c} \vec{r} \times \vec{j}_M \quad , \quad (18)$$

so erhalten wir durch eine Volumintegration über den gesamten gebundenen Quellbereich die Beziehungen

$$\int d^3r \vec{P} = \int d^3r \vec{r} \varrho_P \quad , \quad \int d^3r \vec{M} = \frac{1}{2c} \int d^3r \vec{r} \times \vec{j}_M \quad , \quad (19)$$

welche erst die Polarisation \vec{P} und die Magnetisierung \vec{M} eindeutig festlegen.

XI.2. Makroskopische Maxwellgleichungen

XI.2.A. Maxwellgleichungen

Aus den gemittelten mikroskopischen Maxwellgleichungen 8

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi \varrho + 4\pi \langle \varrho_{mat} \rangle & , & \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} & , \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j}_{mat} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} & , & \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 & . \end{aligned} \quad (20)$$

können die **makroskopischen Maxwellgleichungen** durch die Ansätze

$$\langle \varrho_{mat} \rangle = -\operatorname{div} \vec{P} \quad , \quad \langle \vec{j}_{mat} \rangle = c \operatorname{rot} \vec{M} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{P} \quad , \quad (21)$$

erhalten werden:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\vec{E} + 4\pi \vec{P}) &= 4\pi \varrho & , & \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} & , \\ \operatorname{rot} (\vec{B} - 4\pi \vec{M}) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} + 4\pi \vec{P}) & , & \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 & . \end{aligned} \quad (22)$$

Unter Einführung der **neuen Felder**

$$\vec{D} := \vec{E} + 4\pi \vec{P} \quad , \quad \vec{H} := \vec{B} - 4\pi \vec{M} \quad , \quad (23)$$

können die makroskopischen Maxwellgleichungen (**phänomenologischen Maxwellgleichungen**) in der Kurzform (siehe Gleichung 9)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi \varrho & , & \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} & , \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} & , & \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 & , \end{aligned} \quad (24)$$

geschrieben werden.

XI.2.B. Materialgleichungen

Da die makroskopischen Maxwellgleichungen nur die Quellen der Felder \vec{D} und \vec{B} und die Wirbel der Felder \vec{E} und \vec{H} festlegen, braucht man zur Lösung dieser Gleichungen weitere Beziehungen, welche als **Materialgleichungen** bezeichnet werden. Es sind dies die Gleichungen 23 zusammen mit den Funktionalbeziehungen von Gleichung 13

$$\vec{P} = \vec{P}[\vec{E}, \vec{H}] \quad , \quad \vec{M} = \vec{M}[\vec{E}, \vec{H}] \quad . \quad (25)$$

In einfachster Näherung ergeben sich für mikroskopisch schwache Felder die linearen Beziehungen

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E} \quad , \quad \vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad , \quad (26)$$

wobei χ_e als **elektrische Suszeptibilität** und χ_m als **magnetische Suszeptibilität** bezeichnet werden. Diese Suszeptibilitäten sind Materialkonstanten, welche für ein **isotropes Material skalare Größen** und für anisotrope Materialien, z.B. Einkristalle, symmetrische Tensoren zweiter Stufe sind.

Unter Verwendung der Feldrelationen 23 können diese Beziehungen auch in der Form

$$\vec{D} = (1 + 4\pi \chi_e) \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad , \quad \vec{B} = (1 + 4\pi \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H} \quad , \quad (27)$$

geschrieben werden, wobei die neuen Materialkonstanten

$$\epsilon = 1 + 4\pi \chi_e \quad , \quad \mu = 1 + 4\pi \chi_m \quad , \quad (28)$$

als **Dielektrizitätskonstante** bzw. als **Permeabilitätskonstante** (magnetische Permeabilität) des Materials bezeichnet werden.

Einteilung der Materialien im Hinblick auf ihre dielektrischen Eigenschaften

$\epsilon > 1$: **dielektrisches Material**

$\epsilon \gg 1$: **ferroelektrisches Material**

Einteilung der Materialien im Hinblick auf ihre magnetischen Eigenschaften

$\mu < 1$: **diamagnetisches Material**

$\mu > 1$: **paramagnetisches Material**

$\mu \gg 1$: **ferromagnetisches Material**

Bei den ferromagnetischen Materialien liegt üblicherweise kein linearer Zusammenhang zwischen der magnetischen Feldstärke \vec{H} und der magnetischen Induktion \vec{B} vor, sondern eine stark materialabhängige Magnetisierungskurve mit Hysteresisschleife (eine analoge Aussage gilt auch für die ferroelektrischen Materialien).

Einteilung der Materialien im Hinblick auf ihre elektrische Stromleitung

Nichtleiter: $\vec{j} = 0$ bei vorhandenem \vec{E} -Feld

Leiter: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

Die Materialkonstante σ wird als spezifische elektrische Leitfähigkeit, der Kehrwert $\rho = \frac{1}{\sigma}$ als spezifischer elektrischer Widerstand bezeichnet.

XI.2.C. Randbedingungen an der Grenzfläche zweier Medien

Wenden wir die aus den Maxwellgleichungen 24 folgenden Integralbeziehungen

$$\begin{aligned} \oint_{R(V)} d^2\vec{f} \cdot \vec{D} &= \int_V d^3r \, 4\pi\rho & , & \quad \oint_{R(F)} d\vec{s} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_F d^2\vec{f} \cdot \vec{B} & , \\ \oint_{R(V)} d^2\vec{f} \cdot \vec{B} &= 0 & , & \quad \oint_{R(F)} d\vec{s} \cdot \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \int_F d^2\vec{f} \cdot \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_F d^2\vec{f} \cdot \vec{D} & , \end{aligned} \quad (29)$$

auf kleine Volumsbereiche bzw. Flächenbereiche an der Grenzfläche zweier verschiedener Materialien an, so erhalten wir die folgenden Grenzbedingungen:

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) &= 4\pi\sigma & , & \quad \vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 & , \\ \vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) &= 0 & , & \quad \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \vec{k} & . \end{aligned} \quad (30)$$

Hiebei entspricht σ einer **Flächenladungsdichte** und \vec{k} einer **Flächenstromdichte** (diese Flächendichten sind Ladungsdichte bzw. Stromdichte über die Grenzschichtdicke integriert). Die Indizes 1 und 2 bezeichnen jeweils die zugehörige Feldgröße im Material 1 bzw. 2 und \vec{n} bezeichnet die Richtung der Flächennormalen (vom Material 1 zum Material 2 gerichtet).

Ohne das Vorhandensein von Flächendichten können die Gleichungen 30 in der folgenden Form zusammengefaßt werden: Die **Normalkomponenten** von \vec{D} und \vec{B} sowie die **Tangentialkomponenten** von \vec{E} und \vec{H} sind an den Grenzflächen zweier Materialien stetig.

Die Gleichungen 30 können bei bekanntem \vec{D} -Feld bzw. \vec{H} -Feld auch als Bestimmungsgleichungen für die Flächenladungsdichte σ bzw. für die Flächenstromdichte \vec{k} angesehen werden.

XI.2.D. Einheitensysteme

Die für das Gaußsche Maßsystem und das SI-System gültigen Beziehungen und Einheiten sind im Anhang B angegeben. Durch die Verschiedenartigkeit dieser beiden Maßsysteme ergeben sich ungewohnte Verhältnisse, z.B. werden \vec{H} und \vec{M} im SI-System in Ampere/meter gemessen und im Gaußschen Maßsystem werden \vec{H} und \vec{M} in Oersted gemessen. Trotzdem hängt die Umrechnung von Ampere/meter auf Oersted davon ab, ob \vec{H} oder \vec{M} umgerechnet werden sollen.

William Fuller Brown, Jr., gibt hiezu in seinem *Tutorial Paper on Dimensions and Units* den folgenden Kommentar:

If this seems a bit arbitrary and confusing, bear in mind two principles: first, dimensions are the invention of man, and man is at liberty to assign them in any way he pleases, as long as he is consistent throughout any one interrelated set of calculations. Second, international committees arrive at their decisions by the same irrational procedures as do various IEEE committees that you have served on.

XI.3. Materialeigenschaften, Dispersionsrelationen

XI.3.A. Grenzen der Anwendbarkeit der Materialgleichungen

Dielektrizitätskonstante ε

Um in den gemittelten Maxwellgleichungen die atomistische Struktur der Materie auszumitteln muß der räumliche Mittelungsbereich viele Atome umfassen, d.h. er muß in seiner linearen Ausdehnung wesentlich größer als der Abstand a der Atome sein (dieser Abstand a entspricht bei einem kristallinen Festkörper im wesentlichen einer Gitterkonstante). Innerhalb dieses räumlichen Mittelungsbereiches darf aber nun die Feldstärkenänderung der freien Felder nicht allzu groß sein, da die von den freien Quellen stammenden Änderungen nicht ausgemittelt werden sollen. Bei periodischen freien Quellen ist die Wellenlänge $\lambda = 2\pi c/\omega$ eine charakteristische Länge für die Änderung der freien Felder. Es muß somit die Ungleichung

$$\lambda \gg a \quad (31)$$

erfüllt sein, um die makroskopischen Maxwellgleichungen zusammen mit entsprechenden Materialgleichungen sinnvoll anwenden zu können. **Dies schränkt den Frequenzbereich auf Frequenzen kleiner als die Frequenz langwelliger Röntgenstrahlen ein.**

Permeabilitätskonstante μ

Die Permeabilitätskonstante μ verliert im Gegensatz zur Dielektrizitätskonstanten ε bei Vergrößerung der Frequenz verhältnismäßig früh ihren physikalischen Sinn.

Zur Ausbildung magnetischer Momente als Reaktion auf freie Felder sollten Zeiten von mehreren Elektronenumläufen zur Verfügung stehen. Innerhalb dieser Zeit sollten sich die freien Felder nur geringfügig ändern:

$$T = \frac{\lambda}{c} \gg T_{\text{umlauf}} \approx \frac{a}{v} \quad \text{mit} \quad m v^2 \approx \frac{e^2}{a} .$$

Hieraus folgt nun

$$\lambda \gg a \sqrt{\frac{a}{r_{el}}} \quad \text{mit} \quad r_{el} = \frac{e^2}{m c^2} = 3 \cdot 10^{-13} \text{ cm} . \quad (32)$$

Da aus dieser Beziehung z.B. für $a = 3 \text{ \AA}$ die Forderung $\lambda \gg 1000 \text{ \AA}$ folgt, bedeutet dies, daß die Gleichungen $\vec{B} = \mu \vec{H}$ bzw. $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ sinnvoll nur für Frequenzen verwendet werden können, welche **kleiner als die Frequenz des sichtbaren Lichtes** ist (man setzt daher bei Anwendungen in der Optik üblicherweise $\mu = 1$).

XI.3.B. Beziehung von Clausius – Mossotti

Diese Beziehung gibt eine Verknüpfung zwischen der mikroskopischen Polarisierbarkeit von Molekülen (oder Atomen) und der makroskopischen Dielektrizitätskonstanten ε an, wobei vorausgesetzt wird, daß das **mikroskopisch wirksame Feld durch $\langle \vec{E}_{frei} \rangle$ gegeben** ist. Diese Voraussetzung bedeutet, daß das von allen molekularen Dipolen des Materials erzeugte elektrische Feld an der Stelle des betrachteten Moleküls verschwindet (dies ist bei hochsymmetrischen Kristallstrukturen und bei regelloser Anordnung der Moleküle, z.B. in Flüssigkeiten oder Gasen, der Fall). Somit ergibt sich aus der molekularen Polarisierbarkeit χ_{mol} das Dipolmoment eines Moleküls zu

$$\langle \vec{p}_{mol} \rangle = \chi_{mol} \langle \vec{E}_{frei} \rangle \quad . \quad (33)$$

Das räumlich gemittelte Feld $\langle \vec{E}_{mat} \rangle$ ist gemäß der Gleichung III.41

$$\langle \vec{E}_{mat} \rangle = - \frac{1}{R^3} \int_{r < R} d^3r \vec{r} \varrho_{mat}(\vec{r}) = - \frac{4\pi}{3} \frac{1}{V} \int_V d^3r \vec{r} \varrho_{mat}(\vec{r})$$

durch

$$\langle \vec{E}_{mat} \rangle = - \frac{4\pi}{3} N \langle \vec{p}_{mol} \rangle \quad (34)$$

gegeben, wobei N die Anzahl der Moleküle pro Volumseinheit ist.

Die Verwendung der Gleichungen

$$\vec{P} = N \langle \vec{p}_{mol} \rangle \quad \text{und} \quad \vec{E} = \langle \vec{E}_{frei} \rangle + \langle \vec{E}_{mat} \rangle$$

ergibt nun sofort

$$\vec{P} = N \chi_{mol} \langle \vec{E}_{frei} \rangle = N \chi_{mol} \left(\vec{E} - \langle \vec{E}_{mat} \rangle \right) = N \chi_{mol} \left(\vec{E} + \frac{4\pi}{3} \vec{P} \right) \quad , \quad (35a)$$

woraus

$$\vec{P} = \frac{N \chi_{mol}}{1 - \frac{4\pi}{3} N \chi_{mol}} \vec{E} \quad \text{bzw.} \quad \chi_e = \frac{N \chi_{mol}}{1 - \frac{4\pi}{3} N \chi_{mol}} \quad (35b)$$

folgt. Umformung entsprechend der Gleichung 28 liefert nun die folgende Gleichung für die makroskopische Dielektrizitätskonstante ε :

$$\varepsilon = \frac{1 + 2 \frac{4\pi}{3} N \chi_{mol}}{1 - \frac{4\pi}{3} N \chi_{mol}} \quad . \quad (36a)$$

Diese Gleichung kann auch dazu verwendet werden, um aus der Kenntnis der makroskopischen Dielektrizitätskonstanten ε die molare Polarisierbarkeit χ_{mol} zu bestimmen:

$$\chi_{mol} = \frac{3}{4\pi N} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \quad . \quad (36b)$$

Diese Beziehung weist für $\varepsilon \rightarrow \infty$ eine unphysikalische Sättigung auf und ist daher nur für kleine ε -Werte verwendbar.

XI.3.C. Orientierungspolarisierbarkeit

Sind schon vor Anlegen eines elektrischen Feldes atomare oder molekulare elektrische Dipole in der Materie vorhanden, die ein festes Dipolmoment p besitzen, so werden diese beim Anlegen eines elektrischen Feldes teilweise ausgerichtet und tragen so zur makroskopischen Polarisation bei (ohne äußeres elektrisches Feld zeigen die einzelnen Dipole auf Grund der Wärmebewegung nach allen Richtungen und bewirken deshalb keinen makroskopischen Effekt).

Wählen wir die Richtung des wirksamen elektrischen Feldes \vec{E}_{wirk} als z -Richtung, so ergibt sich das Dipolmoment pro Volumseinheit (= Orientierungspolarisation) zu

$$\vec{P} = N p \langle \cos \vartheta \rangle \vec{e}_z \quad . \quad (37a)$$

Zur Berechnung des thermischen Mittelwertes von $\cos \vartheta$ beachten wir, daß die Wechselwirkungsenergie eines Dipols im elektrischen Feld durch den zweiten Term von Gl. III.58 gegeben ist:

$$W^{ww}(\vartheta) = -p E_{wirk} \cos \vartheta \quad . \quad (37b)$$

Die thermische Mittelung erfolgt gemäß den Prinzipien der statistischen Mechanik:

$$\langle \cos \vartheta \rangle = \int d\Omega \cos \vartheta \underbrace{\frac{e^{-\frac{W^{ww}(\vartheta)}{k_B T}}}{\int d\Omega e^{-\frac{W^{ww}(\vartheta)}{k_B T}}}}_{\text{Boltzmannfaktor}} \quad . \quad (37c)$$

Die Auswertung dieser Integrale ergibt

$$\langle \cos \vartheta \rangle = L \left(\frac{p E_{wirk}}{k_B T} \right) \quad (37d)$$

mit der Langevinfunktion

$$L(x) = \text{ctgh } x - \frac{1}{x} \quad . \quad (37e)$$

Im Falle kleiner elektrischer Feldstärken und hinreichend hoher Temperaturen gilt

$$\frac{p E_{wirk}}{k_B T} \ll 1$$

(dies ist meist bei Zimmertemperatur schon erfüllt) und wir können die Reihenentwicklung der Langevinfunktion

$$L(x) = \frac{x}{3} + \mathcal{O}(x^3)$$

verwenden, um die Orientierungspolarisation in der Form

$$\vec{P} = N \frac{p^2}{3k_B T} \vec{E}_{wirk} \quad (37f)$$

zu erhalten. Zusätzlich zu dieser Polarisation ist noch die atomare bzw. molekulare Polarisation zu berücksichtigen, die auf der gegenseitigen Verschiebung von Atomkernen und Elektronenwolken beim Anlegen eines elektrischen Feldes beruht (hiebei wird also das elektrische Dipolmoment erst durch das angelegte elektrische Feld erzeugt, siehe Kapitel XI.3.B.).

XI.3.D. Kramers – Kronig Relationen

Die allgemeinste räumlich lokale, lineare und **kausale** Beziehung zwischen $\vec{D}(\vec{r}, t)$ und $\vec{E}(\vec{r}, t)$ kann für ein homogenes isotropes Medium in der Form

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) + \int_0^\infty d\tau G(\tau) \vec{E}(\vec{r}, t - \tau) \quad (38)$$

geschrieben werden. Die Funktion $G(\tau)$ gibt den Einfluß der elektrischen Feldstärke \vec{E} zu früheren Zeiten an. Dieser Einfluß klingt mit der Zeit ab, d.h. die Funktion $G(\tau)$ wird mit größer werdenden τ kleiner. Die Zeitdauer, in der die Funktion $G(\tau)$ wesentlich von Null verschieden ist, wird durch die Relaxationszeiten der stattfindenden physikalischen Prozesse bestimmt.

Die Integralbeziehung 38 führt nach einer zeitlichen Fouriertransformation

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega t} \vec{D}(\vec{r}, \omega) \quad (39)$$

(und analog für $\vec{E}(\vec{r}, t)$) auf die **multiplikative Beziehung**

$$\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \varepsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) \quad (40a)$$

mit der **komplexwertigen frequenzabhängigen Dielektrizitätskonstanten**

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \int_0^\infty d\tau e^{i\omega\tau} G(\tau) \quad . \quad (40b)$$

Diese Frequenzabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten wird als **Dispersion** bezeichnet.

Symmetrie der Frequenzabhängigkeit

Aus der Realität der Felder \vec{D} und \vec{E} folgt, daß die Relaxationsfunktion $G(\tau)$ eine reelle Funktion ist. Somit ergibt sich aus der Gleichung 40b direkt die Frequenz-Symmetriebeziehung

$$\varepsilon(\omega)^* = \varepsilon(-\omega) \quad , \quad (41a)$$

woraus durch Zerlegung in Realteil und Imaginärteil entsprechend

$$\varepsilon(\omega) = \Re\varepsilon(\omega) + i \Im\varepsilon(\omega)$$

die Symmetriebeziehungen

$$\Re\varepsilon(-\omega) = \Re\varepsilon(\omega) \quad , \quad \Im\varepsilon(-\omega) = -\Im\varepsilon(\omega) \quad , \quad (41b)$$

folgen.

Analytische Eigenschaften

Die komplexwertige Funktion $\varepsilon(\omega)$ ist eine in der oberen ω -Halbebene (d.h. für alle ω -Werte mit $\Im\omega \geq 0$) analytische Funktion. Die Anwendung der Cauchyschen Integralformel ergibt somit die folgende Integraldarstellung für diese Funktion $\varepsilon(\omega)$

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\varepsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega - i\eta} \quad , \quad (42)$$

welche mittels der Beziehung

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\omega' - \omega - i\eta} = \mathcal{P} \frac{1}{\omega' - \omega} + i\pi \delta(\omega - \omega') \quad (43a)$$

in die folgende Darstellung umgeformt werden kann:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{i}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\varepsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} \quad (43b)$$

(hiebei bedeutet $\mathcal{P}f$ ein Cauchysches Hauptwertintegral).

Die Zerlegung in Realteil und Imaginärteil ergibt die **Kramers–Kronig–Relationen**, welche einen Zusammenhang zwischen dem Realteil und dem Imaginärteil von $\varepsilon(\omega)$ herstellen:

$$\Re\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\Im\varepsilon(\omega')}{\omega' - \omega} \quad , \quad (44a)$$

$$\Im\varepsilon(\omega) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\Re\varepsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} \quad . \quad (44b)$$

Durch den Übergang auf positive Frequenzen (Verwendung von Gl. 41b) ergibt sich

$$\Re\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} d\omega' \frac{\omega' \Im\varepsilon(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} \quad , \quad (45a)$$

$$\Im\varepsilon(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} d\omega' \frac{\Re\varepsilon(\omega') - 1}{\omega'^2 - \omega^2} \quad . \quad (45b)$$

Leiter

Für Leiter gilt

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} G(\tau) = 4\pi \sigma \quad , \quad (46)$$

d.h. die Relaxationsfunktion $G(\tau)$ geht für große Zeiten gegen einen durch die endliche Leitfähigkeit σ bestimmten konstanten Grenzwert.

Bezeichnen wir die in diesem Fall auftretende allgemeinere Dielektrizitätskonstante mit $\eta(\omega)$ (siehe hierzu auch Kapitel XIV.1.B.), so folgt aus Gleichung 46 nun die Analytizität der Funktion $\eta(\omega) - i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$. Die entsprechenden **Kramers–Kronig–Relationen** lauten

$$\Re\eta(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} d\omega' \frac{\omega' \Im\eta(\omega') - 4\pi \sigma}{\omega'^2 - \omega^2} \quad , \quad (47a)$$

$$\Im\eta(\omega) = \frac{4\pi \sigma}{\omega} - \frac{2\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} d\omega' \frac{\Re\eta(\omega') - 1}{\omega'^2 - \omega^2} \quad . \quad (47b)$$

XI.3.E. Normale und anomale Dispersion

Wir wollen das Frequenzverhalten von $\Re\varepsilon(\omega)$ unter der (nur näherungsweise erfüllbaren) Voraussetzung $\Im\varepsilon(\omega) = 0$ untersuchen. In diesem Fall können wir Gleichung 45a direkt unter dem Hauptwertintegral nach ω differenzieren, da bei der Integralauswertung der Integrationsbereich ω' in der Umgebung von ω keinen Beitrag liefert. Wir erhalten so die Ungleichung

$$\frac{d}{d\omega} \Re\varepsilon(\omega) = \frac{4\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} d\omega' \frac{\omega' \Im\varepsilon(\omega')}{(\omega'^2 - \omega^2)^2} > 0 \quad , \quad (48)$$

da für den Imaginärteil von $\varepsilon(\omega)$ die Ungleichung $\Im\varepsilon(\omega') \geq 0$ gilt (siehe Kapitel XI.4.C).

Frequenzbereiche normaler und anomaler Dispersion

Man bezeichnet Frequenzbereiche entsprechend dem Frequenzverhalten von $\Re\varepsilon(\omega)$ als

$$\text{Bereich normaler Dispersion :} \quad \frac{d}{d\omega} \Re\varepsilon(\omega) > 0 \quad , \quad (49a)$$

$$\text{Bereich anomaler Dispersion :} \quad \frac{d}{d\omega} \Re\varepsilon(\omega) < 0 \quad . \quad (49b)$$

Im Bereich anomaler Dispersion ist $\Im\varepsilon > 0$, d.h. in diesem Frequenzbereich tritt immer ein Energieverlust der elektromagnetischen Felder auf.

Summenregeln

Unter der Voraussetzung

$$\Im\varepsilon(\omega) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^3}\right) \quad \text{für} \quad \omega \rightarrow \infty \quad (50)$$

gilt für $\omega \rightarrow \infty$

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad \text{mit} \quad \omega_p^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} d\omega' \omega' \Im\varepsilon(\omega') \quad . \quad (51)$$

Die Gültigkeit der Voraussetzung von Gleichung 50 erfordert die Gültigkeit der Summenregel (Superkonvergenzrelation)

$$\int_0^{+\infty} d\omega' (\Re\varepsilon(\omega') - 1) = 0 \quad . \quad (52)$$

Oszillatormodell

In einem einfachen Oszillatormodell für die atomare Polarisierbarkeit ergibt sich die Dielektrizitätskonstante $\varepsilon(\omega)$ zu

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m} \frac{1}{\omega_o^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad , \quad (53)$$

wobei ω_o die Resonanzfrequenz des Oszillatormodells und γ die Dämpfungskonstante für die Oszillatorschwingung ist.

XI.4. Energie- und Impulsbilanz

XI.4.A. Bilanzgleichungen der makroskopischen Maxwelltheorie

Mittels der makroskopischen Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \varrho \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad , \end{aligned} \quad (54)$$

können wir für die an den Quellen in der Zeiteinheit geleistete Arbeitsdichte $\vec{j} \cdot \vec{E}$ bzw. für die auf die Quellen ausgeübte Kraftdichte $\varrho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B}$ die folgenden Gleichungen anschreiben:

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{c}{4\pi} (\operatorname{rot} \vec{H}) \cdot \vec{E} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E} \quad , \quad (55)$$

$$\varrho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi} (\operatorname{div} \vec{D}) \vec{E} + \frac{1}{4\pi} (\operatorname{rot} \vec{H}) \times \vec{B} - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \times \vec{B} \quad . \quad (56)$$

Addieren wir zu diesen Gleichungen die aus den homogenen Maxwellgleichungen folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{c}{4\pi} (\operatorname{rot} \vec{E}) \cdot \vec{H} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{H} \quad , \\ 0 &= \frac{1}{4\pi} (\operatorname{div} \vec{B}) \vec{H} + \frac{1}{4\pi} (\operatorname{rot} \vec{E}) \times \vec{D} + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \times \vec{D} \quad , \end{aligned}$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{j} \cdot \vec{E} &= \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E}) - \frac{1}{4\pi} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \frac{1}{4\pi} \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \\ \varrho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} &= \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \operatorname{div} \vec{D} + \vec{H} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{D} \times \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{H}) - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \times \vec{B}) \quad . \end{aligned}$$

Diese Gleichungen können unter Verwendung der Vektorbeziehungen

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} &= -\operatorname{div} (\vec{E} \times \vec{H}) \quad , \\ (\vec{E} \operatorname{div} \vec{D} - \vec{D} \times \operatorname{rot} \vec{E})_k &= \partial_i D_i E_k - D_l \partial_k E_l \quad , \\ (\vec{H} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{H})_k &= \partial_i B_i H_k - B_l \partial_k H_l \quad , \end{aligned}$$

auch in der Form

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = -\operatorname{div} \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{1}{4\pi} \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad , \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \left(\varrho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} \right)_k &= \partial_i \frac{1}{4\pi} (D_i E_k + B_i H_k) - \frac{1}{4\pi} (D_l \partial_k E_l + B_l \partial_k H_l) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi c} (\vec{D} \times \vec{B})_k \end{aligned} \quad (58)$$

geschrieben werden.

Diese Gleichungen sind **keine lokalen Bilanzgleichungen**, da auf den rechten Gleichungsseiten keine reinen Ableitungsterme auftreten.

XI.4.B. Minkowski-Tensor für lineare Medien

Für Medien mit linearen Materialgleichungen

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad , \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad , \quad (59)$$

können die Gleichungen 57 und 58 als **lokale Bilanzgleichungen** geschrieben werden:

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = -\operatorname{div} \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{8\pi} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \quad , \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \left(\varrho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} \right)_k &= \partial_i \frac{1}{4\pi} \left(D_i E_k + B_i H_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} (D_l E_l + B_l H_l) \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi c} (\vec{D} \times \vec{B})_k \quad . \end{aligned} \quad (61)$$

Unter Einführung des Poynting-Vektors in Materie $\vec{S}_{(mat)}$ (Vektor der elektromagnetischen Energiestromdichte in Materie)

$$\vec{S}_{(mat)}(\vec{r}, t) = \frac{c}{4\pi} (\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)) \quad (62)$$

und der elektromagnetischen Energiedichte in Materie $w_{(mat)}$

$$w_{(mat)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) + \vec{H}(\vec{r}, t) \cdot \vec{B}(\vec{r}, t)) \quad (63)$$

können wir die lokale Bilanzgleichung 60 in der Form

$$\vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = -\operatorname{div} \vec{S}_{(mat)}(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} w_{(mat)}(\vec{r}, t) \quad (64)$$

schreiben (man vergleiche mit den entsprechenden Gleichungen II.45, II.46 und II.47 im Kapitel II.4.A).

Analog können wir die lokale Bilanzgleichung 61 unter Einführung des Maxwell'schen Spannungstensors in Materie $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}}_{(mat)}$

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}}_{(mat)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} (\vec{D}(\vec{r}, t) \circ \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{B}(\vec{r}, t) \circ \vec{H}(\vec{r}, t)) - \overset{\leftarrow}{\mathbf{1}} w_{(mat)}(\vec{r}, t) \quad (65)$$

sowie der elektromagnetischen Impulsdichte in Materie $\vec{g}_{(mat)}$

$$\vec{g}_{(mat)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi c} (\vec{D}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)) \quad (66)$$

in der Form

$$\varrho(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}}_{(mat)}(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \vec{g}_{(mat)}(\vec{r}, t) \quad (67)$$

schreiben (man vergleiche wieder die entsprechenden Gleichungen II.51, II.52 und II.53 im Kapitel II.4.B).

Minkowski-Tensor

Die in den Gleichungen 62, 63, 65 und 66 definierten Größen $\vec{S}_{(mat)}$, $w_{(mat)}$, $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}_{(mat)}$ und $\vec{g}_{(mat)}$ bilden in der Anordnung (siehe Gleichung IX.45)

$$T_{(mat)}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} w_{(mat)} & \vec{g}_{(mat)} \\ \frac{1}{c^2} \vec{S}_{(mat)} & -\frac{1}{c} \overleftrightarrow{\mathbf{T}}_{(mat)} \end{pmatrix} \quad (68)$$

den vierdimensionalen elektromagnetischen Energie-Impuls-Tensor in Materie, welcher als **Minkowski-Tensor** bezeichnet wird.

Dieser Minkowski-Tensor ist **nicht symmetrisch**. Dies hat zu zahlreichen Versuchen geführt, einen symmetrischen Energie-Impuls-Tensor einzuführen (und in der Literatur sind auch viele Alternativen angegeben).

Bei diesen Untersuchungen muß man die physikalische Bedeutung einer lokalen Energie-Impuls-Bilanz beachten: es muß lediglich der **gesamte Energie-Impuls-Tensor eines abgeschlossenen Systems symmetrisch** sein.

XI.4.C. Dissipative Medien

Die Definitionsgleichung 62 für die Energiestromdichte \vec{S}

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{c}{4\pi} \left(\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t) \right) \quad (69)$$

ist für beliebige Felder und Materialien gültig, da wegen der Stetigkeitsbedingung für die Tangentialkomponenten von \vec{E} und \vec{H} an der Grenzfläche zweier Medien (siehe Gleichung 30) die Normalkomponente von \vec{S} an dieser Grenzfläche einen stetigen Übergang zeigt (der Energiestrom, der von einem Medium herausströmt, fließt somit in das zweite Medium hinein).

Aus den Maxwellgleichungen 54 folgt für die Energiestromdichte \vec{S} die allgemein gültige Beziehung (siehe Gleichung 57)

$$-\operatorname{div} \vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \left(\vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\vec{r}, t) + \vec{H}(\vec{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \right) + \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (70)$$

Dielektrisches Material

Haben wir in einem Nichtleiter ein mit der Kreisfrequenz ω periodisches elektrisches Feld

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t} + c.c. \quad , \quad \vec{D}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{D}(\vec{r}) e^{-i\omega t} + c.c. \quad (71)$$

vorliegen, so können wir mittels der Materialgleichung

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}) \quad (72)$$

den ersten Term auf der rechten Seite von Gleichung 70 in der Form

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\vec{r}, t) = i\omega \varepsilon(\omega)^* \frac{1}{4} |\vec{E}(\vec{r})|^2 - i\omega \varepsilon(\omega) \frac{1}{4} \vec{E}(\vec{r})^2 e^{-2i\omega t} + c.c.$$

schreiben. Bilden wir nun das Zeitmittel über eine Periodendauer, so ergibt sich aus Gleichung 70

$$-\langle \operatorname{div} \vec{S} \rangle = \frac{i\omega}{4\pi} (\varepsilon(\omega)^* - \varepsilon(\omega)) \frac{1}{4} |\vec{E}(\vec{r})|^2 \quad (73a)$$

Die Zerlegung von $\varepsilon(\omega)$ in Real- und Imaginärteil sowie die Berücksichtigung, daß die zufließende Energie positiv definit ist,

$$-\langle \operatorname{div} \vec{S} \rangle = \frac{\omega}{4\pi} \Im \varepsilon(\omega) \frac{1}{2} |\vec{E}(\vec{r})|^2 \geq 0 \quad , \quad (73b)$$

führt nun zu

$$\Im \varepsilon(\omega) \geq 0 \quad (\text{für } \omega > 0) \quad (74)$$

sowie der Feststellung, daß die dielektrischen Verluste in einem Material durch den Imaginärteil der Dielektrizitätskonstanten ε bestimmt sind.

Analoge Aussagen können für magnetische Materialien hinsichtlich der Permeabilitätskonstanten μ gemacht werden.

Leiter (zeitunabhängig)

Wir betrachten einen zylinderförmigen Leiter mit dem Radius R und der Länge l aus einem Material mit der Leitfähigkeit σ , welcher von einem Strom I durchflossen wird (siehe Fig. 11.2). Der Zusammenhang zwischen der elektrischen Feldstärke \vec{E} im Leiter (und auf der Leiteroberfläche) und dem Strom I ist durch

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \rightarrow \quad I = \pi R^2 j = \pi R^2 \sigma E \quad (75)$$

gegeben. Für die magnetische Feldstärke \vec{H} auf der Oberfläche des Leiters ergibt sich

$$2\pi R H = \frac{4\pi}{c} I \quad \rightarrow \quad H = \frac{2I}{Rc} = \frac{2\pi R}{c} \sigma E \quad , \quad (76)$$

woraus sich auf der Leiteroberfläche ein in das Leiterinnere gerichteter Energiestrom

$$S = R\sigma E^2/2 \quad (76a)$$

ergibt. Integrieren wir nun den zeitunabhängigen Teil von Gleichung 70 über das Leitervolumen, so erhalten wir

$$\int_{V(\text{Leiter})} d^3r j E = - \int_{V(\text{Leiter})} d^3r \operatorname{div} \vec{S} = - \oint_{F(\text{Leiter})} d^2f \cdot \vec{S} = \pi R^2 l \sigma E^2 \quad . \quad (77)$$

Dies bedeutet, daß die gesamte in Joulesche Wärme umgewandelte Energie aus dem elektromagnetischen Feld über die Leiteroberfläche in den Leiter strömt. Der Energietransport erfolgt somit durch die elektromagnetischen Felder entlang eines Leiters und nicht im Leiterinneren.

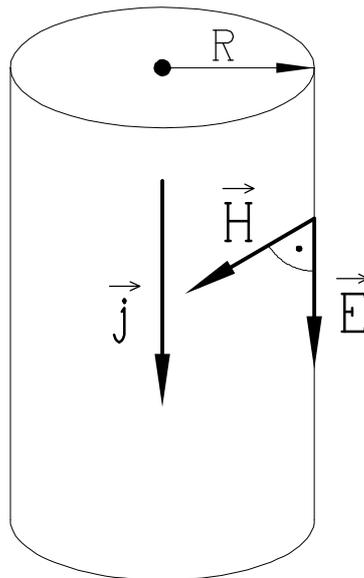


Fig. 11.2 Elektromagnetische Felder eines zylinderförmigen Leiters, der von einem zeitlich konstanten Strom durchflossen wird