

# ELEKTRODYNAMIK UND RELATIVITÄTSTHEORIE

## **Kapitel 7: Relativistische Kinematik**

Vorlesung für Studenten der Technischen Physik

Helmut Nowotny

Technische Universität Wien

Institut für Theoretische Physik

7., von A. Rebhan korrigierte Auflage

Wien, Februar 2006

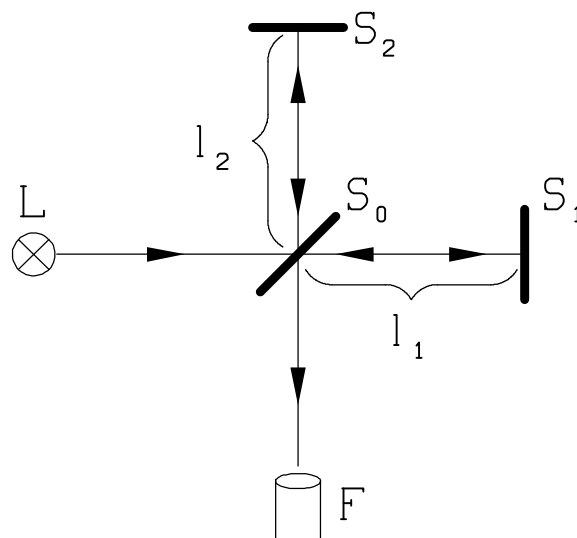
## Teil 2: SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

**VII. RELATIVISTISCHE KINEMATIK****VII.1. Grundlagen der speziellen Relativitätstheorie****VII.1.A. Versuch von Michelson–Morley**

Dieser Versuch sollte dazu dienen, eine Bewegung gegenüber dem Äther festzustellen (Äther = Medium, in dem sich die Lichtwellen ausbreiten). Die erste Durchführung des Versuches erfolgte 1881 von Albert Abraham **Michelson**. Nach Kritik von Lorentz (1884) erfolgte 1887 eine verbesserte Durchführung zusammen mit Edward Williams **Morley**.

**Prinzipieller Versuchsaufbau**

Ein von einer Lichtquelle ausgehender Lichtstrahl wird an einer halbdurchlässigen Glasplatte  $S_0$  in zwei Teilstrahlen zerlegt, deren Richtungen um 90 Grad verschieden sind und die an je einem Spiegel  $S_1$  bzw.  $S_2$  zur Glasplatte  $S_0$  zurückreflektiert werden. Je nach dem Laufzeitunterschied dieser zwei Teilstrahlen ergibt sich nach der Wiedervereinigung ein Interferenzbild.



**Fig. 7.1** Prinzipieller Versuchsaufbau des Versuches von Michelson–Morley (Lichtquelle L, halbdurchlässige Glasplatte  $S_0$ , Spiegel  $S_1$ , Spiegel  $S_2$ , Beobachtungsfernrohr F)

### Versuchsaufbau ruht im Äther

Ist  $l_1$  die Entfernung des Spiegels  $S_1$  und  $l_2$  die Entfernung des Spiegels  $S_2$  von der Glasplatte  $S_o$ , so betragen die beiden Laufzeiten

$$t_1 = \frac{2l_1}{c} \quad , \quad t_2 = \frac{2l_2}{c} \quad . \quad (1)$$

Für  $l_1 = l_2 = L$  folgt  $t_1 = t_2$  und es treten keine Interferenzen zwischen den beiden Teilstrahlen auf.

### Versuchsaufbau bewegt sich gegenüber dem Äther

Bewegt sich der Versuchsaufbau mit der Geschwindigkeit  $v$  gegenüber den Äther (in Richtung des zum Spiegel  $S_1$  laufenden Teilstrahles), so verschiebt sich der Versuchsaufbau während des Hinlaufens des Teilstrahles 1 um die Strecke  $\Delta l_1^{hin}$

$$t_1^{hin} = \frac{l_1 + \Delta l_1^{hin}}{c} = \frac{\Delta l_1^{hin}}{v} \quad \rightarrow \quad \Delta l_1^{hin} = \frac{v l_1}{c - v} \quad \rightarrow \quad t_1^{hin} = \frac{l_1}{c - v}$$

und während des Rücklaufes des Teilstrahles 1 um  $\Delta l_1^{rueck}$

$$t_1^{rueck} = \frac{l_1 - \Delta l_1^{rueck}}{c} = \frac{\Delta l_1^{rueck}}{v} \quad \rightarrow \quad \Delta l_1^{rueck} = \frac{v l_1}{c + v} \quad \rightarrow \quad t_1^{rueck} = \frac{l_1}{c + v} \quad .$$

Somit ergibt sich für die gesamte Laufzeit des Teilstrahles 1

$$t_1 = t_1^{hin} + t_1^{rueck} = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad . \quad (2)$$

Analog ergibt sich für den Teilstrahl 2 für den Hinlauf

$$t_2^{hin} = \frac{\sqrt{l_2^2 + (\Delta l_2^{hin})^2}}{c} = \frac{\Delta l_2^{hin}}{v} \quad \rightarrow \quad \Delta l_2^{hin} = \frac{v l_2}{\sqrt{c^2 - v^2}} \quad \rightarrow \quad t_2^{hin} = \frac{l_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

und ein genau entsprechender Ausdruck für den Rücklauf, sodaß die gesamte Laufzeit des Teilstrahles 2 durch

$$t_2 = 2 t_2^{hin} = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3)$$

gegeben ist.

Für  $l_1 = l_2 = L$  folgt nun  $t_1 > t_2$  und es müßte eine Interferenz der beiden Strahlen zu beobachten sein.

Dieses Experiment wurde wiederholt durchgeführt (unter Berücksichtigung der jeweils verbesserten Meßmethoden) und **ergab immer ein negatives Resultat**, d.h. es konnte nie eine Verschiebung der Interferenzstreifen bei einer Drehung der Apparatur nachgewiesen werden.

### VII.1.B. Längenkontraktion, Zeitdilatation

Unter den vielen Erklärungsversuchen für den negativen Versuchsausgang war auch die ad hoc Hypothese (1892 Lorentz, 1893 Fitzgerald):

Jeder Körper wird in Richtung seiner Bewegung um den Faktor  $\sqrt{1 - \beta^2}$  kontrahiert (**Lorentz-Kontraktion**). Hierbei gilt  $\beta = v/c$ .

Hiemit war das Konzept des Äthers gerettet, auch wenn dieser nun unbeobachtbar war.

Für eine prinzipielle Unbeobachtbarkeit ist aber nun wegen des (Gedanken-)Experimentes: Messung der Laufzeiten des am Spiegel  $S_2$  reflektierten Strahles einmal bei einer bezüglich des Äthers ruhenden Anordnung

$$t_2^{ruhend} = \frac{2l_2}{c}$$

und einmal bei einer bezüglich des Äthers bewegten Versuchsaufbaues

$$t_2^{bewegt} = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

eine weitere Aussage notwendig:

Die Zeitmessung in einem bewegten System liefert einen um den Faktor  $\sqrt{1 - \beta^2}$  kleineren Wert, d.h. die Zeit vergeht in einem bewegten System langsamer (**Zeit-Dilatation**).

### VII.1.C. Postulate der speziellen Relativitätstheorie

Albert Einstein postulierte 1905 die spezielle Relativitätstheorie (der Name ist nicht als sehr gut zu bezeichnen, da vor allem absolute Eigenschaften postuliert werden):

- In allen zueinander gleichförmig bewegten Bezugssystemen ist die Lichtgeschwindigkeit durch  $c$  gegeben.
- Alle diese Bezugssysteme sind gleichwertig und die Naturgesetze sind in allen diesen Systemen gleich.
- Der Raum ist isotrop und homogen.

### VII.1.D. Lorentztransformationen

Zur Bestimmung der Transformationsgleichungen beachten wir die folgenden Punkte:

1. Raum isotrop und homogen  $\rightarrow$  Transformationsgleichungen **linear**.
2. Eine Ebene im System S mit der Flächennormalen senkrecht zur Geschwindigkeit  $v$ , mit der sich ein System  $S'$  gegenüber S bewegt, geht über in eine Ebene im System  $S'$ , welche **sich nicht bewegt**.
3. Da die Lichtgeschwindigkeit konstant sein soll, folgt aus  $c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2$  (im System S) immer  $c^2 t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$  (im System  $S'$ , wobei vorausgesetzt wird, daß der Koordinatenursprung des Systems  $S'$  mit dem Koordinatenursprung des Systems S zusammenfällt). Mit der Definition  $s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$  gilt für lineare Transformationen der folgende Sachverhalt: folgt aus  $s^2 = 0$  immer  $s'^2 = 0$ , dann gilt bis auf eine Skalentransformation Gleichheit von  $s^2$  und  $s'^2$ , d.h.  $s^2 = A s'^2$ , wobei  $A$  nur von  $\vec{v}$  abhängt. Die postulierte Isotropie des Raumes erlaubt aber nur eine Abhängigkeit von  $|\vec{v}|$ , sodaß für die Umkehrtransformation das gleiche  $A$  gelten muß. Daraus folgt  $A^2 = 1$  und zusammen mit  $A(|\vec{v}| \rightarrow 0) = 1$  schließlich  $A = 1$ .

#### Standard-Lorentztransformation

Bei der Standard-Lorentztransformation wählt man die Koordinatenachsen so, daß sich das System  $S'$  mit der Geschwindigkeit  $v$  entlang der positiven  $x$ -Achse bewegt, wobei diese Achse mit der  $x'$ -Achse übereinstimmt. Ferner nimmt man an, daß zur Zeit  $t = t' = 0$  der Koordinatenursprung des Systems  $S'$  mit dem Koordinatenursprung des Systems S zusammenfällt.

Gemäß Punkt 2 gehen die Ebenen  $y = 0$  und  $z = 0$  in die Ebenen  $y' = 0$  und  $z' = 0$  über. Dies führt sofort zu den Transformationsgleichungen

$$y' = y \quad , \quad z' = z \quad . \quad (4)$$

Die verbleibenden Transformationskoeffizienten  $A$ ,  $B$ ,  $D$  gemäß den Gleichungen

$$x' = A(x - vt) \quad , \quad t' = Bt - Dx$$

folgen aus der Beziehung (Punkt 3 der oben angegebenen Feststellungen)

$$c^2 t'^2 - x'^2 = c^2 t^2 - x^2$$

zu

$$A = B = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad , \quad D = \frac{v}{c^2} A \quad . \quad (5)$$

Mit den Kurzbezeichnungen

$$\beta := \frac{v}{c} \quad , \quad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (6)$$

können wir daher die Transformationsgleichungen für die Standard-Lorentztransformation in der Matrixnotation

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (7)$$

schreiben, wobei die auftretende Matrix als **Transformationsmatrix**  $\Lambda$  bezeichnet wird:

$$\Lambda = \Lambda(v) := \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (8)$$

Wie durch explizite Rechnung leicht gezeigt werden kann, gilt für diese von der Geschwindigkeit  $v$  abhängige Transformationsmatrix die Beziehung

$$\Lambda(v)^{-1} = \Lambda(-v) \quad , \quad (9)$$

womit die zur Transformation von Gleichung 7 gehörige Umkehrtransformation sofort angegeben werden kann:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} . \quad (10)$$

### Allgemeine Lorentztransformation

Neben der Standard-Lorentztransformation gibt es noch weitere Lorentztransformationen, z.B. die reine Zeitspiegelung oder die reine Raumspiegelung

$$\Lambda_{\text{Zeitsp.}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \Lambda_{\text{Raumsp.}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Für diese beiden Transformationen gilt jedoch  $\det \Lambda = -1$  und daher sind diese Transformationen keine "eigentlichen" Lorentz-Transformationen, für die  $\det \Lambda = +1$  gilt.

Wir wollen uns im folgenden auf eigentliche, orthochrone (= zeitrichtige) Lorentz-Transformationen beschränken. Diese können unter Verwendung von dreidimensionalen Drehmatrizen  $\mathbf{D}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , wobei die drei Parameter z.B. die drei Eulerwinkel einer bestimmten Drehung darstellen, immer durch das Produkt von zwei Drehungen und einer Standard-Lorentztransformation dargestellt werden:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & D_{ij}(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3) & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & D_{ij}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} . \quad (11)$$

## VII.2. Vierergrößen

### VII.2.A. Raum–Zeit–Welt

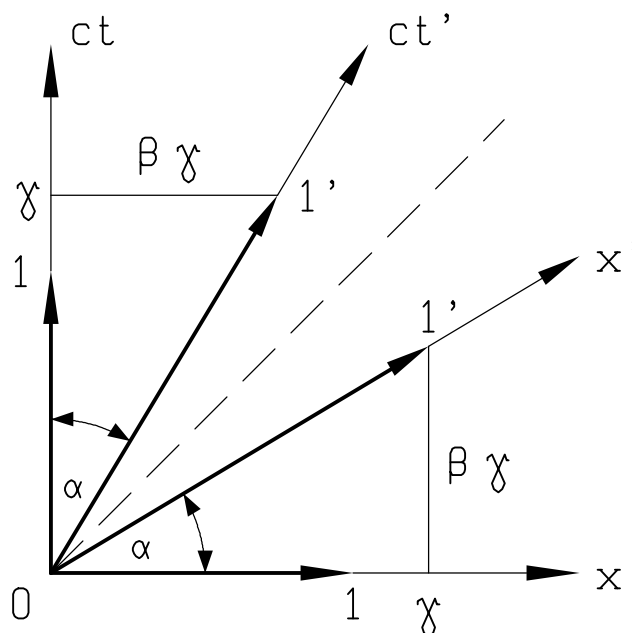
Die Raum–Zeit–Welt stellt eine **geometrische Interpretation** der speziellen Relativitätstheorie dar (Minkowski, 1908).

- Die Punkte dieses Raumes sind die 'Ereignisse'  $(ct, x, y, z)$ .
- Jedes (Punkt-)Teilchen durchläuft eine Weltlinie (eindimensionale Menge von Raum–Zeit-Punkten).
- Die gesamte Welt besteht aus einer Ansammlung vieler solcher Weltlinien.
- Die physikalischen Gesetze stellen eine geometrische Beziehung zwischen diesen Weltlinien dar.

#### Geometrische Darstellung der Standard-Lorentztransformation

Wir können uns bei der Standard-Lorentztransformation auf die Betrachtung der Zeitkoordinate  $t$  und der Ortskoordinate  $x$  beschränken. Schreiben wir nun Gleichung 10 für diese beiden Koordinaten in der Form

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \gamma \\ \beta\gamma \end{pmatrix}} ct' + \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \beta\gamma \\ \gamma \end{pmatrix}} x' \quad , \quad (12)$$



**Fig. 7.2** Geometrische Veranschaulichung der Standard-Lorentztransformation

so stellt der erste unterklammerte Vektor den Raum-Zeit-Punkt ( $ct' = 1, x' = 0$ ) im System S dar und legt somit Richtung und Einheitenunterteilung der  $ct'$ -Achse im System S fest, während der zweite unterklammerte Vektor den Raum-Zeit-Punkt ( $ct' = 0, x' = 1$ ) im System S darstellt und somit Richtung und Einheitenunterteilung der  $x'$ -Achse im System S festlegt (siehe Fig. 7.2).

**Einheitsvektoren für beliebige Geschwindigkeiten**

Die Menge aller Einheitsvektoren  $x'$  gemäß  $\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta\gamma \\ \gamma \end{pmatrix}$  genügen der Gleichung

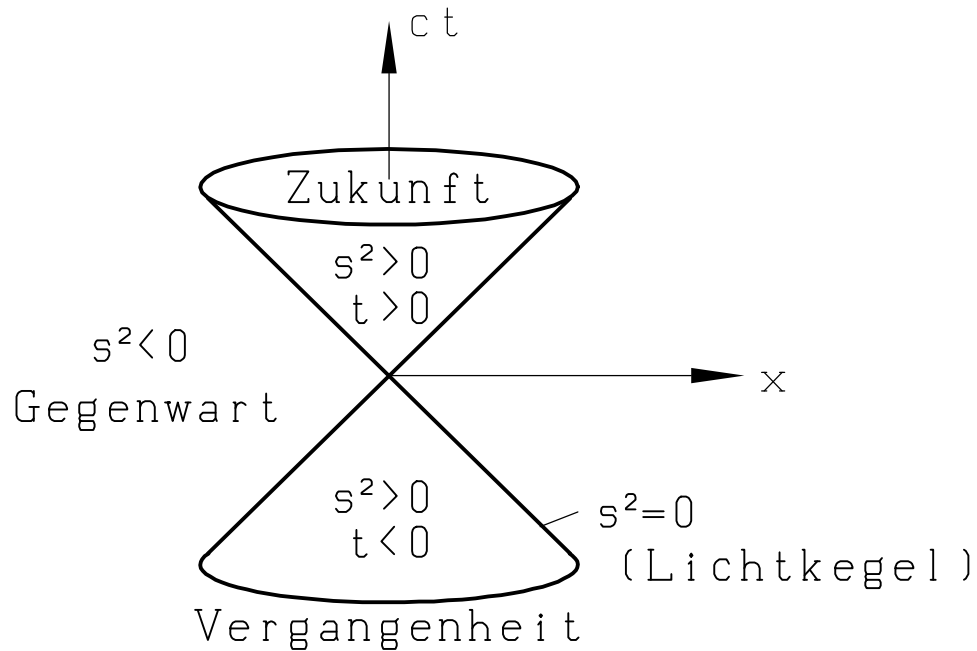
$$x^2 - c^2 t^2 = \gamma^2 (1 - \beta^2) = 1 \quad , \quad (13)$$

d.h. sie liegen in der  $ct$ - $x$ -Ebene auf einer Hyperbel.

Analog gilt für die Menge aller Einheitsvektoren  $ct'$  gemäß  $\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \beta\gamma \end{pmatrix}$  die Beziehung

$$c^2 t^2 - x^2 = \gamma^2 (1 - \beta^2) = 1 \quad , \quad (14)$$

d.h. sie liegen in der  $ct$ - $x$ -Ebene gleichfalls auf einer Hyperbel.



**Fig. 7.3** Invariante Bereiche der Raum-Zeit-Welt



### Invariante Bereiche der Raum–Zeit–Welt

Da die Größe  $s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$  bei homogenen Lorentztransformationen invariant bleibt, kann die gesamte Raum–Zeit–Welt in die invarianten Bereiche

$$\begin{array}{ll} s^2 < 0 & \text{raumartig} \\ s^2 = 0 & \text{lichtartig} \\ s^2 > 0 & \text{zeitartig mit } \begin{cases} t > 0 & \text{Zukunft} \\ t < 0 & \text{Vergangenheit} \end{cases} \end{array} \quad (15)$$

eingeteilt werden. In Fig. 7.3 sind diese Bereiche geometrisch veranschaulicht. Der Lichtkegel  $s^2 = 0$  trennt die Gegenwart von der Vergangenheit und der Zukunft und die Richtung der Zeitachse unterscheidet zwischen Vergangenheit und Zukunft.

## VII.2.B. Längenkontraktion, Zeitdilatation

### Längenmessung

Wir betrachten einen im System S ruhenden Maßstab, dessen Anfang bei  $x_A$  und dessen Ende bei  $x_E$  sei (die Zeiten  $t_A$  und  $t_E$  sind beliebig, da der Maßstab ruht). Bei der Längenmessung im System S' müssen Anfang  $x'_A$  und Ende  $x'_E$  des Maßstabes zur gleichen Zeit  $t'$  gemessen werden. Somit gelten die Gleichungen

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x'_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct_E \\ x_E \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ct' \\ x'_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct_A \\ x_A \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Die Auflösung dieser Gleichungen ergibt

$$x'_E - x'_A = \sqrt{1 - \beta^2} (x_E - x_A), \quad (17)$$

d.h. im System S' ist dieser Maßstab um den Faktor  $\sqrt{1 - \beta^2}$  verkürzt (Lorentz-Kontraktion).

### Zeitmessung

Wir betrachten im System S eine Anfangszeit  $t_A$  und eine Endzeit  $t_E$  (mit beliebigen Ortskoordinaten  $x_A$  und  $x_E$ ). Bei der Zeitmessung im System S' müssen die Zeiten  $t'_A$  und  $t'_E$  am gleichen Ort  $x'$  gemessen werden. Somit gelten die Gleichungen

$$\begin{pmatrix} ct'_E \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct_E \\ x_E \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ct'_A \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct_A \\ x_A \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Die Auflösung dieser Gleichungen ergibt nun

$$c(t'_E - t'_A) = \sqrt{1 - \beta^2} c(t_E - t_A), \quad (19)$$

d.h. im System S' wird eine um den Faktor  $\sqrt{1 - \beta^2}$  kleinere Zeitdifferenz gemessen (die Zeit vergeht im System S' langsamer: Zeitdilatation).

### VII.2.C. Vierervektoren, Metrik

Wir wollen in der symbolischen Schreibweise Vierervektoren durch einen Doppelpfeil kennzeichnen:

$$\vec{\vec{a}} = \sum_{\nu} a^{\nu} \vec{\vec{e}}_{\nu} = a^{\nu} \vec{\vec{e}}_{\nu} \quad . \quad (20)$$

Im letzten Ausdruck wurde wieder das Einsteinsche Summationsübereinkommen verwendet, daß über doppelt vorkommende Indizes zu summieren ist. Wir verwenden griechische Indizes, wenn die Summation über die Werte 0, 1, 2, 3 läuft und lateinische Indizes, wenn die Summation nur über die Werte 1, 2, 3 laufen soll.

$\vec{\vec{e}}_{\nu}$  sind die Basisvektoren der gewählten Basis.

Für den Ortsvektor zu einem Weltpunkt gilt

$$\vec{\vec{x}} = x^{\mu} \vec{\vec{e}}_{\mu} = ct \vec{\vec{e}}_t + x \vec{\vec{e}}_x + y \vec{\vec{e}}_y + z \vec{\vec{e}}_z \quad (21a)$$

bzw. in der Indexschreibung

$$x^{\mu} = (ct, x, y, z) \quad . \quad (21b)$$

#### Metrik der Raum–Zeit–Welt

Zur Definition des inneren Produktes zweier Vierervektoren

$$\vec{\vec{a}} \cdot \vec{\vec{b}} = a^{\nu} \vec{\vec{e}}_{\nu} \cdot b^{\mu} \vec{\vec{e}}_{\mu} = a^{\nu} b^{\mu} (\vec{\vec{e}}_{\nu} \cdot \vec{\vec{e}}_{\mu}) \quad (22)$$

benötigen wir den **Metriktensor**

$$g_{\nu\mu} := \vec{\vec{e}}_{\nu} \cdot \vec{\vec{e}}_{\mu} \quad . \quad (23)$$

Da nun bei den Lorentztransformationen die Größe

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

invariant bleibt, ist die zugehörige Metrik durch den Tensor

$$g_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

gegeben. Es gilt dann

$$\vec{\vec{x}} \cdot \vec{\vec{x}} = x^{\nu} x^{\mu} g_{\nu\mu} = s^2 \quad . \quad (25)$$

#### Duale Basis

Führen wir eine duale Basis gemäß den Definitionsgleichungen

$$\vec{\vec{e}}_{\mu} \cdot \vec{\vec{e}}^{\nu} := \delta_{\mu}^{\nu} \quad (26)$$

ein, so können wir jeden Vierervektor wahlweise in den folgenden Formen schreiben:

$$\vec{a} = a^\mu \vec{e}_\mu = a_\nu \vec{e}^\nu \quad . \quad (27)$$

Man bezeichnet  $a^\mu$  als die **kontravarianten** und  $a_\nu$  als die **kovarianten** Komponenten des Vierervektors  $\vec{a}$ .

Da jeder Vierervektor durch die Basisvektoren  $\vec{e}_\mu$  darstellbar ist, können wir auch die dualen Basisvektoren  $\vec{e}^\nu$  in dieser Form darstellen:

$$\vec{e}^\nu = g^{\nu\tau} \vec{e}_\tau \quad \text{mit} \quad \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}^\nu = \vec{e}_\mu \cdot g^{\nu\tau} \vec{e}_\tau = g^{\nu\tau} g_{\mu\tau} = \delta_\mu^\nu \quad . \quad (28)$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad g_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu \quad . \quad (29)$$

Die Umrechnung zwischen den ko- und kontravarianten Komponenten erfolgt nun mittels dieser Metriktensoren gemäß den Gleichungen

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu \quad , \quad a_\nu = g_{\nu\mu} a^\mu \quad . \quad (30)$$

Das innere Produkt zwischen zwei Vierervektoren kann mittels dieser ko- und kontravarianten Komponenten in der einfachen Form

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a^\mu b^\nu g_{\mu\nu} = a_\mu b_\nu g^{\mu\nu} = a^\mu b_\mu \quad (31)$$

geschrieben werden.

### Verhalten bei Lorentztransformationen

Geben wir eine Lorentztransformation in der Form

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (32)$$

an, wobei die Transformationsmatrix für die Standard-Lorentztransformation durch

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (33)$$

gegeben ist, so gilt für das Transformationsverhalten von Vierervektoren und Vierertensoren ganz allgemein

$$a'^\mu = \Lambda^\mu_\nu a^\nu \quad , \quad t'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\tau t^{\sigma\tau} \quad , \quad \text{usw.} \quad (34a)$$

$$\text{bzw.} \quad a'_\mu = \Lambda_\mu^\nu a_\nu \quad , \quad t'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\sigma \Lambda_\nu^\tau t_{\sigma\tau} \quad , \quad \text{usw.} \quad (34b)$$

mit

$$\Lambda_\mu^\nu = g_{\mu\sigma} \Lambda^\sigma_\tau g^{\tau\nu} \quad . \quad (34c)$$

### VII.2.D. Vierergeschwindigkeit, Viererbeschleunigung

Betrachten wir eine Weltlinie  $x^\mu = x^\mu(p)$  (Parameterdarstellung einer Weltlinie), so können wir dieser Weltlinie die folgenden Vierergrößen zuordnen:

#### Eigenzeit $\tau$ (Viererskalar)

Aus der Invarianz von  $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = ds'^2$  folgt auch die Invarianz von

$$c^2 d\tau^2 = ds^2 \quad \text{bzw.} \quad d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2} \quad , \quad (35)$$

d.h. das zugehörige Integral zwischen zwei Welpunkten  $A$  und  $B$  auf dieser Weltlinie ist invariant (unabhängig vom System  $S$ , in dem es ausgerechnet wird):

$$\tau_{BA} = \frac{1}{c} \int_A^B ds = \tau'_{BA} \quad . \quad (36)$$

Es gilt

$$d\tau^2 = dt^2 \left( 1 - \frac{1}{c^2} \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} \right) = dt^2 \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \quad ,$$

d.h.

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad \text{mit der Dreiergeschwindigkeit} \quad \vec{u} = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \quad . \quad (37)$$

#### Vierergeschwindigkeit $u^\nu$

Die Vierergeschwindigkeit ist gemäß der Gleichung

$$u^\nu := \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (38)$$

definiert. Mittels der Kettenregel  $\frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dt}{d\tau}$  folgt direkt

$$u^\nu = \gamma(u) \begin{pmatrix} c \\ \vec{u} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad . \quad (39)$$

Es gilt  $u^\nu u_\nu = c^2$ , d.h. der Betrag jeder Vierergeschwindigkeit ist durch die Lichtgeschwindigkeit gegeben.

Die Vierergeschwindigkeit ist ein **zeitartiger Vierervektor**.

#### Viererbeschleunigung $a^\nu$

Die Viererbeschleunigung ist gemäß der Gleichung

$$a^\nu := \frac{du^\nu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} \quad (40)$$

definiert. Aus  $u^\nu u_\nu = c^2$  folgt sofort

$$a^\nu u_\nu = 0 \quad , \quad \text{d.h.} \quad \vec{a} \perp \vec{u} \quad . \quad (41)$$

Die Viererbeschleunigung ist ein **raumartiger Vierervektor**.

## VII.3. Relativistische Addition von Geschwindigkeiten

### VII.3.A. Berechnung mittels Lorentztransformationen

Wir wollen nun die relativistische Addition von **gleichgerichteten Geschwindigkeiten** unter Verwendung von Standard-Lorentztransformationen herleiten. Wir betrachten hierzu drei Inertialsysteme S, S' und S'' (siehe Fig. 7.4). Die Bewegung zwischen den beiden Systemen S und S' erfolge wie bisher bei der Standard-Lorentztransformation mit der Geschwindigkeit  $v$ . Das System S'' bewege sich mit der Geschwindigkeit  $u'$  gegenüber S' und mit der Geschwindigkeit  $u$  gegenüber S. Wir können dann die Transformation vom System S auf das System S'' entweder direkt als eine Standard-Lorentztransformation (mit der Geschwindigkeit  $u$ ) angeben oder als Aufeinanderfolge zweier Standard-Lorentztransformationen vom System S'' zum System S' und dann vom System S' zum System S:

$$x''^\mu = \Lambda^\mu{}_\tau(u') x'^\tau = \Lambda^\mu{}_\tau(u') \Lambda^\tau{}_\nu(v) x^\nu = \Lambda^\mu{}_\nu(u) x^\nu \quad .$$

Somit muß gelten

$$\Lambda^\mu{}_\tau(u') \Lambda^\tau{}_\nu(v) = \Lambda^\mu{}_\nu(u) \quad . \quad (42)$$

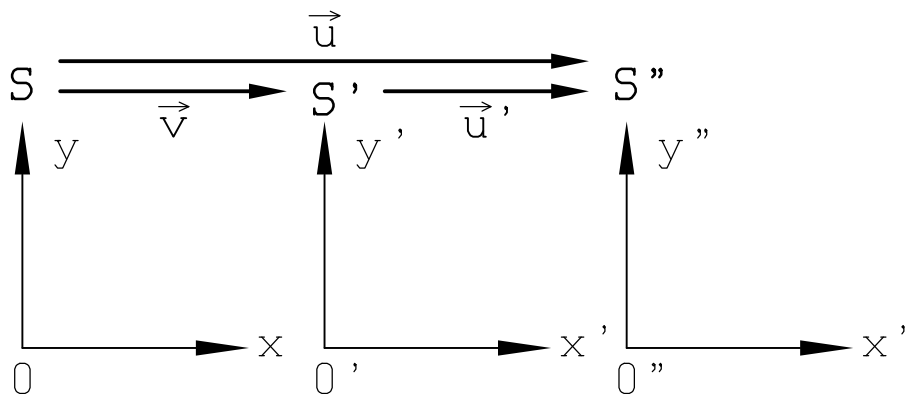
Ausführlich angeschrieben ergibt dies die folgende Gleichung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_{u'} & -\beta_{u'}\gamma_{u'} & 0 & 0 \\ -\beta_{u'}\gamma_{u'} & \gamma_{u'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_v & -\beta_v\gamma_v & 0 & 0 \\ -\beta_v\gamma_v & \gamma_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \gamma_u & -\beta_u\gamma_u & 0 & 0 \\ -\beta_u\gamma_u & \gamma_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{u'}\gamma_v(1 + \beta_{u'}\beta_v) & -\gamma_{u'}\gamma_v(\beta_{u'} + \beta_v) & 0 & 0 \\ -\gamma_{u'}\gamma_v(\beta_{u'} + \beta_v) & \gamma_{u'}\gamma_v(1 + \beta_{u'}\beta_v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit gelten die beiden Gleichungen

$$\gamma_{u'}\gamma_v(1 + \beta_{u'}\beta_v) = \gamma_u \quad , \quad -\gamma_{u'}\gamma_v(\beta_{u'} + \beta_v) = -\beta_u\gamma_u \quad , \quad (43)$$



**Fig. 7.4** Inertialsysteme S, S' und S'', die sich in gleicher Richtung zueinander bewegen

woraus die Beziehung

$$\beta_u = \frac{\beta_{u'} + \beta_v}{1 + \beta_{u'}\beta_v} \quad \text{bzw.} \quad u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'}{c} \frac{v}{c}} \quad (44)$$

folgt. Die resultierende Geschwindigkeit  $u$  ist stets kleiner als die Summe  $u' + v$  der beiden zu addierenden Geschwindigkeiten. Insbesondere folgt aus Gl. 44, daß es unmöglich ist, durch Addition von zwei Geschwindigkeiten, die beide kleiner als  $c$  sind, die Lichtgeschwindigkeit zu überschreiten.

### VII.3.B. Berechnung mittels Weltlinie

Wir betrachten wieder zwei gleichförmig mit der Geschwindigkeit  $v$  zueinander bewegte Systeme  $S$  und  $S'$ , zwischen denen die Koordinatentransformation durch die Standard-Lorentztransformation von Gl. 7 gegeben ist. Bewegt sich nun ein Punktteilchen entlang einer Weltlinie, so können wir diesem Punktteilchen im System  $S$  die Dreiergeschwindigkeit  $\vec{u}$  und im System  $S'$  die Dreiergeschwindigkeit  $\vec{u}'$  zuordnen:

$$\vec{u} = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \quad , \quad \vec{u}' = \left( \frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'} \right) \quad . \quad (45)$$

Verwenden wir nun Gleichung 10 in der Form

$$\begin{pmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cdt' \\ dx' \\ dy' \\ dz' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma cdt' + \beta\gamma dx' \\ \beta\gamma cdt' + \gamma dx' \\ dy' \\ dz' \end{pmatrix} \quad , \quad (46)$$

so ergeben sich direkt die folgenden Gleichungen

$$\frac{dx}{dt} = u_x = \frac{v + u'_x}{1 + \frac{v}{c} \frac{u'_x}{c}} \quad , \quad (47a)$$

$$\frac{dy}{dt} = u_y = \frac{1}{\gamma} \frac{u'_y}{1 + \frac{v}{c} \frac{u'_x}{c}} \quad , \quad (47b)$$

$$\frac{dz}{dt} = u_z = \frac{1}{\gamma} \frac{u'_z}{1 + \frac{v}{c} \frac{u'_x}{c}} \quad , \quad (47c)$$

welche die allgemeine relativistische Geschwindigkeitsaddition beschreiben (im Nenner kann  $vu'_x$  durch  $\vec{v} \cdot \vec{u}'$  ersetzt werden). Für gleichgerichtete Geschwindigkeiten ist Gleichung 47a mit der Gleichung 44 identisch.

Berechnet man das Quadrat der Geschwindigkeit  $u$ , so erhält man

$$1 - \frac{u^2}{c^2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right) \frac{1}{\left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{c^2}\right)^2} \quad . \quad (48)$$

Diese Gleichung kann auch in der Form

$$\gamma(u) = \gamma(v) \gamma(u') \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{c^2}\right) \quad (49)$$

geschrieben werden.

## VII.4. Sichtbarkeit der Längenkontraktion?

### VII.4.A. Superschnappschuß

Wir wollen einen 'Superschnappschuß' (auch als 'ideales Foto' oder Parallelstrahlenprojektion bezeichnet) folgendermaßen definieren:

Sich parallel bewegende Photonen, welche zu geeigneten Zeiten von allen sichtbaren Punkten eines gegebenen Objektes emittiert wurden, treffen gleichzeitig auf einer Fotoplatte auf, welche senkrecht zur Bewegungsrichtung der Photonen angeordnet ist, und erzeugen so ein 'lebensgroßes' Bild des betrachteten Objektes.

Wir wollen nun das Ergebnis eines solchen Superschnappschusses für ein mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegtes und daher durch die Lorentzkontraktion um den Faktor  $\sqrt{1-\beta^2}$  verkürztes Rechteck elementar ausrechnen. Fig. 7.5 veranschaulicht diesen Superschnappschuß für zwei zueinander parallele Bildebenen.

#### Anordnung

Wir bezeichnen die vier Eckpunkte des Rechteckes, welches in Ruhe die Länge  $l$  und die Breite  $h$  aufweisen soll, mit  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$ . Bewegen wir nun dieses Rechteck mit der Geschwindigkeit  $v$  parallel zu seiner Längsrichtung (Richtung von  $A$  nach  $B$ ), so haben wir ein verkürztes Rechteck vorliegen, wobei die Strecken  $\overline{BC}$  und  $\overline{DA}$  der Breite  $h$  des Rechteckes und die Strecken  $\overline{AB}$  bzw.  $\overline{CD}$  der lorentzverkürzten Länge  $\sqrt{1-\beta^2} l$  entsprechen. Wir haben nun für die Anfertigung des Superschnappschusses eine Richtung auszuwählen (Richtung zwischen Objekt und Beobachter) und senkrecht zu dieser Richtung unsere Bildebene zu wählen. Diese Bildebene können wir in Beobachtungsrichtung parallel verschieben ohne das entstehende Bild zu beeinflussen.

Wir wählen aus Gründen der leichteren Berechnung nun eine Bildebene, welche das Rechteck in einem Eckpunkt, z.B.  $B$ , berührt. Die Bildebene möge mit der Richtung der Geschwindigkeit  $v$ , d.h. mit der Strecke  $AB$ , den Winkel  $\alpha$  einschließen.

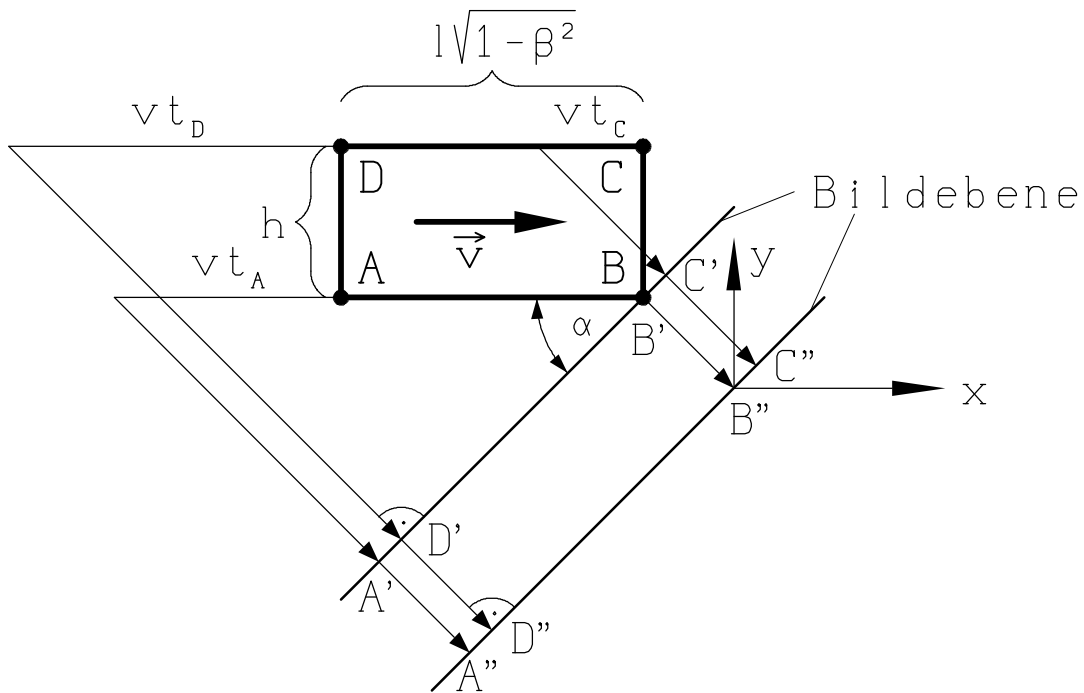
#### Berechnung der Bildpunkte

Für die Berechnung der Bildpunkte  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  und  $D'$  nehmen wir an, daß das gleichzeitige Eintreffen aller Photonen auf der Bildebene zur Zeit  $t = 0$  erfolgt.

Der Bildpunkt  $B'$  fällt mit dem Eckpunkt  $B$  zusammen (durch die Wahl der verwendeten Bildebene).

Für die Berechnung des Bildpunktes  $A'$  müssen wir beachten, daß das dort eintreffende Photon bereits zur Zeit  $-t_A$  vom Eckpunkt  $A$  emittiert wurde, welcher sich zu dieser Zeit in der Entfernung  $\overline{AB} + v t_A$  vom Punkt  $B$  (zur Zeit  $t = 0$ ) befand. Die Berechnung von  $t_A$  ergibt

$$c t_A = \left( l \sqrt{1-\beta^2} + v t_A \right) \sin \alpha \quad \longrightarrow \quad c t_A = l \frac{\sqrt{1-\beta^2} \sin \alpha}{1-\beta \sin \alpha} \quad (50)$$



**Fig. 7.5** Superschnappschuß eines parallel zu seiner Längsrichtung bewegten Rechteckes

und somit folgt für die Entfernung des Bildpunktes  $A'$  vom Bildpunkt  $B'$  die Gleichung

$$\overline{A'B'} = \left( l \sqrt{1 - \beta^2} + v t_A \right) \cos \alpha = \frac{c t_A}{\sin \alpha} \cos \alpha = l \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \cos \alpha}{1 - \beta \sin \alpha} \quad . \quad (51)$$

In ähnlicher Weise, aber unter Beachtung der zu  $\overline{AB}$  senkrechten Richtung von  $\overline{BC}$ , erfolgt nun die Berechnung für den Bildpunkt  $C'$ . Zuerst die Berechnung von  $t_C$

$$c t_C = h \cos \alpha + v t_C \sin \alpha \quad \longrightarrow \quad c t_C = h \frac{\cos \alpha}{1 - \beta \sin \alpha} \quad (52)$$

und dann die Berechnung der Entfernung des Bildpunktes  $C'$  vom Bildpunkt  $B'$

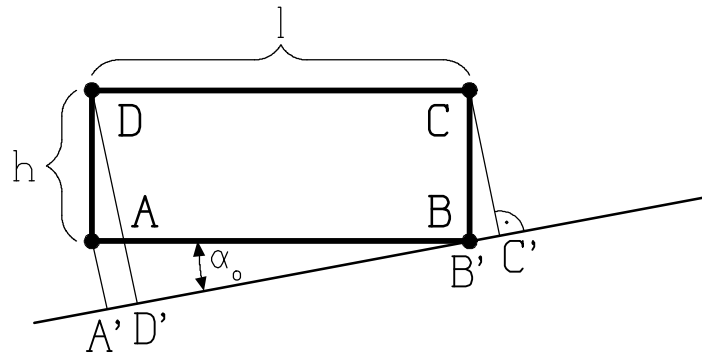
$$\overline{B'C'} = h \sin \alpha - v t_C \cos \alpha = h \sin \alpha - h \beta \frac{\cos \alpha}{1 - \beta \sin \alpha} \cos \alpha = h \frac{\sin \alpha - \beta}{1 - \beta \sin \alpha} \quad . \quad (53)$$

### Bildpunkte des unverkürzten Rechteckes

Die soeben berechneten Bildpunkte des Superschnappschusses des durch die Lorentzkontraktion verkürzten Rechteckes entsprechen nun aber genau den Bildpunkten eines unverkürzten Rechteckes (siehe Fig. 7.6), wobei nun die Bildebene einen Winkel  $\alpha_o$  mit der Längsseite des Rechteckes einschließt:

$$\overline{A'B'} = l \cos \alpha_o \quad , \quad \overline{B'C'} = h \sin \alpha_o \quad . \quad (54)$$





**Fig. 7.6** Superschnappschuß des ruhenden Rechteckes

Durch Vergleich mit den Gleichungen 51 und 53 folgen die Beziehungen

$$\cos \alpha_o = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \cos \alpha}{1 - \beta \sin \alpha} \quad , \quad \sin \alpha_o = \frac{\sin \alpha - \beta}{1 - \beta \sin \alpha} \quad , \quad (55)$$

welche die Kontrollrechnung  $\sin^2 \alpha_o + \cos^2 \alpha_o = 1$  für alle Geschwindigkeiten  $v$  und alle Betrachtungswinkel  $\alpha$  erfüllen. Daher entspricht jeder mögliche Superschnappschuß immer einen möglichen Bild des ruhenden Rechteckes, welches zwar eine perspektivische Verzerrung (gedrehtes Objekt) zeigen kann, aber niemals die Lorentzkontraktion.

#### VII.4.B. Satz von Terell

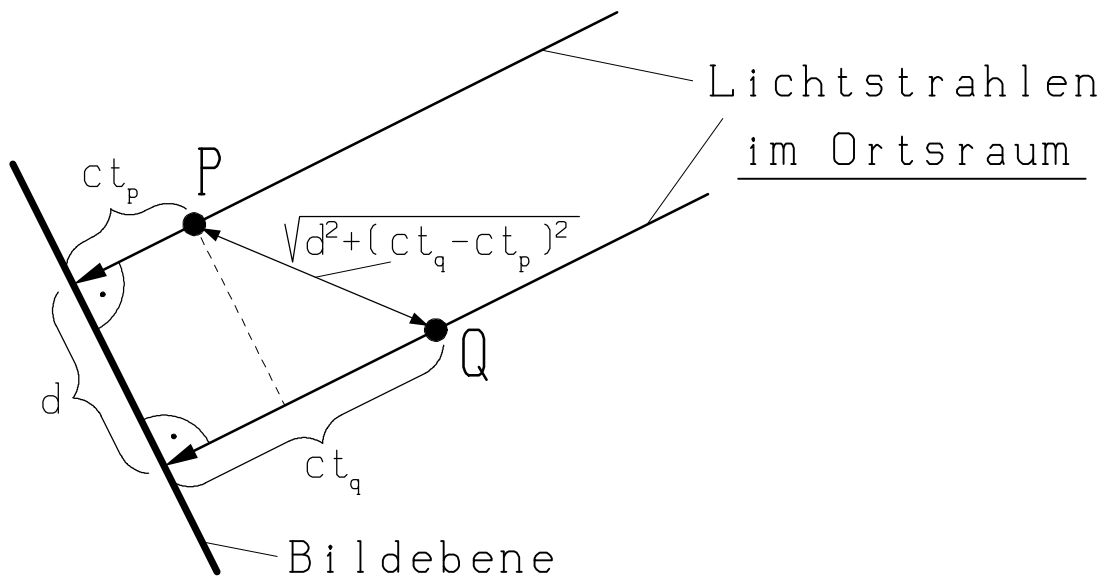
Wie wir soeben an einem einfachen Beispiel gesehen haben, ist die Lorentzkontraktion bei einem Superschnappschuß nicht sichtbar. Diese Aussage folgt direkt aus dem **Satz von Terell**:

Alle Superschnappschüsse eines Objektes, die in einem bestimmten Raum-Zeit-Punkt von Beobachtern in beliebigen Inertialsystemen gemacht werden können, sind gleich.

Unter allen diesen möglichen Superschnappschüssen befindet sich auch der Superschnappschuß im momentanen Ruhesystem des bewegten Objektes, welcher selbstverständlich keine Lorentzkontraktion zeigt. Somit zeigen auch alle anderen Superschnappschüsse diese Lorentzkontraktion nicht, welche in dieser fotografischen Betrachtungsweise somit unbeobachtbar ist. Dies heißt nicht, daß die Lorentzkontraktion nicht existiert, nur muß zur ihrer Feststellung ein anderes Meßverfahren als die direkte Beobachtung durch Parallelstrahlenprojektion herangezogen werden.

#### Beweis des Satzes von Terell

Zum Beweis des Satzes von Terell betrachten wir zwei parallel laufende Photonen, welche in einem System S den Abstand  $d$  aufweisen und zur gleichen Zeit auf der zur Bewegungsrichtung der Photonen senkrecht stehenden Bildebene auftreffen. Die Lichtstrahlen



**Fig. 7.7** Verlauf der Lichtstrahlen für einen Superschnappschuß  
(die Raum-Zeit-Punkte  $P$  und  $Q$  entsprechen den angegebenen Raumpunkten zum Zeitpunkt des jeweiligen Eintreffens der Photonen an diesen Raumpunkten)

dieser beiden Photonen sind in Fig. 7.7 angegeben, wobei für die weitere Rechnung der Zeitpunkt des Auftreffens auf die Bildebene als Nullpunkt der Zeitmessung im System  $S$  angenommen wird. Nehmen wir einen beliebigen Raum-Zeit-Punkt  $P$  auf der Weltlinie des einen Photons und einen beliebigen Raum-Zeit-Punkt  $Q$  auf der Weltlinie des zweiten Photons, so ergibt eine einfache Rechnung im System  $S$  die Gültigkeit von

$$s_{PQ}^2 = -d^2 \quad , \quad (56)$$

d.h. dieser vierdimensionale Abstand ist unabhängig davon, wo die Raum-Zeit-Punkte  $P$  und  $Q$  auf den beiden Weltlinien gewählt werden. Da nun  $s^2$  eine invariante Größe bezüglich den Lorentztransformationen darstellt, gilt in jedem anderen gegenüber dem System  $S$  bewegten System  $S'$  gleichfalls

$$s_{PQ}'^2 = s_{PQ}^2 = -d^2 \quad . \quad (57)$$

Hieraus folgt aber nun, daß bei Gleichzeitigkeit im System  $S'$  der räumliche Abstand  $d'$  gleich  $d$  ist. Aus der Gültigkeit von Gl. 57 für alle Punkte der Weltlinien folgt aber sofort, daß die Bewegungsrichtung der beiden Photonen im System  $S'$  senkrecht zu der räumlichen Richtung ist, welche durch zwei im System  $S'$  gleichzeitige Punkte  $P$  und  $Q$  gegeben ist, d.h. die Voraussetzungen eines Superschnappschusses sind erfüllt und ergeben in allen Systemen den gleichen räumlichen Abstand  $d$  der Bildpunkte. Gleicher Abstand zwischen allen möglichen Bildpunkten ist aber nun gleichbedeutend mit identischen Bildern, wodurch der Satz von Terrell bewiesen ist.