ELEKTRODYNAMIK UND RELATIVITÄTSTHEORIE

Kapitel 8: Relativistische Mechanik

Vorlesung für Studenten der Technischen Physik

Helmut Nowotny

Technische Universität Wien

Institut für Theoretische Physik

7., von A. Rebhan korrigierte Auflage

Wien, Februar 2006

VIII. RELATIVISTISCHE MECHANIK

VIII.1. Punktteilchen

Ein Punktteilchen besitzt definitionsgemäß keine räumliche Ausdehnung und keine innere Struktur. Der gesamte Bewegungszustand eines Punktteilchens kann daher immer durch eine einzige Weltlinie beschrieben werden. Dieser Weltlinie kann in invarianter Weise eine Eigenzeit τ, eine Vierergeschwindigkeit u^ν, eine Viererbeschleunigung a^ν, usw. zugeordnet werden.

Ein Punktteilchen wird im Rahmen der relativistischen Mechanik alleine durch seine **invariante Masse** m gekennzeichnet. Die Zuordnung eines **Viererimpulses** p^μ erfolgt gemäß der Definitionsgleichung

$$p^\mu := m\, u^\mu \quad . \tag{1}$$

Unter Verwendung der Gleichung VII.38 können wir diese Gleichung auch in der Form

$$\begin{pmatrix} p^o \\ \vec{p} \end{pmatrix} = m\, \gamma(u) \begin{pmatrix} c \\ \vec{u} \end{pmatrix} \tag{2}$$

schreiben, woraus für die räumlichen Komponenten des Viererimpulses, welche den **Dreierimpuls** $\vec{p}$ bilden, die Beziehung

$$\vec{p} = m\, \gamma(u)\, \vec{u} \tag{3}$$

folgt. Der Faktor $m\gamma(u)$ kann auch als eine geschwindigkeitsabhängige Masse $m(u)$ angesehen werden, sodaß Gleichung 3 auch in der üblichen nichtrelativistischen Form

$$\vec{p} = m(u)\, \vec{u}$$

geschrieben werden kann. Die invariante Masse m entspricht somit $m(0)$ und wird daher auch als **Ruhemasse** des Punktteilchens bezeichnet.

Betrag des Viererimpulses

Aus

$$u^\mu\, u_\mu = c^2 \qquad \text{folgt} \qquad p^\mu\, p_\mu = m^2\, c^2 \quad . \tag{4}$$

Diese Gleichung kann auch in der Form

$$(p^o)^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2\, c^2 \qquad \text{bzw.} \qquad p^o = \sqrt{m^2\, c^2 + \vec{p}^{\,2}} \tag{5}$$

geschrieben werden und stellt eine Verknüpfung der zeitartigen Komponente des Viererimpulses mit dem Dreierimpuls dar.

VIII.2. Relativistische Bewegungsgleichung

VIII.2.A. Bewegungsgleichung, Viererkraft

Analog zur Newtonschen Bewegungsgleichung

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \tag{6}$$

kann als relativistisches Bewegungsgesetz die Gleichung

$$F^\mu := \frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} \tag{7}$$

postuliert werden.

Der Zusammenhang zwischen den räumlichen Komponenten der Viererkraft F^μ und der Newtonkraft $\vec{F}$ ergibt sich aus der Gleichung

$$F^i = \frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}t} = \gamma(u)\,\left(\vec{F}\right)^i \quad . \tag{8}$$

Punktteilchen

Da für ein Punktteilchen die invariante Ruhemasse m zeitunabhängig ist, können wir die relativistische Bewegungsgleichung in der Form

$$F^\mu = m\,\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = m\,a^\mu \tag{9}$$

schreiben. Unter Beachtung von

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(u) = \gamma(u)^3\,\frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{c^2} \qquad \text{mit der } \textbf{Dreierbeschleunigung} \qquad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} \tag{10}$$

folgt hieraus

$$F^\mu = m\,\gamma(u)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(u)\begin{pmatrix} c \\ \vec{u} \end{pmatrix} = m\,\gamma(u)^2\begin{pmatrix} 0 \\ \vec{a} \end{pmatrix} + m\,\gamma(u)^4\,\frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{c^2}\begin{pmatrix} c \\ \vec{u} \end{pmatrix} \tag{11}$$

bzw. für die **Dreierkraft** $\vec{F}$

$$\vec{F} = m\,\gamma(u)\,\vec{a} + m\,\gamma(u)^3\,\frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{c^2}\,\vec{u} \quad , \tag{12}$$

d.h. die relativistische Trägheitskraft besitzt nicht nur eine Komponente in Richtung der Dreierbeschleunigung $\vec{a}$, sondern auch eine Komponente in Richtung der Dreiergeschwindigkeit $\vec{u}$.

VIII.2.B. Energiesatz

Unter Beachtung von Gleichung VII.40 folgt aus

$$F^\mu = m\, a^\mu = \begin{pmatrix} F^o \\ \gamma\, \vec{F} \end{pmatrix} \tag{13}$$

durch Produktbildung mit der Vierergeschwindigkeit u_μ

$$F^\mu\, u_\mu = \gamma\, \left(c\, F^o - \gamma\, \vec{F}\cdot\vec{u}\right) = 0 \quad .$$

Somit gilt für die zeitartige Komponente F^o der Viererkraft die Beziehung

$$F^o = \frac{\gamma}{c}\, \vec{F}\cdot\vec{u} = \frac{\gamma}{c}\, \frac{\vec{F}\cdot\vec{u}\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \frac{\gamma}{c}\, \frac{\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t} = \frac{\gamma}{c}\, \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\, \frac{A}{c} \quad . \tag{14}$$

Durch den Vergleich mit

$$F^o = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\, p^o = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\, m\,\gamma\, c$$

ergibt sich die differentielle Energiebeziehung

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}\, \left(m\,\gamma\, c^2\right) \quad . \tag{15}$$

Gradientenfeld

Ist die Kraft $\vec{F}$ als negatives Gradientenfeld eines Potentials V darstellbar

$$\vec{F} = -\, \vec{\nabla} V \tag{16}$$

so gilt

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = -\, \vec{\nabla}V\cdot\mathrm{d}\vec{s} = -\, \mathrm{d}V$$

und somit

$$\mathrm{d}\, \left(m\,\gamma\, c^2 + V\right) = 0 \quad ,$$

woraus durch Integration der **relativistische Energiesatz**

$$m\,\gamma\, c^2 + V = E \tag{17}$$

erhalten wird.

Die Gesamtenergie E ist somit eine Konstante der Bewegung für ein Punktteilchen in einem Potentialfeld.

VIII.2.C. Freies Punktteilchen

Für ein **freies Teilchen**, d.h. für $V = 0$, folgt aus dem relativistischen Energiesatz 17 die Beziehung

$$E = m\,\gamma\, c^2 \qquad \text{bzw.} \qquad E = m(u)\, c^2 \quad , \tag{18}$$

welche als **Einstein–Relation** bezeichnet wird (Verknüpfung von Energie und Masse).

Unter Verwendung dieser Einstein–Relation kann der Viererimpuls eines Punktteilchens in der Form

$$p^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} \tag{19}$$

geschrieben werden. Aus dem invarianten Quadrat des Viererimpulses (siehe Gleichung 4) ergibt sich dann der folgende Zusammenhang zwischen Teilchenenergie und Dreierimpuls

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = m^2\, c^2 \quad , \tag{20a}$$

welcher auch in der Form

$$E^2 = m^2\, c^4 + c^2\, \vec{p}^{\,2} \qquad \text{bzw.} \qquad E = m\, c^2 \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{m^2\, c^2}} \tag{20b}$$

geschrieben werden kann.

Nichtrelativistischer Grenzfall

Für den nichtrelativistischen Grenzfall, d.h. für $u \ll c$, ergibt sich aus Gleichung 20b durch Reihenentwicklung

$$E = m\, c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\, \frac{\vec{p}^{\,2}}{m^2\, c^2} - \frac{1}{8}\, \frac{(\vec{p}^{\,2})^2}{m^4\, c^4} + \ldots \right) = m\, c^2 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2\, m} - \frac{(\vec{p}^{\,2})^2}{8\, m^3\, c^2} + \ldots \quad . \tag{21}$$

Der erste Term dieser Entwicklung gibt die Ruheenergie an, während der zweite (auch im Grenzfall $c \to \infty$ nicht verschwindende) Term die **klassische kinetische Energie** eines Punktteilchens beschreibt. Der dritte Term stellt einen Korrekturterm für die näherungsweise Berücksichtigung der relativistischen Massenänderung dar.

VIII.2.D. Gleichförmig beschleunigte Bewegung

Wir wollen nun als Anwendungsbeispiel der relativistischen Bewegungsgleichung 7 ein Teilchen mit der Ruhemasse M betrachten, welches im Koordinatenursprung eines Systems S ruht und auf das ab dem Zeitpunkt $t = 0$ eine konstante Dreierkraft $\vec{F} = (F, 0, 0)$ einwirkt.

Aus der Viererbewegungsgleichung 7

$$\begin{pmatrix} F^o \\ \gamma\, \vec{F} \end{pmatrix} = \gamma\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} \tag{22}$$

folgt die relativistische Dreierbewegungsgleichung

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, M\, \gamma\, \vec{u} \quad . \tag{23}$$

Da die einwirkende Kraft auf das zur Zeit $t = 0$ im Koordinatenursprung ruhende Punktteilchen nur eine x-Komponente aufweist, gilt für die Weltlinie des Punktteilchens im System S

$$y(t) = 0 \quad , \qquad z(t) = 0 \quad . \tag{24}$$

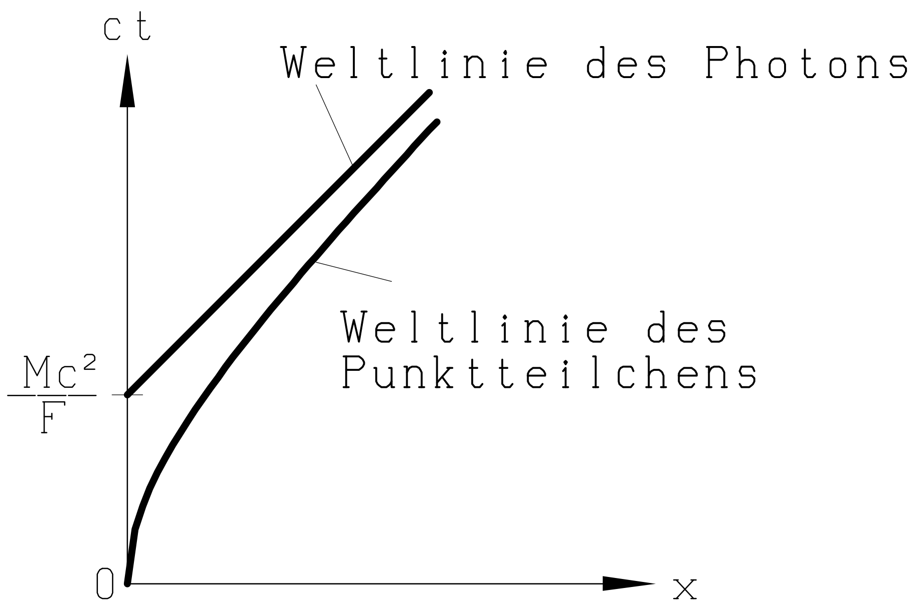

Fig. 8.1 Weltlinie eines gleichförmig beschleunigten Punktteilchens

Somit können wir uns auf die x-Koordinate der Weltlinie beschränken und erhalten aus Gl. 23 die skalare Differentialgleichung

$$F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} M\,\gamma\,u \qquad \text{mit der Lösung} \qquad F\,t = M\,\gamma\,u \quad . \tag{25}$$

Auflösung dieser Gleichung nach der Geschwindigkeit u ergibt

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{c\,t}{\sqrt{t^2 + \frac{M^2\,c^2}{F^2}}} \quad ,$$

woraus die Weltlinie des Punkteilchens durch Integration zu

$$x(t) = \frac{M\,c^2}{F}\left(\sqrt{1 + \frac{F^2\,t^2}{M^2\,c^2}} - 1\right) \tag{26}$$

folgt. Diese Weltlinie ist in der ct-x-Ebene eine Hyperbel, weshalb die gleichförmig beschleunigte Bewegung auch als **hyperbolische Bewegung** bezeichnet wird.

Zu bemerken ist, daß ein Lichtsignal, welches zu einer späteren Zeit als $\frac{M\,c}{F}$ vom Koordinatenursprung ausgesendet wird, das bewegte Punktteilchen nicht mehr erreicht, obwohl die Geschwindigkeit des Punktteilchens immer kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist.

Berechnung der Eigenzeit

Die Berechnung der Eigenzeit des Punktteilchens entlang seiner Weltlinie erfolgt unter Verwendung von Gleichung VII.36 und ergibt

$$\tau = \frac{M\,c}{F}\,\mathrm{Arsinh}\,\frac{F\,t}{M\,c} \quad . \tag{27}$$

VIII.3. Teilchenstöße

VIII.3.A. Gesamtimpulserhaltung

Der gesamte Viererimpuls mehrerer nichtwechselwirkender Teilchen ist durch den **Gesamtviererimpuls**

$$p^\mu = \sum_A p^\mu_A \tag{28}$$

gegeben, wobei der Index A zur Unterscheidung der einzelnen Teilchen verwendet wird.

Wirken keine äußeren Kräfte auf diese Teilchen ein, so ist der Viererimpuls jedes einzelnen Teilchens zeitunabhängig und somit gilt auch, daß der Gesamtviererimpuls eine Erhaltungsgröße der Bewegung ist.

Teilchenstöße

Innerhalb kleiner raum-zeitlichen Bereichen vorhandene Wechselwirkungen zwischen den Teilchen bewirken, daß sich die Viererimpulse der einzelnen Teilchen bei Zusammenstößen ändern. Falls keine äußeren Kräfte vorhanden sind, bleibt aber der Gesamtviererimpuls auch bei Teilchenstößen erhalten:

$$p^\mu_{vorher} = p^\mu_{nachher} \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_A p^\mu_A = \sum_{A'} p^\mu_{A'} \quad . \tag{29}$$

Vorher und nachher bedeutet hiebei, daß sich alle betrachteten Teilchen außerhalb des raum-zeitlichen Wechselwirkungsgebietes befinden. Hiebei läuft der Summationsindex A über alle vor dem Stoß vorhandenen Teilchen und der Summationsindex A' über alle nach dem Stoß vorhandenen Teilchen (beim Stoßprozeß können Teilchen erzeugt oder vernichtet werden, so daß diese beiden Summen verschiedene Teilchenzahlen und Teilchenarten umfassen können).

Die in dieser Gleichung angegebene Erhaltung des gesamten Viererimpulses ersetzt die in der nichtrelativistischen Mechanik gültigen Erhaltungsgesetze der Masse, der Energie und des Gesamtdreierimpulses.

Systemwechsel

Da p^μ ein Vierervektor ist, gilt die Erhaltung des Gesamtviererimpulses in jedem Inertialsystem, d.h. wir können mittels einer Lorentztransformation von einem System S auf ein hiezu bewegtes System S$'$ übergehen

$$p'^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu \, p^\mu \tag{30}$$

und können in diesem System S$'$ die Erhaltung des Gesamtviererimpulses

$$p'^\nu_{vorher} = p'^\nu_{nachher} \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_A p'^\nu_A = \sum_{A'} p'^\nu_{A'} \tag{31}$$

für die Berechnung des Stoßprozesses verwenden (durch die Wahl geeigneter Inertialsysteme kann der Rechenaufwand oft beträchtlich verkleinert werden).

VIII.3.B. Schwerpunktsystem

Ein Inertialsystem, in dem sämtliche räumliche Komponenten des Gesamtviererimpulses verschwinden, wird als **Schwerpunktsystem** dieses Viererimpulses bezeichnet.

Haben wir einen beliebigen Viererimpuls vorliegen, so können wir in einem ersten Schritt unser Koordinatensystem so drehen, daß die x-Achse in Richtung der räumlichen Komponente $\vec{p}$ des Viererimpulses zeigt:

$$p^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{32}$$

Berechnen wir nun mittels einer Standard-Lorentztransformation den Viererimpuls in einem System S′, welches sich mit der Geschwindigkeit v in positiver x-Richtung bewegt, so erhalten wir

$$p'^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu \, p^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E/c \\ p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (E - v\,p)\gamma/c \\ (-\beta E + c\,p)\gamma/c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{33}$$

Damit dieses System S′ nun das Schwerpunktsystem zu dem gegebenen Viererimpuls ist, muß die Geschwindigkeit v_s so gewählt werden, daß

$$-\beta_s \, E + c\,p = 0 \quad , \qquad \text{d.h.} \qquad \beta_s = \frac{c\,p}{E} \tag{34}$$

gilt. Der Viererimpuls nimmt dann die Gestalt

$$p'^\nu = \begin{pmatrix} \sqrt{E^2 - c^2\,p^2}/c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{35}$$

an (dieses Ergebnis folgt auch direkt aus der Invarianz von $p^\mu \, p_\mu$).

Lorentztransformation auf Schwerpunktsystem

Verwenden wir die **invariante Schwerpunktmasse** M, welche über die Definitionsgleichung

$$c^2 \, M^2 := p^\mu \, p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 \tag{36}$$

festgelegt ist, so ergeben sich aus Gl. 34 sofort die Matrixelemente der Standard-Lorentztransformation, wie sie in Gleichung 33 auftreten:

$$\gamma_s = \frac{E}{M\,c^2} \quad , \qquad \beta_s \, \gamma_s = \frac{p}{M\,c} \quad . \tag{37}$$

Anwendung auf zwei Teilchen

Haben wir zwei Punktteilchen mit den Ruhemassen m_A und m_B vorliegen und legen die x-Achse in Richtung des Gesamtimpulses $\vec{p}$, so gilt

$$p_A^\mu = \begin{pmatrix} E_A/c \\ p_A \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \quad , \quad p_B^\mu = \begin{pmatrix} E_B/c \\ p_B \\ -p_y \\ -p_z \end{pmatrix} \quad , \quad p^\mu = p_A^\mu + p_B^\mu = \begin{pmatrix} (E_A + E_B)/c \\ p_A + p_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{38}$$

Für die beiden Punktteilchen gelten die Energie–Impuls–Relationen

$$m_A^2\, c^2 = \frac{E_A^2}{c^2} - p_A^2 - p_y^2 - p_z^2 = \frac{E_A^2}{c^2} - \vec{p}_A^{\,2} \quad , \qquad m_B^2\, c^2 = \frac{E_B^2}{c^2} - p_B^2 - p_y^2 - p_z^2 = \frac{E_B^2}{c^2} - \vec{p}_B^{\,2} \quad , \tag{39}$$

und die Definitionsgleichung 36 für die Schwerpunktmasse M ergibt

$$M^2\, c^2 = \frac{(E_A + E_B)^2}{c^2} - (p_A + p_B)^2 \tag{40}$$

bzw. nach einer kurzen Umformung

$$M^2 = (m_A + m_B)^2 + 2 \left(\frac{E_A\, E_B}{c^4} - \frac{\vec{p}_A \cdot \vec{p}_B}{c^2} - m_A\, m_B \right) \quad . \tag{41}$$

VIII.3.C. Elastische und inelastische Stoßprozesse

Wir unterscheiden bei den Stoßprozessen zwischen elastischen Stößen und inelastischen Stößen:

> Bei **elastischen Stoßprozessen** bleiben alle Teilchen samt ihrem inneren Aufbau erhalten, d.h. wir haben die gleichen Teilchen vor und nach dem Stoß vorliegen.
>
> Bei **inelastischen Stoßprozessen** ist zumindest ein Teilchen vor und nach dem Stoß verschieden (Teilchen werden beim Stoßprozess erzeugt oder vernichtet oder es ändert sich zumindest die innere Struktur eines Teilchens).

Die Erhaltung des Gesamtviererimpulses gemäß Gleichung 29 legt diesen Stoßprozessen weitere Bedingungen auf, z.B. kann für die Erzeugung eines neuen Teilchens eine bestimmte Mindestgeschwindigkeit eines stoßenden Teilchens notwendig sein oder der Stoßprozeß kann in der angenommenen Art überhaupt nicht ablaufen.

Elastischer Stoß zweier Teilchen

Betrachten wir den elastischen Stoß zweier Punktteilchen mit den Ruhemassen m_A und m_B im Schwerpunktsystem, so gilt für die Viererimpulse vor dem Stoß

$$p_A^\mu = \begin{pmatrix} E_A/c \\ +\vec{p}_A \end{pmatrix} \quad , \quad p_B^\mu = \begin{pmatrix} E_B/c \\ -\vec{p}_A \end{pmatrix} \quad , \tag{42a}$$

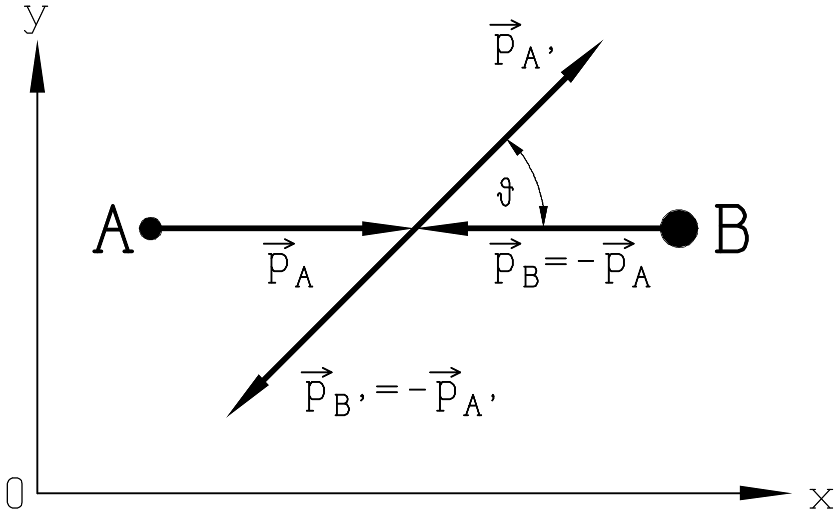

Fig. 8.2 Elastischer Stoß zweier Teilchen im Schwerpunktsystem

mit den Energie–Impuls–Relationen

$$\frac{E_A^2}{c^2} - \vec{p}_A^{\,2} = m_A^2\, c^2 \quad , \qquad \frac{E_B^2}{c^2} - \vec{p}_A^{\,2} = m_B^2\, c^2 \quad . \tag{42b}$$

Analog gilt für die Viererimpulse nach dem Stoß

$$p^\mu_{A'} = \begin{pmatrix} E_{A'}/c \\ +\vec{p}_{A'} \end{pmatrix} \quad , \qquad p^\mu_{B'} = \begin{pmatrix} E_{B'}/c \\ -\vec{p}_{A'} \end{pmatrix} \quad , \tag{43a}$$

mit den Energie–Impuls–Relationen

$$\frac{E_{A'}^2}{c^2} - \vec{p}_{A'}^{\,2} = m_A^2\, c^2 \quad , \qquad \frac{E_{B'}^2}{c^2} - \vec{p}_{A'}^{\,2} = m_B^2\, c^2 \quad . \tag{43b}$$

Aus der Gesamtimpulserhaltung folgt für den betrachteten Stoßprozeß im Schwerpunktsystem die Beziehung

$$E_A + E_B = E_{A'} + E_{B'} \quad . \tag{44}$$

Verwenden wir diese Beziehung in der aus den Gleichungen 42b und 43b folgenden Relation

$$E_A^2 - E_B^2 = E_{A'}^2 - E_{B'}^2 \quad ,$$

so erhalten wir sofort

$$E_A = E_{A'} \quad , \qquad E_B = E_{B'} \quad , \tag{45}$$

d.h. beim elastischen Stoß zweier Teilchen bleiben im Schwerpunktsystem die Energien der beiden Teilchen unverändert. Dies ergibt aber aus den Gl. 42b und 43b sofort

$$|\vec{p}_A| = |\vec{p}_{A'}| \quad , \tag{46}$$

sodaß der elastische Stoß zweier Teilchen im Schwerpunktsystem im wesentlichen durch einen Streuwinkel ϑ beschrieben wird (Winkel zwischen den beiden Dreiervektoren $\vec{p}_A$ und $\vec{p}_{A'}$).

VIII.4. Beispiele von Teilchenstößen

VIII.4.A. Elastischer Stoß zweier Teilchen

Wir wollen nun den elastischen Stoßprozeß, bei dem ein bewegtes Teilchen A auf ein ruhendes Teilchen B trifft, genauer betrachten. Insbesondere wollen wir die Teilchenenergien nach dem Stoß als Funktion der Streuwinkel (Winkel gegenüber der Bewegungsrichtung des Teilchens A vor dem Stoß) berechnen.

Invariante Relation für den elastischen Stoß zweier Teilchen

Zuerst wollen wir das Ergebnis von Gl. 45 (die **Energien** der elastisch stoßenden Teilchen sind **im Schwerpunktsystem vor und nach** dem elastischen **Stoß gleich**) so formulieren, daß es sofort in jedem Inertialsystem verwendet werden kann. Dies gelingt unter Beachtung der Tatsache, daß die Vierergeschwindigkeit v_s^μ der Bewegung des Schwerpunktes im Schwerpunktsystem die einfache Form

$$v_s^\mu = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{47}$$

aufweist. Zusammen mit den Gleichungen 42a und 43a können wir somit die Gleichungen 45 in der invarianten Form

$$p_A^\mu \, v_{s\mu} = p_{A'}^\mu \, v_{s\mu} \quad , \qquad p_B^\mu \, v_{s\mu} = p_{B'}^\mu \, v_{s\mu} \tag{48}$$

schreiben. In dieser Form kann das Ergebnis von Gl. 45 in jedem Inertialsystem verwendet werden, wobei nur die Vierergeschwindigkeit des Schwerpunktsystems mittels der Gleichungen 34 und 32 berechnet werden muß.

Zusammenhang zwischen Streuwinkel und Teilchenenergie

Wählen wir unser Koordinatensystem so, daß die Bewegung des Teilchens A in der x-Richtung erfolgt, so gilt für die Viererimpulse vor dem Stoß (siehe Gl. 38)

$$p_A^\mu = \begin{pmatrix} E_A/c \\ p_A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad p_B^\mu = \begin{pmatrix} m_B \, c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad p^\mu = p_A^\mu + p_B^\mu = \begin{pmatrix} (E_A + m_B \, c^2)/c \\ p_A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \tag{49}$$

wobei die Energie–Impuls–Relation

$$m_A^2 \, c^2 = \frac{E_A^2}{c^2} - p_A^2 \tag{50}$$

erfüllt sein muß.

Die Vierergeschwindigkeit des Schwerpunktsystems kann unter Verwendung der Gleichungen 32, 34 und 37 durch die Komponenten des Gesamtviererimpulses angegeben werden:

$$v_s^\mu = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} (E_A + m_B\, c^2)/c \\ p_A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{51}$$

Machen wir für die Viererimpulse der beiden Teilchen nach dem Stoß den Ansatz

$$p_{A'}^\mu = \begin{pmatrix} E_{A'}/c \\ p_{A'}\,\cos\vartheta \\ p_{A'}\,\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad p_{B'}^\mu = \begin{pmatrix} E_{B'}/c \\ p_{B'}\,\cos\theta \\ p_{B'}\,\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \tag{52}$$

mit den Energie–Impuls–Relationen

$$m_A^2\, c^2 = \frac{E_{A'}^2}{c^2} - p_{A'}^2 \quad , \qquad m_B^2\, c^2 = \frac{E_{B'}^2}{c^2} - p_{B'}^2 \quad , \tag{53}$$

so ergeben sich aus Gl. 48 sofort die Beziehungen

$$E_A \left(E_A + m_B c^2\right) - c^2 p_A^2 \;=\; E_{A'} \left(E_A + m_B c^2\right) - c^2 p_A p_{A'}\,\cos\vartheta \quad , \tag{54a}$$

$$m_B\, c^2 \left(E_A + m_B c^2\right) \;=\; E_{B'} \left(E_A + m_B c^2\right) - c^2 p_A p_{B'}\,\cos\theta \quad . \tag{54b}$$

Da die Impulse $p_{A'}$ und $p_{B'}$ über die Energie–Impuls–Relationen 53 durch die Teilchenenergien $E_{A'}$ und $E_{B'}$ ausgedrückt werden können, stellen diese Gleichungen Bestimmungsgleichungen für die Energien der gestreuten Teilchen in Abhängigkeit von den Streuwinkeln dar.

VIII.4.B. Compton–Streuung

Wir wollen nun die soeben erhaltenen Ergebnisse auf den Stoßprozeß eines Photons an einem ruhenden Elektron anwenden. Dieser Stoßprozeß wird als **Compton–Streuung** bezeichnet und beschreibt das Herausschlagen eines Elektrons aus einem Atom mittels eines Photons (das in einem atomaren Zustand befindliche Elektron kann näherungsweise als ein ruhendes Elektron angesehen werden).

Das Teilchen A ist ein Photon, für das die Energie–Impuls–Relation Gl. 50 (Ruhemasse eines Photons ist Null)

$$0 = \frac{E_A^2}{c^2} - p_A^2 \tag{55}$$

lautet. Die Verknüpfung mit der Wellenlänge λ bzw. der Kreisfrequenz ω ist durch die Gleichungen

$$E = \hbar\,\omega = h\,f = \frac{h\,c}{\lambda} \tag{56}$$

gegeben.

Mittels Gleichung 55 vereinfacht sich Gleichung 54a zu

$$E_A\left(E_A + m_e c^2\right) - E_A^2 = E_{A'}\left(E_A + m_e c^2\right) - E_A E_{A'}\cos\vartheta$$

bzw. nach Division durch $E_A E_{A'} m_e c^2$

$$\frac{1}{E_{A'}} = \frac{1}{E_A} + \frac{1}{m_e c^2}(1 - \cos\vartheta) \quad , \tag{57}$$

wobei m_e die Elektronen-Ruhemasse bezeichnet. Unter Einführung der **Compton–Wellenlänge des Elektrons** λ_c

$$\lambda_c := \frac{h\,c}{m_e\,c^2} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\lambda_c}{h\,c} = \frac{1}{m_e c^2} \tag{58}$$

kann diese Gleichung auch in der Form

$$\lambda_{A'} = \lambda_A + \lambda_c(1 - \cos\vartheta) \tag{59}$$

geschrieben werden (siehe den in Gleichung 56 angegebenen Zusammenhang zwischen Photonenenergie und Wellenlänge). Gleichung 59 gibt die Zunahme der Wellenlänge des gestreuten Photons in Abhängigkeit vom Streuwinkel ϑ an.

VIII.4.C. Inelastische Proton–Proton Streuung

Wir wollen als Beispiel für einen inelastischen Stoßprozeß die folgende Frage beantworten: Wie groß muß die Geschwindigkeit eines Protons mindestens sein, damit beim Zusammenstoß mit einem ruhenden Proton ein zusätzliches Proton–Antiproton–Paar erzeugt werden kann ?

Im Laborsystem gilt für den gesamten Viererimpuls vor dem Stoß

$$p^\mu_{vorher} = \begin{pmatrix} (E + mc^2)/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = m^2\,c^2 \quad , \tag{60}$$

während im Schwerpunktsystem nach dem Stoß zumindest vier Teilchen (mit der gleichen Ruhemasse m) vorhanden sein müssen:

$$p'^\mu_{nachher} = \begin{pmatrix} 4\,m\,c \\ \vec{0} \end{pmatrix} \quad . \tag{61}$$

Aus der Erhaltung des Gesamtviererimpulses in der Form

$$p^\mu_{(vorher)}\,p_{\mu\,(vorher)} = p'^\mu_{(nachher)}\,p'_{\mu\,(nachher)} \tag{62}$$

folgt nun sofort

$$\left(\frac{E}{c} + m\,c\right)^2 - \vec{p}^{\,2} = (4\,m\,c)^2 \qquad \rightarrow \qquad E = 7\,m\,c^2 \quad , \tag{63}$$

woraus sich die Mindestgeschwindigkeit zu $v = \sqrt{\frac{48}{49}}\,c$ ergibt.

VIII.4.D. Zerfall eines Photons

Als weiteren inelastischen Streuprozeß wollen wir den möglichen Zerfall eines Photons in ein Elektron–Positron–Paar betrachten.

Die Erhaltung des Gesamtviererimpulses erfordert bei diesem angenommen Prozeß die Gültigkeit von

$$\begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{A'}/c \\ \vec{p}_{A'} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{B'}/c \\ \vec{p}_{B'} \end{pmatrix} \tag{64}$$

mit den einzelnen Energie–Impuls–Relationen

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = 0 \quad , \qquad \frac{E_{A'}^2}{c^2} - \vec{p}_{A'}^{\,2} = m^2\, c^2 \quad , \quad \frac{E_{B'}^2}{c^2} - \vec{p}_{B'}^{\,2} = m^2\, c^2 \quad . \tag{65}$$

Die Energie-Impuls–Relation des Photons ergibt nun

$$p^\mu\, p_\mu = 0 \quad , \qquad \text{woraus} \qquad (E_{A'} + E_{B'})^2 - c^2\,(\vec{p}_{A'} + \vec{p}_{B'})^2 = 0 \tag{66}$$

folgt. Diese Gleichung kann aber auch in der Form

$$2\, m^2\, c^4 + 2\, c^2 \underbrace{\left(\sqrt{p_{A'}^2 + m^2 c^2}\, \sqrt{p_{B'}^2 + m^2 c^2} - \vec{p}_{A'} \cdot \vec{p}_{B'}\right)}_{>0} = 0 \tag{67}$$

geschrieben werden, woraus sofort ersichtlich ist, daß sie unerfüllbar ist, d.h. der **Zerfall eines freien Photons** in ein Elektron–Positron–Paar **ist nicht möglich**.