# ELEKTRODYNAMIK UND RELATIVITÄTSTHEORIE

## Kapitel 6: Elektromagnetische Felder im Vakuum

Vorlesung für Studenten der Technischen Physik


Helmut Nowotny

Technische Universität Wien

Institut für Theoretische Physik



7., von A. Rebhan korrigierte Auflage

Wien, Februar 2006

# VI. ELEKTROMAGNETISCHE FELDER IM VAKUUM

## VI.1. Das Feld eines beliebig bewegten Teilchens

### VI.1.A. Liénard–Wiechert–Potentiale

Wenn ein Punktteilchen mit der elektrischen Ladung $q$ die Bahnkurve $\vec{R}(t)$ durchläuft, können wir die Quellterme für die Maxwellgleichungen in der folgenden Form angeben (siehe Gleichung II.6a und II.6b)

$$\varrho(\vec{r},t) = q\,\delta\left(\vec{r}-\vec{R}(t)\right) \quad , \tag{1a}$$

$$\vec{\jmath}(\vec{r},t) = q\,\vec{v}(t)\,\delta\left(\vec{r}-\vec{R}(t)\right) \qquad \text{mit} \quad \vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{R}(t)}{\mathrm{d}t} \quad . \tag{1b}$$

Diese Quellfunktionen für die Maxwellgleichungen erfüllen die Kontinuitätsgleichung $\operatorname{div}\vec{\jmath} + \partial\varrho/\partial t = 0$.

#### Berechnung der Potentiale

Für die Berechnung der Potentiale verwendet man am besten direkt die Gleichungen II.41a und II.41b

$$\phi(\vec{r},t) = \int \mathrm{d}^3r'\;\mathrm{d}t'\;\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\;\delta\left(t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)\;\varrho(\vec{r}\,',t') \quad , \tag{2a}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3r'\;\mathrm{d}t'\;\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\;\delta\left(t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)\;\vec{\jmath}(\vec{r}\,',t') \quad , \tag{2b}$$

und nicht die bereits teilweise ausintegrierten Gleichungen II.42a und II.42b, da wir in diesen ausführlicheren Gleichungen die Volumsintegration sofort ausführen können, wenn wir die Quellfunktionen entsprechend Gl. 1a und 1b einsetzen:

$$\phi(\vec{r},t) = q\int \mathrm{d}t'\;\frac{1}{|\vec{r}-\vec{R}(t')|}\;\delta\left(t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{R}(t')|}{c}\right) \quad , \tag{3a}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = q\int \mathrm{d}t'\;\frac{1}{|\vec{r}-\vec{R}(t')|}\;\delta\left(t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{R}(t')|}{c}\right)\;\frac{\vec{v}(t')}{c} \quad . \tag{3b}$$

Die verbleibende Deltafunktion können wir nun noch zur Durchführung der Zeitintegration verwenden. Hiezu beachten wir, daß für die Deltafunktion die allgemeine Beziehung

$$\delta\left(t'-f(t')\right) = \frac{\delta(t'-\tau)}{|1-f'(\tau)|} \qquad \text{mit} \quad \tau = f(\tau) \tag{4}$$

gilt, wobei wir voraussetzten, daß die Bestimmungsgleichung für die Nullstelle des Argumentes der Deltafunktion nur eine Lösung besitzt. Wenden wir diese allgemeine Beziehung

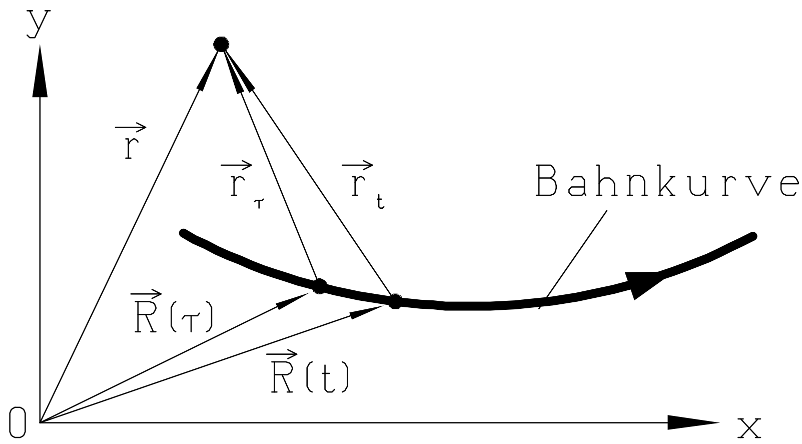


**Fig. 6.1** Bahnkurve eines Punktteilchens sowie direkte und retardierte Lagevektoren

4 auf die Deltafunktion in den Gleichungen 3a und 3b an, so ergibt sich

$$\delta\left(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{R}(t')|}{c}\right) = \frac{\delta(t' - \tau)}{1 - \frac{\vec{r} - \vec{R}(\tau)}{|\vec{r} - \vec{R}(\tau)|} \cdot \frac{\vec{v}(\tau)}{c}} \tag{5}$$

und wir können die Zeitintegration in diesen Gleichungen durchführen:

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{R}(\tau)|} \; \frac{1}{1 - \frac{\vec{r} - \vec{R}(\tau)}{|\vec{r} - \vec{R}(\tau)|} \cdot \frac{\vec{v}(\tau)}{c}} \quad , \tag{6a}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{R}(\tau)|} \; \frac{1}{1 - \frac{\vec{r} - \vec{R}(\tau)}{|\vec{r} - \vec{R}(\tau)|} \cdot \frac{\vec{v}(\tau)}{c}} \; \frac{\vec{v}(\tau)}{c} \quad . \tag{6b}$$

Diese Gleichungen werden als **Liénard–Wiechert–Gleichungen** bezeichnet und geben die Potentiale eines bewegten Punktteilchens mittels der retardierten Zeit $\tau$ an. Diese retardierte Zeit ist aus der Bestimmungsgleichung

$$\tau = t - \frac{|\vec{r} - \vec{R}(\tau)|}{c} \tag{7}$$

als Funktion der Zeit $t$ und des Ortes $\vec{r}$ auszurechnen (siehe hiezu auch Fig. 6.1, welche die Bahnkurve eines Punktteilchens zusammen mit den Lagevektoren zu den Zeiten $t$ und $\tau$ zeigt). Infolge des Auftretens des retardierten Teilchenbahnpunktes $\vec{R}(\tau)$ auf der rechten Gleichungsseite ist dies eine implizite Bestimmungsgleichung für $\tau$ und ihre Lösung wird entscheidend durch die Bahnkurve des Teilchens bestimmt (für den einfachsten Fall eines gleichförmig bewegten Teilchens ist diese Bestimmung im Abschnitt VI.1.C angegeben).

Führt man (auch im Hinblick auf die Berechnung der elektromagnetischen Felder) die Kurzbezeichnungen

$$\vec{r}_t = \vec{r} - \vec{R}(t) \quad , \qquad r_t = |\vec{r} - \vec{R}(t)| \quad , \tag{8a}$$

$$\vec{n}_\tau = \frac{\vec{r}_\tau}{r_\tau} = \frac{\vec{r} - \vec{R}(\tau)}{|\vec{r} - \vec{R}(\tau)|} \quad , \tag{8b}$$

$$\vec{\beta}_\tau = \frac{\vec{v}(\tau)}{c} \quad , \tag{8c}$$

$$\kappa(\vec{r}, \tau) = 1 - \vec{n}_\tau \cdot \vec{\beta}_\tau = 1 - \frac{\vec{r}_\tau \cdot \vec{v}(\tau)}{r_\tau \, c} \tag{8d}$$

ein, so können wir die Liénard–Wiechert–Potentiale in der Kurzform

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{r_\tau \, \kappa(\vec{r}, \tau)} \quad , \tag{9a}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{q}{r_\tau \, \kappa(\vec{r}, \tau)} \frac{\vec{v}(\tau)}{c} = \phi(\vec{r}, t) \, \vec{\beta}_\tau \tag{9b}$$

schreiben. Auch die Bestimmungsgleichung 7 für die retardierte Zeit $\tau$ läßt sich mit diesen Bezeichnungen kürzer schreiben:

$$\tau = t - \frac{r_\tau}{c} \quad . \tag{10}$$

## VI.1.B. Berechnung der Felder

Um die Felder $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{B}(\vec{r}, t)$ entsprechend den Gleichungen II.11a und II.11b

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}, t) &= \text{rot } \vec{A}(\vec{r}, t) \\ \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\text{grad } \phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

zu berechnen, verwenden wir zweckmäßigerweise die noch nicht vollständig ausintegrierten Gleichungen 3a und 3b

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &= q \int \mathrm{d}t' \, \frac{1}{r_{t'}} \, \delta\left(t' - t + \frac{r_{t'}}{c}\right) \quad , \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &= q \int \mathrm{d}t' \, \frac{1}{r_{t'}} \, \delta\left(t' - t + \frac{r_{t'}}{c}\right) \, \vec{\beta}_{t'} \quad , \end{aligned}$$

und nicht die Gleichungen 6a und 6b. Wir erhalten somit zuerst die Gleichungen

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = q \int \mathrm{d}t' \left[ -\frac{\vec{n}_{t'}}{r_{t'}^2} \, \delta\left(t' - t + \frac{r_{t'}}{c}\right) + \delta'\left(t' - t + \frac{r_{t'}}{c}\right) \frac{\vec{n}_{t'}}{c \, r_{t'}} \right] \times \vec{\beta}_{t'} \quad , \tag{11a}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -q \int \mathrm{d}t' \left[ -\frac{\vec{n}_{t'}}{r_{t'}^2} \, \delta\left(t' - t + \frac{r_{t'}}{c}\right) + \delta'\left(t' - t + \frac{r_{t'}}{c}\right) \frac{\vec{n}_{t'} - \vec{\beta}_{t'}}{c \, r_{t'}} \right] \quad , \tag{11b}$$

in denen wir unter Verwendung der Beziehung

$$\delta'\left(t' - t + \frac{r_{t'}}{c}\right) = \frac{1}{\kappa(\vec{r}, t')} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'} \delta\left(t' - t + \frac{r_{t'}}{c}\right) \tag{12}$$

die Terme mit der Ableitung der Deltafunktion partiell integrieren:

$$\vec{B}(\vec{r},t) = q \int \mathrm{d}t' \; \delta\left(t' - t + \frac{r_{t'}}{c}\right) \left[\frac{\vec{\beta}_{t'} \times \vec{n}_{t'}}{r_{t'}^2} + \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\frac{\vec{\beta}_{t'} \times \vec{n}_{t'}}{r_{t'}\,\kappa(\vec{r},t')}\right] \quad , \tag{13a}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = q \int \mathrm{d}t' \; \delta\left(t' - t + \frac{r_{t'}}{c}\right) \left[\frac{\vec{n}_{t'}}{r_{t'}^2} + \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\frac{\vec{n}_{t'} - \vec{\beta}_{t'}}{r_{t'}\,\kappa(\vec{r},t')}\right] \quad . \tag{13b}$$

Nun kann die Integration über $t'$ sofort durchgeführt werden und ergibt die folgenden Ausdrücke für die elektromagnetischen Felder eines beliebig bewegten Punktteilchens:

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{q}{\kappa(\vec{r},\tau)} \left[\frac{\vec{\beta}_\tau \times \vec{n}_\tau}{r_\tau^2} + \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\vec{\beta}_\tau \times \vec{n}_\tau}{r_\tau\,\kappa(\vec{r},\tau)}\right] \quad , \tag{14a}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{\kappa(\vec{r},\tau)} \left[\frac{\vec{n}_\tau}{r_\tau^2} + \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\vec{n}_\tau - \vec{\beta}_\tau}{r_\tau\,\kappa(\vec{r},\tau)}\right] \quad . \tag{14b}$$

**Teilweise Durchführung der $\tau$ Differentiation**

Verwenden wir die Beziehung

$$\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\vec{n}_\tau = \frac{\vec{n}_\tau}{r_\tau}\underbrace{(\vec{n}_\tau \cdot \vec{\beta}_\tau)}_{1-\kappa} - \frac{\vec{\beta}_\tau}{r_\tau} = \frac{\vec{n}_\tau}{r_\tau} - \frac{\vec{n}_\tau\,\kappa(\vec{r},\tau)}{r_\tau} - \frac{\vec{\beta}_\tau}{r_\tau} \quad , \tag{15}$$

so können wir die Gleichungen 14a und 14b in der folgenden Weise umformen:

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{q}{\kappa(\vec{r},\tau)} \left[\frac{\vec{\beta}_\tau}{r_\tau^2\,\kappa(\vec{r},\tau)} + \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\vec{\beta}_\tau}{r_\tau\,\kappa(\vec{r},\tau)}\right)\right] \times \vec{n}_\tau \quad , \tag{16a}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{\kappa(\vec{r},\tau)} \left[\frac{\vec{n}_\tau - \vec{\beta}_\tau}{r_\tau^2\,\kappa(\vec{r},\tau)} + \vec{n}_\tau\,\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{1}{r_\tau\,\kappa(\vec{r},\tau)}\right) - \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\vec{\beta}_\tau}{r_\tau\,\kappa(\vec{r},\tau)}\right)\right] \quad . \tag{16b}$$

Aus diesen Gleichungen ist direkt die Beziehung

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{n}_\tau \times \vec{E}(\vec{r},t) \tag{17}$$

ersichtlich, d.h. die magnetische und die elektrische Feldstärke eines bewegten Punktteilchens stehen in jedem Raumpunkt senkrecht zueinander. Wir können uns daher bei der weiteren Rechnung auf die Berechnung der elektrischen Feldstärke $\vec{E}(\vec{r},t)$ beschränken, da mittels Gleichung 17 immer sofort die zugehörige magnetische Feldstärke $\vec{B}(\vec{r},t)$ angegeben werden kann. Formen wir in Gl. 16b den letzten Term um

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{\kappa(\vec{r},\tau)} \left[\frac{\vec{n}_\tau - \vec{\beta}_\tau}{r_\tau^2\,\kappa(\vec{r},\tau)} + (\vec{n}_\tau - \vec{\beta}_\tau)\,\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{1}{r_\tau\,\kappa(\vec{r},\tau)}\right) - \frac{1}{r_\tau\,\kappa(\vec{r},\tau)}\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\vec{\beta}_\tau}{\mathrm{d}\tau}\right] \tag{18}$$

und verwenden die Beziehung

$$\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{1}{r_\tau\,\kappa(\vec{r},\tau)}\right) = \frac{1-\beta_\tau^2}{r_\tau^2\,\kappa^2(\vec{r},\tau)} - \frac{1}{r_\tau^2\,\kappa(\vec{r},\tau)} + \frac{\vec{n}_\tau}{r_\tau\,\kappa^2(\vec{r},\tau)} \cdot \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\vec{\beta}_\tau}{\mathrm{d}\tau} \quad , \tag{19}$$

so ergibt sich

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{\kappa(\vec{r},\tau)} \left[ (\vec{n}_\tau - \vec{\beta}_\tau) \left\{ \frac{1-\beta_\tau^2}{r_\tau^2\,\kappa^2(\vec{r},\tau)} + \frac{\vec{n}_\tau}{r_\tau\,\kappa^2(\vec{r},\tau)} \cdot \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\vec{\beta}_\tau}{\mathrm{d}\tau} \right\} - \frac{1}{r_\tau\,\kappa(\vec{r},\tau)}\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\vec{\beta}_\tau}{\mathrm{d}\tau} \right] \quad . \tag{20}$$

Unter Beachtung von

$$\vec{n}_\tau \times \left[ (\vec{n}_\tau - \vec{\beta}_\tau) \times \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\vec{\beta}_\tau}{\mathrm{d}\tau} \right] = (\vec{n}_\tau - \vec{\beta}_\tau) \left( \vec{n}_\tau \cdot \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\vec{\beta}_\tau}{\mathrm{d}\tau} \right) - \underbrace{\left( \vec{n}_\tau \cdot (\vec{n}_\tau - \vec{\beta}_\tau) \right)}_{\kappa} \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\vec{\beta}_\tau}{\mathrm{d}\tau} \tag{21}$$

können wir Gleichung 20 nun in der Form

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{r_\tau^2\,\kappa^3(\vec{r},\tau)} \,(1-\beta_\tau^2)\,(\vec{n}_\tau - \vec{\beta}_\tau) + \frac{q}{r_\tau\,\kappa^3(\vec{r},\tau)}\,\vec{n}_\tau \times \left[ (\vec{n}_\tau - \vec{\beta}_\tau) \times \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\vec{\beta}_\tau}{\mathrm{d}\tau} \right] \tag{22}$$

schreiben. Dieser Ausdruck für die elektrische Feldstärke weist zwei Terme auf, von denen der erste im wesentlichen mit dem Kehrwert des Quadrates der Entfernung vom Punktteilchen abnimmt und somit das aus der Elektrostatik bekannte Verhalten zeigt, während der zweite Term nur mit dem Kehrwert der Entfernung abnimmt, dafür aber nur bei einer Geschwindigkeitsänderung des bewegten Teilchens auftritt. Dieser zweite Term beschreibt die elektromagnetischen Felder, die bei jeder beschleunigten (oder verzögerten) Bewegung eines geladenen Teilchens abgestrahlt werden (Strahlungsfelder nehmen nur mit dem Kehrwert der Entfernung ab).

## VI.1.C. Beispiel: gleichförmig bewegtes Teilchen

Wir betrachten nun ein gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{\beta}\,c$ bewegtes Teilchen. Die Bahnkurve $\vec{R}(t)$ dieses Teilchens können wir bei geeigneter Wahl des Koordinatenursprungs immer in der Form

$$\vec{R}(t) = \vec{v}\,t = \vec{\beta}\,c\,t \tag{23}$$

angeben. Hiemit ergeben sich aus Gleichung 8a die Abstandsvektoren $\vec{r}_t$ und $\vec{r}_\tau$ zu

$$\vec{r}_t = \vec{r} - \vec{v}\,t \quad , \qquad \vec{r}_\tau = \vec{r} - \vec{v}\,\tau \quad , \tag{24}$$

wobei die retardierte Zeit $\tau$ aus der Bestimmungsgleichung 7 zu berechnen ist. Die Verwendung dieser Gleichung ergibt die Beziehung

$$\vec{r}_t = \vec{r} - \vec{v}\,\tau - \vec{v}\,(t-\tau) = \vec{r}_\tau - \vec{\beta}\,r_\tau \quad , \tag{25}$$

welche wir für die folgende Umformung verwenden können:

$$r_t^2 - \left(\vec{r}_t \times \vec{\beta}\right)^2 = \left(\vec{r}_\tau - \vec{\beta}\,r_\tau\right)^2 - \left(\vec{r}_\tau \times \vec{\beta}\right)^2 = \left(r_\tau - \vec{r}_\tau \cdot \vec{\beta}\right)^2 \quad . \tag{26}$$

**Potentialberechnung**

Geben wir nun die Liénard–Wiechert–Potentiale entsprechend den Gleichungen 9a und 9b an, so erhalten wir unter Beachtung von

$$r_\tau\, \kappa(\vec r\,,\tau) = r_\tau - \vec r_\tau \cdot \vec\beta = \sqrt{r_t^2 - \left(\vec r_t \times \vec\beta\right)^2} \tag{27}$$

sofort das Ergebnis

$$\phi(\vec r\,,t) = \frac{q}{\sqrt{r_t^2 - \left(\vec r_t \times \vec\beta\right)^2}} \quad , \qquad \vec A(\vec r\,,t) = \phi(\vec r\,,t)\;\vec\beta \quad , \tag{28}$$

welches keine retardierten Größen mehr enthält. Diese Potentiale sind somit nur Funktionen der Variablenkombination $\vec r - \vec v\, t$ , d.h. diese Potentiale bewegen sich so wie das Teilchen gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\vec v$.

**Äquipotentialflächen**

Betrachten wir Flächen mit $\phi(\vec r\,,t)$ = konstant (sogenannte Äquipotentialflächen), so lautet die zugehörige Flächengleichung

$$r_t^2 - \left(\vec r_t \times \vec\beta\right)^2 = \text{ constant} \quad ,$$

die bei einer Zerlegung von $\vec r_t$ in eine zur Geschwindigkeit $\vec v$ parallele Komponente $\vec r_\parallel$ und eine dazu senkrechte Komponente $\vec r_\perp$

$$\vec r_t = \vec r_\parallel + \vec r_\perp \qquad \text{mit} \quad \vec r_\perp \cdot \vec\beta = 0 \quad , \quad \vec r_\parallel \times \vec\beta = 0 \quad , \tag{29}$$

sofort die Form

$$\vec r_\parallel^{\,2} + (1 - \vec\beta^2)\, \vec r_\perp^{\,2} = \text{constant} \tag{30}$$

annimmt. Diese Gleichung beschreibt die Oberfläche eines Rotationsellipsoids, welches in Bewegungsrichtung eine um den Faktor $\sqrt{1-\beta^2}$ kürzere Ausdehnung besitzt.

**Berechnung des elektrischen Feldes**

Berücksichtigen wir die konstante Geschwindigkeit des Teilchens, so verbleibt in Gleichung 22 nur der erste Term

$$\vec E(\vec r\,,t) = \frac{q}{r_\tau^3\, \kappa^3(\vec r\,,\tau)}\,(1-\beta^2)\,(\vec r_\tau - \vec\beta\, r_\tau) \quad .$$

Den Nenner dieses Ausdruckes haben wir bereits in Gleichung 27 ausgewertet und der letzte Klammerausdruck entspricht dem Vektor $\vec r_t$ (siehe Gl. 25)

$$\vec E(\vec r\,,t) = q\,\frac{1-\beta^2}{\sqrt{r_t^2 - \left(\vec r_t \times \vec\beta\right)^2}^{\,3}}\,\vec r_t \quad . \tag{31}$$

Die elektrische Feldstärke $\vec E$ zeigt also immer entlang der momentanen Verbindungslinie zum Teilchen.

**Berechnung des magnetischen Feldes**

Zur Berechnung des magnetischen Feldes verwenden wir Gl. 17. Zuerst berechnen wir $\vec{n}_\tau$ aus den Gl. 8b und 25

$$\vec{n}_\tau = \frac{\vec{r}_\tau}{r_\tau} = \frac{\vec{r}_t + \vec{\beta}\, r_\tau}{r_\tau} = \frac{\vec{r}_t}{r_\tau} + \vec{\beta}$$

und dann beachten wir, daß $\vec{E}(\vec{r}, t)$ proportional zu $\vec{r}_t$ ist. Somit ergibt sich bei der Auswertung von Gl. 17 die Beziehung

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\beta} \times \vec{E}(\vec{r}, t) \quad . \tag{32}$$

**Kraft auf ein gleichförmig mitbewegtes Teilchen**

Auf ein gleichförmig mitbewegtes Teilchen, welches dann ebenfalls die Geschwindigkeit $\vec{v} = c\,\vec{\beta}$ besitzt, wirkt die Lorentzkraft

$$\vec{F} = Q\, \left(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B}\right) \quad ,$$

wenn dieses zweite Teilchen die Ladung $Q$ besitzt. Die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind die vom ersten Teilchen erzeugten Felder, die wir bereits ausgerechnet haben. Unter Beachtung von

$$\phi = \phi(\vec{r} - \vec{v}\, t) \quad , \qquad \vec{A} = \phi(\vec{r} - \vec{v}\, t)\, \vec{\beta} \quad ,$$

folgt aus den allgemeinen Gleichungen

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \quad , \qquad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

sofort

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\, \phi + \vec{\beta}\, \left(\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\beta}\right) \quad , \qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\phi \times \vec{\beta}$$

und hiemit

$$\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B} = -\vec{\nabla}\, \phi + \vec{\beta}\, \left(\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\beta}\right) + \vec{\beta} \times \left(\vec{\nabla}\phi \times \vec{\beta}\right) = -\,(1 - \beta^2)\, \vec{\nabla}\phi \quad , \tag{33}$$

d.h. die Lorentzkraft auf ein gleichförmig mitbewegtes Teilchen zeigt in Richtung der Flächennormalen der Äquipotentialflächen.

# VI.2. Bewegte Ladungen: Abstrahlung von Wellen

## VI.2.A. Berechnung der Felder für $r \to \infty$

Haben wir eine lokalisierte zeitabhängige Ladungs– und Stromverteilung vorliegen, so können wir aus der allgemeinen Lösung für das Vektorpotential $\vec{A}$ bei Vorliegen natürlicher Randbedingungen (siehe Gleichung II.42b)

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3 r' \, \frac{\vec{\jmath}\left(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

das Magnetfeld $\vec{B}$ entsprechend der Formel $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$ ausrechnen. Nehmen wir in weiter Entfernung $\vec{r}$ von den lokalisierten Quellen eine Reihenentwicklung nach Potenzen von $\frac{1}{r}$ vor, so ergibt sich

$$\vec{B}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c\,r}\,\frac{\vec{r}}{c\,r} \times \int \mathrm{d}^3 r' \, \overset{\bullet}{\vec{\jmath}}\left(\vec{r}\,', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{c\,r}\right) \; + \; \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \qquad . \tag{34}$$

Wir haben hiebei die Zeitableitung durch einen Punkt gekennzeichnet

$$\overset{\bullet}{\vec{\jmath}}(\vec{r},t) =: \frac{\partial \vec{\jmath}(\vec{r},t)}{\partial t} \tag{35}$$

und im Zeitargument der Stromdichte die Reihenentwicklung

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = r - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right)$$

verwendet, um in Gleichung 34 den Term erster Ordnung in $\frac{1}{r}$ von den restlichen Termen abzuspalten. Diesen Term erster Ordnung bezeichnen wir als den Strahlungsanteil $\vec{B}_s$ des Magnetfeldes. Er ist durch die Gleichung

$$\vec{B}_s(\vec{r},t) = \frac{\overset{\bullet\bullet}{\vec{q}} \times \vec{r}}{c^2\, r^2} \tag{36}$$

gegeben, wobei wir die Abkürzung

$$\overset{\bullet}{\vec{q}}(\vec{r},t) =: \int \mathrm{d}^3 r' \;\, \vec{\jmath}\left(\vec{r}\,', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{c\,r}\right) \tag{37}$$

eingeführt haben. Der Vektor $\vec{q}$ kann als allgemeines Strahlungsmoment der beliebig bewegten lokalisierten Quellen angesprochen werden. Er legt die elektromagnetischen Felder in der Wellenzone (Strahlungszone) eindeutig fest. In der einfachsten Näherung entspricht dieses Strahlungsmoment dem zeitabhängigen elektrischen Dipolmoment der Quellen.

**Berechnung von $\vec{E}_s$**

Den Strahlungsanteil des elektrischen Feldes, d.h. den Term der Ordnung $\frac{1}{r}$, berechnet man im quellenfreien Gebiet zweckmäßigerweise direkt aus der Maxwellgleichung

$$\frac{1}{c}\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \operatorname{rot}\vec{B} \quad .$$

Aus

$$\frac{1}{c}\,\dot{\vec{E}}_s(\vec{r}\,,t) = -\,\frac{\vec{r}}{c\,r} \times \frac{\dddot{\vec{q}} \times \vec{r}}{c^2\,r^2}$$

folgt für den Strahlungsanteil des elektrischen Feldes

$$\vec{E}_s(\vec{r}\,,t) = \frac{\left(\ddot{\vec{q}} \times \vec{r}\right) \times \vec{r}}{c^2\,r^3} \quad . \tag{38}$$

Die Strahlungsanteile der elektromagnetischen Felder erfüllen somit die Gleichungen

$$\vec{E}_s = \vec{B}_s \times \frac{\vec{r}}{r} \quad , \qquad \vec{r}\cdot\vec{E}_s = 0 \quad , \quad \vec{r}\cdot\vec{B}_s = 0 \quad , \tag{39}$$

d.h. sie sind senkrecht zueinander und stehen senkrecht auf den Ortssvektor $\vec{r}$. Wir finden somit das bei ebenen Wellen (siehe Kap. V.1.A) vorhandene Verhalten: $\vec{r}$, $\vec{E}_s$ und $\vec{B}_s$ bilden ein **Rechtssystem von orthogonalen Vektoren**.

## VI.2.B. Abstrahlungsleistung

Berechnen wir in weiter Entfernung von den lokalisierten Quellen die Energiestromdichte, d.h. den Poyntingvektor $\vec{S}$, so erhalten wir

$$\vec{S}(\vec{r}\,,t) = \frac{c}{4\pi}\,\vec{E}_s(\vec{r}\,,t) \times \vec{B}_s(\vec{r}\,,t) \;+\; \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad . \tag{40}$$

Die gesamte abgestrahlte Leistung erhalten wir entsprechend dem Energieerhaltungssatz (siehe Gleichung II.49) durch ein Oberflächenintegral über diese Energiestromdichte. Da nun die Oberfläche einer Kugel mit größer werdenden Radius mit der Potenz $r^2$ ansteigt, ergibt für $r \to \infty$ nur der explizit angeschriebene Term von Gleichung 40, welcher wie $\frac{1}{r^2}$ kleiner wird, einen endlichen Beitrag zu diesem Oberflächenintegral, d.h. zu der abgestrahlten Leistung.

Wir können uns daher bei der Berechnung der abgestrahlten Leistung auf die Strahlungsterme der elektromagnetischen Felder beschränken. Verwenden wir die Beziehungen von Gl. 39 und von Gl. 36, so ergibt sich der die Abstrahlungsleistung bestimmende Poyntingvektor zu

$$\vec{S}(\vec{r}\,,t) = \frac{c}{4\pi}\,\vec{B}_s^2\,\frac{\vec{r}}{r} = \frac{c}{4\pi}\,\frac{1}{c^4 r^2}\left(\ddot{\vec{q}} \times \frac{\vec{r}}{r}\right)^2\,\frac{\vec{r}}{r} \quad . \tag{41}$$

Berechnen wir die in den Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega$ abgestrahlte Leistung $\mathrm{d}P$, so ergibt sich unter Beachtung des Flächenelementes

$$\mathrm{d}^2\vec{f} = \frac{\vec{r}}{r}\,r^2\,\mathrm{d}\Omega$$

sowie von Gl. 41 der folgende Ausdruck

$$\mathrm{d}P = \vec{S}\cdot \mathrm{d}^2\vec{f} = \frac{1}{4\pi\, c^3}\left(\ddot{\vec{q}}\times\frac{\vec{r}}{r}\right)^2 \mathrm{d}\Omega \quad . \tag{42a}$$

Diese Gleichung kann auch in der folgenden Form geschrieben werden

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{4\pi\, c^3}\left(\ddot{\vec{q}}\times\frac{\vec{r}}{r}\right)^2 = \frac{1}{4\pi\, c^3}\left[\ddot{\vec{q}}^{\,2} - \left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\ddot{\vec{q}}\right)^2\right] \quad . \tag{42b}$$

Die gesamte abgestrahlte Leistung ergibt sich durch Integration über den gesamten Raumwinkel

$$P = \int \mathrm{d}P = \int \mathrm{d}\Omega\, \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{4\pi\, c^3}\int \mathrm{d}\Omega \left(\ddot{\vec{q}}\times\frac{\vec{r}}{r}\right)^2 \quad . \tag{43}$$

Wie aus Gleichung 37 zu ersehen ist, ist das Strahlungsmoment $\vec{q}(\vec{r},t)$ als Funktion des Ortes und der Zeit nur eine Funktion der retardierten Zeit $t-\frac{r}{c}$ und der Richtung $\frac{\vec{r}}{r}$ . Somit verbleibt nach der Winkelintegration für die Berechnung der gesamten abgestrahlten Leistung nur noch eine Abhängigkeit von der retardierten Zeit $t-\frac{r}{c}$ :

$$\vec{q}(\vec{r},t) = \vec{q}\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right) \qquad \longrightarrow \qquad P = P\left(t-\frac{r}{c}\right) \quad . \tag{44}$$

## VI.2.C. Berechnung des Vektors $\vec{q}$

Machen wir in der Definitionsgleichung 37 für die Zeitableitung des Abstrahlungsmomentes $\vec{q}$

$$\dot{\vec{q}}\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right) = \int \mathrm{d}^3r'\; \vec{\jmath}\left(\vec{r}\,',t-\frac{r}{c}+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{c\,r}\right) \tag{45}$$

im Hinblick auf das Argument $\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{c\,r}$ eine Taylorreihenentwicklung

$$\dot{\vec{q}}\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right) = \int \mathrm{d}^3r'\; \vec{\jmath}\left(\vec{r}\,',t-\frac{r}{c}\right) + \int \mathrm{d}^3r'\; \dot{\vec{\jmath}}\left(\vec{r}\,',t-\frac{r}{c}\right)\,\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{c\,r} + \ldots \quad , \tag{46}$$

so können wir unter Verwendung der aus der Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\varrho}(\vec{r}\,',t_r) + \vec{\nabla}'\cdot\vec{\jmath}(\vec{r}\,',t_r) = 0$$

folgenden Beziehungen

$$\vec{\jmath}(\vec{r}\,',t_r) = \dot{\varrho}(\vec{r}\,',t_r)\,\vec{r}\,' + \left(\vec{\nabla}'\cdot\vec{\jmath}(\vec{r}\,',t_r)\right)\vec{r}\,' \quad , \tag{47a}$$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{\jmath}}(\vec{r}\,',t_r)\;(\vec{r}\cdot\vec{r}\,') &= \frac{1}{2}\left(\vec{r}\,'\times\dot{\vec{\jmath}}(\vec{r}\,',t_r)\right)\times\vec{r} + \frac{1}{2}\,\ddot{\varrho}(\vec{r}\,',t_r)\;(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')\,\vec{r}\,' \\ &\quad +\frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}'\cdot\dot{\vec{\jmath}}(\vec{r}\,',t_r)\right)\;(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')\,\vec{r}\,' \quad ,\end{aligned} \tag{47b}$$

diese Reihenentwicklung in der folgenden Form schreiben:

$$\overset{\bullet}{\vec{q}}\left(t_r,\frac{\vec{r}}{r}\right) = \int \mathrm{d}^3r'\ \vec{r}\,'\ \overset{\bullet}{\varrho}(\vec{r}\,',t_r) + \frac{1}{2\,c}\int \mathrm{d}^3r'\ \left(\vec{r}\,'\times\overset{\bullet}{\vec{j}}(\vec{r}\,',t_r)\right)\times\frac{\vec{r}}{r}$$
$$+\frac{1}{2\,c\,r}\int \mathrm{d}^3r'\ \overset{\bullet\bullet}{\varrho}(\vec{r}\,',t_r)\,(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')\,\vec{r}\,' \quad . \tag{48}$$

Wir haben hiebei für die retardierte Zeit $t-\frac{r}{c}$ die Kurzbezeichnung $t_r$ verwendet und das Verschwinden aller Oberflächenintegrale berücksichtigt.

Unter Einführung der Abkürzungen

$$\vec{p}(t_r) = \int \mathrm{d}^3r'\ \vec{r}\,'\ \varrho(\vec{r}\,',t_r) \quad , \tag{49a}$$

$$\vec{m}(t_r) = \frac{1}{2\,c}\int \mathrm{d}^3r'\ \vec{r}\,'\times\vec{j}(\vec{r}\,',t_r) \quad , \tag{49b}$$

$$\vec{Q}\left(t_r,\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{\vec{r}}{r}\cdot\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{Q}} \tag{49c}$$

$$\text{mit}\quad Q_{ij}(t_r) = \int \mathrm{d}^3r'\ 3\,x_i'\,x_j'\,\varrho(\vec{r}\,',t_r) \quad , \tag{49d}$$

können wir Gleichung 48 nun in der Form

$$\overset{\bullet\bullet}{\vec{q}}\left(t_r,\frac{\vec{r}}{r}\right) = \overset{\bullet\bullet}{\vec{p}}(t_r) + \overset{\bullet\bullet}{\vec{m}}(t_r)\times\frac{\vec{r}}{r} + \frac{1}{6\,c}\,\overset{\bullet\bullet\bullet}{\vec{Q}}\left(t_r,\frac{\vec{r}}{r}\right) + \ldots \tag{50}$$

schreiben und entsprechend den Gleichungen 36 und 38 zur Berechnung der Strahlungsfelder verwenden. Die in dieser Entwicklung auftretenden Beiträge zu den Strahlungsfeldern werden als elektrische Dipolstrahlung, magnetische Dipolstrahlung, elektrische Quadrupolstrahlung, ... bezeichnet.

### Voraussetzungen für die Näherungsentwicklung

Die im vorstehenden angegebene Näherungsentwicklung für das Abstrahlungsmoment $\vec{q}$ setzt voraus, daß sich die Stromdichte $\vec{j}$ in der Zeit $\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{c\,r}$ nicht wesentlich ändert. Ist die für die Änderung von $\vec{j}$ charakteristische Zeit durch $T$ gegeben, so muß

$$\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{c\,r} \approx \frac{d}{c} \ll T \tag{51}$$

gelten, wenn $d$ eine charakteristische Abmessung der lokalisierten Quellen darstellt.
Ist die Größenordnung der Geschwindigkeit der bewegten Ladungen durch $v$ gegeben, so gilt

$$v \approx \frac{d}{T} \quad , \quad \text{woraus}\quad v \ll c \quad \text{folgt,} \tag{52}$$

d.h. wir betrachten **nichtrelativistische** Bewegungen der Ladungsträger.
Bei periodischen Vorgängen gilt

$$c\,T \approx \lambda \quad , \quad \text{woraus}\quad d \ll \lambda \quad \text{folgt,} \tag{53}$$

d.h. wir betrachten hier den Fall, daß die Ausdehnung der Quellen viel kleiner als die Wellenlänge $\lambda$ der periodischen Strahlung ist (man bezeichnet dies auch als den **Grenzfall langer Wellenlängen**).

## VI.2.D. Hertzscher Vektor $\vec{Z}$

Im Rahmen der Lorenzeichung kann man die Potentiale $\phi$ und $\vec{A}$ auch in der Form

$$\phi(\vec{r},t) = -\operatorname{div}\vec{Z}(\vec{r},t) \quad , \qquad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{Z}(\vec{r},t) \tag{54}$$

darstellen, wodurch die Eichbeziehung (siehe Gl. II.15)

$$\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{r},t) = 0 \tag{55}$$

automatisch erfüllt ist. Der Vektor $\vec{Z}(\vec{r},t)$ wird als **Hertzscher Vektor** bezeichnet. Er ist durch die inhomogenen Maxwellgleichungen (siehe Gl. II.16a,b)

$$\Box\phi(\vec{r},t) = -4\pi\,\varrho(\vec{r},t) \quad , \qquad \Box\vec{A}(\vec{r},t) = -\frac{4\pi}{c}\,\vec{\jmath}(\vec{r},t) \tag{56}$$

bestimmt, indem die Potentiale $\phi$ und $\vec{A}$ gemäß der Gleichung 54 durch den Hertzschen Vektor $\vec{Z}$ ausgedrückt werden. Hiebei ist es zweckmäßig, die Quellterme in der Form

$$\varrho(\vec{r},t) = -\operatorname{div}\vec{P}(\vec{r},t) \quad , \qquad \vec{\jmath}(\vec{r},t) = \frac{\partial}{\partial t}\vec{P}(\vec{r},t) \tag{57}$$

darzustellen, wodurch die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div}\vec{\jmath}(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\varrho(\vec{r},t) = 0 \tag{58}$$

gleichfalls automatisch erfüllt ist. Der Vektor $\vec{P}$ wird als **Polarisationsvektor** bezeichnet und stellt den Quellterm für den Hertzschen Vektor $\vec{Z}$ dar:

$$\Box\vec{Z}(\vec{r},t) = -4\pi\,\vec{P}(\vec{r},t) \quad . \tag{59}$$

Die retardierte Lösung dieser Gleichung kann sofort angegeben werden

$$\vec{Z}(\vec{r},t) = \int \mathrm{d}^3r' \; \frac{\vec{P}(\vec{r}\,',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \quad . \tag{60}$$

Die elektromagnetischen Felder $\vec{B}$ und $\vec{E}$ können bei Kenntnis des Hertzschen Vektors $\vec{Z}$ (und des Polarisationsvektors $\vec{P}$) aus den Gleichungen

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{Z}(\vec{r},t) \quad , \tag{61a}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{Z}(\vec{r},t) - 4\pi\,\vec{P}(\vec{r},t) \tag{61b}$$

berechnet werden.

**Berechnung der Strahlungsfelder**

Für die Berechnung der Strahlungsfelder aus den Gl. 61a und 61b nehmen wir analog zur Vorgangsweise in Kapitel VI.2.A. wieder in weiter Entfernung $\vec{r}$ von den lokalisierten Quellen eine Reihenentwicklung nach Potenzen von $\frac{1}{r}$ vor. Für das Magnetfeld in der Strahlungszone ergibt sich

$$\vec{B}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c\,r}\,\frac{\vec{r}}{c\,r} \times \int \mathrm{d}^3r'\,\ddot{\vec{P}}\left(\vec{r}\,',t-\frac{r}{c}+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{c\,r}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad . \tag{61c}$$

Der Vergleich mit den Gl. 36 und 37 zeigt, daß das allgemeine Strahlungsmoment $\vec{q}$ durch

$$\vec{q}\,(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}) = \int \mathrm{d}^3r'\;\vec{P}\left(\vec{r}\,',t-\frac{r}{c}+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{c\,r}\right) \tag{61d}$$

gegeben ist. Entwickeln wir direkt die Bestimmungsgleichung 60 für den Hertzschen Vektor nach Potenzen von $\frac{1}{r}$, so ergibt sich die Beziehung

$$\vec{Z}(\vec{r},t) = \frac{\vec{q}\,(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r})}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad , \tag{61e}$$

d.h. aus dem $\frac{1}{r}$–Anteil von $\vec{Z}(\vec{r},t)$ kann man das allgemeine Strahlungsmoment $\vec{q}\,(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r})$ ablesen und hiemit die Strahlungsfelder berechnen. Man erhält so für das magnetische Strahlungsfeld

$$\vec{B}_s(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2}\,\ddot{\vec{Z}}(\vec{r},t) \times \frac{\vec{r}}{r} \tag{61f}$$

und analog für das elektrische Strahlungsfeld

$$\vec{E}_s(\vec{r},t) = \left(\frac{1}{c^2}\,\ddot{\vec{Z}}(\vec{r},t) \times \frac{\vec{r}}{r}\right) \times \frac{\vec{r}}{r} \quad . \tag{61g}$$

Hiebei sind immer die höheren Ordnungen $\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$ von $\vec{Z}(\vec{r},t)$ zu vernachlässigen.

Für den Poyntingvektor $\vec{S}$ ergibt sich der zu Gl. 41 analoge Ausdruck

$$\vec{S}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi c^3}\,\left(\ddot{\vec{Z}}(\vec{r},t) \times \frac{\vec{r}}{r}\right)^2\,\frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\,c^3}\,\left[\ddot{\vec{Z}}(\vec{r},t)^2 - \left(\ddot{\vec{Z}}(\vec{r},t)\cdot\frac{\vec{r}}{r}\right)^2\right]\,\frac{\vec{r}}{r} \quad . \tag{61h}$$

Man erkennt aus den obigen Gleichungen, daß der Hertzsche Vektor $\vec{Z}$ eine geeignete Größe zur Beschreibung von Abstrahlungsproblemen ist. Der Hertzsche Vektor wird auch als **Superpotential** oder **Potential der Potentiale** bezeichnet, da mit seiner Hilfe die Potentiale $\vec{A}$ und $\phi$ berechnet werden können.

## VI.2.E. Beispiel: gleichmäßige Abbremsung eines Teilchens

Wir betrachten nun ein Punktteilchen mit der elektrischen Ladung $q$, welches sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit $v_o$ in die Richtung $\vec{e}$ bewegt und in der Zeit zwischen $t = 0$ und $t = T$ mit der gleichförmigen Verzögerung $a$ zum Stillstand gebracht wird. Es gilt somit für die Zeitableitung der Bahnkurve, d.h. für die Geschwindigkeit dieses Teilchens, voraussetzungsgemäß

$$\dot{\vec{R}}(t) = \vec{v}(t) = \begin{cases} v_o\,\vec{e} & \text{für } 0 > t \\ (v_o - a\,t)\,\vec{e} & \text{für } 0 < t < T \\ 0 & \text{für } T < t \end{cases} \qquad \text{mit} \quad T = \frac{v_o}{a} \quad . \tag{62}$$

Die zugehörige Stromdichte können wir in der Form (siehe Gleichung 1b)

$$\vec{\jmath}(\vec{r}\,', t') = q\;\vec{v}(t')\;\delta\left(\vec{r}\,' - \vec{R}(t')\right) \tag{63}$$

schreiben und zur Berechnung des Strahlungsmomentes $\vec{q}$ verwenden.

Unter der **Voraussetzung** $v_o \ll c$ können wir uns auf die elektrische Dipolnäherung beschränken und erhalten

$$\ddot{\vec{q}}(t_r) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 > t_r \\ -q\,a\,\vec{e} & \text{für } 0 < t_r < T \\ 0 & \text{für } T < t_r \end{cases} \quad . \tag{64}$$

Hiemit kann sofort die gesamte abgestrahlte Leistung entsprechend Gleichung 43 berechnet werden:

$$P = \frac{1}{4\pi\,c^3} \int \mathrm{d}\Omega \left(\ddot{\vec{q}} \times \frac{\vec{r}}{r}\right)^2 = \frac{2}{3\,c^3}\;q^2\;a^2 \qquad \text{für} \quad 0 < t_r < T \quad . \tag{65}$$

### Abgestrahlte Energie

Die gesamte abgestrahlte Energie $W_s$ erhalten wir durch Zeitintegration über die abgestrahlte Leistung. In dem betrachteten Fall entspricht dies einfach der Multiplikation der abgestrahlten Leistung mit der Zeitdauer $T$ der Abbremsung

$$W_s = P\,T = \frac{2}{3\,c^3}\;q^2\;a^2\;T = \frac{2}{3\,c^3}\;q^2\;v_o^2\;\frac{1}{T} \quad . \tag{66}$$

Bilden wir das Verhältnis dieser Abstrahlungsenergie zu der gesamten kinetischen Energie des Teilchens vor der Abbremsung

$$W_{kin} = \frac{m\,v_o^2}{2} \quad , \tag{67}$$

so erhalten wir

$$\frac{W_s}{W_{kin}} = \frac{2\,q^2}{3\,m\,c^3}\;\frac{2}{T} = 2\;\frac{\tau_s}{T} \qquad \text{mit} \qquad \tau_s = \frac{2\,q^2}{3\,m\,c^3} \quad . \tag{68}$$

Für ein Elektron kann die Zeit $\tau_s$ leicht ausgerechnet werden. Es ergibt sich $\tau_s = 6\cdot 10^{-24}$ s. Vergleicht man diese Zeit mit physikalisch möglichen Abbremszeiten $T$ eines Elektrons, so erkennt man, daß die abgestrahlte Energie immer nur einen verschwindend kleinen Teil der kinetischen Energie des Teilchens darstellt.

# VI.3. Abstrahlung bei periodischer Zeitabhängigkeit

## VI.3.A. Näherungsentwicklung

Haben wir bei den Quelltermen eine mit der Kreisfrequenz $\omega$ periodische Zeitabhängigkeit vorliegen

$$\varrho(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\,\varrho(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-i\omega t} + c.c. \quad , \tag{69a}$$

$$\vec{\jmath}(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\,\vec{\jmath}(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-i\omega t} + c.c. \quad , \tag{69b}$$

so können wir unter Einführung des Wellenzahlvektors $\vec{k}$

$$\vec{k} =: \frac{\omega}{c}\,\frac{\vec{r}}{r} \tag{70}$$

das allgemeine Dipolmoment des Strahlungsfeldes entsprechend Gleichung 37 in der Form

$$\overset{\bullet}{\vec{q}}\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right) = \mathrm{e}^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}\,\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3r'\ \mathrm{e}^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}\,'}\ \vec{\jmath}(\vec{r}\,') + c.c. \tag{71}$$

schreiben. Im **Grenzfall langer Wellenlängen**, d.h. wenn die maximalen räumlichen Ausdehnungen $d$ der Quellen viel kleiner als die Wellenlänge $\lambda = c/f = 2\pi c/\omega$ sind, gilt

$$\vec{k}\cdot\vec{r}\,' \leq 2\pi\,\frac{d}{\lambda} \ll 1 \tag{72}$$

und wir können die Exponentialfunktion im Integranden in eine Taylorreihe entwickeln:

$$\mathrm{e}^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}\,'} = 1 - i\vec{k}\cdot\vec{r}\,' - \ldots \quad . \tag{73}$$

Der erste Term dieser Entwicklung ergibt die **elektrische Dipolnäherung**, während der zweite Term (analog der Rechnung im Kapitel VI.2.C) in die Summe eines **magnetischen Dipoltermes** und eines **elektrischen Quadrupoltermes** aufspaltet (diese beiden Terme entsprechen bei dieser Entwicklung somit der gleichen Größenordnung).

Die Verwendung der Gleichungen 69a und 69b ergibt nun die Entwicklungsterme (siehe Gl. 49a bis 49d)

$$\vec{p}\,(t_r) = \mathrm{e}^{-i\omega t_r}\,\frac{1}{2}\,\vec{p} + c.c. = \mathrm{e}^{-i\omega t_r}\,\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3r'\ \vec{r}\,'\,\varrho(\vec{r}\,') + c.c. \quad , \tag{74a}$$

$$\vec{m}\,(t_r) = \mathrm{e}^{-i\omega t_r}\,\frac{1}{2}\,\vec{m} + c.c. = \mathrm{e}^{-i\omega t_r}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2\,c}\int \mathrm{d}^3r'\ \vec{r}\,'\times\vec{\jmath}(\vec{r}\,') + c.c. \quad , \tag{74b}$$

$$\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}\,(t_r) = \mathrm{e}^{-i\omega t_r}\,\frac{1}{2}\,\overleftrightarrow{\mathbf{Q}} + c.c. = \mathrm{e}^{-i\omega t_r}\,\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3r'\ 3\,\vec{r}\,'\circ\vec{r}\,'\,\varrho(\vec{r}\,') + c.c. \quad . \tag{74c}$$

Hiemit ergibt sich aus Gleichung 50

$$\vec{q}\left(t_r,\frac{\vec{r}}{r}\right) = \mathrm{e}^{-i\omega t_r}\frac{1}{2}\left[\vec{p} + \vec{m}\times\frac{\vec{r}}{r} - \frac{i\,k}{6}\,\frac{\vec{r}}{r}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{Q}} + \ldots\right] + c.c. \quad . \tag{75}$$

## VI.3.B. Elektrische Dipolstrahlung

Unter Verwendung des zeitunabhängigen elektrischen Dipolmomentes

$$\vec{p} = \int \mathrm{d}^3 r' \ \vec{r}' \varrho(\vec{r}') \tag{76}$$

können wir den elektrischen Dipolbeitrag zum Abstrahlungsmoment $\vec{q}$ in der Form

$$\vec{q} = \mathrm{e}^{-i\omega t_r} \frac{1}{2} \vec{p} \quad + \quad c.c. \tag{77}$$

schreiben, woraus sich die elektromagnetischen Strahlungsfelder

$$\vec{B}_s \quad = \quad \frac{1}{c^2 r} \left( \ddot{\vec{q}} \times \frac{\vec{r}}{r} \right) = \mathrm{e}^{-i\omega t} \ k^2 \ \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} \ \frac{1}{2} \left( \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{p} \right) \quad + \quad c.c. \quad , \tag{78a}$$

$$\vec{E}_s \quad = \quad \vec{B}_s \times \frac{\vec{r}}{r} = \mathrm{e}^{-i\omega t} \ k^2 \ \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} \ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{p} \right) \times \frac{\vec{r}}{r} \right] \quad + \quad c.c. \tag{78b}$$

ergeben.

### Winkelverteilung der abgestrahlten Leistung

Bei der Berechnung der in den Raumwinkelbereich d$\Omega$ abgestrahlten Leistung entsprechend Gleichung 42b haben wir nun wieder die Gleichung V.21 zu berücksichtigen. Hiemit ergibt sich sofort

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{c}{4\pi} \ k^4 \frac{1}{4} \left\{ \left| \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{p} \right|^2 + \mathrm{e}^{-i2\omega t} \ \mathrm{e}^{i2kr} \ \left( \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{p} \right)^2 \right\} \quad + \quad c.c. \quad . \tag{79}$$

Berechnen wir das Zeitmittel $\langle \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} \rangle$ der abgestrahlten Leistung (wobei die zeitliche Mittelung über eine oder mehrere Perioden durchgeführt werden kann), so ergibt sich

$$\langle \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} \rangle = \frac{c}{2\pi} \ k^4 \frac{1}{4} \left| \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{p} \right|^2 \quad . \tag{80}$$

Hat der Vektor $\vec{p}(t)$ eine feste Richtung ('schwingender' elektrischer Dipol), die wir als $z$-Achse wählen, so können wir die Winkelabhängigkeit der mittleren abgestrahlten Leistung explizit angeben:

$$\langle \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} \rangle = \frac{c}{2\pi} \ k^4 \frac{1}{4} \ |\vec{p}|^2 \ \sin^2\vartheta \quad . \tag{81}$$

Durch Integration über den Raumwinkel erhalten wir die gesamte abgestrahlte Leistung im Zeitmittel zu

$$\langle P \rangle = \frac{c\, k^4}{3} \ |\vec{p}|^2 = \frac{\omega^4}{3\, c^3} \ |\vec{p}|^2 \quad . \tag{82}$$

Dieses Ergebnis kann auch direkt aus Gl. 80 hergeleitet werden und gilt somit ganz allgemein.

## VI.3.C. Magnetische Dipolstrahlung

Unter Verwendung des zeitunabhängigen magnetischen Dipolmomentes

$$\vec{m} = \frac{1}{2\,c} \int \mathrm{d}^3r' \;\; \vec{r}\,' \times \vec{\jmath}(\vec{r}\,') \tag{83}$$

können wir den magnetischen Dipolbeitrag zum Abstrahlungsmoment $\vec{q}$ in der Form

$$\vec{q} = \mathrm{e}^{-i\omega t_r} \frac{1}{2} \left( \vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r} \right) \;\; + \;\; c.c. \tag{84}$$

schreiben, woraus sich die elektromagnetischen Strahlungsfelder

$$\vec{B}_s \;\; = \;\; \frac{1}{c^2\,r} \left( \ddot{\vec{m}}_s \times \frac{\vec{r}}{r} \right) \times \frac{\vec{r}}{r} = \mathrm{e}^{-i\omega t} \; k^2 \; \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} \; \frac{1}{2} \left[ \frac{\vec{r}}{r} \times \left( \vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r} \right) \right] \;\; + \;\; c.c. \quad , \tag{85a}$$

$$\vec{E}_s \;\; = \;\; \vec{B}_s \times \frac{\vec{r}}{r} = \mathrm{e}^{-i\omega t} \; k^2 \; \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} \; \frac{1}{2} \left( \vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r} \right) \;\; + \;\; c.c. \tag{85b}$$

ergeben.

### Winkelverteilung der abgestrahlten Leistung

Bei der Berechnung der in den Raumwinkelbereich $\mathrm{d}\Omega$ abgestrahlten Leistung entsprechend Gleichung 42b ergibt sich nun

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{c}{4\pi} \; k^4 \frac{1}{4} \left\{ \left| \vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r} \right|^2 + \mathrm{e}^{-i2\omega t} \; \mathrm{e}^{i2kr} \; \left( \vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r} \right)^2 \right\} \;\; + \;\; c.c. \quad , \tag{86}$$

also eine der elektrischen Dipolstrahlung vollkommen entsprechende Winkelverteilung. Für das Zeitmittel $\langle \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} \rangle$ der abgestrahlten Leistung ergibt sich daher der zu Gleichung 80 analoge Ausdruck

$$\langle \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} \rangle = \frac{c}{2\pi} \; k^4 \frac{1}{4} \left| \vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r} \right|^2 \quad . \tag{87}$$

Hat der Vektor $\vec{m}(t)$ eine feste Richtung und wählen wir unser Koordinatensystem wieder so, daß die $z$-Achse in diese feste Richtung zeigt, so ist die explizite Winkelabhängigkeit der mittleren abgestrahlten Leistung durch

$$\langle \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} \rangle = \frac{c}{2\pi} \; k^4 \frac{1}{4} \; |\vec{m}|^2 \; \sin^2\vartheta \tag{88}$$

gegeben. Durch Integration über den Raumwinkel erhalten wir wieder die gesamte ausgestrahlte Leistung im Zeitmittel zu

$$\langle P \rangle = \frac{c\,k^4}{3} \; |\vec{m}|^2 = \frac{\omega^4}{3\,c^3} \; |\vec{m}|^2 \quad . \tag{89}$$

Diese Beziehung ist wieder allgemein gültig, wie durch direkte Winkelintegration von Gl. 87 gezeigt werden kann.

## VI.3.D. Elektrische Quadrupolstrahlung

Unter Verwendung des zeitunabhängigen elektrischen Quadrupolmomentes

$$Q_{ij} = \int \mathrm{d}^3 r' \;\; 3\, x_i'\, x_j'\, \varrho(\vec{r}\,') \tag{90}$$

können wir den elektrischen Quadrupolbeitrag zum Abstrahlungsmoment $\vec{q}$ in der Form

$$\vec{q} = -\,\frac{i\,k}{6}\;\mathrm{e}^{-i\omega t_r}\;\frac{1}{2}\,\frac{\vec{r}}{r}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{Q}} \;\;+\;\; c.c. \tag{91}$$

schreiben, woraus sich die elektromagnetischen Strahlungsfelder

$$\vec{B}_s \;=\; \frac{1}{c^2\,r}\left(\ddot{\vec{q}}\times\frac{\vec{r}}{r}\right) = \mathrm{e}^{-i\omega t}\;\frac{i\,k^3}{6}\;\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\;\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}\times\frac{\vec{r}}{r}\right)\;+\;c.c. \quad , \tag{92a}$$

$$\vec{E}_s \;=\; \vec{B}_s\times\frac{\vec{r}}{r} = \mathrm{e}^{-i\omega t}\;\frac{i\,k^3}{6}\;\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\;\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}\times\frac{\vec{r}}{r}\right)\times\frac{\vec{r}}{r}\right]\;+\;c.c. \tag{92b}$$

ergeben. Diese Felder bleiben unverändert, wenn man zum Tensor $\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}$ ein Vielfaches des Einheitstensors hinzufügt. Wir können daher bei der Berechnung des Quadrupoltensors anstelle von Gleichung 90 auch die Gleichung

$$Q_{ij} = \int \mathrm{d}^3 r' \;\;\left(3\, x_i'\, x_j' \;-\; r'^2\,\delta_{ij}\right)\varrho(\vec{r}\,') \tag{93}$$

verwenden, welche der entsprechenden Definition in der Elektrostatik entspricht.

### Winkelverteilung der abgestrahlten Leistung

Die Berechnung der in den Raumwinkelbereich $\mathrm{d}\Omega$ abgestrahlten Leistung ergibt nun

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{c}{4\pi}\,\frac{k^6}{36}\,\frac{1}{4}\left\{\left|\frac{\vec{r}}{r}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}\times\frac{\vec{r}}{r}\right|^2 - \mathrm{e}^{-i2\omega t}\;\mathrm{e}^{i2kr}\;\left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}\times\frac{\vec{r}}{r}\right)^2\right\}\;+\;c.c. \quad . \tag{94}$$

Für das Zeitmittel $\langle\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}\rangle$ der abgestrahlten Leistung ergibt sich

$$\langle\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}\rangle = \frac{c}{2\pi}\,\frac{k^6}{36}\,\frac{1}{4}\left|\frac{\vec{r}}{r}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}\times\frac{\vec{r}}{r}\right|^2 \quad . \tag{95}$$

Sind die Hauptachsen von $\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}(t)$ zeitunabhängig ('schwingender' elektrischer Quadrupol) und wählen wir unser Koordinatensystem so, daß die Koordinatenachsen mit diesen Hauptachsen zusammenfallen, so ergibt sich die folgende explizite Winkelabhängigkeit der mittleren abgestrahlten Leistung

$$\begin{aligned}\langle\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}\rangle = \frac{c}{2\pi}\,\frac{k^6}{36}\,\frac{1}{4}\Big\{\, &|Q_{zz}-Q_{xx}|^2\;\cos^2\vartheta\,\sin^2\vartheta\,\cos^2\varphi \\ &+|Q_{zz}-Q_{yy}|^2\;\cos^2\vartheta\,\sin^2\vartheta\,\sin^2\varphi + |Q_{xx}-Q_{yy}|^2\;\sin^4\vartheta\,\sin^2\varphi\,\cos^2\varphi\Big\} \quad .\end{aligned} \tag{96}$$

Durch Integration über den Raumwinkel erhalten wir die gesamte abgestrahlte Leistung im Zeitmittel zu

$$\langle P\rangle = \frac{c\,k^6}{360}\;\sum_i |Q_{ii}|^2 \quad , \tag{97}$$

wobei die Beziehung Spur $\overleftrightarrow{\mathbf{Q}} = 0$ verwendet wurde (siehe Gl. 93).

# VI.4. Multipolstrahlung

## VI.4.A. Berechnung von $\vec{r}\cdot\vec{B}$ und $\vec{r}\cdot\vec{E}$

Machen wir eine zeitliche Fouriertransformation (siehe hiezu auch Gl. II.25 und II.26)

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\omega\ \mathrm{e}^{-i\omega t}\,\vec{E}(\vec{r},\omega) \quad , \qquad \vec{E}(\vec{r},\omega) = \int \mathrm{d}t\ \ \mathrm{e}^{i\omega t}\,\vec{E}(\vec{r},t) \quad , \tag{98}$$

so lauten die Maxwellgleichungen (alle Größen sind in gleicher Weise transformiert)

$$\mathrm{div}\ \vec{E}(\vec{r},\omega) = 4\pi\,\varrho(\vec{r},\omega) \quad , \qquad \mathrm{rot}\ \vec{E}(\vec{r},\omega) = i\,\frac{\omega}{c}\,\vec{B}(\vec{r},\omega) \quad , \tag{99a}$$

$$\mathrm{div}\ \vec{B}(\vec{r},\omega) = 0 \quad , \qquad \mathrm{rot}\ \vec{B}(\vec{r},\omega) = \frac{4\pi}{c}\,\vec{\jmath}(\vec{r},\omega) - i\,\frac{\omega}{c}\,\vec{E}(\vec{r},\omega) \tag{99b}$$

und die Kontinuitätsgleichung ergibt die Beziehung

$$\mathrm{div}\ \vec{\jmath}(\vec{r},\omega) - i\omega\,\varrho(\vec{r},\omega) = 0 \quad . \tag{100}$$

Führen wir das elektrische Feld $\vec{E}_\rho$

$$\vec{E}_\rho(\vec{r},\omega) = \vec{E}(\vec{r},\omega) - \frac{4\pi}{i\omega}\,\vec{\jmath}(\vec{r},\omega) \tag{101}$$

ein, welches sich nur im Bereich der Quellen von dem elektrischen Feld $\vec{E}$ unterscheidet, so können wir die Maxwellgleichungen in der Form

$$\mathrm{div}\ \vec{E}_\rho(\vec{r},\omega) = 0 \quad , \tag{102a}$$

$$\mathrm{div}\ \vec{B}(\vec{r},\omega) = 0 \quad , \tag{102b}$$

$$\mathrm{rot}\ \vec{B}(\vec{r},\omega) = -i\,\frac{\omega}{c}\,\vec{E}_\rho(\vec{r},\omega) \quad , \tag{102c}$$

$$\mathrm{rot}\ \vec{E}_\rho(\vec{r},\omega) = i\,\frac{\omega}{c}\,\vec{B}(\vec{r},\omega) - \frac{4\pi}{i\omega}\,\mathrm{rot}\,\vec{\jmath}(\vec{r},\omega) \tag{102d}$$

schreiben. Durch Rotorbildung bei den beiden letzten Gleichungen erhalten wir die Helmholtzgleichungen

$$\left(\triangle + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\vec{B}(\vec{r},\omega) = -\frac{4\pi}{c}\,\mathrm{rot}\,\vec{\jmath}(\vec{r},\omega) \quad , \tag{103a}$$

$$\left(\triangle + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\vec{E}_\rho(\vec{r},\omega) = -\frac{4\pi\,i}{\omega}\,\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\,\vec{\jmath}(\vec{r},\omega) \quad . \tag{103b}$$

Diese Helmholtzgleichungen entsprechen den Wellengleichungen (der Zusammenhang ist durch die zeitliche Fouriertransformation gegeben).

Wir können aus den Gleichungen 103a und 103b sofort Bestimmungsgleichungen für $\vec{r}\cdot\vec{B}$ und $\vec{r}\cdot\vec{E}_\rho$ erhalten, wenn wir die wegen der Gleichungen 102a und 102b gültigen Beziehungen

$$\triangle\,\vec{r}\cdot\vec{B} = \vec{r}\cdot\triangle\vec{B} \quad , \qquad \triangle\,\vec{r}\cdot\vec{E}_\rho = \vec{r}\cdot\triangle\vec{E}_\rho \quad , \tag{104}$$

sowie die Definition des Operators $\vec{L} = -i(\vec{r} \times \vec{\nabla})$ (siehe Gleichung IV.35) verwenden:

$$\left(\triangle + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}, \omega) = -\frac{4\pi\, i}{c}\, \vec{L} \cdot \vec{\jmath}(\vec{r}, \omega) \quad , \tag{105a}$$

$$\left(\triangle + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \vec{r} \cdot \vec{E}_\rho(\vec{r}, \omega) = \frac{4\pi}{\omega}\, \vec{L} \cdot \mathrm{rot}\, \vec{\jmath}(\vec{r}, \omega) \quad . \tag{105b}$$

Unter Verwendung der zu der Greenfunktion von Gleichung II.39 zeitlich fouriertransformierten Greenfunktion

$$D_{ret}(\vec{r} - \vec{r}\,', \omega) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, \mathrm{e}^{i\omega \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c}} \quad , \tag{106}$$

die die Gleichung

$$\left(\triangle + \frac{\omega^2}{c^2}\right) D_{ret}(\vec{r} - \vec{r}\,', \omega) = -4\pi\, \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \tag{107}$$

erfüllt, können wir sofort die Lösungen zu den Gleichungen 105a und 105b angeben:

$$\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}, \omega) = \frac{i}{c} \int \mathrm{d}^3 r'\, \frac{\mathrm{e}^{ik|\vec{r} - \vec{r}\,'|}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, \vec{L}' \cdot \vec{\jmath}(\vec{r}\,', \omega) \quad , \tag{108a}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{E}_\rho(\vec{r}, \omega) = -\frac{1}{\omega} \int \mathrm{d}^3 r'\, \frac{\mathrm{e}^{ik|\vec{r} - \vec{r}\,'|}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, \vec{L}' \cdot \mathrm{rot}'\, \vec{\jmath}(\vec{r}\,', \omega) \quad . \tag{108b}$$

Wir haben hiebei die Bezeichnung $k = \frac{\omega}{c}$ eingeführt.

Verwenden wir den Entwicklungssatz (siehe Anhang A.3.4)

$$\frac{\mathrm{e}^{ik|\vec{r} - \vec{r}\,'|}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = 4\pi\, i\, k \sum_{lm} j_l(kr_<)\, h_l^{(1)}(kr_>)\, Y_{lm}(\vartheta, \varphi) Y^*_{lm}(\vartheta', \varphi') \quad , \tag{109}$$

so können wir außerhalb der Quellen ($r_< = r'$, $r_> = r$, $\vec{E}_\rho = \vec{E}$) die Gleichungen 108a und 108b in der Form

$$\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}, \omega) = \sum_{lm} \frac{\sqrt{l(l+1)}}{k}\, a_{lm}^{(M)}\, h_l^{(1)}(kr)\, Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad , \tag{110a}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}, \omega) = -\sum_{lm} \frac{\sqrt{l(l+1)}}{k}\, a_{lm}^{(E)}\, h_l^{(1)}(kr)\, Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \tag{110b}$$

schreiben, wobei wir die **magnetischen Multipolkoeffizienten** $a_{lm}^{(M)}$

$$a_{lm}^{(M)}(\omega) = -\frac{k}{\sqrt{l(l+1)}}\, \frac{4\pi\, k}{c} \int \mathrm{d}^3 r'\; j_l(kr')\, Y^*_{lm}(\vartheta', \varphi')\, \vec{L}' \cdot \vec{\jmath}(\vec{r}\,', \omega) \tag{111a}$$

und die **elektrischen Multipolkoeffizienten** $a_{lm}^{(E)}$

$$a_{lm}^{(E)}(\omega) = \frac{k}{\sqrt{l(l+1)}}\, \frac{4\pi\, i}{c} \int \mathrm{d}^3 r'\; j_l(kr')\, Y^*_{lm}(\vartheta', \varphi')\, \vec{L}' \cdot \mathrm{rot}'\, \vec{\jmath}(\vec{r}\,', \omega) \tag{111b}$$

eingeführt haben.

## VI.4.B. Elektrische Multipolfelder

Als elektrische Multipolfelder bezeichnet man Lösungen der Maxwellgleichungen, welche ein transversales magnetisches Feld $\vec{B}^{(E)}$ aufweisen, für die also

$$\vec{r} \cdot \vec{B}^{(E)}(\vec{r}, \omega) = 0 \tag{112}$$

gilt. Zusammen mit der Maxwellgleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}^{(E)}(\vec{r}, \omega) = 0$$

führt dies auf die Gleichung

$$\vec{B}^{(E)}(\vec{r}, \omega) = \sum_{lm} B_{lm}^{(E)}(r, \omega)\, \vec{X}_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad , \tag{113}$$

da die vektoriellen Kugelflächenfunktionen $\vec{X}_{lm}$ (siehe Gl. IV.38) auf Grund der Definition des Operators $\vec{L}$ (siehe Gl. IV.35) sowohl die Transversalitätsgleichung 112 als auch die Maxwellgleichung $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ erfüllen.

### Bestimmung von $B_{lm}^{(E)}$

Bilden wir auf beiden Seiten der Maxwellgleichung 102c das innere Produkt mit $\vec{r}$, so ergibt sich im quellenfreien Gebiet die Beziehung

$$\vec{L} \cdot \vec{B}(\vec{r}, \omega) = -\frac{\omega}{c}\, \vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}, \omega) \quad , \tag{114}$$

welche mittels der Gleichungen 113 und 110b (sowie A.52b) in der Form

$$\sum_{lm} B_{lm}^{(E)}(r, \omega) \sqrt{l(l+1)}\, Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{\omega}{c} \sum_{lm} \frac{\sqrt{l(l+1)}}{k}\, a_{lm}^{(E)}\, h_l^{(1)}(kr)\, Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

geschrieben werden kann, woraus sofort die Beziehung

$$B_{lm}^{(E)}(r, \omega) = a_{lm}^{(E)}\, h_l^{(1)}(kr) \tag{115}$$

folgt.

### Berechnung von $\vec{E}^{(E)}$

Das zu dem magnetischen Feld von Gleichung 113, welches mit Gleichung 115 auch in der Form

$$\vec{B}^{(E)}(\vec{r}, \omega) = \sum_{lm} a_{lm}^{(E)}\, h_l^{(1)}(kr)\, \vec{X}_{lm}(\vartheta, \varphi) \tag{116}$$

geschrieben werden kann, gehörige elektrische Feld $\vec{E}^{(E)}$ kann am einfachsten direkt aus der Maxwellgleichung 102c

$$\vec{E}^{(E)}(\vec{r}, \omega) = \frac{i}{k}\, \vec{\nabla} \times \vec{B}^{(E)}(\vec{r}, \omega) \tag{117}$$

berechnet werden.

## VI.4.C. Magnetische Multipolfelder

Als magnetische Multipolfelder bezeichnet man Lösungen der Maxwellgleichungen, welche ein transversales elektrisches Feld $\vec{E}^{(M)}$ aufweisen, für die also

$$\vec{r} \cdot \vec{E}^{(M)}(\vec{r}, \omega) = 0 \tag{118}$$

gilt. Zusammen mit der Maxwellgleichung (im quellenfreien Gebiet)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}^{(M)}(\vec{r}, \omega) = 0$$

führt dies analog zu Gleichung 113 auf die Darstellung

$$\vec{E}^{(M)}(\vec{r}, \omega) = \sum_{lm} E_{lm}^{(M)}(r, \omega)\ \vec{X}_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad . \tag{119}$$

### Bestimmung von $E_{lm}^{(M)}$

Analog wie bei den elektrischen Multipolfeldern bilden wir nun mit beiden Seiten der Maxwellgleichung 102d das innere Produkt mit $\vec{r}$ und erhalten im quellenfreien Gebiet die Beziehung

$$\vec{L} \cdot \vec{E}(\vec{r}, \omega) = \frac{\omega}{c}\ \vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}, \omega) \quad , \tag{120}$$

welche mittels der Gleichungen 119 und 110a (sowie A.52b) wieder in der Form

$$\sum_{lm} E_{lm}^{(M)}(r, \omega)\ \sqrt{l(l+1)}\, Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{\omega}{c} \sum_{lm} \frac{\sqrt{l(l+1)}}{k}\ a_{lm}^{(M)}\ h_l^{(1)}(kr)\ Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

geschrieben werden kann, woraus sofort die Beziehung

$$E_{lm}^{(M)}(r, \omega) = a_{lm}^{(M)}\ h_l^{(1)}(kr) \tag{121}$$

folgt.

### Berechnung von $\vec{B}^{(M)}$

Das zu dem elektrischen Feld von Gleichung 119, welches mit Gleichung 121 auch in der Form

$$\vec{E}^{(M)}(\vec{r}, \omega) = \sum_{lm} a_{lm}^{(M)}\ h_l^{(1)}(kr)\ \vec{X}_{lm}(\vartheta, \varphi) \tag{122}$$

geschrieben werden kann, gehörige magnetische Feld $\vec{B}^{(M)}$ kann wieder am einfachsten aus der Maxwellgleichung 102d (im quellenfreien Gebiet)

$$\vec{B}^{(M)}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{i\,k}\ \vec{\nabla} \times \vec{E}^{(M)}(\vec{r}, \omega) \tag{123}$$

berechnet werden.

## VI.4.D. Berechnung der Strahlungsfelder

Durch Zusammenfassen der Gleichungen 116 und 123 bzw. 122 und 117 erhält man die Gesamtfelder

$$\vec{B}(\vec{r},\omega) = \sum_{lm}\left[a_{lm}^{(E)} - \frac{i}{k}\,a_{lm}^{(M)}\,\vec{\nabla}\times\right] h_l^{(1)}(kr)\,\vec{X}_{lm}(\vartheta,\varphi) \quad , \tag{124a}$$

$$\vec{E}(\vec{r},\omega) = \sum_{lm}\left[a_{lm}^{(M)} + \frac{i}{k}\,a_{lm}^{(E)}\,\vec{\nabla}\times\right] h_l^{(1)}(kr)\,\vec{X}_{lm}(\vartheta,\varphi) \quad . \tag{124b}$$

Für $r \to \infty$ kann das asymptotische Verhalten der sphärischen Hankelfunktion 1. Art verwendet werden (siehe Anhang A.3.4):

$$h_l^{(1)}(kr) = (-i)^{l+1}\,\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{kr} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad . \tag{125}$$

Verwenden wir noch die Darstellung

$$\vec{\nabla} = \frac{\vec{r}}{r}\underbrace{\left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{\nabla}\right)}_{\frac{\partial}{\partial r}} - \frac{i}{r^2}\,\vec{r}\times\vec{L} \quad , \tag{126}$$

welche direkt mittels der Definitionsgleichung des Vektoroperators $\vec{L}$ verifiziert werden kann, so können wir die Strahlungsfelder (alle Terme der Ordnung $\frac{1}{r}$) aus den Gleichungen 124a und 124b ausrechnen:

$$\vec{B}_s(\vec{r},\omega) = \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{kr}\sum_{lm}(-i)^{l+1}\left[a_{lm}^{(E)}\,\vec{X}_{lm}(\vartheta,\varphi) + a_{lm}^{(M)}\,\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{X}_{lm}(\vartheta,\varphi)\right] \quad , \tag{127a}$$

$$\vec{E}_s(\vec{r},\omega) = \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{kr}\sum_{lm}(-i)^{l+1}\left[a_{lm}^{(M)}\,\vec{X}_{lm}(\vartheta,\varphi) - a_{lm}^{(E)}\,\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{X}_{lm}(\vartheta,\varphi)\right] \quad . \tag{127b}$$

Die Strahlungsfelder weisen somit die bereits in Gleichung VI.39 angegebenen Eigenschaften

$$\vec{E}_s = \vec{B}_s\times\frac{\vec{r}}{r} \quad , \qquad \vec{r}\cdot\vec{E}_s = 0 \quad , \quad \vec{r}\cdot\vec{B}_s = 0 \tag{128}$$

auf, d.h. sie sind senkrecht zueinander und stehen senkrecht auf den Ortssvektor $\vec{r}$.

### Abstrahlungsleistung

Die Abstrahlungsleistung erhalten wir durch Berechnung der Energiestromdichte mittels der Strahlungsfelder

$$\begin{aligned}\vec{S}(\vec{r},t) &= \frac{c}{4\pi}\,\vec{E}_s(\vec{r},t)\times\vec{B}_s(\vec{r},t) \qquad (129)\\ &= \frac{c}{4\pi}\,\frac{1}{(2\pi)^2}\int \mathrm{d}\omega'\mathrm{d}\omega''\,\mathrm{e}^{-i(\omega'+\omega'')t}\,\vec{E}_s(\vec{r},\omega')\times\vec{B}_s(\vec{r},\omega'') \quad .\end{aligned}$$

Haben wir **periodische Quellen** entsprechend der Gleichung

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \frac{1}{2\pi}\,\vec{j}(\vec{r},\omega)\,\mathrm{e}^{-i\omega t} \;+\; c.c. \tag{130}$$

vorliegen, so weisen die Strahlungsfelder eine analoge Zeitabhängigkeit auf

$$\vec{B}_s(\vec{r},t) = \frac{1}{2\pi}\,\vec{B}_s(\vec{r},\omega)\,\mathrm{e}^{-i\omega t} \;+\; c.c. \tag{131}$$

und wir erhalten für die zeitlich gemittelte Abstrahlungsleistung den Ausdruck

$$\langle\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}\rangle = \frac{c}{2\pi\,k^2}\,\frac{1}{(2\pi)^2}\,\left|\sum_{lm}(-i)^{l+1}\,\left[a_{lm}^{(E)}\,\vec{X}_{lm}(\vartheta,\varphi) \;+\; a_{lm}^{(M)}\,\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{X}_{lm}(\vartheta,\varphi)\right]\right|^2 \quad . \tag{132}$$

Wegen der Orthonormierung der vektoriellen Kugelflächenfunktionen

$$\int \mathrm{d}\Omega\;\vec{X}^*_{lm}(\vartheta,\varphi)\cdot\vec{X}_{l'm'}(\vartheta,\varphi) \;=\; \delta_{ll'}\,\delta_{mm'} \quad , \tag{133a}$$

$$\int \mathrm{d}\Omega\;\vec{X}^*_{lm}(\vartheta,\varphi)\cdot\left[\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{X}_{l'm'}(\vartheta,\varphi)\right] \;=\; 0 \quad , \tag{133b}$$

kann das Zeitmittel der gesamten abgestrahlten Leistung leicht ausgerechnet werden

$$\langle P\rangle = \frac{c}{8\pi\,k^2}\,\frac{1}{(2\pi)^2}\,\sum_{lm}\left(\left|2\,a_{lm}^{(E)}\right|^2 \;+\; \left|2\,a_{lm}^{(M)}\right|^2\right) \quad . \tag{134}$$

**Winkelverteilung der abgestrahlten Leistung für ein Multipolmoment**

Für ein Multipolmoment der Ordnung $lm$ ist die Winkelverteilung der abgestrahlten Leistung durch den Ausdruck

$$\langle\frac{\mathrm{d}P_{lm}}{\mathrm{d}\Omega}\rangle = \frac{c}{8\pi\,k^2}\,\frac{1}{(2\pi)^2}\,\left|2\,a_{lm}\right|^2\,\left|\vec{X}_{lm}(\vartheta,\varphi)\right|^2 \tag{135}$$

gegeben. Diese Winkelverteilung ist für die elektrische und die magnetische Multipolstrahlung gleich. Die Unterscheidung zwischen elektrischer und magnetischer Multipolstrahlung erfolgt durch die Betrachtung der Polarisation der Strahlung.

Für die niedrigsten Multipolmomente ergeben sich die folgenden Winkelverteilungen:

| $\lvert\vec{X}_{lm}\rvert^2$ : | $m=0$ | $m=\pm1$ | $m=\pm2$ |
|---|---|---|---|
| $l=1$ | $\frac{3}{8\pi}\sin^2\vartheta$ | $\frac{3}{16\pi}\,(1+\cos^2\vartheta)$ | |
| $l=2$ | $\frac{15}{8\pi}\sin^2\vartheta\,\cos^2\vartheta$ | $\frac{5}{16\pi}\,(1-3\cos^2\vartheta+4\cos^4\vartheta)$ | $\frac{5}{16\pi}\,(1-\cos^4\vartheta)$ |

Es gilt

$$\sum_{m=-l}^{+l}\left|\vec{X}_{lm}(\vartheta,\varphi)\right|^2 = \frac{2l+1}{4\pi} \quad ,$$

d.h. bei einer Mittelung über alle zu einem festen Wert von $l$ gehörigen Multipolfelder ergibt sich ein richtungsunabhängiger Wert.

## VI.4.E. Multipolkoeffizienten

Der in Gleichung 111a definierte magnetische Multipolkoeffizient

$$a_{lm}^{(M)}(\omega) := -\frac{k}{\sqrt{l(l+1)}}\,\frac{4\pi\,k}{c}\int d^3r\;\; j_l(kr)\,Y_{lm}^*(\vartheta,\varphi)\,\vec{L}\cdot\vec{j}(\vec{r},\omega) \quad , \tag{136}$$

kann unter Verwendung der Beziehung

$$\vec{L}\cdot\vec{j} = -i\,(\vec{r}\times\vec{\nabla})\cdot\vec{j} = i\,(\vec{\nabla}\times\vec{r})\cdot\vec{j} = i\,\vec{\nabla}\cdot(\vec{r}\times\vec{j}) \tag{137}$$

folgendermaßen geschrieben werden:

$$a_{lm}^{(M)}(\omega) = -i\,\frac{4\pi\,k^2}{\sqrt{l(l+1)}}\,\frac{1}{c}\int d^3r\;\; j_l(kr)\,Y_{lm}^*(\vartheta,\varphi)\,\vec{\nabla}\cdot(\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r},\omega)) \quad . \tag{138}$$

Etwas aufwendiger ist die Umformung des in Gleichung 111b definierten elektrischen Multipolkoeffizienten

$$a_{lm}^{(E)}(\omega) := \frac{k}{\sqrt{l(l+1)}}\,\frac{4\pi\,i}{c}\int d^3r\;\; j_l(kr)\,Y_{lm}^*(\vartheta,\varphi)\,\vec{L}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{j}(\vec{r},\omega) \quad . \tag{139}$$

Die Verwendung der Definitionsgleichung des Vektoroperators $\vec{L}$ sowie der Kontinuitätsgleichung 100 ergibt

$$\begin{aligned}
\vec{L}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{j} &= -i(\vec{r}\times\vec{\nabla})\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{j}) = -i\vec{r}\cdot\Big(\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{j})\Big) = -i\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}) + i\vec{r}\cdot\triangle\vec{j} \\
&= -i\underbrace{\vec{r}\cdot\vec{\nabla}}_{\vec{\nabla}\cdot\vec{r}\,-\,3}(\mathrm{div}\,\vec{j}) + i\triangle(\vec{r}\cdot\vec{j}) - 2i\,\mathrm{div}\,\vec{j} = \vec{\nabla}\cdot\vec{r}\,\omega\varrho - \omega\varrho + i\triangle(\vec{r}\cdot\vec{j}) \quad ,
\end{aligned}$$

sodaß die Gleichung 139 mittels des Gaußschen Integralsatzes unter Berücksichtigung des Verschwindens aller Oberflächenintegrale in der Form

$$\begin{aligned}
a_{lm}^{(E)}(\omega) &= i\,\frac{4\pi\,k^2}{\sqrt{l(l+1)}}\int d^3r\;\; j_l(kr)\,Y_{lm}^*(\vartheta,\varphi)\,\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{r}\,\varrho(\vec{r},\omega) - \varrho(\vec{r},\omega) + \frac{i}{\omega}\triangle\,(\vec{r}\cdot\vec{j}(\vec{r},\omega))\right] \\
&= -i\,\frac{4\pi\,k^2}{\sqrt{l(l+1)}}\int d^3r\,\left[\varrho(\vec{r},\omega)\,\underbrace{\vec{r}\cdot\vec{\nabla}}_{r\,\frac{\partial}{\partial r}} + \varrho(\vec{r},\omega) - \frac{i}{\omega}\,\vec{r}\cdot\vec{j}(\vec{r},\omega)\,\triangle\right] j_l(kr)\,Y_{lm}^*(\vartheta,\varphi)
\end{aligned} \tag{140}$$

geschrieben werden kann. Die Verwendung von

$$\triangle\, j_l\,Y_{lm} = -k^2\, j_l\,Y_{lm} \quad , \qquad \frac{\partial}{\partial r} r\, j_l = r\,\frac{\partial}{\partial r}\,j_l + j_l$$

ergibt nun die folgende Gleichung für den elektrischen Multipolkoeffizienten

$$a_{lm}^{(E)}(\omega) = -i\,\frac{4\pi\,k^2}{\sqrt{l(l+1)}}\int d^3r\;\; Y_{lm}^*(\vartheta,\varphi)\,\left[\varrho(\vec{r},\omega)\,\frac{\partial}{\partial r}\,r\,j_l(kr) + \frac{i\,k}{c}\,j_l(kr)\,\vec{r}\cdot\vec{j}(\vec{r},\omega)\right] \quad . \tag{141}$$

**Näherungsentwicklung: Quellenausdehnung $\ll$ Wellenlänge**

In diesem Fall gilt für den die Quellen umfassenden Integrationsbereich

$$k\, r = 2\pi \, \frac{r}{\lambda} \ll 1 \tag{142}$$

und wir können die sphärischen Besselfunktionen $j_l$ durch den ersten Term ihrer Taylorreihenentwicklung (siehe Anhang A.3.4)

$$j_l(x) = \frac{1}{(2l+1)!!}\, x^l \; + \; \mathcal{O}\left(x^{l+1}\right) \tag{143}$$

approximieren. Hiemit ergibt sich aus Gleichung 141

$$a^{(E)}_{lm}(\omega) = -i\, \frac{4\pi\, k^{l+2}}{(2l+1)!!} \sqrt{\frac{l+1}{l}} \; \underbrace{\int \mathrm{d}^3 r \;\, r^l \; Y^*_{lm}(\vartheta,\varphi) \; \varrho(\vec{r},\omega)}_{q^*_{lm} \quad \text{(siehe Gl. III.35)}} + \mathcal{O}\left(k^{l+3}\right) \quad , \tag{144}$$

d.h. die elektrischen Multipolkoeffizienten sind direkt mit den sphärischen elektrischen Multipolmomenten (siehe Kap. III.2.B) verknüpft.

Analog ergibt sich bei den magnetischen Multipolkoeffizienten unter Verwendung von Gleichung 138 eine direkte Verknüpfung mit den sphärischen magnetischen Multipolmomenten (siehe Kap. IV.2.B):

$$a^{(M)}_{lm}(\omega) = i\, \frac{4\pi\, k^{l+2}}{(2l+1)!!} \sqrt{\frac{l+1}{l}} \; \underbrace{\frac{-1}{(l+1)\, c} \int \mathrm{d}^3 r \;\, r^l \; Y^*_{lm}(\vartheta,\varphi) \; \vec{\nabla} \cdot (\vec{r} \times \vec{\jmath}(\vec{r},\omega))}_{M^*_{lm} \quad \text{(siehe Gl. IV.33)}} + \mathcal{O}\left(k^{l+3}\right) \quad . \tag{145}$$