

ELEKTRODYNAMIK UND RELATIVITÄTSTHEORIE

Kapitel 5: Wellen im Vakuum

Vorlesung für Studenten der Technischen Physik

Helmut Nowotny

Technische Universität Wien

Institut für Theoretische Physik

7., von A. Rebhan korrigierte Auflage

Wien, Februar 2006

V. WELLEN IM VAKUUM

V.1. Ebene Wellen

V.1.A. Aperiodische ebene Wellen

Wir betrachten nun einen Raumbereich, in dem keine Quellen vorhanden sind:

$$\varrho(\vec{r}, t) = 0 \quad , \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = 0 \quad . \quad (1)$$

Das soll nicht heißen, daß nie und nirgends (d.h. für kein t und kein \vec{r}) Quellen vorhanden sind, denn dann gäbe es natürlich keine elektromagnetischen Felder. Wir interessieren uns vielmehr für die elektromagnetischen Felder außerhalb der Quellenbereiche.

Aus den in diesen Raumbereichen gültigen Maxwellgleichungen

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (2a)$$

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (2b)$$

ergeben sich durch Rotorbildung sofort die **Wellengleichungen**

$$\square \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad , \quad \square \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad . \quad (3)$$

Lösungen der Wellengleichung

Ist \vec{n} ein beliebiger Einheitsvektor, so erfüllt jede Funktion der Form

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_o f(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct) \quad (4)$$

die Wellengleichung 3, wie aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_o \vec{n}^2 f''(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct) \quad , \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_o c^2 f''(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct) \quad \text{zu ersehen ist.} \end{aligned}$$

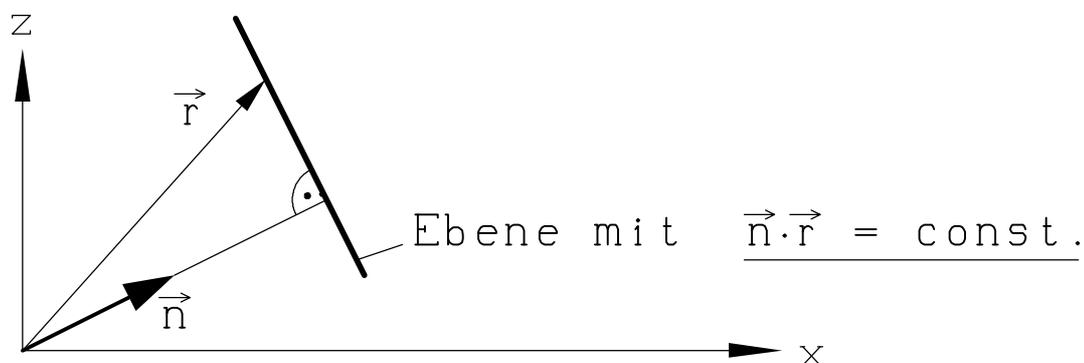


Fig. 5.1 Phasenebene einer ebenen Welle

Man bezeichnet $\vec{n} \cdot \vec{r} - ct$ als die Phase, welche jeweils auf den zu \vec{n} senkrechten Ebenen konstant ist (Darstellung einer Ebene in der *Hesseschen Normalform*). Jede solche Lösung der Wellengleichung wird daher als **ebene Welle** bezeichnet. Die Funktion f ist völlig beliebig, $f(\vec{n} \cdot \vec{r})$ gibt diese Funktion in Richtung von \vec{n} zur Zeit $t = 0$ an. Als Funktion der Zeit betrachtet bewegt sie sich mit der Geschwindigkeit c in der Ausbreitungsrichtung \vec{n} (da man hier die Ausbreitung von Ebenen konstanter Phase betrachtet spricht man auch von der **Phasengeschwindigkeit**).

Zur Erfüllung der Maxwellgleichung $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ muß die in Gl. 4 angegebene Lösung der Wellengleichung die Beziehung

$$\vec{n} \cdot \vec{E}_o = 0 \quad \text{erfüllen, d.h.} \quad \vec{E}_o \perp \vec{n} \quad . \quad (5)$$

Man bezeichnet daher diese Welle als **Transversalwelle**.

Bestimmt man das zum elektrischen Feld $\vec{E}(\vec{r}, t)$ von Gl. 4 gehörige Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}, t)$ (unter Verwendung der Maxwellgleichung für $\operatorname{rot} \vec{E}$), so erhält man

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \underbrace{(\vec{n} \times \vec{E}_o)}_{\vec{B}_o} f(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct) \quad , \quad (6)$$

d.h. $|\vec{B}_o| = |\vec{E}_o|$ und $\vec{n}, \vec{E}_o, \vec{B}_o$ bilden ein Rechtssystem von orthogonalen Vektoren. Man verwendet daher auch die Bezeichnung **TEM-Welle** (**T**ransversale **E**lektro-**M**agnetische Welle), da sowohl der Vektor des elektrischen Feldes als auch der Vektor des magnetischen Feldes senkrecht auf den Ausbreitungsvektor stehen.

V.1.B. Monochromatische ebene Wellen

Eine monochromatische ebene Welle liegt dann vor, wenn die Zeitabhängigkeit einer ebenen Welle die Form $\cos(\omega t + \varphi)$ aufweist. Die explizite Angabe erfolgt meistens in der Form

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{E}_o e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c. = \Re \vec{E}_o e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad , \quad (7a)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{B}_o e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c. = \Re \vec{B}_o e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad . \quad (7b)$$

Dies entspricht dem Vorhandensein einer einzigen Frequenz bei der Fourierzerlegung einer ebenen Welle. Die Vektoren \vec{E}_o und \vec{B}_o sind **komplexe Vektoren**, die entsprechend den fouriertransformierten Maxwellgleichungen II.27a bis II.27d die folgenden Gleichungen erfüllen müssen:

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_o = 0 \quad , \quad \vec{k} \times \vec{E}_o = \frac{\omega}{c} \vec{B}_o \quad , \quad (8a)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B}_o = 0 \quad , \quad \vec{k} \times \vec{B}_o = -\frac{\omega}{c} \vec{E}_o \quad . \quad (8b)$$

Damit die in den Gleichungen 7a und 7b angegebenen Wellenfelder Lösungen der Wellengleichung 3 sind, muß die **Dispersionsbeziehung**

$$\omega^2 = c^2 \vec{k}^2 \quad , \quad \text{d.h.} \quad \omega = c |\vec{k}| \quad (\text{für positives } \omega) \quad (9)$$

zwischen der **Kreisfrequenz** ω und dem **Wellenzahlvektor** (Wellenvektor) \vec{k} erfüllt sein.

V.2. Polarisation

V.2.A. Lineare, zirkulare, elliptische Polarisation

Betrachten wir eine monochromatische ebene Welle an einem festen Ortspunkt \vec{r} , so ändert sich der Vektor $\vec{E}(\vec{r}, t)$, welcher immer in einer Ebene senkrecht zu \vec{k} liegt, periodisch mit der Zeit (Periodendauer $T = 2\pi/\omega$) und beschreibt eine elliptische Umlaufbahn (elliptische Polarisation). Diese elliptische Umlaufbahn kann im Grenzfall zu einer Geraden (lineare Polarisation) bzw. einem Kreis (zirkulare Polarisation) entarten.

Führen wir zwei orthogonale Einheitsvektoren $\vec{e}_{(i)}$ ($i = 1, 2$) senkrecht zum Vektor \vec{k} ein

$$\vec{e}_{(i)} \cdot \vec{e}_{(j)} = \delta_{ij} \quad , \quad \vec{e}_{(i)} \cdot \vec{k} = 0 \quad , \quad \vec{e}_{(1)} \times \vec{e}_{(2)} = \frac{\vec{k}}{k} \quad , \quad (10)$$

so können wir Gleichung 7a in der Form

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left(E_{(1)} \vec{e}_{(1)} + E_{(2)} \vec{e}_{(2)} \right) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c. \quad (11)$$

schreiben, wobei die beiden Amplituden $E_{(1)}$ und $E_{(2)}$ durch

$$E_{(1)} = \vec{E}_o \cdot \vec{e}_{(1)} \quad , \quad E_{(2)} = \vec{E}_o \cdot \vec{e}_{(2)} \quad (12)$$

gegeben sind. Jede monochromatische ebene Welle kann daher immer als die Summe zweier linear polarisierter Wellen angegeben werden. Verwenden wir für die Angabe dieser zwei linear polarisierten Wellen jeweils den Betrag und die Phase der komplexen Größen $E_{(1)}$ und $E_{(2)}$

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2} \left(|E_{(1)}| e^{i\varphi_{(1)}} \vec{e}_{(1)} + |E_{(2)}| e^{i\varphi_{(2)}} \vec{e}_{(2)} \right) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c. \\ &= \frac{1}{2} \left(|E_{(1)}| \vec{e}_{(1)} + |E_{(2)}| e^{i(\varphi_{(2)} - \varphi_{(1)})} \vec{e}_{(2)} \right) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_{(1)})} + c.c. \quad , \quad (13) \end{aligned}$$

so sehen wir, daß zur Beschreibung der Polarisation nur die Absolutwerte dieser beiden linear polarisierten Wellen sowie ihre Phasendifferenz wesentlich sind.

Man kann ganz analoge Zerlegungen für das in Gl. 7b angegebene Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}, t)$ vornehmen. Wir betrachten aber vereinbarungsgemäß immer den Vektor der elektrischen Feldstärke, wenn wir Angaben über die Polarisation machen.

Beschreibung durch zirkular polarisierte Wellen

Unter Einführung der komplexen Einheitsvektoren

$$\vec{e}_{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\vec{e}_{(1)} + i \vec{e}_{(2)} \right) \quad , \quad \vec{e}_{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\vec{e}_{(1)} - i \vec{e}_{(2)} \right) \quad , \quad (14)$$

für die die Beziehungen

$$\vec{e}_{(\pm)}^* \cdot \vec{e}_{(\pm)} = 1 \quad , \quad \vec{e}_{(\pm)}^* \cdot \vec{e}_{(\mp)} = 0 \quad , \quad \vec{e}_{(\pm)} \cdot \vec{k} = 0 \quad (15)$$

gelten, können wir Gleichung 7a auch immer in der Form

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left(E_{(+)} \vec{e}_{(+)} + E_{(-)} \vec{e}_{(-)} \right) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c. \quad (16)$$

schreiben, d.h. als Summe zweier gegenläufig zirkular polarisierter Wellen. Die zugehörigen Amplituden $E_{(+)}$ und $E_{(-)}$ sind analog zu Gl. 12 nun durch

$$E_{(+)} = \vec{E}_o \cdot \vec{e}_{(+)}^* \quad , \quad E_{(-)} = \vec{E}_o \cdot \vec{e}_{(-)}^* \quad (17)$$

gegeben. Die Verknüpfung zwischen den linear polarisierten Komponenten $E_{(1)}$, $E_{(2)}$ und den zirkular polarisierten Komponenten $E_{(+)}$, $E_{(-)}$ lautet

$$E_{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(E_{(1)} - i E_{(2)} \right) \quad , \quad E_{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(E_{(1)} + i E_{(2)} \right) \quad , \quad (18a)$$

bzw.
$$E_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(E_{(+)} + E_{(-)} \right) \quad , \quad E_{(2)} = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(E_{(+)} - E_{(-)} \right) \quad . \quad (18b)$$

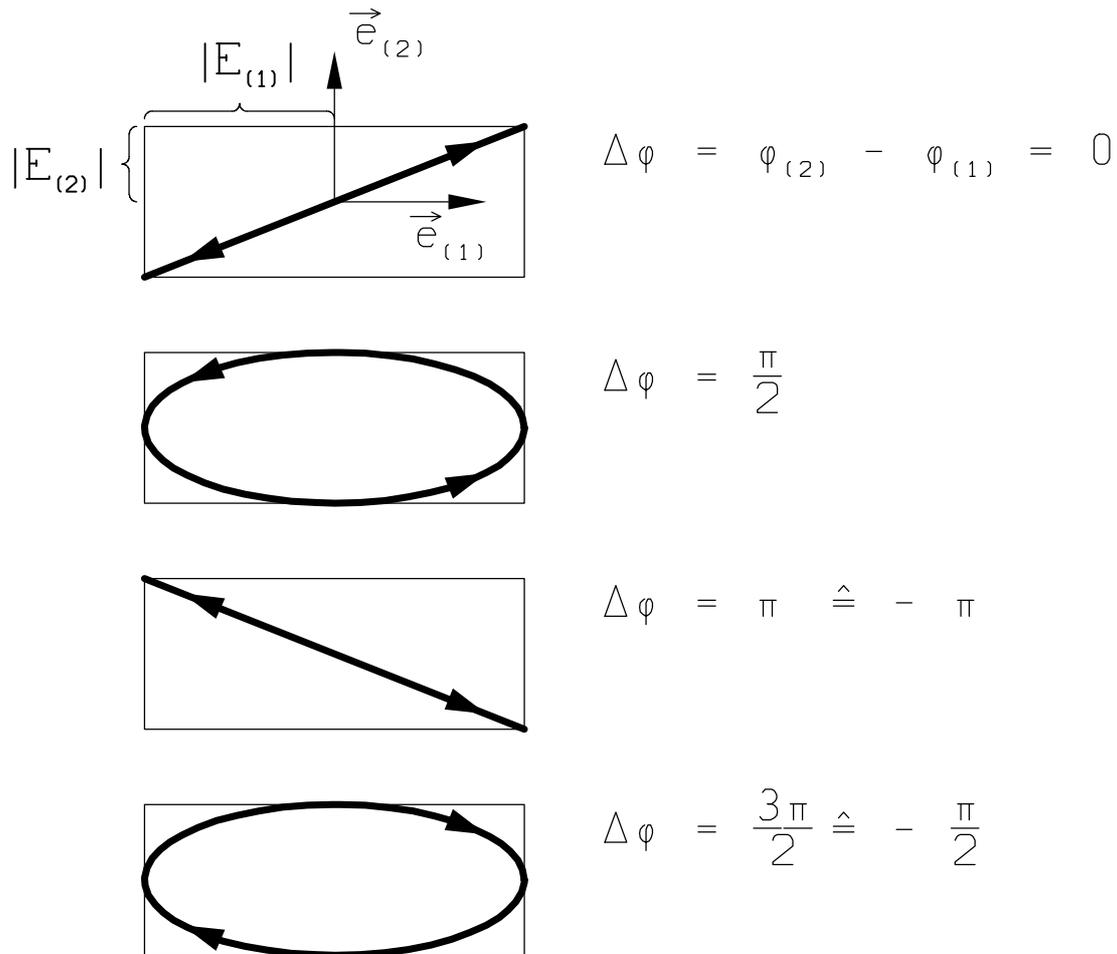


Fig. 5.2 Zusammenhang zwischen Polarisation und Phasenverschiebung

Zirkular polarisierte Welle zu $\vec{e}_{(+)}$

Betrachten wir die zum Vektor $\vec{e}_{(+)}$ gehörige Welle (mit $E_{(+)} = 1$)

$$\begin{aligned}\vec{E}_{(+)}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_{(1)} + i \vec{e}_{(2)}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_{(1)} - i \vec{e}_{(2)}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_{(1)} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) - \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_{(2)} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\end{aligned}\quad (19)$$

genauer, so sehen wir, daß sich bei dieser Welle der Vektor des elektrischen Feldes beim Blick auf den entgegenkommenden Strahl im Gegenuhrzeigersinn bewegt. Man bezeichnet diese Welle als **linkszirkular polarisiert**. Die Projektion des Drehimpulses auf die Bewegungsrichtung ist in diesem Falle positiv und man spricht daher auch von einer zirkularen Welle mit **positiver Helizität**.

V.2.B. Graphische Darstellung der Polarisation

Stellt man die zeitliche Änderung des Vektors $\vec{E}(\vec{r}, t)$ in der von den Vektoren $\vec{e}_{(1)}$ und $\vec{e}_{(2)}$ aufgespannten Ebene dar, so erhält man eine graphische Darstellung der Polarisation der Welle (siehe Fig. 5.2).

Ist $E_{(1)}$ oder $E_{(2)}$ Null, so liegt auf jeden Fall eine linear polarisierte Welle vor. Sind sowohl $E_{(1)}$ als auch $E_{(2)}$ von Null verschieden, so ergeben sich nur für die beiden Fälle $\varphi_{(2)} - \varphi_{(1)} = 0$ und $\varphi_{(2)} - \varphi_{(1)} = \pm\pi$ linear polarisierte Wellen, deren Schwingungsrichtung durch die Absolutwerte von $E_{(1)}$ und $E_{(2)}$ bestimmt ist.

In allen anderen Fällen liegt eine elliptisch polarisierte Welle vor, wobei nur für eine Phasenverschiebung $\varphi_{(2)} - \varphi_{(1)} = \pm\pi/2$ eine Hauptlage der Ellipse auftritt (Zusammenfallen der Hauptachsenrichtungen mit den Vektoren $\vec{e}_{(1)}$ und $\vec{e}_{(2)}$). Die beiden Phasenverschiebungen $+\pi/2$ und $-\pi/2$ ergeben hierbei eine verschiedene Umlaufrichtung. Für eine zirkular polarisierte Welle muß noch zusätzlich $|E_{(1)}| = |E_{(2)}|$ gelten.

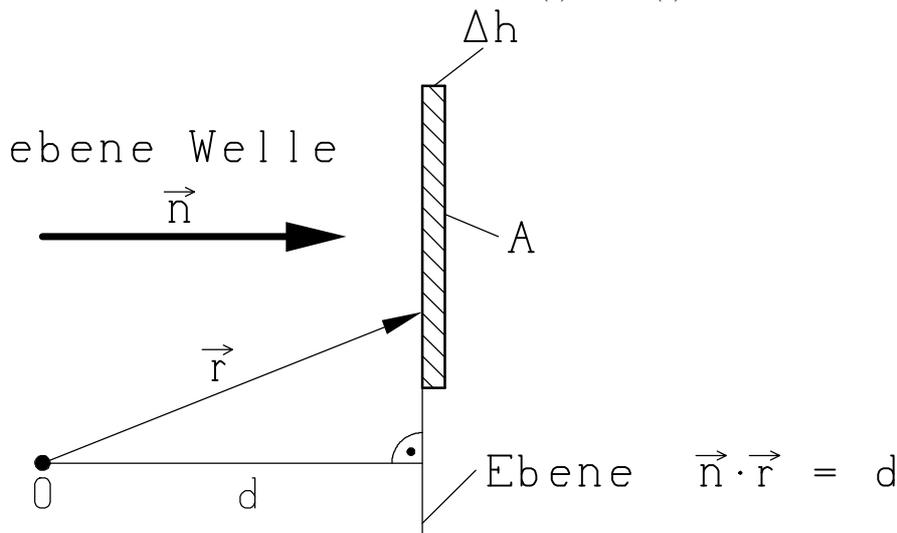


Fig. 5.3 Dünnes ebenes Absorberplättchen der Fläche A und Dicke $\Delta h (\rightarrow 0)$

V.3. Energie und Impuls von ebenen Wellen

V.3.A. Poyntingvektor und Energiedichte

Poyntingvektor

Den Poyntingvektor

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{c}{4\pi} \left(\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right) \quad (20)$$

(siehe Gl. II.45) können wir für eine **monochromatische ebene Welle** unter Verwendung der in den Gleichungen 7a und 7b angegebenen Darstellung des elektrischen und des magnetischen Feldes leicht ausrechnen. Verwenden wir die Beziehung

$$(a+c.c.) (b+c.c.) = (a+a^*) (b+b^*) = a b^* + a b + a^* b + a^* b^* = (a b^* + a b) + c.c. \quad , \quad (21)$$

um auch ein reelles Produkt, wie es der Poyntingvektor ist, in der Form komplexe Größe plus konjugiert komplexe Größe darzustellen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{S}(\vec{r}, t) &= \frac{c}{4\pi} \frac{1}{4} \left(\vec{E}_o \times \vec{B}_o^* + \vec{E}_o \times \vec{B}_o e^{2i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \right) + c.c. \\ &= \vec{n} \frac{c}{4\pi} \frac{1}{4} \left(|\vec{E}_o|^2 + \vec{E}_o^2 e^{2i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \right) + c.c. \quad . \end{aligned} \quad (22)$$

Energiedichte

Berechnen wir entsprechend Gleichung II.46

$$w_{em}(\vec{r}, t) = \frac{1}{8\pi} \left(\vec{E}(\vec{r}, t)^2 + \vec{B}(\vec{r}, t)^2 \right) \quad (23)$$

die elektromagnetische Energiedichte einer monochromatischen ebenen Welle, so erhalten wir

$$w_{em}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{4} \left(|\vec{E}_o|^2 + \vec{E}_o^2 e^{2i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \right) + c.c. \quad . \quad (24)$$

Wir können somit für den Vektor \vec{S} der Energiestromdichte auch

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{n} c w_{em}(\vec{r}, t) \quad (25)$$

schreiben, d.h. die elektromagnetische Feldenergie bewegt sich mit der Geschwindigkeit c (Lichtgeschwindigkeit) in Richtung von \vec{n} (diese Richtung stimmt mit der Richtung des Wellenzahlvektors \vec{k} überein). Unter Verwendung der Gl. 4, 5 und 6 kann man zeigen, daß die in Gl. 25 angegebene Beziehung zwischen Energiestromdichte und elektromagnetischer Energiedichte ganz allgemein für ebene Wellen gilt.

V.3.B. Maxwellscher Spannungstensor und Impulsdichte

Haben wir eine absorbierende Fläche der Größe A vorliegen, die wir senkrecht zu einer auftreffenden ebenen Welle halten (siehe Fig. 5.3), so können wir mittels des Maxwellschen Spannungstensors (siehe Gl. II.52)

$$\overleftrightarrow{\mathbf{T}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \left(\vec{E}(\vec{r}, t) \circ \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{B}(\vec{r}, t) \circ \vec{B}(\vec{r}, t) \right) - \frac{1}{8\pi} \overleftrightarrow{\mathbf{1}} \left(\vec{E}(\vec{r}, t)^2 + \vec{B}(\vec{r}, t)^2 \right) \quad (26)$$

aus dem Impulserhaltungssatz der Elektrodynamik die auf dieses Plättchen einwirkende Kraft berechnen. Wenden wir den Impulserhaltungssatz, wie er in Gl. II.54 angegeben ist,

$$\vec{F}^{mech}(t) = \frac{d}{dt} \vec{P}^{mech}(t) = \int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}}(\vec{r}, t) - \frac{d}{dt} \int_V d^3r \vec{g}_{em}(\vec{r}, t) \quad , \quad (27)$$

auf ein das Plättchen direkt umschließendes Volumen an, so verschwindet das Volumsintegral über die Impulsdichte \vec{g}_{em} (weil das Volumen beliebig klein gemacht werden kann) und von dem Oberflächenintegral verbleibt nur der Beitrag jener Flächenseite, auf den die Welle auftrifft (bei einem absorbierenden Plättchen gibt es auf der Rückseite keine elektromagnetischen Felder mehr):

$$\vec{F}^{mech}(t) = \oint d^2f \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}}(\vec{r}, t) = -A T_{nn} \vec{n} \quad . \quad (28)$$

Die Komponente T_{nn} des Maxwell'schen Spannungstensors, wobei die Indizes n die Ausbreitungsrichtung \vec{n} der ebenen Welle kennzeichnen, ergibt sich unter Berücksichtigung der Transversalität der ebenen Welle, d.h. mit $E_n = 0$ und $B_n = 0$, direkt zu

$$T_{nn} = \frac{1}{4\pi} (E_n E_n + B_n B_n) - \frac{1}{8\pi} \left(\vec{E}(\vec{r}, t)^2 + \vec{B}(\vec{r}, t)^2 \right) = -w_{em}(\vec{r}, t) \quad , \quad (29)$$

so daß wir Gl. 28 in der Form

$$\vec{F}^{mech}(t) = A w_{em}(\vec{r}, t) \vec{n} \quad \text{für} \quad \vec{n} \cdot \vec{r} = d$$

bzw. unter Verwendung der Impulsdichte (siehe Gl. II.53)

$$\vec{g}_{em}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi c} \left(\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right) = \frac{1}{c^2} \vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} w_{em}(\vec{r}, t) \vec{n} \quad (30)$$

in der allgemeinen Form

$$\vec{F}^{mech}(t) = \frac{d}{dt} \vec{P}^{mech} = A c \vec{g}(\vec{r}, t) \quad \text{für} \quad \vec{n} \cdot \vec{r} = d \quad (31)$$

schreiben können.

Zeitabhängigkeit

Wenn wir die Zeitabhängigkeit der obigen Größen für eine bestimmte monochromatische Welle näher betrachten wollen, so genügt hierfür die Berechnung der Zeitabhängigkeit der Energiestromdichte $\vec{S}(\vec{r}, t)$. Die Auswertung von Gl. 22 für eine **linear polarisierte Welle** (Gleichung 11 mit $E_{(2)} = 0$) ergibt

$$\vec{S}_{(1)}(\vec{r}, t) = \vec{n} \frac{c}{4\pi} |E_{(1)}|^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_{(1)}) \quad , \quad (32)$$

also einen um einen Mittelwert periodisch (mit der doppelten Frequenz der monochromatischen Welle) schwankenden Wert, während sich für eine **zirkular polarisierte Welle** (Gleichung 16 mit $E_{(-)} = 0$) der zeitunabhängige Wert

$$\vec{S}_{(+)}(\vec{r}, t) = \vec{n} \frac{c}{4\pi} \frac{1}{2} |E_{(+)}|^2 \quad (33)$$

ergibt.

V.4. Wellen in Hohlleitern

V.4.A. Randbedingungen für Hohlleiter

Wir betrachten nun Hohlleiter, welche sich geradlinig in einer Richtung erstrecken und senkrecht hierzu einen konstanten Querschnitt aufweisen, wobei metallische Leiter einen bestimmten geschlossenen Raumbereich abgrenzen. Beispiele für derartige Hohlleiter sind quaderförmige (Querschnitt rechteckig) oder zylinderförmige (Querschnitt kreisförmig) Metallblechbegrenzungen oder auch zwei koaxial ineinander angeordnete Metallzylinder mit verschiedenen Radien, sogenannte Koaxialkabel (der zu betrachtende Querschnitt ist in diesem Fall die von den beiden Kreisen begrenzte Kreisringfläche).

Kennzeichnen wir die Richtung des Hohlleiters durch den Einheitsvektor \vec{e}_l , so können wir jeden beliebigen Vektor \vec{a} eindeutig in eine Longitudinalkomponente \vec{a}_l und eine Transversalkomponente \vec{a}_t zerlegen:

$$\vec{a} = \vec{a}_l + \vec{a}_t = a_l \vec{e}_l + \vec{a}_t \quad , \quad (34a)$$

wobei

$$a_l = \vec{a} \cdot \vec{e}_l \quad , \quad \vec{a}_t = \vec{a} - a_l \vec{e}_l = \vec{e}_l \times (\vec{a} \times \vec{e}_l) \quad (34b)$$

gilt.

Wir werden im folgenden diese Komponenten mit den Indizes l (longitudinal) und t (transversal) kennzeichnen, für spezielle Anwendungen aber dann als Longitudinalrichtung die z -Richtung wählen, so daß die Transversalkomponenten in der x - y -Ebene liegen.

Randbedingungen

Wie bereits erwähnt, sind die Begrenzungen der Hohlleiter durch metallische Oberflächen gegeben. Die Randbedingung für eine metallische Grenzfläche haben wir im Falle der Elektrostatik bereits im Kapitel III.1.C näher betrachtet. Die dort angestellte Überlegung, daß die Kraft auf die im Leiter frei beweglichen Ladungen auf der Grenzfläche nur eine Komponente senkrecht zur Leiteroberfläche besitzen darf (dieser Kraftwirkung können die Ladungen nicht folgen, da sie im Leiter zurückgehalten werden), gilt allgemein und führt unter Beachtung der Lorentzkraftdichte (siehe Gleichung II.7) sowie der Tatsache, daß

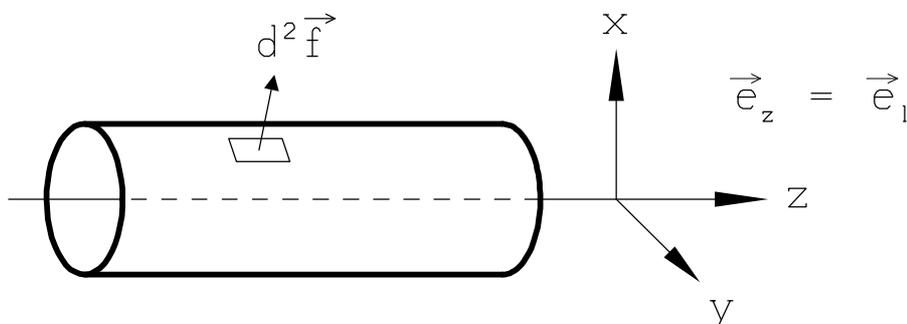


Fig. 5.4 Zylinderförmiger Hohlleiter

auf der Leiteroberfläche der Vektor der Stromdichte in dieser Fläche liegen muß, sofort zu den Randbedingungen

$$\vec{E}_{tg}(\vec{r}, t) = 0 \quad , \quad \vec{B}_{normal}(\vec{r}, t) = 0 \quad , \quad (\text{für } \vec{r} \text{ auf der Randfläche}) \quad (35a)$$

welche auch in der Form

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \times d^2\vec{f} = 0 \quad , \quad \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d^2\vec{f} = 0 \quad , \quad (\text{für } \vec{r} \text{ auf der Randfläche}) \quad (35b)$$

geschrieben werden können.

V.4.B. Zerlegung der Maxwellgleichungen

Nehmen wir die in Gl. 34a angegebene Zerlegung in Longitudinal- und Transversalkomponenten in den quellenfreien Maxwellgleichungen 2a und 2b vor (sowohl für die elektromagnetischen Felder $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{B}(\vec{r}, t)$ als auch für den Nablaoperator $\vec{\nabla}$), so erhalten wir die beiden folgenden Gruppen von Gleichungen:

$$\vec{\nabla}_t \vec{E}_t(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}_l \vec{E}_l(\vec{r}, t) \quad , \quad \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_l(\vec{r}, t) \quad , \quad (36a)$$

$$\vec{\nabla}_t \vec{B}_t(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}_l \vec{B}_l(\vec{r}, t) \quad , \quad \vec{\nabla}_t \times \vec{B}_t(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_l(\vec{r}, t) \quad , \quad (36b)$$

sowie

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_l(\vec{r}, t) + \vec{\nabla}_l \times \vec{E}_t(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_t(\vec{r}, t) \quad , \quad (37a)$$

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{B}_l(\vec{r}, t) + \vec{\nabla}_l \times \vec{B}_t(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_t(\vec{r}, t) \quad . \quad (37b)$$

Durch Rotorbildung können aus diesen Gleichungen sofort wieder die Wellengleichungen 3 hergeleitet werden:

$$\left(\Delta_t + \Delta_l - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad , \quad \left(\Delta_t + \Delta_l - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad . \quad (38)$$

Wir haben hiebei auch den Laplaceoperator in einen longitudinalen und einen transversalen Anteil aufgespalten. Für die Feldstärken \vec{E} und \vec{B} kann in den Wellengleichungen 38 entweder die longitudinale oder die transversale Komponente genommen werden.

Longitudinale Komponenten

Die longitudinalen Komponenten bestimmen wir unter Berücksichtigung der Randbedingungen (siehe Kapitel V.4.C. und V.4.D.) aus den Wellengleichungen

$$-\Delta_t E_l(\vec{r}, t) = \left(\Delta_l - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E_l(\vec{r}, t) \quad (38a)$$

bzw.

$$-\Delta_t B_l(\vec{r}, t) = \left(\Delta_l - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) B_l(\vec{r}, t) \quad . \quad (38b)$$

Transversale Komponenten

Für die transversalen Komponenten kann man die Wellengleichung so umformen, daß das Verhalten dieser Transversalkomponenten in Längsrichtung vollständig durch das Verhalten der Longitudinalkomponenten bestimmt wird. Wir schreiben hierzu Gl. 38 in der Form

$$\left(\Delta_l - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{E}_t(\vec{r}, t) = -\Delta_t \vec{E}_t(\vec{r}, t) \quad (39)$$

und drücken die rechte Seite dieser Gleichung durch Longitudinalkomponenten aus (unter Verwendung der Gleichungen 36a):

$$\Delta_t \vec{E}_t = \vec{\nabla}_t (\vec{\nabla}_t \vec{E}_t) - \vec{\nabla}_t \times (\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t) = -\vec{\nabla}_t (\vec{\nabla}_l \vec{E}_l) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla}_t \times \vec{B}_l) \quad (40)$$

Eine analoge Rechnung kann auch für die Tangentialkomponente des Magnetfeldes durchgeführt werden. Zusammenfassend können wir schreiben

$$\left(\Delta_l - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{E}_t(\vec{r}, t) = \vec{\nabla}_t (\vec{\nabla}_l \vec{E}_l(\vec{r}, t)) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla}_t \times \vec{B}_l(\vec{r}, t)) \quad (41a)$$

$$\left(\Delta_l - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{B}_t(\vec{r}, t) = \vec{\nabla}_t (\vec{\nabla}_l \vec{B}_l(\vec{r}, t)) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_l(\vec{r}, t)) \quad (41b)$$

Diese Gleichungen stellen Bestimmungsgleichungen für die transversalen Komponenten von \vec{E} und \vec{B} dar, wobei die Quellen durch die longitudinalen Komponenten E_l und B_l bestimmt sind. Wir können uns daher bei der Behandlung der Randwertprobleme **auf die longitudinalen Komponenten beschränken** und nach deren Bestimmung die transversalen Komponenten ausrechnen.

V.4.C. Transversale elektromagnetische Wellen (TEM Wellen)

Machen wir für elektromagnetische Wellen in Längsrichtung (z -Richtung) des Hohlleiters den Ansatz

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(x, y) e^{i(kz - \omega t)} + c.c. \quad (42a)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(x, y) e^{i(kz - \omega t)} + c.c. \quad (42b)$$

so lauten die Wellengleichungen 41a und 41b für die Transversalkomponenten

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \vec{E}_t(x, y) = ik \vec{\nabla}_t E_z(x, y) + i \frac{\omega}{c} \vec{\nabla}_t B_z(x, y) \times \vec{e}_z \quad (43a)$$

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \vec{B}_t(x, y) = ik \vec{\nabla}_t B_z(x, y) - i \frac{\omega}{c} \vec{\nabla}_t E_z(x, y) \times \vec{e}_z \quad (43b)$$

während die Wellengleichungen für die Longitudinalkomponenten zu den Differentialgleichungen

$$\Delta_t E_z(x, y) = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_z(x, y) \quad , \quad \Delta_t B_z(x, y) = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) B_z(x, y) \quad (44)$$

führen. Für die Existenz von TEM-Wellen, bei denen sowohl der Vektor der elektrischen Feldstärke als auch der Vektor der magnetischen Feldstärke senkrecht zur Ausbreitungsrichtung (z -Richtung) stehen, d.h. für die

$$E_z(x, y) = 0 \quad , \quad B_z(x, y) = 0 \quad (45)$$

gelten soll, erfordern die Gleichungen 43a und 43b für das Nichtverschwinden von \vec{E}_t und \vec{B}_t die Gültigkeit von

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad , \quad \text{d.h.} \quad \omega = c k \quad . \quad (46)$$

Es ist dies genau die Dispersionsrelation 9 für monochromatische ebene Wellen (wobei der Wellenzahlvektor \vec{k} in z -Richtung zeigt). Die Wellengleichung für die transversalen Komponenten lautet somit

$$\Delta_t \vec{E}_t(x, y) = 0 \quad , \quad \Delta_t \vec{B}_t(x, y) = 0 \quad , \quad (47)$$

wobei der Laplaceoperator Δ_t durch $\Delta_t = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ gegeben ist.

Die Differentialgleichungen 47 müssen nun unter Berücksichtigung der Randbedingungen von Gl. 35a gelöst werden. Aus Gl. 36a folgt wegen Gl. 45 die Beziehung

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t(x, y) = 0 \quad ,$$

sodaß \vec{E}_t als Gradient eines Potentials $\phi(x, y)$ dargestellt werden kann

$$\vec{E}_t(x, y) = \vec{\nabla}_t \phi(x, y) \quad ,$$

welches die Gleichung

$$\Delta \phi(x, y) = 0$$

erfüllt (dies folgt aus der ersten Beziehung von Gl. 36a).

Die Randbedingung Gl. 35a erfordert, daß dieses Potential auf dem Rand konstant ist. Für einen einfach zusammenhängenden Bereich in der x - y -Ebene bedeutet aber nun die Vorgabe eines konstanten Potentials auf einer geschlossenen Kurve C (Verschwinden von \vec{E}_{tg} entlang der Kurve C), daß das Potential innerhalb von C konstant ist und die elektrische Feldstärke verschwindet. Dies bedeutet, daß **in Hohlleitern mit einem einfach zusammenhängenden Querschnitt keine TEM-Wellen auftreten können**. TEM-Wellen können nur in Hohlleitern mit einem mehrfach zusammenhängenden Querschnitt auftreten, wie dies z.B. bei Koaxialkabeln der Fall ist.

V.4.D. TM-Wellen und TE-Wellen

Wir wollen nun Lösungen der in den Gleichungen 42a und 42b angegebenen Form bestimmen, bei denen entweder nur der Vektor der magnetischen Feldstärke oder nur der Vektor der elektrischen Feldstärke senkrecht zum Ausbreitungsvektor steht. Man bezeichnet derartige Wellen als Transversal-Magnetische-Wellen (TM-Wellen), wenn B_z verschwindet, und als Transversal-Elektrische-Wellen (TE-Wellen), wenn E_z verschwindet.

TM-Wellen (Wellen vom E-Typ)

Bei diesen transversalen magnetischen Wellen gilt

$$B_z(x, y) \equiv 0 \quad , \quad (48)$$

während die nichtverschwindende Komponente $E_z(x, y)$ die Wellengleichung

$$-\Delta_t E_z(x, y) = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E_z(x, y) \quad (49)$$

unter Berücksichtigung der Randbedingung $E_z = 0$ am Rand erfüllen muß. Man spricht daher auch von Wellen vom E-Typ.

Die Berücksichtigung der Randbedingung führt auf ein zweidimensionales Eigenwertproblem (mit Dirichletschen Randbedingungen), welches ein diskretes Eigenwertspektrum mit zugehörigen Eigenfunktionen besitzt:

$$-\Delta_t E_z^{(n)}(x, y) = \lambda^{(n)2} E_z^{(n)}(x, y) \quad \text{mit} \quad \lambda^{(n)2} > 0 \quad . \quad (50)$$

Die TM-Wellen können nur diese diskreten Lösungen (Moden) annehmen, wobei die jeweils zugehörige Wellenzahl entsprechend Gleichung 49 durch

$$\lambda^{(n)2} = \frac{\omega^2}{c^2} - k^{(n)2} \quad \text{bzw.} \quad k^{(n)2} = \frac{\omega^2}{c^2} - \lambda^{(n)2} \quad (51)$$

gegeben ist. Für größer werdende Eigenwerte $\lambda^{(n)2}$ wird das Quadrat der zugehörigen Wellenzahl $k^{(n)2}$ immer kleiner, bis es schließlich negativ wird. Ein negativer Wert für das Quadrat der Wellenzahl entspricht aber ein imaginärer Wert der Wellenzahl, welcher gemäß Gleichung 42a bzw. 42b eine exponentiell abklingende Welle beschreibt, d.h. eine solche Welle kann sich nicht entlang des Hohlleiters fortpflanzen. Wir erhalten somit in Abhängigkeit von der Frequenz ω und den Hohlleiterquerschnittsabmessungen, welche die Eigenwerte $\lambda^{(n)2}$ festlegen, **immer nur eine endliche Anzahl von Moden, die auftreten können**. Man spricht hierbei von Moden des elektrischen Feldes (E-Moden) und charakterisiert diese Moden entsprechend der Kennzeichnung der Eigenwerte des Eigenwertproblems von Gl. 50 (es sind dies oft zwei Kennzahlen, wie sie bei einem Separationsansatz für ein zweidimensionales Eigenwertproblem auftreten).

Wenn die Frequenz hinreichend klein ist so kann die Zahl der möglichen Moden auch Null sein, d.h. bei zu kleinen Frequenzen gibt es keine TM-Wellen in einem Hohlleiter.

TE-Wellen (Wellen vom H-Typ)

Bei diesen transversalen elektrischen Wellen gilt

$$E_z(x, y) \equiv 0 \quad , \quad (52)$$

während die nichtverschwindende Komponente $B_z(x, y)$ die Wellengleichung

$$-\Delta_t B_z(x, y) = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) B_z(x, y) \quad (53)$$

unter Berücksichtigung der entsprechenden Randbedingung erfüllen muß. Man spricht daher nun von Wellen vom H-Typ (da beim Vorhandensein von Materialien die magnetische Feldstärke mit H bezeichnet wird).

Die Randbedingung für die magnetische Feldstärke B_z ist von der Randbedingung für die elektrische Feldstärke verschieden (siehe die Gleichungen 35a und 35b) und führt deshalb beim gleichen Hohlleiter auf ein anderes zweidimensionales Eigenwertproblem mit einem anderen diskreten Eigenwertspektrum:

$$-\Delta_t B_z^{(m)}(x, y) = \lambda^{(m)2} B_z^{(m)}(x, y) \quad \text{mit} \quad \lambda^{(m)2} > 0 \quad . \quad (54)$$

Die TE-Wellen können nun nur jeweils diese diskreten Moden annehmen, wobei die zugehörigen Wellenzahlen analog Gleichung 51 durch

$$k^{(m)2} = \frac{\omega^2}{c^2} - \lambda^{(m)2} \quad (55)$$

gegeben sind. Alle bei den TM-Wellen gemachten Aussagen gelten in analoger Übertragung auch für die TE-Wellen.

Randbedingung für B_z

Die in Gleichung 35b angegebene Randbedingung für das magnetische Feld \vec{B} können wir unter Verwendung der Gl. 43b in eine Randbedingung für die Funktion $B_z(x, y)$ umformen

$$d^2\vec{f} \cdot \vec{B} = d^2\vec{f} \cdot \vec{B}_t = d^2\vec{f} \cdot \frac{ik}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \vec{\nabla}_t B_z(x, y) = 0 \quad , \quad (56)$$

welche in der folgenden Form

$$\left(d^2\vec{f} \cdot \vec{\nabla}_t\right) B_z(x, y) = d^2f \frac{\partial}{\partial n} B_z(x, y) = 0 \quad \text{(für } x, y \text{ auf der Berandung)} \quad (57)$$

geschrieben werden kann und somit eine Neumannsche Randbedingung darstellt (die Normalenableitung ist normal zur Randkurve in der x - y -Ebene zu nehmen).