

ELEKTRODYNAMIK UND RELATIVITÄTSTHEORIE

Kapitel 4: Magnetostatik im Vakuum

Vorlesung für Studenten der Technischen Physik

Helmut Nowotny

Technische Universität Wien

Institut für Theoretische Physik

7., von A. Rebhan korrigierte Auflage

Wien, Februar 2006

IV. MAGNETOSTATIK IM VAKUUM

IV.1. Stationäre Ströme, Magnetostatik

IV.1.A. Magnetische Felder mit natürlichen Randbedingungen

Das magnetische Feld $\vec{B}(\vec{r})$ ist gemäß Gl. III.2 quellenfrei, d.h. es ist als Rotorfeld darstellbar:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) \quad . \quad (1)$$

Einsetzen in die zugehörige inhomogene Maxwellgleichung der Magnetostatik

$$\text{rot } \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r})$$

ergibt unter Verwendung der Coulomb-Eichung (die für magnetostatische Probleme mit der Lorenz-Eichung zusammenfällt)

$$\text{div } \vec{A}(\vec{r}) = 0 \quad (2)$$

die folgende Bestimmungsgleichung für das Vektorpotential \vec{A} :

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = - \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}) \quad . \quad (3)$$

Diese Vektorgleichung entspricht hinsichtlich ihrer einzelnen kartesischen Komponenten genau der Poisson-Gleichung III.4 und besitzt die zu Gl. III.5 analoge Lösung

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad , \quad (4)$$

welche wieder die natürlichen Randbedingungen erfüllt (hinreichend starkes Verschwinden im Unendlichen, wenn dort keine Quellen vorhanden sind).

Für spezielle Randwertprobleme ist zu dieser Lösung wieder eine entsprechende Lösung der homogenen Gleichung

$$\Delta \vec{A}_{hom}(\vec{r}) = 0 \quad (5)$$

hinzuzufügen.

Berechnung des magnetischen Feldes

Unter Verwendung der Gleichung

$$\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = - \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (6)$$

kann die zur Berechnung der magnetischen Feldstärke \vec{B} gemäß Gl. 1 notwendige Rotorbildung direkt am Integranden von Gleichung 4 durchgeführt werden:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad . \quad (7)$$

IV.1.B. Magnetisches Dipolmoment

Betrachten wir eine lokalisierte Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$ mit

$$\vec{j}(\vec{r}) = 0 \quad \text{für } |\vec{r}| > R \quad , \quad (8)$$

d.h. es ist nur innerhalb einer Kugel mit dem Radius R eine von Null verschiedene elektrische Stromdichte vorhanden, so ist für natürliche Randbedingungen das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ durch die Gleichung 4 gegeben. Setzen wir nun für die Berechnung dieses Vektorpotentials außerhalb dieser Kugel mit dem Radius R wieder die Reihenentwicklung von Gl. III.28b ein, so erhalten wir die Entwicklung

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c r} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') + \frac{1}{c r^3} \int d^3r' (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') + \dots \quad . \quad (9)$$

In der Magnetostatik lautet die Kontinuitätsgleichung

$$\text{div } \vec{j}(\vec{r}) = 0 \quad , \quad (10)$$

weshalb wir die folgenden Beziehungen herleiten können:

$$\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}') \vec{r}' = \vec{j}(\vec{r}') \quad (11a)$$

$$\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}') (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{r}' = (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') + (\vec{r} \cdot \vec{j}(\vec{r}')) \vec{r}' \quad (11b)$$

In diesen Gleichungen wirkt der angegebene Nablaoperator auf alle rechts von ihm stehenden Größen, d.h. er kann entsprechend dem Gaußschen Integralsatz zur Umwandlung eines Volumsintegrals in ein Oberflächenintegral verwendet werden. Betrachten wir z.B. die Volumsintegration über $\vec{j}(\vec{r}')$ beim ersten Term der rechten Seite von Gl. 9, so können wir für $\vec{j}(\vec{r}')$ die linke Seite von Gl. 11a verwenden, um diese Umwandlung in ein Oberflächenintegral durchzuführen. Liegt nun diese Oberfläche außerhalb der lokalisierten Stromdichteverteilung, so verschwindet dieses Oberflächenintegral wegen $\vec{j}(\vec{r}') = 0$ für \vec{r}' auf der Oberfläche. Somit gilt in der Magnetostatik immer

$$\int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') = 0 \quad . \quad (12)$$

Für die Umformung des beim zweiten Term von Gl. 9 auftretenden Integrals verwenden wir Gleichung 11b zusammen mit

$$\vec{r} \times (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')) = (\vec{r} \cdot \vec{j}(\vec{r}')) \vec{r}' - (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') \quad ,$$

woraus durch Subtraktion die Beziehung

$$(\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') = -\frac{1}{2} \vec{r} \times (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')) + \frac{1}{2} \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}') (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{r}' \quad (13)$$

gewonnen werden kann. Hiemit kann der zweite Term der rechten Seite von Gl. 9 als Summe zweier Integrale geschrieben werden, von denen eines in ein Oberflächenintegral umgewandelt werden kann, welches für eine lokalisierte Stromdichteverteilung bei einem hinreichend großen Integrationsvolumen wieder Null ergibt.

Somit folgt aus Gleichung 9 schließlich die Entwicklung

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\vec{r}}{2 c r^3} \times \int d^3r' (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')) + \dots \quad . \quad (14)$$

Magnetisches Moment

Definiert man das magnetische Moment \vec{m} entsprechend der Gleichung

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int d^3r' \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') \quad , \quad (15)$$

so ist das zugehörige Vektorpotential \vec{A} durch

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad (16)$$

gegeben, woraus durch Rotorbildung das magnetische Dipolfeld

$$\vec{B}_{dipol}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5} \quad (r > R) \quad (17)$$

folgt.

Dieses magnetische Dipolfeld entspricht genau dem elektrischen Dipolfeld, wie ein Vergleich mit Gl. III.31c zeigt.

Leiterschleife

Für eine ebene Leiterschleife (in sich geschlossener linienförmiger Strom I) ergibt sich aus Gleichung 15 der Ausdruck

$$\vec{m} = \frac{I}{2c} \oint \vec{r}' \times d\vec{r}' \quad , \quad (18a)$$

welcher mittels des Stokes'schen Integralsatzes (Gl. I.11b) sowie unter Verwendung der Gl. I.2 auch in der Form

$$\vec{m} = \frac{I}{c} \int_F d^2\vec{f} \quad (18b)$$

geschrieben werden kann. Hierbei ist die Form der Fläche F beliebig, sie muß nur von der Leiterschleife begrenzt sein. Eine derartige Leiterschleife besitzt also pro Flächeneinheit das magnetische Dipolmoment I/c .

IV.1.C. Mittelwert des magnetischen Feldes (Kugelbereich)

Analog der Mittelung der elektrischen Feldstärke (siehe Kap. III.2.C) betrachten wir nun ein beliebiges magnetostatisches Problem (mit natürlichen Randbedingungen) und berechnen an einer beliebigen Stelle den über eine Kugel mit dem Radius R gemittelten Wert der magnetischen Feldstärke $\vec{B}(\vec{r})$.

Wir legen hierzu unser Koordinatensystem wieder so, daß der Koordinatenursprung mit dem Mittelpunkt unserer Mittelungskugel zusammenfällt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle \vec{B} \rangle_R &= \frac{3}{4\pi R^3} \int_{r < R} d^3r \vec{B}(\vec{r}) = \frac{3}{4\pi R^3} \int_{r < R} d^3r \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \\ &= \frac{3}{4\pi R^3} \oint_{r=R} d^2\vec{f} \times \vec{A}(\vec{r}) = \frac{3}{4\pi R^3} \oint_{r=R} d^2\vec{f} \times \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad . \quad (19) \end{aligned}$$

Ändern wir wieder die Integrationsreihenfolge, so ergibt sich

$$\langle \vec{B} \rangle_R = -\frac{1}{c} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{3}{4\pi R^3} \oint_{r=R} d^2\vec{f} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad . \quad (20)$$

Der Wert des Oberflächenintegrals ist bereits in Gl. III.40 angegeben. Hiemit ergibt sich für den über einen Kugelbereich gemittelten Wert der magnetischen Feldstärke der Ausdruck

$$\langle \vec{B} \rangle_R = \frac{1}{c} \int_{r' > R} d^3r' \frac{\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')}{r'^3} + \frac{2}{R^3} \frac{1}{2c} \int_{r' < R} d^3r' \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') \quad . \quad (21)$$

Wir ersehen aus dieser Gleichung, daß die gemittelte Feldstärke wieder aus zwei Termen besteht, wobei der erste Term die magnetische Feldstärke im Kugelmittelpunkt angibt, welche von allen Stromdichten außerhalb unserer Mittelungskugel erzeugt wird, während der zweite Term proportional dem magnetischen Moment ist, welches von den innerhalb der Mittelungskugel vorhandenen Stromdichten erzeugt wird.

Befinden sich innerhalb der Mittelungskugel keine Stromdichten, so ist der Mittelwert der magnetischen Feldstärke unabhängig vom gewählten Radius R immer gleich dem Wert der Feldstärke im Kugelmittelpunkt.

Befinden sich außerhalb der Mittelungskugel keine Stromdichten, so ist der Mittelwert der magnetischen Feldstärke direkt proportional dem magnetischen Moment der gegebenen Stromdichteverteilung, wobei der Proportionalitätsfaktor umgekehrt proportional dem Volumen der Mittelungskugel ist.

IV.1.D. Vergleich: elektrischer und magnetischer Dipol

Ein elektrischer Dipol im mathematischen Sinne liegt dann vor, wenn eine Ladungsdichte bei einer Gesamtladung Null einen endlichen Wert \vec{p} des Dipolmomentes besitzt, während alle höheren Multipolmomente verschwinden (dies ist z.B. bei einem Modell aus zwei Punktladungen $+Q$ und $-Q$ mit einem Abstand \vec{a} im Grenzfall $|\vec{a}| \rightarrow 0$ der Fall, wenn hierbei $\vec{p} = Q \vec{a}$ festgehalten wird).

Trotzdem können wir für diesen im Koordinatenursprung liegenden mathematischen Dipol das in Gl. III.31c angegebene Dipolfeld

$$\vec{E}_{dipol}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$$

nicht uneingeschränkt verwenden, da dieses elektrische Feld nicht die Mittelungsgleichung III.41 erfüllt.

Wie man leicht nachrechnet, ist es zur Erfüllung der Mittelungsgleichung notwendig, einen sogenannten **Kontaktterm** im Koordinatenursprung hinzuzufügen:

$$\vec{E}_{dipol}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5} - \frac{4\pi}{3} \vec{p} \delta(\vec{r}) \quad . \quad (22)$$

Analog erfüllt das in Gl. 17 angegebene magnetische Dipolfeld

$$\vec{B}_{dipol}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$$

nicht die Mittelungsgleichung 21 und stellt somit nicht das vollständige Magnetfeld eines mathematischen magnetischen Dipols dar. Das die Mittelungsgleichung erfüllende magnetische Dipolfeld lautet vielmehr

$$\vec{B}_{dipol}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5} + \frac{8\pi}{3}\vec{m}\delta(\vec{r}) \quad . \quad (23)$$

Die Verschiedenheit der beiden Zusatzterme beim elektrischen bzw. beim magnetischen Dipolfeld drückt die Verschiedenheit der beiden Dipolfelder aus (Gradientenfeld bzw. Rotorfeld), wobei dieser Unterschied nur im Punkt $r = 0$ ersichtlich ist, da außerhalb des Koordinatenursprungs elektrisches und magnetisches Dipolfeld völlig identisch sind.

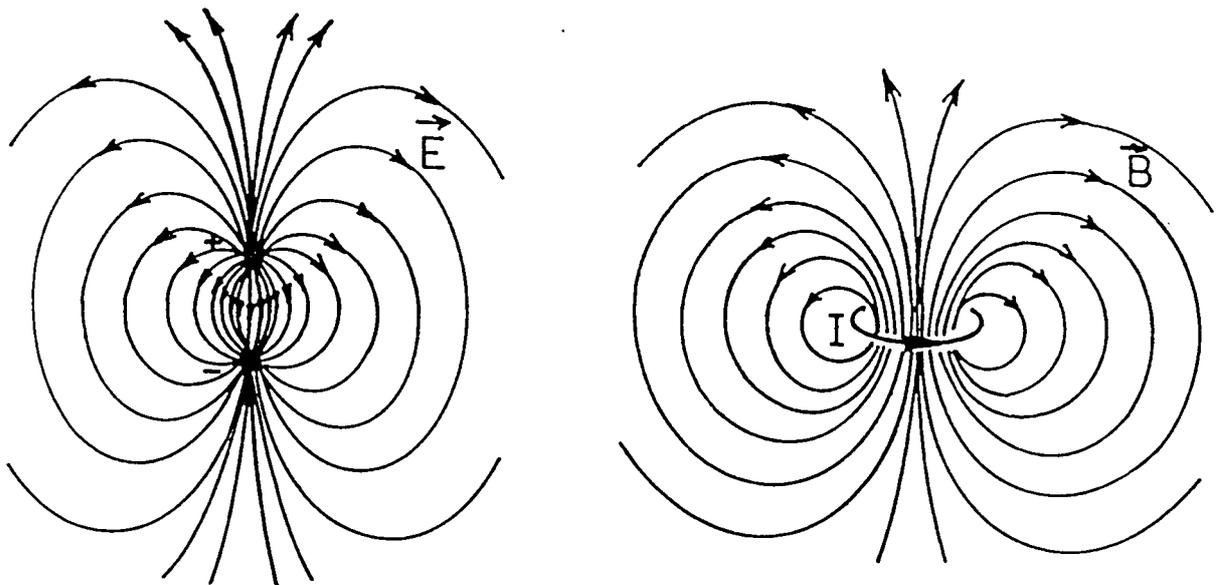


Fig. 4.1 Vergleich des Feldlinienverlaufes: elektrischer Dipol und magnetischer Dipol

IV.2. Magnetische Multipolentwicklung

IV.2.A. Skalares magnetisches Potential

Betrachten wir eine lokalisierte Stromdichteverteilung $\vec{j}(\vec{r})$ innerhalb einer Kugel mit dem Radius R (siehe Fig. 4.2), so gilt im Außenbereich

$$\text{rot } \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad \text{für} \quad |\vec{r}| > R \quad . \quad (24)$$

In diesem Bereich kann daher das magnetische Feld $\vec{B}(\vec{r})$ (in Analogie zum elektrischen Feld $\vec{E}(\vec{r})$) als Gradientenfeld eines skalaren magnetischen Potentials ϕ_M

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\text{grad } \phi_M(\vec{r}) \quad (\vec{r} \text{ außerhalb der Quellen}) \quad (25)$$

angegeben werden.

Bestimmung des skalaren magnetischen Potentials

Wegen der zweiten Maxwellgleichung $\text{div } \vec{B} = 0$ erfüllt das skalare magnetische Potential immer die homogene Poissongleichung (Laplacegleichung)

$$\Delta \phi_M(\vec{r}) = 0 \quad . \quad (26)$$

Aus dem analogen Problem der Elektrostatik wissen wir, daß die Kenntnis des Potentials oder der Normalableitung des Potentials auf einer geschlossenen Fläche zur eindeutigen Festlegung einer Lösung von Gl. 26 genügt. Nun gilt für eine Kugeloberfläche

$$\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = - (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \phi_M(\vec{r}) = r \frac{\partial \phi_M}{\partial n} \quad , \quad (27)$$

d.h. die Kenntnis von $\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r})$ auf einer Kugeloberfläche genügt für die Bestimmung des skalaren magnetischen Potentials und damit auch für die Bestimmung des Magnetfeldes $\vec{B}(\vec{r})$ im gesamten Außenraum.

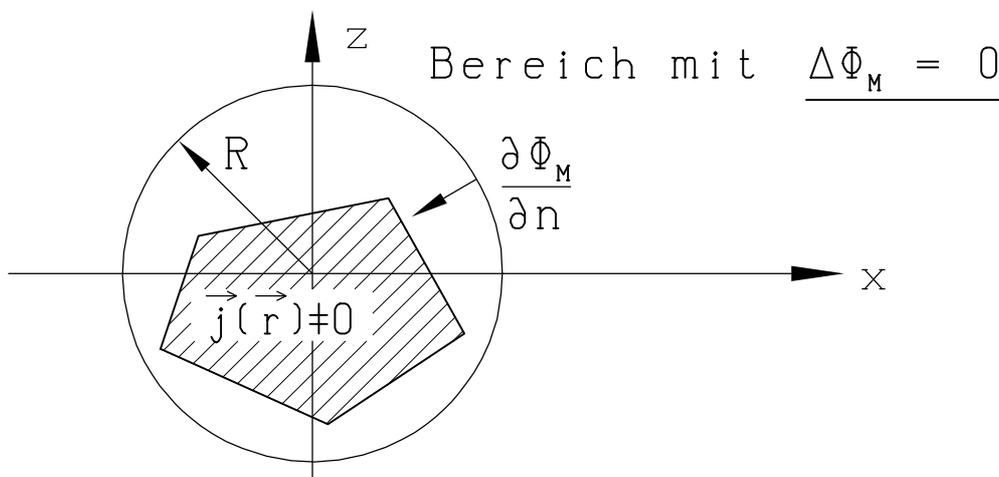


Fig. 4.2 Lokalisierte Stromdichteverteilung und skalares magnetisches Potential

Berechnung von $\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r})$

Unter Verwendung der Maxwellgleichungen III.2 kann die Beziehung

$$\Delta (\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r})) = \vec{r} \cdot \Delta \vec{B}(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{c} \vec{r} \cdot \text{rot } \vec{j}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) \quad (28)$$

hergeleitet werden. Diese Gleichung stellt eine Bestimmungsgleichung für die skalare Größe $\vec{r} \cdot \vec{B}$ dar und ist von der Form einer Poissongleichung mit bekanntem Quellterm. Wir können daher sofort die Lösung anschreiben:

$$\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = -\frac{1}{c} \int d^3r' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}' \cdot (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')) \quad (29)$$

IV.2.B. Sphärische magnetische Multipolmomente

Verwenden wir in Gleichung 29 für $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ wieder die Entwicklung von Gl. III.33 mit $r_> = r$ und $r_< = r'$

$$\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = -\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{r^{l+1}} \frac{1}{c} \int d^3r' r'^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') \vec{\nabla}' \cdot (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')) \quad (30)$$

und berücksichtigen

$$\frac{1}{r^{l+1}} = -r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^{l+1}} \frac{1}{l+1} = -(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{r^{l+1}} \frac{1}{l+1} \quad (31)$$

sowie Gleichung 27, so ergibt sich für das skalare magnetische Potential ϕ_M der Ausdruck

$$\phi_M = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{r^{l+1}} \frac{-1}{(l+1)c} \int d^3r' r'^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') \vec{\nabla}' \cdot (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')) \quad (32)$$

Die von der gegebenen Stromverteilung abhängigen Integrale bezeichnet man nun als die **sphärischen magnetischen Multipolmomente** M_{lm}^* :

$$M_{lm}^* = -\frac{1}{(l+1)c} \int d^3r' r'^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') \vec{\nabla}' \cdot (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')) \quad (33)$$

Umformung

Unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes kann der Nabla-Operator im Integranden verschoben werden, so daß er auf die Kugelflächenfunktionen wirkt:

$$M_{lm}^* = \frac{1}{(l+1)c} \int d^3r' (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')) \cdot \vec{\nabla}' (r'^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi')) \quad (34)$$

Hierbei wurde wieder das Verschwinden des Oberflächenintegrals verwendet, da für lokalisierte Stromquellen bei einem hinreichend großen Integrationsvolumen die Stromdichte auf der Oberfläche Null ist.

Zusammenhang kartesische–sphärische Multipolmomente

Unter Verwendung der im Anhang angegebenen expliziten Formeln für die Kugelflächenfunktionen ergibt sich der folgende Zusammenhang zwischen dem in Gl. 15 angegebenen kartesischen magnetischen Moment \vec{m} und den sphärischen Multipolmomenten entsprechend Gl. 34:

$$M_{11}^* = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (m_x - im_y) \quad , \quad M_{10}^* = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} m_z \quad .$$

IV.2.C. Vektorielle Kugelflächenfunktionen

Unter Einführung des Operators \vec{L}

$$\vec{L} = -i(\vec{r} \times \vec{\nabla}) \quad , \quad (35)$$

welcher bis auf den Faktor \hbar dem quantenmechanischen Drehimpulsoperator entspricht, können wir Gl. 34 in der Form

$$M_{lm}^* = -\frac{i}{(l+1)c} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{L}' (r'^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi')) \quad (36)$$

schreiben.

Beachten wir nun, daß der Vektoroperator \vec{L} keine Radialkomponente besitzt

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = 0 \quad (37a)$$

und als Differentialoperator bei Polarkoordinaten nur auf die beiden Winkelkoordinaten wirkt, wie z.B. aus der Gleichung

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \vec{L}^2 \quad (37b)$$

oder aus der Komponentendarstellung

$$\begin{aligned} L_x + iL_y &= e^{i\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} + i \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \\ L_x - iL_y &= e^{-i\varphi} \left[-\frac{\partial}{\partial \vartheta} + i \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \\ L_z &= -i \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (37c)$$

zu ersehen ist, so können wir mit der folgenden Definition der **vektoriellen Kugelflächenfunktionen** \vec{X}_{lm}

$$\vec{X}_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \vec{L} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (38)$$

Gleichung 36 in der Form

$$M_{lm}^* = i \sqrt{\frac{l}{l+1}} \frac{1}{c} \int d^3r' r'^l \vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{X}_{lm}^*(\vartheta', \varphi') \quad (39)$$

schreiben.

IV.3. Magnetostatische Energie

IV.3.A. Selbstenergie und Wechselwirkungsenergie

Aus der allgemeinen Formel II.46 für die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes erhalten wir bei magnetostatischen Problemen für die Gesamtenergie W im Volumen V den Ausdruck

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V d^3r \vec{B}(\vec{r})^2 \quad . \quad (40)$$

Unter Verwendung der Darstellung der magnetischen Feldstärke $\vec{B}(\vec{r})$ als Rotorfeld des Vektorpotentials $\vec{A}(\vec{r})$ (siehe Gl. 1) sowie der Maxwellgleichung III.2 kann diese Energiedichte auch in der Form

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi} \int_V d^3r \vec{B}(\vec{r}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})) \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot (\vec{A}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})) + \frac{1}{8\pi} \int_V d^3r \vec{A}(\vec{r}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r})) \\ &= \frac{1}{8\pi} \oint_F d^2\vec{f} \cdot (\vec{A}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})) + \frac{1}{2c} \int_V d^3r \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{j}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (41)$$

dargestellt werden.

Verwendet man für das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ die allgemeine Lösung zu natürlichen Randbedingungen (siehe Gl. 4), so kann die magnetostatische Feldenergie direkt mittels der Stromdichte \vec{j} ausgedrückt werden:

$$W = \frac{1}{2c^2} \iint d^3r d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad . \quad (42)$$

Aufteilung der Quellen

Teilen wir die gesamte Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ wieder in die Beiträge einzelner Komplexe auf

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sum_n \vec{j}_n(\vec{r}) \quad , \quad (43)$$

so ist wegen der Linearität der Maxwellgleichungen auch wieder eine entsprechende Aufteilung beim Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ möglich.

Die Berechnung der Feldenergie entsprechend Gl. 41 ergibt bei Verwendung dieser Aufteilungsgleichungen eine Doppelsumme über die betrachteten Einzelkomplexe, welche wieder in einen **Selbstenergiebeitrag** und einen **Wechselwirkungsenergiebeitrag** aufgespalten werden kann. Für natürliche Randbedingungen können diese beiden Beiträge zur magnetostatischen Feldenergie in der Form

$$W^{selbst} = \sum_n \frac{1}{2c^2} \iint d^3r d^3r' \frac{\vec{j}_n(\vec{r}') \cdot \vec{j}_n(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad , \quad (44a)$$

$$W^{ww} = \sum_{n < m} \frac{1}{c^2} \iint d^3r d^3r' \frac{\vec{j}_n(\vec{r}') \cdot \vec{j}_m(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (44b)$$

geschrieben werden.

IV.3.B. Induktionskoeffizienten

Wir betrachten eine feste Anordnung mehrerer linienförmiger Stromkreise, wobei im n -ten Stromkreis der Strom I_n fließen soll.

Da im Raum zwischen diesen linienförmigen Stromkreisen keine Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ vorhanden ist, vereinfacht sich entsprechend der für linienförmige Ströme gültigen Ersetzung

$$d^3r \vec{j}_n(\vec{r}) \longrightarrow I_n d\vec{r} \quad (45)$$

der in den Gl. 44a und 44b angegebene Ausdruck für die magnetostatische Energie zu

$$W = \frac{1}{2} \sum_{n,m} I_n I_m \underbrace{\frac{1}{c^2} \oint_{C_m} \oint_{C_n} \frac{d\vec{r}_n \cdot d\vec{r}_m}{|\vec{r}_n - \vec{r}_m|}}_{L_{mn}} \quad (46)$$

Die **Induktionskoeffizienten** L_{mn} hängen nur von den geometrischen Abmessungen der linearen Stromkreise und der gegenseitigen Anordnung ab. Bei der Berechnung der Induktionskoeffizienten

$$L_{mn} = \frac{1}{c^2} \oint_{C_m} \oint_{C_n} \frac{d\vec{r}_n \cdot d\vec{r}_m}{|\vec{r}_n - \vec{r}_m|} \quad (47)$$

ist entlang der einzelnen Stromkreisschleifen C_n zu integrieren. Wie aus Gl. 47 direkt zu ersehen ist gilt die Symmetrie $L_{mn} = L_{nm}$.

Man bezeichnet L_{nn} als **Selbstinduktionskoeffizienten** des n -ten Stromkreises und L_{nm} (für $n \neq m$) als **Gegeninduktionskoeffizienten** zwischen dem n -ten und dem m -ten Stromkreis.

Mittels dieser Induktionskoeffizienten kann die gesamte magnetostatische Energie dieser Stromkreisanordnung in der Form

$$W = \frac{1}{2} \sum_{nm} L_{nm} I_n I_m \quad (48)$$

geschrieben werden.

Gleichung 47 ist nur für die Berechnung von Gegeninduktionskoeffizienten ($m \neq n$) geeignet. Für die Berechnung der Selbstinduktionskoeffizienten ist die Energiegleichung 48 zu verwenden oder es ist die tatsächliche Querabmessung des Leiters zu berücksichtigen (die Ersetzung gemäß Gl. 45 ist in diesem Fall für die konkrete Berechnung nicht anwendbar).

Magnetischer Fluß durch eine Stromschleife

Die Induktionskoeffizienten L_{nm} können auch zur Berechnung des magnetischen Flußes Φ durch die n -te Stromschleife

$$\Phi_n = \int_{F_n} d^2\vec{f}_n \cdot \vec{B} = \int_{F_n} d^2\vec{f}_n \cdot \text{rot } \vec{A} = \oint_{C_n} d\vec{r}_n \cdot \vec{A} \quad (49)$$

verwendet werden bzw. umgekehrt können diese Koeffizienten auch aus einer Flußberechnung gewonnen werden. Die Verwendung der Gleichungen 4 und 45 ergibt aus Gl. 49

$$\frac{1}{c} \Phi_n = \sum_m I_m \underbrace{\frac{1}{c^2} \oint_{C_n} \oint_{C_m} \frac{d\vec{r}_n \cdot d\vec{r}_m}{|\vec{r}_n - \vec{r}_m|}}_{L_{nm}} = \sum_m L_{nm} I_m \quad , \quad (50)$$

also einen **linearen Zusammenhang** zwischen den **Strömen** der einzelnen Stromkreise und dem **magnetischen Fluß** durch eine einzelne Leiterschleife.

IV.3.C. Lokalisierte Stromverteilung in einem äußeren Feld

Wir betrachten eine um den Punkt \vec{R} lokalisierte Stromverteilung, deren Wert an der Stelle \vec{r} durch die Funktion $\vec{j}(\vec{r} - \vec{R})$ gegeben sei, die sich in einem äußeren Feld $\vec{B}(\vec{r})$ befindet. Wir haben somit wieder ein Wechselwirkungsproblem vorliegen, wobei die Wechselwirkungsenergie durch

$$W^{ww}(\vec{R}) = \frac{1}{c} \int d^3r \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{j}(\vec{r} - \vec{R}) \quad (51)$$

gegeben ist. Umformung entsprechend

$$W^{ww}(\vec{R}) = \frac{1}{c} \int d^3r \vec{A}(\vec{R} + \vec{r}) \cdot \vec{j}(\vec{r})$$

und Verwendung der Reihenentwicklung

$$\vec{A}(\vec{R} + \vec{r}) = \vec{A}(\vec{R}) + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_R) \vec{A}(\vec{R}) + \dots \quad (52)$$

ergibt nun

$$W^{ww}(\vec{R}) = \frac{1}{c} \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{R}) + \frac{1}{c} \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_R) \cdot \vec{A}(\vec{R}) + \dots$$

Das erste Integral verschwindet für stationäre Stromkreise (siehe Gl. 12). Das zweite Integral können wir unter Verwendung der Gl. 13, die wir auch in der Form

$$\vec{j}(\vec{r}) (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_R) = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) \times \vec{\nabla}_R + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r})) \vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_R) \quad (53)$$

schreiben können, in die Summe eines Volums- und eines Oberflächenintegrals zerlegen, wobei das Oberflächenintegral für eine lokalisierte Stromverteilung wieder verschwindet. Somit folgt weiters

$$\begin{aligned} W^{ww}(\vec{R}) &= \frac{1}{2c} \int d^3r [(\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) \times \vec{\nabla}_R] \cdot \vec{A}(\vec{R}) + \dots \\ &= \frac{1}{2c} \int d^3r (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) \cdot (\vec{\nabla}_R \times \vec{A}(\vec{R})) + \dots \end{aligned} \quad (54)$$

Das Integral über die lokalisierte Stromverteilung ergibt das magnetische Moment \vec{m} dieser Stromverteilung (siehe Gl. 15) und der Rotor des Vektorpotentials \vec{A} ergibt das äußere Magnetfeld \vec{B} an der Stelle \vec{R} . Wir erhalten somit die Entwicklung

$$W^{ww}(\vec{R}) = \vec{m} \cdot \vec{B}(\vec{R}) + \dots \quad (55)$$

IV.4. Kräfte in magnetischen Feldern

IV.4.A. Kraft auf eine lokalisierte Stromverteilung

Wir betrachten wieder eine um den Punkt \vec{R} lokalisierte Stromverteilung, deren Wert an der Stelle \vec{r} durch die Funktion $\vec{j}(\vec{r} - \vec{R})$ gegeben ist, die sich in einem äußeren Feld $\vec{B}(\vec{r})$ befindet. Die Kraftwirkung dieses äußeren Feldes auf die lokalisierte Stromverteilung ist gemäß Gl. II.50 durch

$$\vec{F}(\vec{R}) = \frac{1}{c} \int d^3r \vec{j}(\vec{r} - \vec{R}) \times \vec{B}(\vec{r}) \quad (56)$$

gegeben. Durch Umformung und Reihenentwicklung erhalten wir hieraus

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{R}) &= \frac{1}{c} \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{R} + \vec{r}) \\ &= \frac{1}{c} \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{R}) + \frac{1}{c} \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \times (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_R) \vec{B}(\vec{R}) + \dots \quad (57) \end{aligned}$$

Der erste Term verschwindet wieder auf Grund der in Gl. 12 angegebenen Beziehung.

Der zweite Term kann in der Form

$$\vec{F}(\vec{R}) = \frac{1}{c} \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_R) \times \vec{B}(\vec{R}) + \dots$$

geschrieben werden, so daß die Verwendung von Gl. 53 wieder zu einem Oberflächenintegral führt, welches für eine lokalisierte Stromverteilung verschwindet. Das verbleibende Volumsintegral liefert

$$\vec{F}(\vec{R}) = \left[\frac{1}{2c} \int d^3r \underbrace{(\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}))}_{\vec{m}} \times \vec{\nabla}_R \right] \times \vec{B}(\vec{R}) + \dots \quad (58)$$

Unter Berücksichtigung der Maxwellgleichung $\text{div } \vec{B} = 0$ folgt somit

$$\vec{F}(\vec{R}) = \vec{\nabla}_R (\vec{m} \cdot \vec{B}(\vec{R})) + \dots \quad (59)$$

Wie ein Vergleich mit dem Ausdruck für die magnetostatische Wechselwirkungsenergie von Gl. 55 zeigt, **ist diese Kraft nicht der negative Gradient der als Feldenergie gespeicherten Wechselwirkungsenergie.**

Berechnet man die Energie gemäß der Formel

$$W = - \int d\vec{s} \cdot \vec{F} \quad ,$$

so ergibt sich anstelle von Gleichung 55

$$W = -\vec{m} \cdot \vec{B} \quad \text{und es gilt} \quad \vec{F} = -\vec{\nabla}W \quad .$$

Das verschiedene Vorzeichen in den beiden Gleichungen für die Energie hat seine Ursache in der verschiedenen Berücksichtigung der Dynamik. Gleichung 55 gibt die magnetische Feldenergie für fest vorgegebene Ströme an. Auf Grund des Faradayschen Induktionsgesetzes wird aber nun bei Bewegung dieser Ströme in einem Magnetfeld eine elektrische Spannung induziert, d.h. die Ströme ändern sich und führen zu einem geänderten Energieausdruck.

Berechnung des Drehmomentes

Wir können die Kraftdichtegleichung II.7 auch dazu verwenden, das bezüglich des Zentrums \vec{R} der lokalisierten Stromverteilung angreifende Drehmoment \vec{N} zu berechnen. Aus der zugehörigen Definitionsgleichung

$$\vec{N}(\vec{R}) = \frac{1}{c} \int d^3r \vec{r} \times (\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{R} + \vec{r})) \quad (60)$$

folgt durch Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} \vec{N}(\vec{R}) &= \frac{1}{c} \int d^3r \vec{r} \times (\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{R})) + \dots \\ &= \frac{1}{c} \int d^3r (\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{R})) \vec{j}(\vec{r}) - \underbrace{\frac{1}{c} \int d^3r (\vec{r} \cdot \vec{j}(\vec{r})) \vec{B}(\vec{R})}_{0} + \dots \end{aligned}$$

und Umformung (siehe Gleichung 13)

$$(\vec{r} \cdot \vec{B}) \vec{j}(\vec{r}) = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) \times \vec{B} + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r})) (\vec{r} \cdot \vec{B}) \vec{r}$$

die Beziehung

$$\vec{N}(\vec{R}) = \vec{m} \times \vec{B}(\vec{R}) + \dots \quad (61)$$

IV.4.B. Bewegung eines geladenen Teilchens

Für ein gegebenes magnetostatisches Feld $\vec{B}(\vec{r})$ kann die Bewegung eines elektrisch geladenen Teilchens durch Lösen der Bewegungsgleichung (siehe Gl. II.9)

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t) = \frac{q}{m} \frac{\vec{v}(t)}{c} \times \vec{B}(\vec{r}(t)) \quad (62)$$

bestimmt werden.

Da die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ des Teilchens in der Lorentzkraft auftritt, ist die Lösung von Gleichung 62 meistens nicht so einfach zu gewinnen wie im Falle der Bewegung eines geladenen Teilchens in einem elektrostatischen Feld.

Homogenes magnetisches Feld

Im Falle eines **homogenen magnetischen Feldes** \vec{B}_o , welches keine Ortsabhängigkeit aufweist, kann die Bewegungsgleichung 62 unter Verwendung des zeitunabhängigen Präzessionsfrequenzvektors

$$\vec{\omega}_B = \frac{q}{m c} \vec{B}_o \quad (63)$$

in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \vec{v}(t) \times \vec{\omega}_B \quad (64)$$

Wählen wir zur Lösung dieser Gleichung unser Koordinatensystem so, daß die z -Achse in Richtung des Vektors $\vec{\omega}_B$ zeigt, so lautet Gl. 64

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_B v_y \\ -\omega_B v_x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (65)$$

und besitzt die Lösung

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(0) \cos \omega_B t \\ -v_x(0) \sin \omega_B t \\ v_z(0) \end{pmatrix} \quad (66a)$$

bzw. nach einer weiteren Zeitintegration

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \begin{pmatrix} a \sin \omega_B t \\ a [\cos \omega_B t - 1] \\ v_z(0) t \end{pmatrix} . \quad (66b)$$

Hierbei ist $\vec{r}(0)$ die Anfangslage des Teilchens und $\vec{v}(0)$ die Anfangsgeschwindigkeit, welche in der x - z -Ebene liegt (ist durch geeignete Wahl der x -Achse immer erreichbar).

Die in Gl. 66b angegebene Bahnkurve des Teilchens stellt eine Spiralenbahn in z -Richtung dar, wobei die in die x - y -Ebene projizierte Kreisbahn einen Radius $a = v_x(0)/\omega_B$ besitzt. Der Betrag der Geschwindigkeit ändert sich zeitlich nicht, da das Teilchen in einem Magnetfeld keine Energie aufnimmt (dies gilt auch für die später betrachtete relativistische Bewegungsgleichung, welche als Bahnkurven gleichfalls Spiralbahnen ergibt, die mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen werden).

IV.4.C. Magnetische Flasche

Wir betrachten ein **zylindersymmetrisches Magnetfeld** der folgenden Form (siehe Fig. 4.3)

$$\vec{B}(\rho, \varphi, z) = B_\rho(\rho, z) \vec{e}_\rho + B_z(z) \vec{e}_z . \quad (67)$$

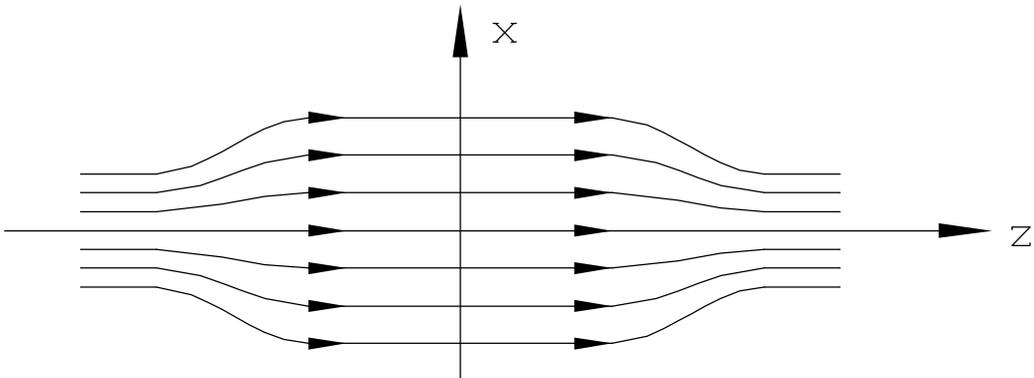


Fig. 4.3 Prinzipieller magnetischer Feldlinienverlauf für eine magnetische Flasche

Aus der Maxwellgleichung $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, angeschrieben in Zylinderkoordinaten unter Berücksichtigung der Winkelunabhängigkeit aller Komponenten,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho) + \frac{\partial}{\partial z} B_z = 0 \quad , \quad (68)$$

ergibt sich der folgende Zusammenhang zwischen den beiden Komponenten des Magnetfeldes:

$$B_\rho(\rho, z) = -\frac{\rho}{2} \frac{\partial B_z(z)}{\partial z} \quad (69)$$

Bewegungsgleichung in Zylinderkoordinaten

Schreiben wir die Bewegungsgleichung 62 in Zylinderkoordinaten an

$$\frac{d}{dt} (v_\rho \vec{e}_\rho + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_z \vec{e}_z) = \frac{q}{m c} (v_\varphi B_z \vec{e}_\rho + (v_z B_\rho - v_\rho B_z) \vec{e}_\varphi - v_\varphi B_\rho \vec{e}_z) \quad (70)$$

und verwenden für die Kreisgeschwindigkeit v_φ die Näherungslösung

$$v_\varphi \approx -\omega_B \rho = -\frac{q}{m c} B_z \rho \quad , \quad (71)$$

so erhalten wir für die z -Komponente der Geschwindigkeit die Gleichung

$$\frac{d}{dt} v_z = -\frac{q}{m c} v_\varphi B_\rho = \frac{B_\rho}{\rho B_z} v_\varphi^2$$

bzw. unter Verwendung von Gleichung 69

$$\frac{d^2}{dt^2} z(t) = -v_\varphi^2 \frac{1}{2 B_z} \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad . \quad (72)$$

Wir ersehen aus dieser Gleichung für die Beschleunigung der Teilchen in z -Richtung, daß diese Beschleunigung bei zunehmender Stärke des Magnetfeldes in z -Richtung, d.h. für $\partial B_z / \partial z > 0$, negativ ist und umgekehrt. Hierbei besteht eine Unabhängigkeit von der Umlaufrichtung (die für positiv oder negativ geladene Teilchen verschieden ist), da v_φ quadratisch auftritt. Dies bedeutet, daß **ein Raumbereich mit größer werdender magnetischer Feldstärke die bewegten Teilchen reflektiert**. Diese Wirkung eines räumlich veränderlichen Magnetfeldes (Zusammenlaufen der magnetischen Feldlinien) kann für die Konstruktion einer **magnetischen Flasche** zum Einschluß bewegter geladener Teilchen (Plasma) verwendet werden.