ELEKTRODYNAMIK UND RELATIVITÄTSTHEORIE

Kapitel 9: Relativistische Elektrodynamik

Vorlesung für Studenten der Technischen Physik

Helmut Nowotny

Technische Universität Wien

Institut für Theoretische Physik

7., von A. Rebhan korrigierte Auflage

Wien, Februar 2006

IX. RELATIVISTISCHE ELEKTRODYNAMIK

IX.1. Feldstärketensor, Maxwellgleichungen

IX.1.A. Viererstrom, Viererpotential

Nichtrelativistische Formulierung der Maxwellgleichungen

In der nichtrelativistischen Formulierung lauten die **homogenen Maxwellgleichungen**

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \quad , \qquad \operatorname{rot}\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0 \quad , \tag{1}$$

welche durch die Potentialdarstellung

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} \quad , \qquad \vec{E} = -\operatorname{grad}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \tag{2}$$

immer erfüllt werden. Die inhomogenen Maxwellgleichungen

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{4\pi}{c}\, c\varrho \quad , \qquad \operatorname{rot}\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \frac{4\pi}{c}\,\vec{\jmath} \tag{3}$$

führen dann auf die folgenden Bestimmungsgleichung für das skalare Potential ϕ und das Vektorpotential $\vec{A}$

$$\Box\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi + \operatorname{div}\vec{A}\right) = -\frac{4\pi}{c}\, c\varrho \quad , \tag{4a}$$

$$\Box\vec{A} - \operatorname{grad}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi + \operatorname{div}\vec{A}\right) = -\frac{4\pi}{c}\,\vec{\jmath} \quad . \tag{4b}$$

Viererstrom

Die Quellterme der inhomogenen Maxwellgleichungen legen die Einführung des Viererstromes j^μ nahe:

$$j^\mu = \begin{pmatrix} c\varrho \\ \vec{\jmath} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho c \\ \varrho\vec{u} \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{\varrho}{\gamma}}_{\varrho_{ruhe}}\,\gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{u} \end{pmatrix} = \varrho_{ruhe}\, u^\mu \quad . \tag{5}$$

Für eine bewegte Ladungsdichte bedeutet dies eine Zunahme entsprechend (ϱ_{ruhe} ist die invariante Ruheladungsdichte)

$$\varrho = \varrho_{ruhe}\,\gamma \tag{6}$$

als Folge der Lorentzkontraktion bei einer vorausgesetzten **elektrischen Ladungserhaltung**, da dann die gleiche Ladung auf einer um den Faktor γ verkürzten Strecke vorhanden sein muß, d.h. die Ladungsdichte nimmt um den Faktor γ zu.

Viererpotential

Der in den inhomogenen Bestimmungsgleichungen für die Potentiale auftretende Klammerausdruck legt unter Berücksichtigung der Vierervektoreigenschaft des Differentialoperators

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) \tag{7}$$

die Einführung des Viererpotentiales A^μ nahe:

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} \quad . \tag{8}$$

Hiemit gilt

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi + \operatorname{div}\vec{A} \quad . \tag{9}$$

IX.1.B. Die inhomogenen Maxwellgleichungen

Unter Beachtung von

$$\Box := -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 \;=\; -\partial_\mu \partial^\mu \tag{10}$$

können die Bestimmungsgleichungen 4a und 4b für die Potentiale zusammenfassend als Vierergleichung

$$(-\partial_\mu \partial^\mu) A^\nu + \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = -\frac{4\pi}{c}\, j^\nu \tag{11a}$$

geschrieben werden.

Feldstärketensor

Schreiben wir Gleichung 11a nun in der Form

$$-\partial_\mu \left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) = -\frac{4\pi}{c}\, j^\nu \quad , \tag{11b}$$

so legt dies die Einführung eines schiefsymmetrischen Tensors zweiter Stufe nahe:

$$F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad . \tag{12}$$

Dieser Tensor wird als **elektromagnetischer Feldstärketensor** bezeichnet. Da für diesen Tensor die Beziehung

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \tag{13}$$

gilt, besitzt dieser Tensor nur sechs unabhängige Komponenten. Durch explizite Rechnung kann leicht gezeigt werden, daß diese sechs Komponenten den drei Komponenten der elektrischen Feldstärke und den drei Komponenten der magnetischen Feldstärke in der Form

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

entsprechen (dies erklärt auch die Bezeichnung Feldstärketensor).

Die inhomogenen Maxwellgleichungen können somit in der Form

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}\, j^\nu \tag{15}$$

geschrieben werden. Da ∂_μ und j^ν Vierervektoren sind, folgt auf Grund der Quotientenregel die Vierergrößeneigenschaft für den Tensor $F^{\mu\nu}$ und aus dessen Definitionsgleichung wiederum folgt diese Eigenschaft für das Viererpotential.

IX.1.C. Die homogenen Maxwellgleichungen

Dualer Feldstärketensor

Unter Verwendung des im Minkowskiraum konstanten (Pseudo-)Tensor vierter Stufe (**Levi–Civita–Tensor**)

$$\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} := \begin{cases} +1 & \text{wenn } \mu\nu\sigma\tau \text{ gerade Permutation von 0123} \\ -1 & \text{wenn } \mu\nu\sigma\tau \text{ ungerade Permutation von 0123} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{16}$$

können wir den zum Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ **dualen Tensor** $\widehat{F}^{\mu\nu}$ bilden

$$\widehat{F}^{\mu\nu} := \frac{1}{2}\, \varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}\, F_{\sigma\tau} \quad , \tag{17a}$$

welcher explizit durch die Gleichung

$$\widehat{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} \tag{17b}$$

gegeben ist. Mittels dieses dualen Feldstärketensors können die homogenen Maxwellgleichungen 1 in der Form

$$\partial_\mu \widehat{F}^{\mu\nu} = 0 \tag{18a}$$

geschrieben werden.

Die homogenen Maxwellgleichungen 18a sind auf Grund der Definitionsgleichung 12 des elektromagnetischen Feldstärketensors immer erfüllt:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \widehat{F}^{\mu\nu} &= \partial_\mu \frac{1}{2}\, \varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}\, F_{\sigma\tau} = \frac{1}{2}\, \varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}\, (\partial_\mu\partial_\sigma A_\tau - \partial_\mu\partial_\tau A_\sigma) \\ &= \frac{1}{2}\, (\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} - \varepsilon^{\mu\nu\tau\sigma})\, \partial_\mu\partial_\sigma A_\tau = \varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}\, \partial_\mu\partial_\sigma A_\tau = 0 \quad . \end{aligned} \tag{18b}$$

Die homogenen Maxwellgleichungen können auch direkt unter Verwendung des elektromagnetischen Feldstärketensors angeschrieben werden:

$$\partial^\sigma F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\sigma} + \partial^\nu F^{\sigma\mu} = 0 \quad . \tag{19}$$

Dies sind zwar formal mehr als die vier homogenen Maxwellgleichungen, aber die zusätzlichen Gleichungen sind in trivialer Weise erfüllt.

IX.1.D. Kontinuitätsgleichung und Ladungserhaltung

Kontinuitätsgleichung

Die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial t}\varrho = 0 \tag{20}$$

können wir mittels des Viererstromes (siehe Gleichung 5) in der kovarianten Form

$$\partial_\mu\, j^\mu = 0 \tag{21}$$

schreiben. Diese Gleichung ist für die Konsistenz der Maxwellgleichungen notwendig:

$$\underbrace{\underbrace{\partial_\nu \quad \partial_\mu}_{\text{symmetrisch}} \quad F^{\mu\nu}}_{0} = \partial_\nu\, \frac{4\pi}{c}\, j^\nu \quad . \tag{22}$$

Ladungserhaltung

Mittels des vierdimensionalen Gaußschen Integralsatzes

$$\int_V \mathrm{d}^4x\; \partial^\mu\; \ldots = \oint_{R(V)} \mathrm{d}^3\sigma^\mu\; \ldots \quad , \tag{23}$$

wobei V ein vierdimensionales Volumen und $R(V)$ den dreidimensionalen Rand dieses Volumens bedeutet, folgt aus der Kontinuitätsgleichung

$$\int_V \mathrm{d}^4x\; \underbrace{\partial^\mu j_\mu}_{0} = \oint_{R(V)} \mathrm{d}^3\sigma^\mu\, j_\mu = \int_\Sigma \mathrm{d}^3\sigma^\mu\, j_\mu - \int_{\Sigma'} \mathrm{d}^3\sigma^\mu\, j_\mu = 0 \quad . \tag{24}$$

Hiebei schließen die beiden (dreidimensionalen) Hyperflächen Σ und Σ' das (vierdimensionale) Volumen V ein, wobei die Hyperflächennormalen einmal in das Volumen V hinein und einmal aus dem Volumen V heraus zeigen, z.B. bei **zwei Zeithyperebenen** jeweils in die Zukunft. Wenn die Viererstromdichte j^μ räumlich lokalisiert ist, dann geben die 'seitlichen' Hyperebenen keinen Beitrag (da sie räumlich immer im Unendlichen verlaufen) und wir können für die speziellen Zeithyperebenen $x^o (= ct) = constant$ schreiben:

$$\int_\Sigma \mathrm{d}^3\sigma^\mu\, j_\mu = \int_{x^o = constant} \mathrm{d}^3r\, j_o(x^o, \vec{r}) \qquad \text{ist unabhängig von } x^o \quad , \tag{25a}$$

d.h. die Gesamtladung Q

$$Q = \int \mathrm{d}^3r\;\; \varrho(\vec{r}, t) \tag{25b}$$

ist unabhängig von der Zeit t.

IX.2. Transformationseigenschaften

IX.2.A. Transformationsgleichungen des Feldstärketensors

Eichtransformation

Entsprechend der Definitionsgleichung 12 des Feldstärketensors

$$F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{26}$$

ist dieser durch das Viererpotential A^μ eindeutig bestimmt. Dies gilt aber nicht umgekehrt. Bei einer Umeichung des Viererpotentials gemäß der **Eichtransformation**

$$A^\mu \qquad \longrightarrow \qquad A^\mu + \partial^\mu \lambda \tag{27}$$

ändert sich der Feldstärketensor nicht (die Funktion λ ist eine beliebige differenzierbare Funktion). Alle physikalischen Aussagen müssen unabhängig von der Eichung sein. Dies ist in trivialer Weise immer dann gegeben, wenn diese physikalischen Aussagen direkt durch den Feldstärketensor ausgedrückt werden. In vielen Fällen ist dies aber nur mit einem großen Aufwand möglich, während eine Darstellung direkt unter Verwendung des Viererpotentials oft sehr einfach ist. Z.B. geht in die quantenmechanische Bewegungsgleichung geladener Teilchen das Potential A^μ ein und nicht der Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$.

Lorenzeichung

Die Lorenzeichung kann in kovarianter Form

$$\partial_\mu \, A^\mu_{(L)} = 0 \tag{28}$$

angegeben werden. Dies bedeutet, daß diese Eichung beim Übergang von einem System S zu einem System S′ erhalten bleibt (dies ist bei der Strahlungseichung nicht der Fall). In dieser Eichung nehmen die Maxwellgleichungen die folgende einfache Form an

$$\partial_\nu \partial^\nu \, A^\mu_{(L)} = \frac{4\pi}{c} \, j^\mu \quad . \tag{29}$$

Lorentztransformation

Betrachten wir eine Standard–Lorentztransformation

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} \, x^\nu \quad , \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \tag{30}$$

so ist der transformierte Feldstärketensor

$$F'^{\,\mu\nu} = \Lambda^\mu_{\ \sigma} \, \Lambda^\nu_{\ \tau} \, F^{\sigma\tau} = \Lambda^\mu_{\ \sigma} \, F^{\sigma\tau} \, \Lambda^\nu_{\ \tau} \tag{31}$$

explizit durch die folgende Gleichung gegeben:

$$\begin{pmatrix} 0 & -E'_x & -E'_y & -E'_z \\ E'_x & 0 & -B'_z & B'_y \\ E'_y & B'_z & 0 & -B'_x \\ E'_z & -B'_y & B'_x & 0 \end{pmatrix} = \tag{32}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Die Auswertung (Matrizenmultiplikation) ergibt nun die folgenden Transformationsgleichungen für die kartesischen Komponenten der elektrischen bzw. magnetischen Feldstärke:

$$E'_x = E_x \quad , \qquad E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z) \quad , \quad E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y) \quad , \tag{33a}$$

$$B'_x = B_x \quad , \qquad B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z) \quad , \quad B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y) \quad . \tag{33b}$$

IX.2.B. Invarianten des Feldstärketensors

Wir können die beiden folgenden Invarianten des Feldstärketensors bilden:

$$F^{\mu\nu}\, F_{\mu\nu} = -2\left(\vec{E}^{\,2} - \vec{B}^{\,2}\right) \quad , \tag{34a}$$

$$F^{\mu\nu}\, \widehat{F}_{\mu\nu} = -4\,\vec{E}\cdot\vec{B} \quad . \tag{34b}$$

Dies bedeutet, daß hinsichtlich der elektromagnetischen Feldstärken in zwei Inertialsystemen S und S′ immer die folgenden Beziehungen gelten:

$$\vec{E}^{\,2} - \vec{B}^{\,2} = \vec{E}'^2 - \vec{B}'^2 \quad , \tag{35a}$$

$$\vec{E}\cdot\vec{B} = \vec{E}'\cdot\vec{B}' \quad . \tag{35b}$$

Diese Beziehungen liefern uns die Aussagen:

1. Ist in einem System $|\vec{E}| > (=<)\ |\vec{B}|$, so gilt in allen Systemen $|\vec{E}\,'| > (=<)\ |\vec{B}\,'|$.

2. Ist der Winkel α zwischen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in einem System $> (=<)\ \pi/2$, so ist dies in allen Systemen der Fall.

3. Verschwindet in einem Inertialsystem $\vec{E}$ oder $\vec{B}$, so ist in allen Inertialsystemen $\vec{E}\,'$ senkrecht zu $\vec{B}\,'$.

4. Ist $\vec{E}$ senkrecht zu $\vec{B}$, so läßt sich für $\vec{E}^{\,2} - \vec{B}^{\,2} > (<)\ 0$ ein Bezugssystem finden, in dem $\vec{B} = 0 (\vec{E} = 0)$ gilt.

5. Ist $\vec{E}$ senkrecht zu $\vec{B}$ und $\vec{E}^{\,2} - \vec{B}^{\,2} = 0$, dann sind $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in allen Systemen senkrecht zueinander und betragsgleich.

IX.3. Kraft– und Energiegleichungen

IX.3.A. Lorentzkraftdichte

Die Lorentzkraftdichte

$$\vec{f} = \varrho\vec{E} + \frac{1}{c}\,\vec{\jmath}\times\vec{B} = \frac{\varrho}{c}\left(c\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B}\right) = \frac{\varrho}{c}\begin{pmatrix} F^{10}c - F^{12}u_y - F^{13}u_z \\ F^{20}c - F^{21}u_x - F^{23}u_z \\ F^{30}c - F^{31}u_x - F^{32}u_y \end{pmatrix} \tag{36}$$

kann unter Verwendung des Viererstromes j^ν in der Form

$$f^i = \frac{\varrho_{ruhe}}{c}\,F^{i\nu}u_\nu = \frac{1}{c}\,F^{i\nu}j_\nu \tag{37}$$

geschrieben werden. Ergänzen wir diesen Dreiervektor mit der zeitartigen Komponente

$$f^0 = \frac{1}{c}\,F^{0\nu}j_\nu = \frac{1}{c}\,\vec{E}\cdot\vec{\jmath} \quad , \tag{38}$$

so erhalten wir den **Kraftdichte–Vierervektor**

$$f^\mu = \frac{1}{c}\,F^{\mu\nu}j_\nu \quad . \tag{39}$$

Elimination des Viererstromes

Mittels der inhomogenen Maxwellgleichungen 15 können wir den Viererstrom durch die elektromagnetischen Feldgrößen ausdrücken:

$$\frac{4\pi}{c}\,j_\nu = \partial^\sigma F_{\sigma\nu} \quad , \qquad \text{d.h.} \qquad \frac{1}{c}\,f^\mu = \frac{1}{4\pi c}\,F^{\mu\nu}\,\partial^\sigma F_{\sigma\nu} \quad . \tag{40}$$

Die weitere Umformung

$$\frac{1}{c}\,f^\mu = \frac{1}{4\pi c}\,\partial^\sigma\left(F^{\mu\nu}F_{\sigma\nu}\right) - \frac{1}{4\pi c}\,F_{\sigma\nu}\,\partial^\sigma F^{\mu\nu}$$

ergibt unter Verwendung der homogenen Maxwellgleichungen 19

$$\begin{aligned} F_{\sigma\nu}\,\partial^\sigma F^{\mu\nu} &= F_{\nu\sigma}\,\partial^\nu F^{\mu\sigma} = F_{\sigma\nu}\,\partial^\nu F^{\sigma\mu} = \frac{1}{2}\,F_{\sigma\nu}\,\left(\partial^\sigma F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\sigma\mu}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\,F_{\sigma\nu}\,\partial^\mu F^{\nu\sigma} = \frac{1}{4}\,\partial^\mu\left(F_{\sigma\nu}\,F^{\sigma\nu}\right) = \frac{1}{4}\,\partial_\nu\left(g^{\nu\mu}\,F_{\sigma\tau}\,F^{\sigma\tau}\right) \end{aligned}$$

den folgenden Ausdruck für die Viererkraftdichte

$$\frac{1}{c}\,f^\mu = -\frac{1}{4\pi c}\,\partial_\nu\left(F^{\mu\sigma}F_\sigma{}^\nu + \frac{1}{4}\,g^{\mu\nu}\,F_{\sigma\tau}\,F^{\sigma\tau}\right) \quad . \tag{41}$$

IX.3.B. Elektromagnetischer Energie–Impuls–Tensor

Gleichung 41 legt die Einführung des symmetrischen elektromagnetischen Energie–Impuls–Tensor

$$T^{\nu\mu} := \frac{1}{4\pi c}\left(F^{\nu\sigma}F_\sigma{}^\mu + \frac{1}{4}\,g^{\nu\mu}\,F_{\sigma\tau}\,F^{\sigma\tau}\right) \tag{42}$$

nahe. Die Viererkraftdichte ist dann durch die Viererdivergenz dieses Tensors gegeben:

$$\frac{1}{c}\,f^\mu = -\partial_\nu\,T^{\nu\mu} \quad . \tag{43}$$

Berechnen wir aus der Definitionsgleichung 42 die einzelnen Komponenten des Energie–Impuls–Tensors, so ergeben sich die folgenden Ausdrücke:

$$T^{00} = \frac{1}{c}\,\frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^{\,2} + \vec{B}^{\,2}\right) = \frac{1}{c}\,w_{em} \quad , \tag{44a}$$

$$T^{0i} = \frac{1}{4\pi c}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)^i = g^i_{em} \quad , \tag{44b}$$

$$T^{i0} = T^{0i} = g^i_{em} = \frac{1}{c^2}\,S^i \quad , \tag{44c}$$

$$T^{il} = -\frac{1}{4\pi c}\left(E_iE_l + B_iB_l - \frac{1}{2}\,\delta_{il}(\vec{E}^{\,2} + \vec{B}^{\,2})\right) = -\frac{1}{c}\,T^{(M)}_{il} \quad . \tag{44d}$$

Zusammenfassend können wir somit schreiben

$$T^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\,w_{em} & \vec{g}_{em} = \frac{1}{c^2}\,\vec{S} \\ \vec{g}_{em} & -\frac{1}{c}\,\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}}^{(M)} \end{pmatrix} \quad , \tag{45}$$

wobei w_{em} die elektromagnetische Energiedichte, $\vec{g}_{em}$ die elektromagnetische Impulsdichte, $\vec{S}$ die elektromagnetische Energiestromdichte (Poyntingvektor) und $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}}^{(M)}$ der Maxwellsche Spannungstensor sind.

IX.3.C. Bilanzgleichungen

Die durch Zusammenfassen von Gleichung 39 und 43 entstehende Gleichung

$$\partial_\nu\,T^{\nu\mu} + \frac{1}{c^2}\,F^{\mu\nu}\,j_\nu = 0 \tag{46}$$

beschreibt die Energie– und Impulserhaltung für das aus den elektromagnetischen Feldern und den Quellen bestehende Gesamtsystem:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}w + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} + \vec{\jmath}\cdot\vec{E}\right) = 0 \quad , \tag{47a}$$

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t}g_i - \frac{\partial}{\partial x_l}\,T^{(M)}_{li} + E_i\,\varrho + \frac{1}{c}\,(\vec{\jmath}\times\vec{B})_i\right) = 0 \quad . \tag{47b}$$

Viererimpuls des elektromagnetischen Feldes

Definieren wir den Viererimpuls des elektromagnetischen Feldes gemäß der Gleichung

$$p^{\mu}_{feld} = \int \mathrm{d}\sigma_{\nu}\, T^{\nu\mu} = \int \mathrm{d}^3 r\; T^{0\mu} \quad , \tag{48}$$

so folgt mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, p^{\mu}_{teilchen} = \int \mathrm{d}^3 r\; f^{\mu} \tag{49}$$

aus Gleichung 43

$$\partial_{\nu}\, T^{\nu\mu} + \frac{1}{c}\, f^{\mu} = 0$$

durch eine Volumsintegration

$$\int \mathrm{d}^3 r\, \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\, T^{0\mu} + \frac{\partial}{\partial x^i}\, T^{i\mu}\right) + \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3 r\; f^{\mu} = 0$$

die Beziehung

$$\frac{1}{c}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, p^{\mu}_{feld} + \frac{1}{c}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, p^{\mu}_{teilchen} = -\int \mathrm{d}^3 r\; \frac{\partial}{\partial x^i}\, T^{i\mu} \quad , \tag{50}$$

welche eine Zusammenfassung von Gleichung II.49 (Energieerhaltungssatz der Elektrodynamik) und von Gleichung II.56 (Impulserhaltungssatz der Elektrodynamik) darstellt.

IX.3.D. Bewegungsgleichung für ein geladenes Punktteilchen

Für ein Punktteilchen mit der elektrischen Ladung q, welches sich in äußeren elektromagnetischen Feldern $\vec{E}$ und $\vec{B}$ befindet, lautet die Bewegungsgleichung, d.h. die Gleichung für die zeitliche Änderung des Impulses

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{p} = q\,\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\,\vec{u}\times\vec{B}\right) \quad , \tag{51}$$

während die zeitliche Änderung der Energie des Teilchens durch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, E = q\,\vec{u}\cdot\vec{E} \tag{52}$$

gegeben ist. Diese beiden Gleichungen können zu einer Vierergleichung zusammengefaßt und kovariant geschrieben werden:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\, m\, u^{\mu} = \frac{q}{c}\, F^{\mu\nu}\, u_{\nu} \quad . \tag{53}$$

IX.4. Relativistische Optik

IX.4.A. Ebene Wellen

In quellenfreien Gebieten sind auch die im allgemeinen inhomogenen Maxwellgleichungen homogen:

$$\partial_\sigma F^{\sigma\nu} = 0 \quad . \tag{54}$$

Wenden wir auf die immer gültigen homogenen Maxwellgleichungen (siehe Gl. 19)

$$\partial^\sigma F^{\nu\mu} + \partial^\nu F^{\mu\sigma} + \partial^\mu F^{\sigma\nu} = 0 \tag{55}$$

den Operator ∂_σ an, so ergibt sich unter Verwendung von Gl. 54 sofort die Wellengleichung

$$\partial_\sigma \partial^\sigma F^{\nu\mu} = 0 \tag{56}$$

für alle Komponenten des Feldstärketensors $F^{\nu\mu}$.

Mit dem Ansatz

$$F^{\nu\mu}(\vec{r}, t) = f^{\nu\mu}\, \mathrm{e}^{-ik_\sigma x^\sigma} \tag{57}$$

ist diese Wellengleichung für alle Komponenten erfüllt, wenn der **Wellenzahlvierervektor** k^μ der Gleichung

$$k_\sigma\, k^\sigma = 0 \tag{58}$$

genügt. Schreiben wir diesen Wellenzahlvierervektor in der Form

$$k^\sigma = \begin{pmatrix} k^0 \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega/c \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\vec{k}| \\ \vec{k} \end{pmatrix} \quad , \tag{59}$$

so erkennen wir, daß Gleichung 58 genau der bereits im Kapitel V erhaltenen **Dispersionsbeziehung** (Gleichung V.9)

$$\omega = c\, |\vec{k}| = c\, k \tag{60}$$

entspricht. Der Zusammenhang mit der Teilchenbeschreibung eines Photons entsprechend den Gleichungen VIII.55 und VIII.56 ist durch

$$p^\mu = \hbar\, k^\mu = \begin{pmatrix} \hbar\, \omega/c \\ \hbar\, \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} \tag{61}$$

gegeben.

IX.4.B. Doppler–Effekt

Der Doppler–Effekt beschreibt die Frequenzänderung einer ebenen Welle bei Beobachtung in einem bewegten System.

Wir nehmen an, daß die ebene Welle im System S durch den Wellenzahlvierervektor

$$k^\mu = \begin{pmatrix} k \\ -k\cos\alpha \\ -k\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \tag{62}$$

beschrieben wird (Bewegung zum Koordinatenursprung unter einem Winkel α bezüglich der positiven x-Achse). In einem System S$'$, welches sich mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung bewegt, erhalten wir eine gleichwertige Beschreibung dieser ebenen Welle durch eine Standard-Lorentztransformation dieses Wellenzahlvierervektors:

$$k'^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ -k\cos\alpha \\ -k\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma k(1+\beta\,\cos\alpha) \\ -\gamma k(\beta+\cos\alpha) \\ -k\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{63}$$

Die Änderung der Frequenz folgt aus der zeitartigen Komponente dieser Vierergleichung zu

$$\omega' = c\,k' = \omega\,\gamma\,(1+\beta\,\cos\alpha) \quad . \tag{64}$$

Longitudinaler und transversaler Doppler–Effekt

Falls die Bewegungsrichtung des bewegten Systems parallel zur Ausbreitungsrichtung der ebenen Welle ist, d.h. für $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi$, spricht man vom **longitudinalen** Doppler–Effekt

$$\alpha = 0 \quad : \qquad \omega' = \omega\,\gamma\,(1+\beta) \quad , \tag{65a}$$

$$\alpha = \pi \quad : \qquad \omega' = \omega\,\gamma\,(1-\beta) \quad , \tag{65b}$$

während man vom **transversalen** Doppler–Effekt spricht, wenn diese beiden Richtungen senkrecht zueinander stehen:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad : \qquad \omega' = \omega\,\gamma \quad . \tag{66}$$

Der longitudinale Dopplereffekt ist ein Effekt erster Ordnung in β und ergibt sich auch in der klassischen Physik bei Ausbreitungsvorgängen in einem Medium. Der transversale Dopplereffekt hingegen ist ein Effekt zweiter Ordnung in β und besitzt kein klassisches Analogon.

IX.4.C. Aberration

Die Aberration beschreibt die Richtungsänderung der Bewegungsrichtung einer ebenen Welle bei Beobachtung in einem bewegten System.

Schreiben wir den Wellenzahlvierervektor im System S$'$ in der Form

$$k'^{\mu} = \begin{pmatrix} k' \\ -k'\cos\alpha' \\ -k'\sin\alpha' \\ 0 \end{pmatrix} \tag{67}$$

so erhalten wir durch Vergleich mit Gleichung 63 die folgenden Beziehungen für den neuen Richtungswinkel α' :

$$\sin\alpha' = \frac{1}{\gamma}\,\frac{\sin\alpha}{1+\beta\,\cos\alpha} \quad , \tag{68a}$$

$$\cos\alpha' = \frac{\cos\alpha+\beta}{1+\beta\,\cos\alpha} \quad . \tag{68b}$$

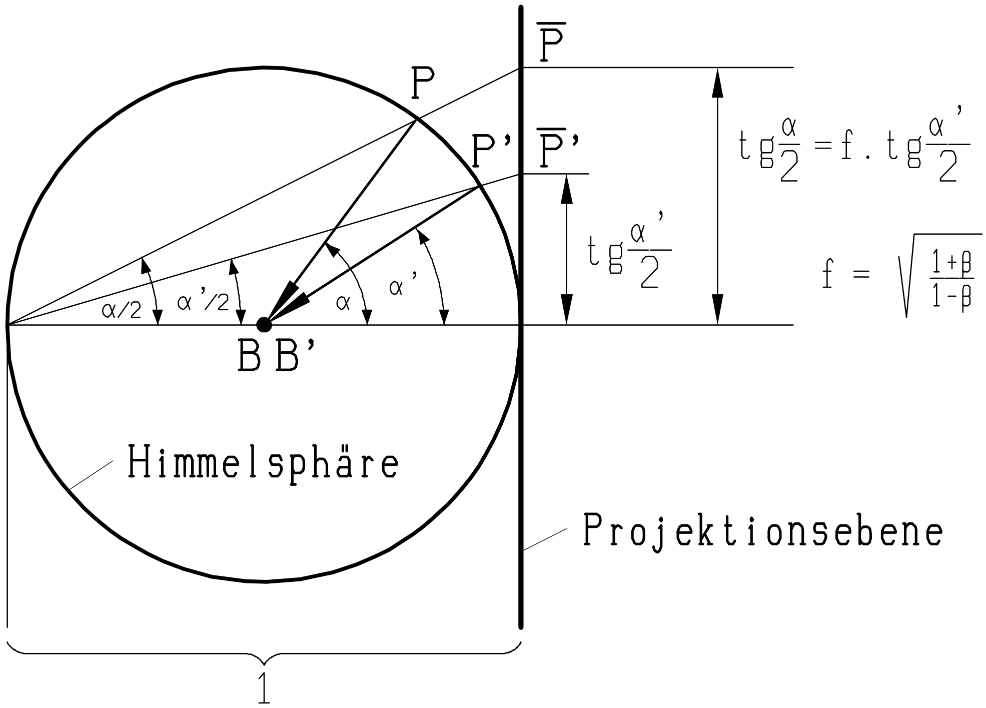

Fig. 9.1 Darstellung der Aberrationsgleichung als stereographische Projektion und zentrische Streckung

Durch explizite Nachrechnung kann die Gültigkeit von $\sin^2\alpha' + \cos^2\alpha' = 1$ gezeigt werden. Umformung der letzten Gleichung unter Verwendung der Formel

$$\cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

ergibt nun

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha'}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha'}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \beta\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \beta\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1 - \frac{1-\beta}{1+\beta} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \frac{1-\beta}{1+\beta} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

d.h. die von Penrose 1959 angegebene Beziehung

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \quad . \tag{69}$$

Diese Aberrationsgleichung kann aus einer stereographischen Projektion und einer zentrischen Streckung erhalten werden und stellt somit eine konforme Abbildung dar: Kreise der Projektionsebene werden auf Kreise auf der Kugel (= Himmelssphäre) abgebildet. Alle koinzidierenden Beobachter sehen auf ihrer Projektionsebene das (bis auf einen Maßstabsfaktor) gleiche Bild (Unsichtbarkeit der Lorentz-Kontraktion für eine Kugel).