

ELEKTRODYNAMIK UND RELATIVITÄTSTHEORIE

Kapitel 3: Elektrostatik im Vakuum

Vorlesung für Studenten der Technischen Physik

Helmut Nowotny

Technische Universität Wien

Institut für Theoretische Physik

7., von A. Rebhan korrigierte Auflage

Wien, Februar 2006

III. ELEKTROSTATIK IM VAKUUM

III.1. Randwertprobleme der Elektrostatik

Für statische Probleme, d.h. wenn keine Zeitabhängigkeit vorliegt, zerfallen die Maxwellgleichungen in zwei völlig getrennte Gruppen von Gleichungen, die der **Elektrostatik**

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi \varrho(\vec{r}) \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (1)$$

und der **Magnetostatik**

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}) \quad (2)$$

entsprechen.

III.1.A. Elektrische Felder mit natürlichen Randbedingungen

Das statische elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ ist gemäß Gl. 1 wirbelfrei, d.h. es ist als Gradientenfeld darstellbar:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\operatorname{grad} \phi(\vec{r}) \quad . \quad (3)$$

Einsetzen in die zugehörige inhomogene Maxwellgleichung der Elektrostatik ergibt die folgende Bestimmungsgleichung für das elektrische Potential ϕ :

$$\Delta \phi(\vec{r}) = -4\pi \varrho(\vec{r}) \quad . \quad (4)$$

Diese Gleichung wird als **Poisson-Gleichung** bezeichnet und besitzt die Lösung

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad , \quad (5)$$

welche die natürlichen Randbedingungen erfüllt (hinreichend starkes Verschwinden im Unendlichen, wenn dort keine Quellen vorhanden sind) . Wir können diese Lösung entweder direkt aus der allgemeinen Lösung (siehe Gl. II.42a) durch Spezialisierung auf zeitunabhängige Quellen erhalten oder unter Verwendung der Greenschen Funktion G

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad \longrightarrow \quad G(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (6)$$

entsprechend der allgemeinen Lösungsgleichung

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' G(\vec{r} - \vec{r}') \varrho(\vec{r}') \quad (7)$$

anschreiben. Für spezielle Randwertprobleme ist zu dieser Lösung immer noch eine Lösung der homogenen Gleichung

$$\Delta \phi_{hom}(\vec{r}) = 0 \quad (8)$$

hinzuzufügen. Dies kann manchmal z.B. durch Abänderung der Greenschen Funktion G erfolgen, indem eine Lösung G_{hom} der homogenen Gleichung

$$\Delta G_{hom}(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad (9)$$

zur Änderung von Gl. 7 verwendet wird:

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \underbrace{\left[G(\vec{r} - \vec{r}') + G_{hom}(\vec{r}, \vec{r}') \right]}_{G_{speziell}(\vec{r}, \vec{r}')} \varrho(\vec{r}') \quad . \quad (10)$$

III.1.B. Randbedingungen auf geschlossenen Flächen

Wir zeigen nun, daß **entweder** durch die Vorgabe des Potentials ϕ **oder** durch die Vorgabe der Normalableitung $\partial\phi/\partial n$ auf einer geschlossenen Fläche die Lösung des elektrostatischen Problems eindeutig bestimmt ist.

Man bezeichnet diese Randbedingungen als

Dirichletsche Randbedingung: $\phi(\vec{r})$ ist auf dem Rand gegeben,

Neumannsche Randbedingung: $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ ist auf dem Rand gegeben.

Zum Beweis der Eindeutigkeit der Lösung nehmen wir an, daß es zwei verschiedene Lösungen ϕ_1 und ϕ_2 der Poissongleichung 4 gäbe, welche die gleichen vorgegebenen Randwerte besitzen. Betrachten wir dann die Differenzfunktion $\chi = \phi_1 - \phi_2$ dieser beiden Funktionen, so gilt für diese Funktion

$$\Delta\chi(\vec{r}) = 0 \quad \text{sowie} \quad \chi = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial\chi}{\partial n} = 0 \quad \text{auf der Randfläche } F. \quad (11)$$

Verwendung von $\chi \vec{\nabla}\chi$ für den ersten Greenschen Satz (siehe Gl. I.12a) ergibt nun

$$\int_V d^3r \left[(\vec{\nabla}\chi)^2 + \chi \underbrace{\Delta\chi}_{=0} \right] = \oint_F \underbrace{d^2\vec{f} \cdot \chi \vec{\nabla}\chi}_{=0 \text{ auf } F} \quad , \quad (12)$$

woraus $\vec{\nabla}\chi = 0$ im gesamten betrachteten Volumen und somit $\chi = 0$ bzw. $\chi = \text{constant}$ folgt, d.h. die beiden betrachteten Lösungen sind gleich (Dirichletsche Randbedingungen) oder unterscheiden sich nur um einen konstanten Wert (Neumannsche Randbedingungen).

Spezielle Greensche Funktionen G_D und G_N

Wir können Greensche Funktionen bilden, welche den jeweiligen Randbedingungen (Dirichlet, Neumann) angepaßt sind. Wir betrachten hierzu den zweiten Greenschen Satz in der Form

$$\begin{aligned} \int_V d^3r' \left[G(\vec{r}, \vec{r}') \underbrace{\Delta' \phi(\vec{r}')}_{-4\pi \varrho(\vec{r}')} - \phi(\vec{r}') \underbrace{\Delta' G(\vec{r}, \vec{r}')}_{-4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')} \right] = \\ = \oint_F d^2\vec{f}' \cdot \left[G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{\nabla}' \phi(\vec{r}') - \phi(\vec{r}') \vec{\nabla}' G(\vec{r}, \vec{r}') \right] \quad , \end{aligned} \quad (13)$$

woraus sofort die Gleichung

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d^3r' G(\vec{r}, \vec{r}') \varrho(\vec{r}') + \frac{1}{4\pi} \oint_F d^2\vec{f}' \cdot \left[G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{\nabla}' \phi(\vec{r}') - \phi(\vec{r}') \vec{\nabla}' G(\vec{r}, \vec{r}') \right] \quad (14)$$

gewonnen werden kann, welche das Potential ϕ im gesamten betrachteten Raum durch die gegebene Quellfunktion ϱ und die Randwerte des Potentials und der Normalableitung ausdrückt. Da aber nun entweder nur das Potential oder nur die Normalableitung des Potentials auf der Oberfläche gegeben ist, muß man entsprechend angepaßte Greenfunktionen wählen. Für das Dirichletsche Randwertproblem ist die Greenfunktion G_D so zu wählen, daß

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad \text{für } \vec{r}' \text{ auf Oberfläche } F \quad (15a)$$

gilt und somit das Oberflächenintegral mit der Normalableitung des Potentials keinen Beitrag liefert, d.h. man benötigt in diesem Fall für die Auswertung von Gl. 14 die Normalableitung des Potentials nicht.

Im Falle des Neumannschen Problems kann die Greenfunktion G_N jedoch nicht in entsprechender Weise so gewählt werden, daß

$$\frac{\partial}{\partial n'} G_N(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad \text{für } \vec{r}' \text{ auf Oberfläche } F$$

gilt und das entsprechende Oberflächenintegral mit den Randwerten des Potentials verschwindet, da wegen der Definitionsgleichung 6 immer

$$\oint d^2\vec{f}' \cdot \vec{\nabla}' G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi$$

gelten muß. Eine mögliche Wahl für die Greenfunktion G_N ist

$$\frac{\partial}{\partial n'} G_N(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{4\pi}{|F|} \quad \text{für } \vec{r}' \text{ auf Oberfläche } F \quad , \quad (15b)$$

wobei $|F|$ die Größe der Oberfläche ist. Das in diesem Fall verbleibende Oberflächenintegral über den nicht bekannten Wert von $\phi(\vec{r}')$ auf der Oberfläche ergibt nun einen konstanten Wert, welcher unbestimmt bleibt (das Potential ist beim Neumannschen Problem nur bis auf eine Konstante bestimmt), aber keinen Einfluß auf die Berechnung der elektrischen Feldstärke hat.

III.1.C. Randbedingungen bei Anwesenheit von Leitern

In einem **Leiter** sind die elektrischen Ladungen frei beweglich, sie können aber den Leiter nicht verlassen. Die Einstellung eines zeitunabhängigen Zustandes erfordert

$$\vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \phi(\vec{r}) = \text{constant} \quad \text{im Leiter} , \quad (16)$$

damit auf Grund der Lorentzkraft keine Bewegung der elektrischen Ladungen erfolgt.

Oberflächenladungsdichte

Wegen der ersten Maxwellgleichung $\text{div } \vec{E} = 4\pi \rho$ bedeutet Gl. 16 aber auch $\rho(\vec{r}) = 0$ im Leiter, d.h. **die elektrische Ladung eines Leiters sammelt sich auf der Leiteroberfläche.**

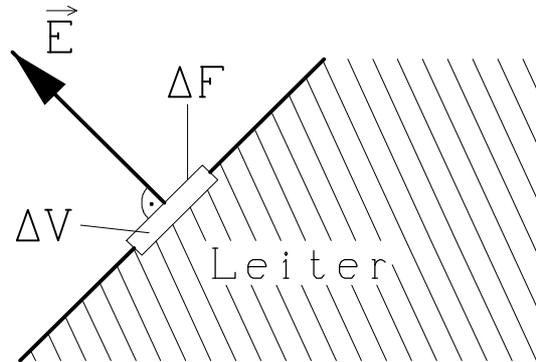


Fig. 3.1 Oberflächenelement eines Leiters

Betrachten wir die Oberfläche eines Leiters, so ist die elektrische Feldstärke im Außenraum senkrecht zu dieser Oberfläche, da die Oberfläche eine Fläche konstanten Potentials darstellt, auf die das zugehörige Gradientenfeld immer senkrecht steht.

Integrieren wir nun die erste Maxwellgleichung über einen Raumbereich ΔV , welcher im wesentlichen nur einen Oberflächenbereich ΔF einschließt (die Ladungen eines Leiters sitzen auf der Oberfläche), so ergibt sich (siehe Fig. 3.1)

$$\underbrace{\int_{\Delta V} d^3r \text{ div } \vec{E}(\vec{r})}_{\Delta F E} = \underbrace{\int_{\Delta V} d^3r 4\pi \rho(\vec{r})}_{4\pi \Delta Q} . \quad (17)$$

Definieren wir die Oberflächenladungsdichte σ und die Gesamtladung Q eines Leiters

$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta F} \quad , \quad Q = \int_F d^2f \sigma \quad , \quad (18)$$

so gilt für den Wert der elektrischen Feldstärke \vec{E} auf der Oberfläche eines Leiters

$$E = 4\pi \sigma \quad . \quad (19)$$

Randbedingungen

Die bei Anwesenheit eines elektrischen Leiters zu verwendenden Randbedingungen können wir folgendermaßen zusammenfassen:

$$\phi(\vec{r}) = \text{constant} \quad \text{für } \vec{r} \text{ auf Oberfläche } F \quad (20a)$$

$$\vec{E}_{tg}(\vec{r}) = 0 \quad \text{für } \vec{r} \text{ auf Oberfläche } F \quad (20b)$$

$$E_n(\vec{r}) = 4\pi \sigma \quad \text{für } \vec{r} \text{ auf Oberfläche } F. \quad (20c)$$

Zu beachten ist, daß man **entweder** das Potential ϕ eines Leiters **oder** die Gesamtladung Q eines Leiters vorgeben kann, **aber nicht beides**. Genausowenig kann man die Oberflächenladungsdichte eines Leiters vorgeben, da sich jede auf einen Leiter aufgebraute Ladung so verteilen muß, daß im Inneren des Leiters keine elektrische Feldstärke auftritt (solange dies nicht erreicht ist verschieben sich die elektrischen Ladungen auf der Oberfläche des Leiters).

III.1.D. Methode der Bildladungen

Wie wir gesehen haben, können wir gegebene Randbedingungen auf der Oberfläche eines betrachteten Raumbereiches erfüllen, indem wir zur Lösung mit den natürlichen Randbedingungen eine geeignete Lösung der homogenen Potentialgleichung

$$\Delta\phi_{hom}(\vec{r}) = 0 \quad (21)$$

hinzufügen:

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d^3r' \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \phi_{hom}(\vec{r}) \quad . \quad (22)$$

Diese homogene Lösung kann nun in der Form

$$\phi_{bild}(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\varrho_{bild}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (23)$$

geschrieben werden, wobei die **Bildladungsdichte** ϱ_{bild} nur außerhalb des betrachteten Raumbereiches von Null verschieden ist, d.h. es gilt

$$\varrho_{bild}(\vec{r}) = 0 \quad \text{für } \vec{r} \text{ im Volumen } V, \quad (24a)$$

woraus sofort

$$\Delta\phi_{bild}(\vec{r}) = 0 \quad \text{für } \vec{r} \text{ im Volumen } V \quad (24b)$$

folgt. Somit stellt ϕ_{bild} tatsächlich eine Lösung der homogenen Gleichung 21 dar.

Die Wahl von ϱ_{bild} ist so vorzunehmen, daß das Potential ϕ_{bild} zusammen mit dem von der gegebenen Ladungsdichte ϱ stammenden Potential die Bedingungen auf der Oberfläche des betrachteten Raumbereiches erfüllt. Dies ist nur für wenige Oberflächenformen (z.B. ebene Begrenzungsfläche eines Halbraumes, Kugeloberfläche) zusammen mit bestimmten Randbedingungen (z.B. Leiteroberfläche) in einfacher Weise möglich.

Ebene Leiteroberfläche (unendlich ausgedehnt)

In diesem Fall erhält man die Bildladung durch einfache Spiegelung der gegebenen Ladungsdichte an der ebenen Leiteroberfläche.

Wählen wir z.B. unser Koordinatensystem so, daß die Leiteroberfläche die x - y -Ebene bildet und die gegebene Ladungsverteilung ϱ sich im Halbraum $z < 0$ befindet, so ist die Bildladung durch

$$\varrho_{\text{bild}}(x, y, z) = -\varrho(x, y, -z) \quad \text{für } z > 0 \quad (25)$$

gegeben.

Kugelförmige Leiteroberfläche

Im Falle einer kugelförmigen Leiteroberfläche mit dem Radius a und dem Kugelmittelpunkt im Koordinatenursprung ist jeder Punktladung Q in der Entfernung r ($r > a$) als Bildladung eine Punktladung $Q_b = -Q a/r$ in der Entfernung $r_b = a^2/r$ zuzuordnen, wobei die Richtungen von \vec{r} und \vec{r}_b übereinstimmen (Spiegelung an einer Kugeloberfläche).

Ist der kugelförmige Leiter ungeladen, so muß zusätzlich die Ladung $-Q_b$ im Mittelpunkt der Kugel angebracht werden. Soll der kugelförmige Leiter die Gesamtladung Q_o besitzen, so muß im Kugelmittelpunkt die Punktladung $Q_o - Q_b$ angebracht werden. Diese Ladungen dienen nur für die Berechnung des elektrischen Feldes außerhalb des kugelförmigen Leiters sowie zur Berechnung der Oberflächenladungsdichte auf der Leiteroberfläche.

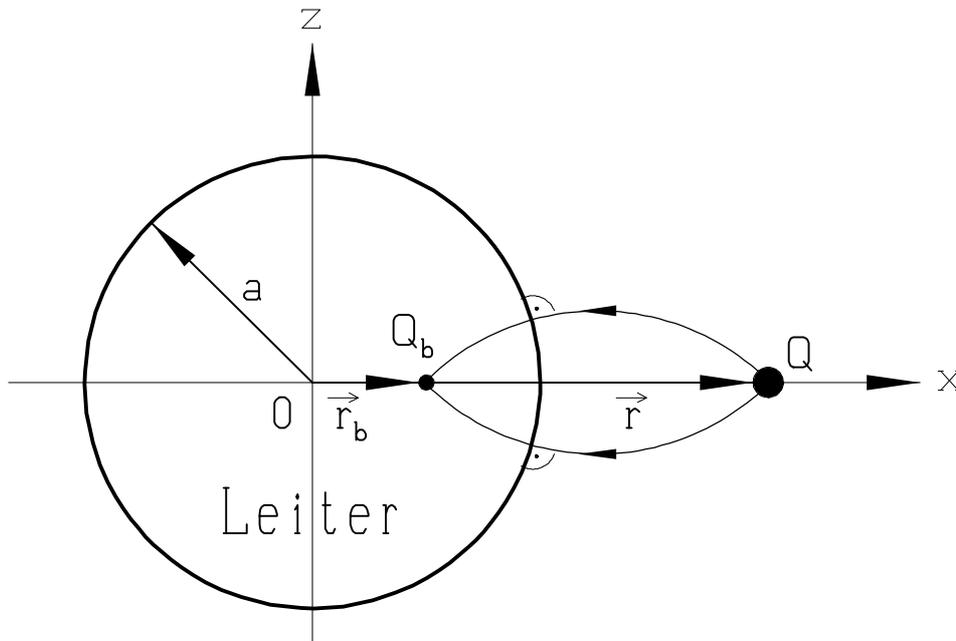


Fig. 3.2 Spiegelladung zu einer kugelförmigen Leiterfläche

III.2. Elektrische Multipolentwicklung

III.2.A. Feld in weiter Entfernung von lokalisierten Quellen

Betrachten wir eine lokalisierte Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r})$ mit

$$\varrho(\vec{r}) = 0 \quad \text{für } |\vec{r}| > R \quad , \quad (26)$$

d.h. es befindet sich nur innerhalb einer Kugel mit dem Radius R elektrische Ladung, so ist für natürliche Randbedingungen das Potential $\phi(\vec{r})$ durch

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (27)$$

gegeben. Schreiben wir

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}')^2} = \sqrt{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2} \quad (28a)$$

so können wir für $r > R$, d.h. $r > r'$ die folgende konvergente Reihenentwicklung durchführen

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - r^2 r'^2}{r^5} + \dots \quad (28b)$$

Setzen wir diese Reihenentwicklung in die Gl. 27 ein, so erhalten wir die folgende Reihenentwicklung für das Potential $\phi(\vec{r})$ außerhalb der Kugel R (wir verwenden zwecks deutlicher Trennung der \vec{r} -Abhängigkeit, welche vor das Integral gezogen werden kann, und der \vec{r}' -Abhängigkeit, welche unter dem Integral stehen bleiben muß, die Indexschreibung):

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{r} \int d^3r' \varrho(\vec{r}') + \frac{x_i}{r^3} \int d^3r' x'_i \varrho(\vec{r}') + \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{r^5} \int d^3r' (3 x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \varrho(\vec{r}') + \dots \quad (29)$$

Die in dieser Reihenentwicklung auftretenden Integrale stellen Tensoren nullter, erster, zweiter, ... Stufe dar und werden als Gesamtladung, kartesisches Dipolmoment, kartesisches Quadrupolmoment, ... der gegebenen Ladungsverteilung bezeichnet (diese Momente hängen außer von der Ladungsverteilung noch vom gewählten Koordinatenursprung ab, **nur das erste nichtverschwindende Moment ist unabhängig vom gewählten Koordinatenursprung**).

Zu beachten ist, daß beim Quadrupolterm (und den weiteren nicht explizit angeschriebenen Termen) keine eindeutige Zerlegung der \vec{r} - und \vec{r}' -Abhängigkeit vorliegt, da wir das Potential $\phi(\vec{r})$ auch in der Form

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{r} \int d^3r' \varrho(\vec{r}') + \frac{x_i}{r^3} \int d^3r' x'_i \varrho(\vec{r}') + \frac{1}{2} \frac{3 x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} \int d^3r' x'_i x'_j \varrho(\vec{r}') + \dots$$

schreiben können. Dies läßt verschiedene Definitionen der kartesischen Momente zu bzw. verlangt Nebenbedingungen für eine eindeutige Definition.

Coulombfeld

In weiter Entfernung wirkt jede lokalisierte Ladungsverteilung in erster Näherung wie eine Punktladung mit der Ladung

$$q = \int d^3r' \varrho(\vec{r}') \quad (30a)$$

und erzeugt das Potential

$$\phi_{monopol}(\vec{r}) = \frac{q}{r} \quad (30b)$$

Das zugehörige elektrische Feld ist durch

$$\vec{E}_{monopol}(\vec{r}) = \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (r > R) \quad (30c)$$

gegeben.

Dipolfeld

Das elektrische Dipolmoment \vec{p} einer lokalisierten Ladungsverteilung

$$\vec{p} = \int d^3r' \vec{r}' \varrho(\vec{r}') \quad (31a)$$

ergibt das Potential

$$\phi_{dipol}(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (31b)$$

Aus der allgemeinen Formel für das elektrische Feld, $\vec{E} = -\text{grad } \phi$, ergibt sich das Dipolfeld zu

$$\vec{E}_{dipol}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5} \quad (r > R) \quad (31c)$$

Zwei Punktladungen mit den elektrischen Ladungen $+q$ und $-q$, die den Abstand \vec{a} aufweisen, besitzen das elektrische Dipolmoment $\vec{p} = q\vec{a}$ (der Vektor \vec{a} zeigt von der negativen zu der positiven Ladung). Da die Gesamtladung dieser Anordnung Null ist, ist dieses Dipolmoment \vec{p} von der Wahl des Koordinatenursprunges unabhängig (dies gilt nicht für das Quadrupolmoment und die weiteren höheren Momente dieser Anordnung, welche nicht verschwinden).

Quadrupolfeld

Das elektrische Quadrupolmoment $\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}$ einer lokalisierten Ladungsverteilung

$$Q_{ij} = \int d^3r' \left(3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij} \right) \varrho(\vec{r}') \quad (32a)$$

ergibt das Potential

$$\phi_{quadrupol}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{r^5} Q_{ij} \quad (32b)$$

und die elektrische Feldstärke

$$\vec{E}_{quadrupol}(\vec{r}) = \frac{5(\vec{r} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{Q}} \cdot \vec{r})\vec{r} - 2r^2 \overleftrightarrow{\mathbf{Q}} \cdot \vec{r}}{2r^7} \quad (r > R) \quad (32c)$$

III.2.B. Sphärische Multipolmomente

Wir können aus Gleichung 27 eine allgemein gültige Entwicklung in Kugelkoordinaten erhalten, wenn wir die Entwicklungsformel

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\vartheta_{<}, \varphi_{<}) Y_{lm}(\vartheta_{>}, \varphi_{>}) \quad (33)$$

für $r > r'$ (d.h. $r_{>} = r$, $r_{<} = r'$) anwenden:

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{r^{l+1}} \int d^3r' r'^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') \varrho(\vec{r}') \quad (34)$$

Die von der gegebenen Ladungsverteilung abhängigen Integrale bezeichnet man als die **sphärischen Multipolmomente** q_{lm}^* :

$$q_{lm}^* = \int d^3r' r'^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') \varrho(\vec{r}') \quad (35)$$

Man bezeichnet diese Momente entsprechend dem Wert von l als

- $l = 0$: Monopolmoment,
- $l = 1$: Dipolmoment,
- $l = 2$: Quadrupolmoment,
- $l = 3$: Oktupolmoment,
- $l = 4$: Hexadekupolmoment,
- usw.

Durch den Wert von m ($m = l, l-1, \dots, -l$) werden die jeweiligen Komponenten dieser sphärischen Multipolmomente gekennzeichnet. Wegen der Symmetrie-Relation

$$q_{l-m}^* = (-1)^m q_{lm}^* \quad (36)$$

müssen für das l -te Moment nur jeweils $l+1$ Komponenten angegeben werden. Als Betrag des l -ten Multipolmomentes wird

$$|q_l| = \left[\frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} |q_{lm}^*|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (37)$$

bezeichnet.

Zusammenhang kartesische–sphärische Multipolmomente

Unter Verwendung der im Anhang angegebenen expliziten Formeln für die Kugelflächenfunktionen ergibt sich der folgende Zusammenhang zwischen den kartesischen und den sphärischen Multipolmomenten:

$$\begin{aligned} q_{00}^* &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}} q & q_{22}^* &= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{32\pi}} (Q_{xx} - Q_{yy} - 2iQ_{xy}) \\ q_{11}^* &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x - ip_y) & q_{21}^* &= -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (Q_{xz} - iQ_{yz}) \\ q_{10}^* &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z & q_{20}^* &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} Q_{zz} \end{aligned}$$

III.2.C. Mittelwert des elektrischen Feldes (Kugelbereich)

Wir betrachten ein beliebiges elektrostatisches Problem (mit natürlichen Randbedingungen) und wollen an einer beliebigen Stelle den über eine Kugel mit dem Radius R gemittelten Wert der elektrischen Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ berechnen.

Wir legen hierzu unser Koordinatensystem so, daß der Koordinatenursprung mit dem Mittelpunkt unserer Mittelungskugel zusammenfällt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle \vec{E} \rangle_R &= \frac{3}{4\pi R^3} \int_{r < R} d^3r \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{3}{4\pi R^3} \int_{r < R} d^3r \operatorname{grad} \phi(\vec{r}) \\ &= -\frac{3}{4\pi R^3} \oint_{r=R} d^2\vec{f} \phi(\vec{r}) = -\frac{3}{4\pi R^3} \oint_{r=R} d^2\vec{f} \int d^3r' \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} . \end{aligned} \quad (38)$$

Ändern wir die Integrationsreihenfolge, so ergibt sich

$$\langle \vec{E} \rangle_R = - \int d^3r' \varrho(\vec{r}') \frac{3}{4\pi R^3} \oint_{r=R} d^2\vec{f} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} . \quad (39)$$

Die Auswertung des Oberflächenintegrals über die Kugeloberfläche ergibt nun (zweckmäßigerweise wählt man die Richtung von \vec{r}' als z -Achse und verwendet für die Integration Polarkoordinaten)

$$\frac{3}{4\pi R^3} \oint_{r=R} d^2\vec{f} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \begin{cases} \frac{r'}{r'^3} & \text{für } r' > R \\ \frac{r'}{R^3} & \text{für } r' < R \end{cases} . \quad (40)$$

Somit ergibt sich für den über einen Kugelbereich gemittelten Wert der elektrischen Feldstärke die folgende einfache Formel

$$\langle \vec{E} \rangle_R = - \int_{r' > R} d^3r' \varrho(\vec{r}') \frac{\vec{r}'}{r'^3} - \frac{1}{R^3} \int_{r' < R} d^3r' \varrho(\vec{r}') \vec{r}' . \quad (41)$$

Wir ersehen aus Gl. 41, daß die gemittelte Feldstärke aus zwei Termen besteht, wobei der erste Term die Feldstärke im Kugelmittelpunkt angibt, welche von allen Ladungen außerhalb unserer Mittelungskugel erzeugt wird, während der zweite Term proportional dem Dipolmoment der innerhalb der Mittelungskugel vorhandenen Ladungen ist.

Befinden sich innerhalb der Mittelungskugel keine Ladungen, so ist der Mittelwert der elektrischen Feldstärke unabhängig vom gewählten Radius R immer gleich dem Wert der Feldstärke im Kugelmittelpunkt.

III.3. Elektrostatische Energie

III.3.A. Selbstenergie und Wechselwirkungsenergie

Aus der allgemeinen Formel II.46 für die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes erhalten wir bei elektrostatischen Problemen für die Gesamtenergie W im Volumen V den Ausdruck

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V d^3r \vec{E}(\vec{r})^2 \quad . \quad (42)$$

Unter Verwendung der Darstellung der elektrischen Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ als Gradientenfeld des elektrischen Potentials $\phi(\vec{r})$ (siehe Gl. 3) sowie der ersten Maxwellgleichung bzw. der Poissongleichung 4 kann diese Energiedichte auch in der Form

$$W = \frac{1}{2} \int_V d^3r \phi(\vec{r}) \varrho(\vec{r}) + \frac{1}{8\pi} \oint_F d^2f^\vec{r} \cdot \phi \vec{\nabla} \phi \quad (43)$$

dargestellt werden.

Verwendet man für das Potential $\phi(\vec{r})$ die allgemeine Lösung zu natürlichen Randbedingungen (siehe Gl. 5), so kann die elektrostatische Feldenergie direkt mittels der Ladungsdichte ϱ ausgedrückt werden:

$$W = \frac{1}{2} \iint d^3r d^3r' \frac{\varrho(\vec{r}) \varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad . \quad (44)$$

Aufteilung der Quellen

Teilen wir die gesamte Ladungsdichte $\varrho(\vec{r})$ in die Beiträge einzelner Komplexe auf

$$\varrho(\vec{r}) = \sum_n \varrho_n(\vec{r}) \quad , \quad (45)$$

so ist wegen der Linearität der Maxwellgleichungen auch eine entsprechende Aufteilung beim Potential $\phi(\vec{r})$ möglich

$$\phi(\vec{r}) = \sum_n \phi_n(\vec{r}) \quad . \quad (46)$$

$\phi_n(\vec{r})$ ist das nur von der Ladungsverteilung $\varrho_n(\vec{r})$ verursachte Potential und erfüllt die Poissongleichung

$$\Delta \phi_n(\vec{r}) = -4\pi \varrho_n(\vec{r}) \quad . \quad (47)$$

Die Berechnung der Feldenergie entsprechend Gl. 43 ergibt bei Verwendung der Aufteilungsgleichungen 45 und 46 eine Doppelsumme über die betrachteten Einzelkomplexe, welche in der folgenden Form geschrieben werden kann (bei verschwindenden Oberflächenbeiträgen)

$$W = \frac{1}{2} \sum_n \int d^3r \phi_n(\vec{r}) \varrho_n(\vec{r}) + \sum_{n < m} \int d^3r \phi_n(\vec{r}) \varrho_m(\vec{r}) \quad . \quad (48)$$

Hierbei wird der erste Term als **Selbstenergie** und der zweite Term als **Wechselwirkungsenergie** bezeichnet. Für natürliche Randbedingungen können diese beiden Beiträge zur elektrostatischen Feldenergie in der Form

$$W^{selbst} = \sum_n \frac{1}{2} \iint d^3r d^3r' \frac{\varrho_n(\vec{r}') \varrho_n(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} , \quad (49a)$$

$$W^{ww} = \sum_{n < m} \iint d^3r d^3r' \frac{\varrho_n(\vec{r}') \varrho_m(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (49b)$$

geschrieben werden.

Die gesamte elektrostatische Energie ist so wie die Selbstenergie jedes einzelnen Komplexes immer positiv. Dies gilt nicht für die Wechselwirkungsenergie, welche auch negativ werden kann.

III.3.B. Kapazitätskoeffizienten

Wir betrachten eine feste Anordnung mehrerer Leiter, wobei der n -te Leiter die Gesamtladung Q_n tragen soll. Da im Raum zwischen den Leitern keine Ladungsdichte $\varrho(\vec{r})$ vorhanden ist, vereinfacht sich in diesem Fall Gl. 14 unter Beachtung von Gl. 15a zu

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_n \oint_{F_n} d^2\vec{f}' \cdot \phi(\vec{r}') \vec{\nabla}' G_D(\vec{r}, \vec{r}') \quad (50)$$

(man beachte den Vorzeichenwechsel, da $d^2\vec{f}'$ aus dem Leiter zeigt). Wählen wir \vec{r} auf der Oberfläche F_m des m -ten Leiters, so erhalten wir aus dieser Gleichung das Potential ϕ_m des m -ten Leiters, welches von dem gewählten Aufpunkt \vec{r} unabhängig ist, da die Oberfläche jedes Leiters eine Fläche konstanten Potentials ist.

Berechnen wir durch Gradientenbildung aus Gl. 50 die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$, so können wir unter Verwendung von Gl. 19 die Gesamtladung des m -ten Leiters in der Form

$$Q_m = \frac{1}{4\pi} \oint_{F_m} d^2\vec{f}' \cdot \underbrace{\vec{E}(\vec{r})}_{-\vec{\nabla}\phi(\vec{r})} = \sum_n \underbrace{\frac{-1}{(4\pi)^2} \oint_{F_m} (d^2\vec{f}' \cdot \vec{\nabla}) \oint_{F_n} (d^2\vec{f}' \cdot \vec{\nabla}') G_D(\vec{r}, \vec{r}') \phi_n}_{C_{mn}} \quad (51)$$

schreiben. Die **Kapazitätskoeffizienten** C_{mn} hängen nur von den geometrischen Verhältnissen der Leiterabmessungen und der Leiteranordnung ab (es gilt die Symmetrie $C_{mn} = C_{nm}$). Sie geben einen **linearen Zusammenhang** zwischen den **Potentialwerten** auf den einzelnen Leitern und den **Gesamtladungen** auf den einzelnen Leitern an:

$$Q_m = \sum_n C_{mn} \phi_n \quad . \quad (52)$$

Die gesamte elektrostatische Energie dieser betrachteten Anordnung ist entsprechend Gl. 43 durch

$$W = \frac{1}{2} \sum_{m,n} C_{mn} \phi_m \phi_n \quad (53)$$

gegeben.

Kapazität zweier Leiter

Haben wir zwei Leiter vorliegen, so ist für die Ladungsverteilung

$$Q_1 = -Q_2 = Q \quad \text{die Kapazität } C \text{ durch} \quad C = \frac{Q}{\phi_1 - \phi_2} \quad (54)$$

definiert. Die Verwendung von Gl. 52 für den Fall zweier Leiter ergibt nun sofort den folgenden Zusammenhang zwischen dieser so definierten Kapazität C und den Kapazitätskoeffizienten C_{mn} :

$$C = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}}{C_{11} + C_{22} + C_{12} + C_{21}} \quad (55)$$

III.3.C. Lokalisierte Ladungsverteilung in einem äußeren Feld

Wir betrachten eine um den Punkt \vec{R} lokalisierte Ladungsverteilung, deren Wert an der Stelle \vec{r} durch die Funktion $\varrho(\vec{r} - \vec{R})$ gegeben sei, die sich in einem äußeren Feld $\vec{E}(\vec{r})$ befindet (äußeres Feld bedeutet immer, daß das Feld von weiteren, räumlich entfernten und nicht näher gekennzeichneten Quellen stammt). Wir haben somit ein typisches Wechselwirkungsproblem vorliegen, wobei die Wechselwirkungsenergie entsprechend Gl. 48 durch

$$W^{ww}(\vec{R}) = \int d^3r \phi(\vec{r}) \varrho(\vec{r} - \vec{R}) \quad (56)$$

gegeben ist.

Umformung entsprechend

$$W^{ww}(\vec{R}) = \int d^3r \phi(\vec{R} + \vec{r}) \varrho(\vec{r})$$

und Verwendung der Reihenentwicklung

$$\phi(\vec{R} + \vec{r}) = \phi(\vec{R}) + \vec{\nabla}_R \phi \cdot \vec{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial R_i \partial R_j} x_i x_j + \dots \quad (57)$$

ergibt nun

$$W^{ww}(\vec{R}) = \underbrace{\int d^3r \varrho(\vec{r})}_q + \underbrace{\vec{\nabla}_R \phi}_{-\vec{E}(\vec{R})} \cdot \underbrace{\int d^3r \vec{r} \varrho(\vec{r})}_{\vec{p}} + \frac{1}{6} \underbrace{\frac{\partial^2 \phi}{\partial R_i \partial R_j}}_{-\frac{\partial E_i}{\partial R_j}} \int d^3r 3x_i x_j \varrho(\vec{r}) + \dots$$

Unter Beachtung der Eigenschaft $\text{div } \vec{E} = 0$ (die Quellen eines äußeren Feldes sind nicht innerhalb des betrachteten Raumbereiches) kann beim letzten angeschriebenen Term der Faktor $3x_i x_j$ in $(3x_i x_j - r^2 \delta_{ij})$ geändert werden, so daß das Integral das kartesische Quadrupolmoment der lokalisierten Ladungsverteilung ergibt (siehe Gl. 32a). Wir erhalten somit die Entwicklung

$$W^{ww}(\vec{R}) = q \phi(\vec{R}) - \vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{R}) - \frac{1}{6} Q_{ij} \frac{\partial E_i}{\partial R_j} + \dots \quad (58)$$

In dieser Entwicklung für die Energie einer lokalisierten Ladungsverteilung an der Stelle \vec{R} treten die kartesischen Multipolmomente $q, \vec{p}, \vec{Q} \dots$ dieser Ladungsverteilung zusammen mit entsprechenden Größen des äußeren elektrischen Feldes auf.

III.3.D. Wechselwirkung zweier Dipole

Setzen wir einen Dipol \vec{p}_1 in den Koordinatenursprung, so ergibt sich an der Stelle \vec{R} das Potential

$$\phi(\vec{R}) = \frac{\vec{R} \cdot \vec{p}_1}{R^3} \quad (59)$$

und die elektrische Feldstärke (siehe Gl. 31c)

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{3\vec{R}(\vec{R} \cdot \vec{p}_1) - R^2\vec{p}_1}{R^5} \quad (60)$$

Befindet sich nun an der Stelle \vec{R} ein zweiter Dipol \vec{p}_2 , so ist die Wechselwirkungsenergie dieser beiden Dipole gemäß Gl. 58 durch

$$W_{12}^{ww}(\vec{R}) = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}(\vec{R}) = \frac{R^2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 3(\vec{R} \cdot \vec{p}_1)(\vec{R} \cdot \vec{p}_2)}{R^5} \quad (61)$$

gegeben.

Diese Wechselwirkungsenergie hängt nun nicht nur vom Abstand \vec{R} dieser beiden Dipole ab, sondern auch von ihrer gegenseitigen Lage zueinander und ihrer Lage bezüglich des Abstandsvektors \vec{R} . Bezeichnen wir mit W die nur von den Beträgen der beiden Dipolmomente und dem Betrag ihres Abstandes abhängige Größe

$$W = \frac{|\vec{p}_1| |\vec{p}_2|}{R^3} \quad (62)$$

so ergeben sich für die skizzierten Anordnungen die folgenden Werte für die Wechselwirkungsenergie W_{12} :

→	←	$W_{12} = +2W$
↑	↑	$W_{12} = +1W$
→	↑	$W_{12} = 0W$
↓	↑	$W_{12} = -1W$
→	→	$W_{12} = -2W$

III.4. Kräfte in elektrischen Feldern

III.4.A. Kraft auf eine lokalisierte Ladungsverteilung

Wir betrachten wieder eine um den Punkt \vec{R} lokalisierte Ladungsverteilung, deren Wert an der Stelle \vec{r} durch die Funktion $\varrho(\vec{r} - \vec{R})$ gegeben ist, die sich in einem äußeren Feld $\vec{E}(\vec{r})$ befindet. Die Kraftwirkung dieses äußeren Feldes auf die lokalisierte Ladungsverteilung ist gemäß Gl. II.50 durch

$$\vec{F}(\vec{R}) = \int d^3r \varrho(\vec{r} - \vec{R}) \vec{E}(\vec{r}) \quad (63)$$

gegeben.

Durch Umformung und Reihenentwicklung erhalten wir hieraus

$$\vec{F}(\vec{R}) = \int d^3r \varrho(\vec{r}) \vec{E}(\vec{R} + \vec{r}) = \underbrace{\int d^3r \varrho(\vec{r})}_{q} \vec{E}(\vec{R}) + \underbrace{\int d^3r x_i \varrho(\vec{r})}_{p_i} \frac{\partial \vec{E}}{\partial R_i} + \dots \quad (64)$$

Verwenden wir die für ein äußeres statisches \vec{E} -Feld gültige Beziehung $\text{rot } \vec{E} = 0$ in der Form

$$\vec{p} \times (\vec{\nabla}_R \times \vec{E}(\vec{R})) = \vec{\nabla}_R (\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{R})) - (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}_R) \vec{E}(\vec{R}) = 0 \quad , \quad (65)$$

so können wir Gl. 64 in der Form

$$\vec{F}(\vec{R}) = q \vec{E}(\vec{R}) + \vec{\nabla}_R (\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{R})) + \dots \quad (66)$$

schreiben.

Wie ein Vergleich mit dem Ausdruck für die elektrostatische Wechselwirkungsenergie von Gl. 58 zeigt, können wir diese Kraft als den negativen Gradienten der Wechselwirkungsenergie schreiben:

$$\vec{F}(\vec{R}) = - \vec{\nabla}_R W^{ww}(\vec{R}) \quad . \quad (67)$$

Berechnung des Drehmomentes

Wir können die Kraftgleichung 64 auch dazu verwenden, das bezüglich des Zentrums punktes \vec{R} der lokalisierten Ladungsverteilung angreifende Drehmoment \vec{N} zu berechnen. Aus der zugehörigen Definitionsgleichung

$$\vec{N}(\vec{R}) = \int d^3r \vec{r} \times \varrho(\vec{r}) \vec{E}(\vec{R} + \vec{r}) \quad (68)$$

folgt durch Reihenentwicklung

$$\vec{N}(\vec{R}) = \vec{p} \times \vec{E}(\vec{R}) + \dots \quad . \quad (69)$$

III.4.B. Maxwellscher Spannungstensor

Wir können die auf ein beliebiges Volumen V einwirkende Kraft entsprechend dem Impulssatz der Elektrodynamik (Gl. II.56) auch durch ein entsprechendes Oberflächenintegral über die auf den Rand dieses Volumens einwirkende Spannung berechnen.

Die Oberflächenspannung können wir mittels des Maxwellschen Spannungstensor $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$ bestimmen. Für den Fall der Elektrostatik ergibt sich aus der Definitionsgleichung II.52 der folgende explizite Ausdruck für den Maxwellschen Spannungstensor:

$$\overleftrightarrow{\mathbf{T}} = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} E_x^2 - \frac{1}{2}\vec{E}^2 & E_x E_y & E_x E_z \\ E_x E_y & E_y^2 - \frac{1}{2}\vec{E}^2 & E_y E_z \\ E_x E_z & E_y E_z & E_z^2 - \frac{1}{2}\vec{E}^2 \end{pmatrix} . \quad (70)$$

Wählen wir für die Berechnung der Flächenkraft $\vec{T} = \vec{n} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}}$ die Richtung \vec{n} der Flächennormalen als z -Richtung und legen die x -Richtung so, daß \vec{E} in der x - z -Ebene liegt, so folgt mit

$$\vec{E} = E \begin{pmatrix} \sin \vartheta \\ 0 \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (71)$$

der folgende Ausdruck für die Flächenkraft

$$\vec{T} = \vec{e}_z \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} = \frac{E^2}{8\pi} \begin{pmatrix} \sin 2\vartheta \\ 0 \\ \cos 2\vartheta \end{pmatrix} . \quad (72)$$

Die Flächenkraft besitzt also den Wert $E^2/(8\pi)$, liegt in der von der Flächennormalen \vec{n} und der elektrischen Feldstärke \vec{E} aufgespannten Ebene und schließt mit \vec{E} denselben Winkel ein wie \vec{E} mit der Flächennormalen \vec{n} (siehe Fig. 3.3).

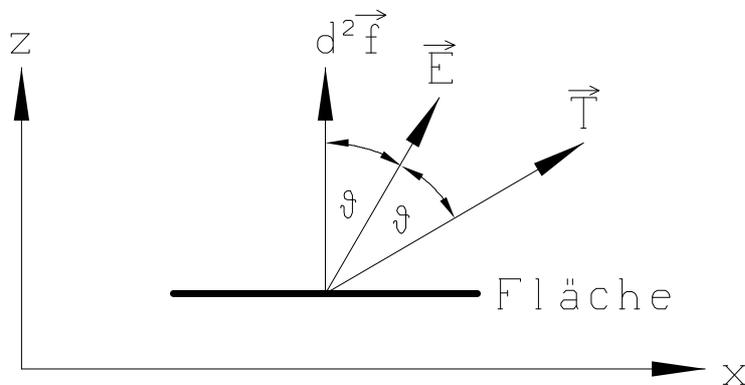


Fig. 3.3 Gegenseitige Lage von Flächennormale, elektrischer Feldstärke und Flächenkraft

III.4.C. Bewegung eines geladenen Teilchens

Für ein gegebenes elektrostatisches Feld $\vec{E}(\vec{r})$ kann die Bewegung eines elektrisch geladenen Teilchens durch Lösen der Bewegungsgleichung (siehe Gl. II.9)

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t) = \frac{q}{m} \vec{E}(\vec{r}(t)) \quad (73)$$

bestimmt werden.

Im Falle eines **homogenen elektrischen Feldes** \vec{E}_o , welches keine Ortsabhängigkeit aufweist, kann die Lösung von Gl. 73 sofort angegeben werden:

$$\vec{r}(t) = \frac{q}{m} \vec{E}_o \frac{t^2}{2} + \vec{v}(0)t + \vec{r}(0) \quad . \quad (74)$$

Die beiden auftretenden Integrationskonstanten $\vec{v}(0)$ und $\vec{r}(0)$ stellen die Anfangsgeschwindigkeit und die Anfangslage des Teilchens dar (Geschwindigkeit und Ortsvektor zum Zeitpunkt $t = 0$) und müssen für eine eindeutige Lösung der Bewegungsgleichung gegeben sein.

Die in Gl. 74 angegebene Lösung kann z.B. für die Bewegung eines geladenen Teilchens in einem Plattenkondensator verwendet werden, wenn sowohl der Einfluß der Randfelder als auch relativistische Effekte vernachlässigt werden können.