ELEKTRODYNAMIK UND RELATIVITÄTSTHEORIE

Kapitel 10: Relativistische Hamiltonfunktionen

Vorlesung für Studenten der Technischen Physik

Helmut Nowotny

Technische Universität Wien

Institut für Theoretische Physik

7., von A. Rebhan korrigierte Auflage

Wien, Februar 2006

X. RELATIVISTISCHE HAMILTONFUNKTIONEN

X.1. Hamilton–Formalismus

X.1.A. Grundlagen

Klassische Newton–Dynamik

Das Newtonsche Kraftgesetz

$$\vec{F} = m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

bildet zusammen mit dem Konzept der virtuellen Arbeit (virtuelle Verrückungen) die Grundlage der klassischen Mechanik. Es existieren verschiedene **gleichwertige Formulierungen** der klassischen Mechanik:

- D'Alembertsches Prinzip
- Langrangesche Gleichungen
- Hamiltonsches Prinzip
- Hamiltonsche Gleichungen

D'Alembertsches Prinzip

Hiebei wird direkt mittels des Konzeptes der virtuellen Arbeit die Gleichung

$$\sum_t \left(\vec{F}_t - m_t\,\ddot{\vec{r}}_t\right)\cdot\delta\vec{r}_t = 0 \tag{2}$$

als Basisgleichung der Mechanik verwendet. Die Summe t läuft hiebei über alle Teilchen des betrachteten Systems und im allgemeinen verschwinden die einzelnen Summenterme nicht, da die Verrückungen $\delta\vec{r}_t$ infolge von Zwangsbedingungen **nicht unabhängig** voneinander sein müssen. Entsprechend umgeformt wird diese Gleichung auch als Lagrangesche Bewegungsgleichung 1. Art bezeichnet (und die im folgenden besprochenen Lagrangeschen Gleichungen dann als Lagrangesche Gleichungen 2. Art).

Langrangesche Gleichungen

Unter Einführung der zu verallgemeinerten Koordinaten q_r gehörigen verallgemeinerten Kräfte F_{q_r}

$$F_{q_r} = \sum_t \vec{F}_t\,\frac{\partial\vec{r}_t}{\partial q_r} \tag{3}$$

ergeben sich aus Gleichung 2 unter Verwendung der Transformationsformeln $\vec{r}_t = \vec{r}_t(..q_r..)$ wegen der **Unabhängigkeit** der verallgemeinerten Koordinaten die Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = F_{q_r} \quad , \tag{4}$$

wobei T die kinetische Energie der Teilchen ist:

$$T = \sum_t \frac{m_t \dot{\vec{r}}_t^{\,2}}{2} \quad . \tag{4a}$$

Es gibt für jeden Freiheitsgrad eine Lagrangesche Gleichung 4.

Sind die Kräfte aus einem Potential ableitbar (**konservative Systeme**)

$$F_{q_r} = -\frac{\partial V(q)}{\partial q_r} \quad , \tag{5}$$

so können die Gleichungen 4 mittels der **Lagrangeschen Funktion**

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q) \tag{6a}$$

auch in der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \tag{6b}$$

geschrieben werden.

X.1.B. Extremalprinzip für die Wirkung

Man kann die Lagrangeschen Gleichungen 6b auch aus einem Extremalproblem gewinnen. Man betrachtet hiezu die Wirkung S

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \; L(q, \dot{q}, t) \tag{7}$$

und fordert für den physikalischen Bewegungsablauf $q_r = q_r(t)$ das Auftreten eines Extremalwertes (Minimalwertes) dieser Wirkung, sodaß dieses Prinzip auch als Prinzip der kleinsten Wirkung bezeichnet wird (**Hamiltonsches Prinzip**). Aus dem Variationsproblem

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \; L(q, \dot{q}, t) = 0 \quad , \qquad \delta q_r(t_1) = \delta q_r(t_2) = 0 \quad , \tag{8}$$

ergeben sich die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \quad , \tag{9}$$

welche mit den Lagrangeschen Gleichungen 6b übereinstimmen.

Dieses Prinzip der kleinsten Wirkung ist für eine relativistische Formulierung der Bewegungsgleichungen vorteilhaft, da sich aus einer forminvarianten Wirkung immer forminvariante Bewegungsgleichungen ergeben. Man hat somit in einem ersten Schritt eine Lagrangefunktion L so zu postulieren, daß die Wirkung forminvariant ist. In einem zweiten Schritt ist dann die gewählte Lagrangefunktion als dem Problem angepaßt zu verifizieren (z.B. dadurch, daß man bestimmte Bewegungsgleichungen erhalten möchte).

X.1.C. Hamiltonsche Gleichungen

Man bezeichnet

$$p_r := \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_r} = p_r(q,\dot{q},t) \tag{10}$$

als den zur verallgemeinerten Koordinate q_r gehörigen **verallgemeinerten Impuls** p_r (kanonischer Impuls). Der Übergang von den Variablen q_r und $\dot{q}_r$ auf die Variablen q_r und p_r erfolgt mittels einer Legendre–Transformation

$$H(q,p,t) := \sum_r p_r\,\dot{q}_r - L(q,\dot{q},t) \quad . \tag{11}$$

Die Funktion H wird **Hamiltonsche Funktion** genannt und führt, wie aus der folgenden Rechnung zu ersehen ist

$$\mathrm{d}H(q,p,t) = \sum_r \Big(p_r\,\mathrm{d}\dot{q}_r + \dot{q}_r\,\mathrm{d}p_r - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_r}}_{\dot{p}_r}\,\mathrm{d}q_r - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}}_{p_r}\,\mathrm{d}\dot{q}_r \Big) - \frac{\partial L}{\partial t}\,\mathrm{d}t \quad ,$$

zu den Bewegungsgleichungen

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p_r} \quad , \qquad \dot{p}_r = -\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q_r} \quad , \tag{12}$$

welche als Hamiltonsche Gleichungen (oder auch als kanonisch konjugierte Bewegungsgleichungen) bezeichnet werden. Ferner gilt bei expliziter Zeitabhängigkeit der Lagrangefunktion L

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad . \tag{13}$$

Mit der Beziehung

$$\sum_r p_r\,\dot{q}_r = 2\,T \tag{14a}$$

folgt

$$H = \sum_r p_r\,\dot{q}_r - L = 2\,T - (T - V) = T + V \quad , \tag{14b}$$

d.h. die Hamiltonfunktion H entspricht der gesamten Energie (kinetische Energie T plus potentielle Energie V).

Betrachten wir die totale Zeitableitung der Hamiltonfunktion H

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \sum_r \Big(\underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_r}}_{-\dot{p}_r}\,\dot{q}_r + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_r}}_{\dot{q}_r}\,\dot{p}_r \Big) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad , \tag{15}$$

so sehen wir, daß $H = E$ eine Erhaltungsgröße ist, wenn H nicht explizit von der Zeit abhängt.

X.2. Hamiltonfunktion eines freien Punktteilchens

X.2.A. Nichtrelativistische Hamiltonfunktion

Die nichtrelativistische Lagrangefunktion eines freien Teilchens ist durch

$$L = \sum_i \frac{m\,\dot{q}_i^2}{2} \tag{16}$$

gegeben (dies ist die klassische kinetische Energie eines Teilchens, da für ein freies Teilchen keine potentielle Energie vorhanden ist). Aus dieser Lagrangefunktion folgt sofort der Impuls

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\,\dot{q}_i \tag{17}$$

sowie die Hamiltonfunktion

$$H = \sum_i p_i\,\dot{q}_i - L = \sum_i \left(p_i\,\frac{p_i}{m} - \frac{p_i^2}{2\,m} \right) = \sum_i \frac{p_i^2}{2\,m} \quad . \tag{18}$$

Die kanonischen Bewegungsgleichungen folgen aus dieser Hamiltonfunktion zu

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m} \quad , \qquad \dot{p}_i = -\,\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i} = 0 \quad , \tag{19}$$

und beschreiben ein freies Teilchen in der klassischen nichtrelativistischen Mechanik.

X.2.B. Relativistische Hamiltonfunktion

Damit die Wirkung S eine invariante Größe ist, muß gemäß der Gleichung

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\,L = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathrm{d}\tau\,\gamma\,L \tag{20}$$

die folgende Beziehung gelten:

$$\gamma\,L = \text{invarianter Ausdruck} \quad . \tag{21}$$

Zur Bildung dieses invarianten Ausdruckes haben wir nur die Masse m des Teilchens und die Vierergeschwindigkeit u^ν zur Verfügung. Aus der Vierergeschwindigkeit u^ν kann nur die skalare Größe $u^\nu\,u_\nu = c^2$ gebildet werden, welche aber eine Konstante ist. Dies führt zum folgenden Ansatz für die relativistische Lagrangefunktion L_{ft} eines freien Teilchens

$$\gamma\,L_{ft} = \text{Konstante} \quad , \tag{22a}$$

wobei zur Übereinstimmung mit den nichtrelativistischen Grenzfall diese Konstante $-mc^2$ gesetzt wird:

$$\gamma\,L_{ft} = -\,m\,c^2 \quad , \quad \text{d.h.} \quad L_{ft} = -\,m\,c^2\,\sqrt{1 - \frac{\vec{u}^{\,2}}{c^2}} \quad . \tag{22b}$$

Hieraus ergibt sich nun sofort der Teilchenimpuls zu

$$p_i = \frac{\partial L_{ft}}{\partial u_i} = \gamma\, m\, u_i \quad . \tag{23}$$

Die relativistische Hamiltonfunktion H_{ft} eines freien Teilchens lautet somit

$$H_{ft} = \vec{p}\cdot\vec{u} - L_{ft} = \gamma\, m\, u^2 + \frac{m\, c^2}{\gamma} = \gamma\, m\, \left[u^2 + c^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\right] = \gamma\, m\, c^2 \quad . \tag{24}$$

Dieser Ausdruck für die Hamiltonfunktion eines freien Punktteilchens entspricht genau dem Energieausdruck für ein freies Punktteilchen, wie er in Gleichung VIII.18 angegeben ist.

X.2.C. Bewegungsgleichungen eines freien Punktteilchens

Wir müssen aber für die Anwendung der kanonischen Bewegungsgleichungen diese Hamiltonfunktion 24 nun noch durch die kanonisch konjugierten Größen $\vec{r}$ und $\vec{p}$ ausdrücken. Ausgehend von der Gleichung 23 erhalten wir den folgenden Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit $\vec{u}$ und dem Impuls $\vec{p}$:

$$p^2 = \gamma^2 m^2 u^2 \quad \rightarrow \quad \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) p^2 = m^2 u^2 \quad .$$

Auflösung nach der Geschwindigkeit u ergibt nun

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{p^2}{p^2 + m^2 c^2} \quad , \qquad \gamma = \frac{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}}{m\, c} \quad , \tag{25}$$

womit sich die Hamiltonfunktion in der kanonischen Form

$$H_{ft} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2} \tag{26}$$

schreiben läßt. Dieser Ausdruck für die Hamiltonfunktion stimmt genau mit dem relativistischen Energieausdruck für ein freies Teilchen überein (siehe Gl. VIII.20b). Aus dieser Hamiltonfunktion ergeben sich sofort die kanonischen Bewegungsgleichungen für ein freies Teilchen:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H_{ft}(x,p)}{\partial p_i} = \frac{p_i}{\gamma\, m} \quad , \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H_{ft}(x,p)}{\partial x_i} = 0 \quad . \tag{27}$$

X.3. Freie elektromagnetische Felder

X.3.A. Elektrodynamik als Lagrangesche Feldtheorie

Haben wir anstelle eines Punktteilchens, welches eine Weltlinie durchläuft, ein den ganzen Raum erfüllendes Feld $\phi(x^\mu)$ vorliegen, so müssen wir die Wirkung in Analogie zu Gleichung 7 durch ein Wirkungsfunktional

$$S[\phi, \partial^\nu \phi] := \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L(t) = \frac{1}{c} \int_\Omega \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}\left(\phi(x^\mu), \partial^\nu \phi(x^\mu)\right) \tag{28}$$

angeben, wobei $\mathcal{L}\left(\phi(\vec{r},t), \partial^\nu \phi(\vec{r},t)\right)$ eine invariante **Langrangedichte** darstellt. Damit dieses Wirkungsfunktional ein Extremum aufweist

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L(t) = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3r\, \mathcal{L}\left(\phi(\vec{r},t), \vec{\nabla}\phi(\vec{r},t), \dot{\phi}(\vec{r},t)\right) = 0 \tag{29a}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\delta\,\phi(\vec{r},t_1) = 0 \quad , \qquad \delta\,\phi(\vec{r},t_2) = 0 \tag{29b}$$

und der weiteren Forderung, daß die Variation von ϕ auf dem Rande des Feldes zu jeder Zeit verschwindet, müssen wieder die zugehörigen Euler–Lagrange–Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x^\mu)} - \partial^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\nu \phi(x^\mu)\right)} = 0 \tag{30}$$

erfüllt sein.

Haben wir ein Feld A^μ mit mehreren Komponenten vorliegen, so erhalten wir aus dem Variationsprinzip anstelle einer partiellen Differentialgleichung mehrere partielle Differentialgleichungen :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} - \partial^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\nu A^\mu\right)} = 0 \quad . \tag{31}$$

Zu bemerken ist noch, daß für vorgegebene Feldgleichungen die Lagrangedichte nicht eindeutig bestimmt ist, da die Addition der Viererdivergenz eines beliebigen Feldes zur Lagrangedichte keine Auswirkung auf die Euler–Lagrange–Gleichungen hat (ein solcher Zusatzterm in Gl. 28 kann mittels des vierdimensionalen Gaußschen Integralsatzes in ein Oberflächenintegral umgewandelt werden und ergibt somit keinen Beitrag bei der Variation $\delta S = 0$).

Hamiltondichte

In Analogie zu Gleichung 10 definiert man die zur Feldgröße $\phi(\vec{r},t)$ kanonisch konjugierte Impulsdichte

$$\pi(\vec{r},t) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \tag{32}$$

und hiemit die **Hamiltondichte** $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H}(\phi, \pi) := \pi\, \dot{\phi} - \mathcal{L} \tag{33a}$$

bzw. die Hamiltonfunktion H

$$H(t) = \int \mathrm{d}^3r\ \mathcal{H}(\phi, \pi) \quad . \tag{33b}$$

X.3.B. Lagrangedichte des freien elektromagnetischen Feldes

Mit Hilfe der relativistischen Schreibweise kann man die relativistischen Forminvarianten des elektromagnetischen Feldes als Ausgangspunkt für die Konstruktion einer Lagrangedichte nehmen. Aus dem Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ können die beiden in den Gleichungen IX.34a und IX.34b angegebenen Invarianten gebildet werden. Da die Invariante von Gleichung IX.34b nur einen Pseudoskalar darstellt, verwenden wir nur den invarianten Ausdruck von Gleichung IX.34a zur Aufstellung der Lagrangedichte $\mathcal{L}_{em}$ des freien elektromagnetischen Feldes :

$$\mathcal{L}_{em} := -\frac{1}{16\pi}\, F_{\nu\mu}F^{\nu\mu} = \frac{1}{8\pi}\,(\vec{E}^{\,2} - \vec{B}^{\,2}) \tag{34}$$

(wir haben hier bereits konstante Faktoren so hinzugefügt, daß die aus dieser Lagrangedichte folgende Hamiltondichte mit der Energiedichte des elektromagnetischen Feldes übereinstimmt).

X.3.C. Bewegungsgleichungen des freien Feldes

Stellen wir die Lagrangedichte von Gleichung 34 mit Hilfe des Viererpotentiales und seiner Ableitungen dar

$$\mathcal{L}_{em}[A_\mu(x), \partial_\nu A_\mu(x)] = -\frac{1}{16\pi}\,(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)\,(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) \quad , \tag{35}$$

so können wir die Euler–Lagrange–Gleichungen entsprechend Gl. 31 bilden:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial A^\mu} - \partial^\nu\,\frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial\,(\partial^\nu A^\mu)} = \frac{1}{4\pi}\,\partial^\nu\,F_{\nu\mu} = 0 \quad . \tag{36}$$

Dies sind die inhomogenen Maxwellgleichungen IX.15 für ein quellenfreies Raumgebiet. Die homogenen Maxwellgleichungen IX.18a bzw. IX.19 sind keine Bewegungsgleichungen im Sinn der Euler-Lagrange–Gleichungen, sondern folgen ganz allgemein aus der Definition des Feldstärketensors (siehe Kap. IX.1.C).

Hamiltonfunktion

Bilden wir entsprechend Gleichung 32 die kanonischen Impulsvariablen

$$\pi_\sigma(\vec{r}, t) = \frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathcal{L}_{em}(A^\mu, \partial^\nu A^\mu)}{\partial\,(\partial^0 A^\sigma)} = \frac{\partial \mathcal{L}_{em}(A^\mu, \partial^\nu A^\mu)}{\partial\,\dot{A}^\sigma(\vec{r}, t)} \quad , \tag{37}$$

so erhalten wir

$$\pi_0(\vec{r}, t) = 0 \quad , \qquad \pi_i(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\, c}\,E_i(\vec{r}, t) \quad . \tag{38}$$

Die Hamiltondichte $\mathcal{H}_{em}$ bzw. die Hamiltonfunktion H_{em} ergeben sich aus

$$\mathcal{H}_{em}(\vec{r}, t) = c\,\pi_\sigma\,\partial^0 A^\sigma - \mathcal{L}_{em} \quad , \qquad H_{em}(t) = \int d^3r\,\mathcal{H}_{em} \quad , \tag{39}$$

zu

$$\mathcal{H}_{em} = \frac{1}{8\pi}\,\left(\vec{E}^{\,2} + \vec{B}^{\,2} + 2\,\vec{E}\cdot \operatorname{grad}\phi\right) \quad , \tag{40a}$$

$$H_{em}(t) = \int d^3r\,\mathcal{H}_{em} = \frac{1}{8\pi}\int d^3r\,\left(\vec{E}^{\,2} + \vec{B}^{\,2}\right) \quad . \tag{40b}$$

X.4. Elektromagnetische Wechselwirkung

X.4.A. Lagrangefunktion der Wechselwirkung

Wir wollen nun die Wechselwirkung zwischen einem elektrisch geladenen Teilchen und einem elektromagnetischen Feld betrachten. Hiezu beachten wir, daß ein bewegtes geladenes Teilchen einen Viererstrom j^μ erzeugt und ein elektromagnetisches Feld durch das Viererpotential A^μ beschrieben wird. Zur Erzielung einer **linearen Theorie** haben wir für die Wechselwirkungs–Lagrangedichte $\mathcal{L}_{ww}$ aus diesen beiden Vierergrößen eine **lineare Invariante** zu bilden. Die einzige lineare Invariante, welche aus diesen beiden Vierergrößen gebildet werden kann, ist durch

$$\mathcal{L}_{ww}(x) = -\frac{1}{c}\, A^\mu(x)\, j_\mu(x) \tag{41}$$

gegeben (wobei wieder ein konstanter Faktor so hinzugefügt wurde, daß sich die Maxwellgleichungen mit den richtigen Faktoren ergeben). Unter Verwendung der expliziten Darstellung des Viererstromes (Gleichung IX.5) und der expliziten Darstellung des Viererpotentiales (Gleichung IX.8)

$$j^\mu = \begin{pmatrix} c\varrho \\ \vec{\jmath} \end{pmatrix} \quad , \qquad A^\mu = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} \quad , \tag{42}$$

kann diese invariante Wechselwirkungs–Lagrangedichte auch in der Form

$$\mathcal{L}_{ww}(\vec{r}\,,t) = -\varrho(\vec{r}\,,t)\,\phi(\vec{r}\,,t) + \frac{1}{c}\,\vec{\jmath}(\vec{r}\,,t)\cdot\vec{A}(\vec{r}\,,t) \tag{43}$$

geschrieben werden.

Punktteilchen

Für ein Punktteilchen mit der elektrischen Ladung q lauten Ladungsdichte und Stromdichte (siehe die Gleichungen II.6a und II.6b)

$$\varrho(\vec{r}\,,t) = q\,\delta(\vec{r} - \vec{r}\,(t)) \quad , \qquad \vec{\jmath}(\vec{r}\,,t) = q\,\vec{u}(t)\,\delta(\vec{r} - \vec{r}\,(t)) \quad , \tag{44}$$

so daß sich für die Lagrangefunktion L_{ww} , welche die Wechselwirkung eines geladenen Punktteilchens mit einem elektromagnetischen Feld beschreibt, der Ausdruck

$$L_{ww}(t) = \int \mathrm{d}^3r\ \mathcal{L}_{ww}(\vec{r}\,,t) = -q\,\phi(\vec{r}\,(t),t) + \frac{q}{c}\,\vec{u}(t)\cdot\vec{A}(\vec{r}\,(t),t) \tag{45}$$

ergibt.

X.4.B. Bewegungsgleichungen der elektromagnetischen Felder

Betrachten wir nun die aus der Lagrangedichte $\mathcal{L}_{em}$ des freien elektromagnetischen Feldes (Gleichung 34) und der Lagrangedichte $\mathcal{L}_{ww}$ der Wechselwirkung (Gleichung 41) gebildete Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_{em}(x) + \mathcal{L}_{ww}(x) = -\frac{1}{16\pi}\,F_{\nu\mu}(x)\,F^{\nu\mu}(x) - \frac{1}{c}\,A^\mu(x)\,j_\mu(x) \quad , \tag{46}$$

so erhalten wir aus den Euler–Lagrange–Gleichungen 30 die folgenden Bewegungsgleichungen für das an Quellströme gekoppelte elektromagnetische Feld:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} - \partial^\nu \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial^\nu A^\mu\right)} = -\,\frac{1}{c}\, j_\mu(x) + \frac{1}{4\pi}\, \partial^\nu\, F_{\nu\mu}(x) = 0 \quad . \tag{47a}$$

Diese Gleichungen sind genau die inhomogenen Maxwellgleichungen

$$\partial^\nu\, F_{\nu\mu}(x) = \frac{4\pi}{c}\, j_\mu(x) \quad , \tag{47b}$$

wie sie bereits in Kapitel IX angegeben wurden.

Für die homogenen Maxwellgleichungen ergibt sich durch die Ankopplung der Felder an die Ströme keine Änderung, da sie direkt aus der Definition des Feldstärketensors folgen.

Auch die kanonischen Impulsvariablen des elektromagnetischen Feldes ändern sich durch die Ankoppelung nicht:

$$\pi_\sigma(\vec{r}, t) = \frac{1}{c}\, \frac{\partial \mathcal{L}(A^\mu, \partial^\nu A^\mu)}{\partial \left(\partial^0 A^\sigma\right)} = -\,\frac{1}{4\pi\, c}\, F_{0\sigma} \quad . \tag{48}$$

X.4.C. Bewegungsgleichungen eines Punktteilchens

Die Lagrangefunktion eines elektrisch geladenen Punktteilchens ist durch die Summe der Langrangefunktion L_{ft} des freien Punktteilchens (Gleichung 22b) und der Lagrangefunktion L_{ww} der Wechselwirkung (Gleichung 45) gegeben:

$$L(\vec{r}, \vec{u}, t) = L_{ft} + L_{ww} = -\,m\, c^2 \sqrt{1 - \frac{\vec{u}^{\,2}}{c^2}} - q\, \phi(\vec{r}, t) + \frac{q}{c}\, \vec{u} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) \tag{49}$$

Aus dieser Lagrangefunktion ergibt sich der **kanonisch konjugierte Teilchenimpuls** $\vec{P}$ zu

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial u_i} = \underbrace{\gamma\, m\, u_i}_{p_i} + \frac{q}{c}\, A_i = p_i + \frac{q}{c}\, A_i \quad . \tag{50}$$

Der in dieser Gleichung verwendete Ausdruck

$$\vec{p} := \gamma\, m\, \vec{u} \tag{51}$$

wird als **mechanischer Impuls** des Teilchens bezeichnet.

Hamiltonfunktion

Die Hamiltonfunktion dieses wechselwirkenden Systems ergibt sich entsprechend der allgemeinen Gleichung 11 zu

$$H(\vec{r}, \vec{P}, t) = \vec{P}\cdot\vec{u} - L(\vec{r}, \vec{u}, t) = \gamma\, m\, u^2 + \frac{q}{c}\, \vec{A}\cdot\vec{u} + \frac{m\, c^2}{\gamma} + q\, \phi - \frac{q}{c}\, \vec{u}\cdot\vec{A} = \gamma\, m\, c^2 + q\, \phi \quad . \tag{52}$$

Eliminieren wir die Geschwindigkeit u mittels der aus Gleichung 50 folgenden Beziehung

$$\left(\vec{P} - \frac{q}{c}\, \vec{A}\right)^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = m^2 u^2 \quad ,$$

woraus sich

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{\left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2}{\left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + m^2c^2} \quad , \qquad \gamma = \frac{\sqrt{\left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + m^2c^2}}{m\,c} \tag{53}$$

ergibt, so lautet die kanonische Form der Hamiltonfunktion folgendermaßen:

$$H(\vec{r}, \vec{P}, t) = \sqrt{m^2\,c^4 + c^2\,\left(\vec{P} - \frac{q}{c}\,\vec{A}\right)^2} + q\,\phi \quad . \tag{54a}$$

Die nichtrelativistische Näherung ergibt sich aus der Reihenentwicklung

$$H(\vec{r}, \vec{P}, t) = m\,c^2 + \frac{\left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2}{2\,m} + \ldots + q\,\phi \quad . \tag{54b}$$

Bewegungsgleichungen

Berechnen wir nun entsprechend den kanonischen Bewegungsgleichungen 12 die zeitliche Änderung von $\vec{r}$ und $\vec{P}$ aus der Hamiltonfunktion 54a, so ergibt sich für die Geschwindigkeit $\vec{u}$ die Beziehung

$$u_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,x_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} = \frac{1}{\gamma\,m\,c^2}\,c^2\,\left(P_i - \frac{q}{c}\,A_i\right) \quad , \tag{55}$$

welche mit Gleichung 50 übereinstimmt. Für die zeitliche Änderung des kanonischen Impulses $\vec{P}$ ergibt sich die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,P_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{1}{\gamma\,m\,c^2}\,c^2\,\underbrace{\left(P_j - \frac{q}{c}\,A_j\right)}_{\gamma\,m\,u_j}\frac{q}{c}\,\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - q\,\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{q}{c}\,u_j\,\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - q\,\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad , \tag{56}$$

welche wir unter Verwendung von Gl. 50 in der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,P_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p_i + \frac{q}{c}\,A_i\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,p_i + \frac{q}{c}\,\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{q}{c}\,\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\,u_j$$

auch als Bewegungsgleichung für den mechanischen Impuls $\vec{p}$ schreiben können:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,p_i = q\,\underbrace{\left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{1}{c}\,\frac{\partial A_i}{\partial t}\right)}_{E_i} + \frac{q}{c}\,\underbrace{\left(u_j\,\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - u_j\,\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)}_{\left(\vec{u} \times \mathrm{rot}\,\vec{A}\right)_i} = q\,E_i + \frac{q}{c}\,\left(\vec{u} \times \vec{B}\right)_i \quad . \tag{57}$$

Wir haben somit aus dem Ansatz 41 für die Wechselwirkung zwischen geladenen Teilchen und elektromagnetischem Feld nicht nur die inhomogenen Maxwellgleichungen 47b hergeleitet, sondern auch die **Lorentzkraft** (siehe die Gleichungen VIII.8 und II.8).