# ELEKTRODYNAMIK UND RELATIVITÄTSTHEORIE

## Kapitel 2: Grundgleichungen (Vakuum)

Vorlesung für Studenten der Technischen Physik

Helmut Nowotny

Technische Universität Wien

Institut für Theoretische Physik

7., von A. Rebhan korrigierte Auflage

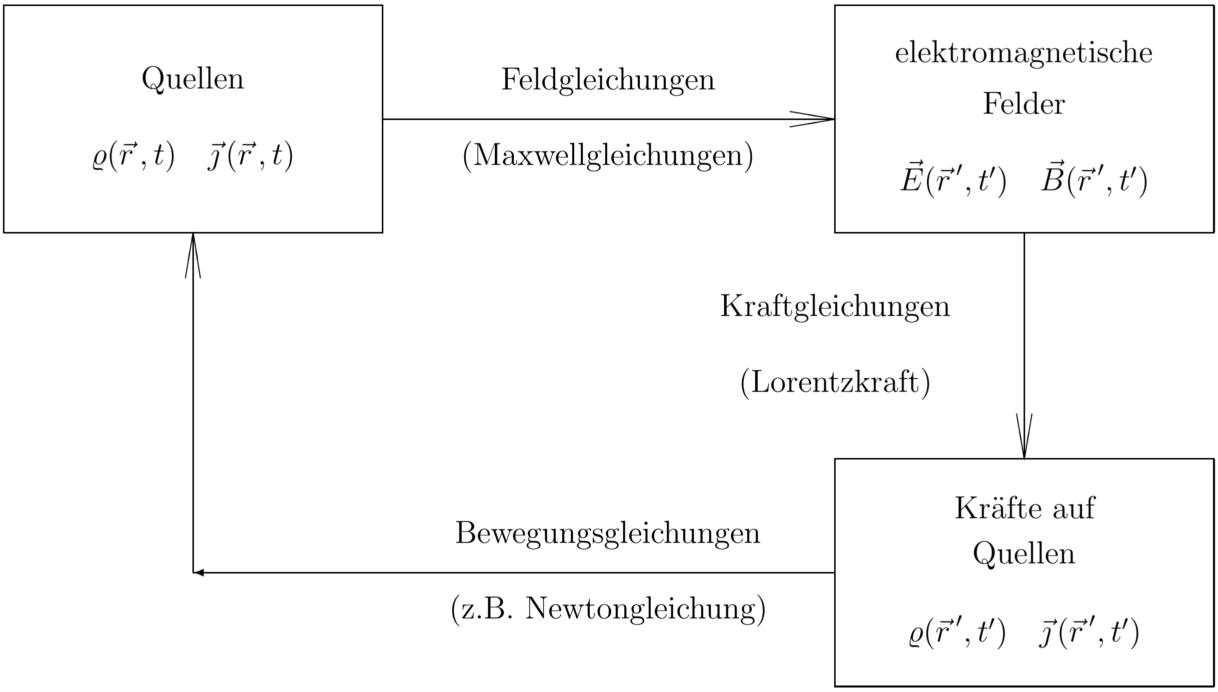
Wien, Februar 2006

# Teil 1: ELEKTRODYNAMIK IM VAKUUM

# II. GRUNDGLEICHUNGEN

## II.1. Feld–, Kraft– und Bewegungsgleichungen

### II.1.A. Übersicht




**Feldgleichungen**

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\ \vec E(\vec r\,,t) &= 4\pi\varrho(\vec r\,,t) && \text{(1a)}\\
\mathrm{div}\ \vec B(\vec r\,,t) &= 0 && \text{(1b)}\\
\mathrm{rot}\ \vec B(\vec r\,,t) &= \frac{4\pi}{c}\,\vec\jmath(\vec r\,,t) + \frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\vec E(\vec r\,,t) && \text{(1c)}\\
\mathrm{rot}\ \vec E(\vec r\,,t) &= -\frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\vec B(\vec r\,,t) && \text{(1d)}
\end{aligned}$$

**Kraftgleichung**

$$\vec f(\vec r\,,t) = \varrho(\vec r\,,t)\,\vec E(\vec r\,,t) + \frac{1}{c}\,\vec\jmath(\vec r\,,t)\times\vec B(\vec r\,,t) \tag{2}$$

**Bewegungsgleichung**

$$m_{(n)}\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,\vec r_{(n)}(t) = \vec F(\vec r_{(n)},t) \quad = \int_{V_{(n)}} \mathrm{d}^3 r'\ \vec f(\vec r\,',t) \tag{3}$$

## II.1.B. Maxwellgleichungen

Diese Gleichungen geben den Zusammenhang der **elektromagnetischen Felder**

$\vec{E}(\vec{r}, t)$ elektrische Feldstärke, elektrisches Feld,
$\vec{B}(\vec{r}, t)$ magnetische Induktion, magnetische Feldstärke, magnetisches Feld,

mit ihren **Quellen**

$\varrho(\vec{r}, t)$ elektrische Ladungsdichte,
$\vec{\jmath}(\vec{r}, t)$ elektrische Stromdichte,

an.

Differentialform : Integralform :

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi\varrho \qquad \oint \mathrm{d}^2\vec{f} \cdot \vec{E} = 4\pi \int \mathrm{d}^3r \;\; \varrho \tag{4a}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \qquad \oint \mathrm{d}^2\vec{f} \cdot \vec{B} = 0 \tag{4b}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\,\vec{\jmath} + \frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\vec{E} \qquad \oint \mathrm{d}\vec{s} \cdot \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \int \mathrm{d}^2\vec{f} \cdot \vec{\jmath} + \frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t} \int \mathrm{d}^2\vec{f} \cdot \vec{E} \tag{4c}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\vec{B} \qquad \oint \mathrm{d}\vec{s} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t} \int \mathrm{d}^2\vec{f} \cdot \vec{B} \tag{4d}$$

In dieser Darstellung sind als Quellen der elektromagnetischen Felder nur Ladungs- und Stromdichten angegeben, d.h. Magnetfelder werden immer als Folge von Strömen angesehen (Ampere'sche Molekularstromhypothese).

Da elektrische Ladung weder erzeugt noch vernichtet werden kann, gilt für diese Quelldichten die **Kontinuitätsgleichung**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_V \mathrm{d}^3r \;\; \varrho\right) = -\oint_F \mathrm{d}^2\vec{f} \cdot \vec{\jmath} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{\partial\varrho}{\partial t} + \text{div}\,\vec{\jmath} = 0 \quad . \tag{5}$$

Für bewegte Punktladungen können Ladungs- und Stromdichte in der folgenden Form angegeben werden:

$$\begin{aligned} \varrho(\vec{r}, t) &= \sum_n q_{(n)}\;\delta\left(\vec{r} - \vec{r}_{(n)}(t)\right) \\ &= \sum_n q_{(n)}\;\delta\left(x - x_{(n)}(t)\right)\,\delta\left(y - y_{(n)}(t)\right)\,\delta\left(z - z_{(n)}(t)\right) \quad , \end{aligned} \tag{6a}$$

$$\vec{\jmath}(\vec{r}, t) = \sum_n q_{(n)}\;\vec{v}_{(n)}(t)\;\delta\left(\vec{r} - \vec{r}_{(n)}(t)\right) \quad . \tag{6b}$$

Hiebei weist das $n$-te Teilchen die elektrische Ladung $q_{(n)}$ auf und bewegt sich auf der Bahnkurve $\vec{r}_{(n)}(t)$. Die Geschwindigkeit $\vec{v}_{(n)}$ ergibt sich zu

$$\vec{v}_{(n)}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{r}_{(n)}(t) \quad . \tag{6c}$$

Durch direkte Rechnung kann für die in den Gl. 6a und 6b angegebenen Quelldichten die Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung 5 verifiziert werden.

## II.1.C. Lorentzkraft

Aus der Gleichung I.41e für die Kraftdichte

$$\vec{f}(\vec{r},t) = \varrho(\vec{r},t)\,\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\,\vec{\jmath}(\vec{r},t) \times \vec{B}(\vec{r},t) \tag{7}$$

ergibt sich, daß die elektromagnetischen Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ auf ein mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegtes Punktteilchen, welches die elektrischen Ladung $q$ trägt, die folgende Kraft ausüben, welche als **Lorentzkraft** bezeichnet wird:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right) \quad . \tag{8}$$

**Nahwirkungstheorie – Fernwirkungstheorie**

**Nahwirkungstheorie:** Quellen erzeugen Felder, welche ihrerseits Kräfte auf Ladungen und Ströme ausüben. Bei der Berechnung der Kräfte sind diese Felder und die weiteren betrachteten Ladungen und Ströme zur selben Zeit am gleichen Raumpunkt zu nehmen.

**Fernwirkungstheorie** Die Elimination der Felder aus den Kraftgleichungen ergibt Formeln, bei denen die Kräfte direkt zwischen den Quellen und den weiteren betrachteten Ladungen und Strömen wirken.

## II.1.D. Bewegungsgleichungen

Die klassische Newtonsche Bewegungsgleichung für ein Teilchen mit der Masse $m$, auf das die Kraft $\vec{F}$ wirkt, lautet

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{r}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t),t) \quad = \int_V \mathrm{d}^3r'\;\vec{f}(\vec{r}',t) \tag{9}$$

(die Volumsintegration erstreckt sich über das Volumen $V$ des Teilchens, dessen Lage durch die Schwerpunktskoordinate $\vec{r}(t)$ gegeben ist). Diese Gleichung stellt die nichtrelativistische Näherung der allgemeinen relativistischen Bewegungsgleichung für ein Punktteilchen dar (siehe Kap. VIII).

# II.2. Potentiale und Eichtransformationen

## II.2.A. Elektrodynamische Potentiale

Die Maxwellgleichungen sind ein System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, aus denen man bei gegebenen Quellen die elektromagnetischen Felder berechnen kann.

Diese Aufgabe wird wesentlich erleichtert, wenn man zuerst nur die **homogenen Maxwellgleichungen**

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{B} &= 0 && \text{(10a)} \\ \text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} &= 0 && \text{(10b)} \end{aligned}$$

löst. Das Ergebnis ist ganz allgemein

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r},t) &= \text{rot } \vec{A}(\vec{r},t) && \text{(11a)} \\ \vec{E}(\vec{r},t) &= -\text{grad } \phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{r},t) && \text{(11b)} \end{aligned}$$

d.h. die elektromagnetischen Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ werden mit Hilfe eines **Vektorpotentials** $\vec{A}$ und eines **skalaren Potentials** $\phi$ dargestellt. Diese elektrodynamischen Potentiale werden durch die **inhomogenen Maxwellgleichungen**

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= 4\pi\,\varrho && \text{(12a)} \\ \text{rot } \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} &= \frac{4\pi}{c}\,\vec{\jmath} && \text{(12b)} \end{aligned}$$

näher bestimmt. Einsetzen der Gl. 11a, 11b in die Gl. 12a, 12b ergibt die folgenden Bestimmungsgleichungen für die Potentiale:

$$\begin{aligned} \left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,\phi\right) &= -4\pi\,\varrho \quad , && \text{(13a)} \\ \left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} - \text{grad }\left(\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,\phi\right) &= -\frac{4\pi}{c}\,\vec{\jmath} \quad . && \text{(13b)} \end{aligned}$$

**Eichtransformationen**

Geht man von den Potentialen $\vec{A}$ und $\phi$ auf neue Potentiale $\vec{A}'$ und $\phi'$ gemäß den Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} \vec{A}'(\vec{r},t) &= \vec{A}(\vec{r},t) - \text{grad } \psi(\vec{r},t) && \text{(14a)} \\ \phi'(\vec{r},t) &= \phi(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,\psi(\vec{r},t) && \text{(14b)} \end{aligned}$$

über, so ergeben diese neuen Potentiale dieselben elektromagnetischen Felder $\vec{E}(\vec{r},t)$ und $\vec{B}(\vec{r},t)$, wie durch Einsetzen in die Gl. 11a und 11b direkt verifiziert werden kann. Die **Eichfunktion** $\psi(\vec{r},t)$ kann hiebei völlig willkürlich gewählt werden.

## II.2.B. Lorenz–Eichung

Die durch die Eichtransformationen mögliche Freiheit in der Wahl der Potentiale kann zweckmäßigerweise dazu benützt werden, die Bestimmungsgleichungen für die Potentiale zu vereinfachen.

Im Rahmen der Lorenz–Eichung (in vielen Büchern irrtümlich als Lorent̲z–Eichung bezeichnet) verlangt man von den Potentialen, daß sie der Gleichung

$$\mathrm{div}\ \vec{A}_L + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,\phi_L = 0 \tag{15}$$

genügen.
Hiedurch entkoppeln die inhomogenen Maxwellgleichungen zu

$$\Box\,\phi_L(\vec{r},t) = -4\pi\,\varrho(\vec{r},t) \quad , \tag{16a}$$

$$\Box\,\vec{A}_L(\vec{r},t) = -\frac{4\pi}{c}\,\vec{\jmath}(\vec{r},t) \quad , \tag{16b}$$

wobei zur Abkürzung der Schreibung der **Quabla–Operator** $\Box$ eingeführt wurde:

$$\Box \equiv \triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad . \tag{17}$$

Hat man Potentiale $\vec{A}$, $\phi$ vorliegen, so ergibt die Eichtransformation

$$\vec{A}_L(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) - \mathrm{grad}\ \psi(\vec{r},t) \qquad , \quad \phi_L(\vec{r},t) = \phi(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,\psi(\vec{r},t)$$

neue Potentiale $\vec{A}_L$, $\phi_L$, die der Lorenz–Eichung genügen, wenn die Funktion $\psi$ der folgenden Gleichung genügt:

$$\Box\,\psi = \mathrm{div}\ \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,\phi \quad . \tag{18}$$

Man kann also innerhalb der Lorenz–Eichung die Potentiale noch umeichen, wenn man eine Funktion $\psi$ verwendet, welche der Gleichung $\Box\,\psi = 0$ genügt. Die Lorenz–Eichung legt somit die Potentiale noch nicht eindeutig fest, sondern charakterisiert eine ganze Gruppe von Potentialen (Eichklasse).

## II.2.C. Coulomb–Eichung (Strahlungs–Eichung)

Bei der Coulomb– oder Strahlungs–Eichung verlangt man von den Potentialen, daß sie der Gleichung

$$\mathrm{div}\ \vec{A}_T = 0 \tag{19}$$

genügen (der Index $T$ bei $\vec{A}$ steht für transversal, während das skalare Potential $\phi$ meistens durch den Index $C$ entsprechend der Bezeichnung Coulomb–Eichung gekennzeichnet wird).
Bei dieser Eichung entkoppeln die inhomogenen Maxwellgleichungen nicht vollständig, sondern man erhält

$$\triangle\, \phi_C = -4\pi\, \varrho \quad , \tag{20a}$$

$$\Box\, \vec{A}_T = -\frac{4\pi}{c} \underbrace{\left( \vec{\jmath} - \frac{1}{4\pi}\, \mathrm{grad}\, \frac{\partial}{\partial t}\, \phi_C \right)}_{\vec{\jmath}_T} \quad , \tag{20b}$$

d.h. die Bestimmungsgleichung für das skalare Potential wird formal identisch mit der allgemeinen Bestimmungsgleichung im Rahmen elektrostatischer Probleme, dafür wird bei der Bestimmung des Vektorpotentials nur der transversale Anteil des Stromes genommen, welcher die Kontinuitätsgleichung

$$\mathrm{div}\ \vec{\jmath}_T = 0 \tag{21}$$

erfüllt. Die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ spaltet in der Strahlungs–Eichung direkt in einen longitudinalen Anteil $\vec{E}_C$ (welcher auch als Coulombanteil bezeichnet wird) und in einen transversalen Anteil $\vec{E}_T$ auf:

$$\vec{E} = \underbrace{-\mathrm{grad}\ \phi_C}_{\vec{E}_C} \ \underbrace{-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}_T}_{\vec{E}_T} \quad . \tag{22}$$

Diese beiden Anteile erfüllen die Gleichungen

$$\mathrm{rot}\ \vec{E}_C = 0 \qquad , \qquad \mathrm{div}\ \vec{E}_T = 0 \quad . \tag{23}$$

Hat man wieder beliebige Potentiale $\vec{A}$, $\phi$ vorliegen, so ergibt die Eichtransformation

$$\vec{A}_T(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) - \mathrm{grad}\ \psi(\vec{r},t) \qquad , \quad \phi_C(\vec{r},t) = \phi(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,\psi(\vec{r},t)$$

neue Potentiale $\vec{A}_T$, $\phi_C$, die der Strahlungs–Eichung genügen, wenn die Funktion $\psi$ der folgenden Gleichung genügt:

$$\triangle\ \psi = \mathrm{div}\ \vec{A} \quad . \tag{24}$$

Man kann also auch innerhalb der Strahlungs–Eichung die Potentiale noch umeichen, wenn man eine Funktion $\psi$ verwendet, welche der Gleichung $\triangle\ \psi = 0$ genügt. Die Strahlungs–Eichung legt somit die Potentiale gleichfalls noch nicht eindeutig fest, sondern charakterisiert ebenfalls eine ganze Gruppe von Potentialen (Eichklasse).

# II.3. Berechnung der Felder bei gegebenen Quellen

## II.3.A. Fouriertransformierte Maxwellgleichungen

Die Fourierdarstellung der Orts– und Zeitabhängigkeit der verschiedenen physikalischen Größen, z.B. der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$, in der Form

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}^3k \, \mathrm{d}\omega \; \mathrm{e}^{i\vec{k}\vec{r}} \; \mathrm{e}^{-i\omega t} \; \vec{E}(\vec{k},\omega) \quad , \tag{25}$$

wobei die Fourierkomponenten $\vec{E}(\vec{k},\omega)$ durch die Umkehrtransformation

$$\vec{E}(\vec{k},\omega) = \int \mathrm{d}^3r \; \mathrm{d}t \; \mathrm{e}^{-i\vec{k}\vec{r}} \; \mathrm{e}^{i\omega t} \; \vec{E}(\vec{r},t) \tag{26}$$

gegeben sind, gestattet in vielen Fällen eine einfache Lösung der Maxwellgleichungen, da bei der Fouriertransformation aus einem Differentialgleichungssystem ein algebraisches Gleichungssystem wird, welches relativ einfach gelöst werden kann (es bleibt dann meistens als Hauptproblem die Rücktransformation).

**Fouriertransformierte Maxwellgleichungen**

$$\mathrm{div}\; \vec{E} = 4\pi\varrho \quad \rightarrow \quad \vec{k}\cdot\vec{E}(\vec{k},\omega) = -i\,4\pi\;\varrho(\vec{k},\omega) \tag{27a}$$

$$\mathrm{div}\; \vec{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{k}\cdot\vec{B}(\vec{k},\omega) = 0 \tag{27b}$$

$$\mathrm{rot}\; \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \frac{4\pi}{c}\,\vec{\jmath} \quad \rightarrow \quad \vec{k}\times\vec{B}(\vec{k},\omega) + \frac{\omega}{c}\;\vec{E}(\vec{k},\omega) = -i\,\frac{4\pi}{c}\;\vec{\jmath}(\vec{k},\omega) \tag{27c}$$

$$\mathrm{rot}\; \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{k}\times\vec{E}(\vec{k},\omega) - \frac{\omega}{c}\;\vec{B}(\vec{k},\omega) = 0 \tag{27d}$$

**Fouriertransformierte Kontinuitätsgleichung**

$$\mathrm{div}\; \vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial t}\;\varrho = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{k}\cdot\vec{\jmath}(\vec{k},\omega) - \omega\;\varrho(\vec{k},\omega) = 0 \tag{28}$$

**Symmetrien, positive Frequenzen**

Da wir reelle Vektorfelder betrachten, gilt

$$\vec{E}(\vec{r},t)^* = \vec{E}(\vec{r},t) \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{k},\omega)^* = \vec{E}(-\vec{k},-\omega) \quad . \tag{29}$$

Diese Symmetriebeziehung können wir dazu verwenden, die Frequenzintegration auf positive Frequenzen zu beschränken:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) \;&=\; \frac{1}{(2\pi)^4}\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\;\mathrm{e}^{-i\omega t}\int \mathrm{d}^3k\;\mathrm{e}^{i\vec{k}\vec{r}}\;\vec{E}(\vec{k},\omega)\\ &\qquad + \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^4}\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\;\mathrm{e}^{i\omega t}\int \mathrm{d}^3k\;\mathrm{e}^{-i\vec{k}\vec{r}}\;\vec{E}(-\vec{k},-\omega)}_{\text{c.c. (konjugiert komplex)}} \quad .\end{aligned} \tag{30}$$

## II.3.B. Greensche Funktionen D

Arbeiten wir in der Lorenz–Eichung (ohne den Index $L$ explizit anzugeben), so können wir mittels einer Greenschen Funktion $D$, welche die Gleichung

$$\Box\, D(\vec{r}, \vec{r}\,', t-t') = -4\pi\, \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\, \delta(t-t') \tag{31}$$

erfüllt, die Lösungen für die Potentiale $\phi$ und $\vec{A}$ sofort anschreiben:

$$\phi(\vec{r}, t) = \int \mathrm{d}^3r'\ \mathrm{d}t'\ D(\vec{r}, \vec{r}\,', t-t')\, \varrho(\vec{r}\,', t') \quad , \tag{32}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3r'\ \mathrm{d}t'\ D(\vec{r}, \vec{r}\,', t-t')\, \vec{\jmath}(\vec{r}\,', t') \quad . \tag{33}$$

**Berechnung der Greenschen Funktionen D**

Eine nur von $\vec{r}-\vec{r}\,'$ und $t-t'$ abhängige Greensche Funktion D (wie sie der Homogenität von Raum und Zeit entspricht) und die entsprechenden Deltafunktionen besitzen die Fourierdarstellungen

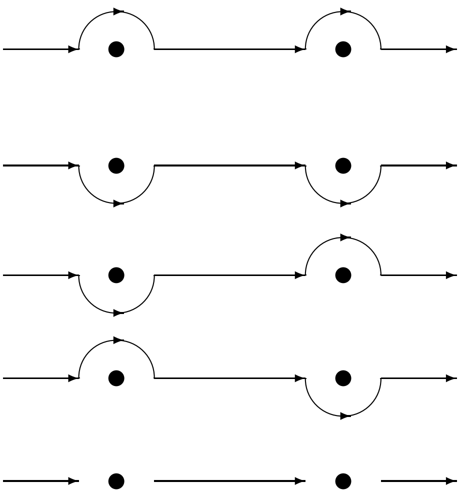
$$D(\vec{r}-\vec{r}\,', t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}^3k\ \mathrm{d}\omega\ \mathrm{e}^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,')}\ \mathrm{e}^{-i\omega(t-t')}\ D(\vec{k}, \omega) \quad , \tag{34}$$

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\, \delta(t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}^3k\ \mathrm{d}\omega\ \mathrm{e}^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,')}\ \mathrm{e}^{-i\omega(t-t')} \quad . \tag{35}$$

Hiemit wird aus der Differentialgleichung 31 für die Greensche Funktion $D(\vec{r}-\vec{r}\,', t-t')$ eine algebraische Gleichung für die Funktion $D(\vec{k}, \omega)$, die sofort gelöst werden kann:

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) D(\vec{k}, \omega) = 4\pi \qquad \longrightarrow \qquad D(\vec{k}, \omega) = \frac{4\pi}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad . \tag{36}$$

Bei der $\omega$-Integration von $D(\vec{k}, \omega)$ sind die beiden Pole bei $\omega = +c|\vec{k}|$ und $\omega = -c|\vec{k}|$ zu beachten. Je nach dem gewählten Integrationsweg erhält man verschiedene Funktionen:



$$D_{ret}(\vec{k}, \omega) = \lim_{\eta \to +0} \frac{4\pi}{k^2 - \left(\frac{\omega}{c} + i\eta\right)^2} \tag{37a}$$

$$D_{av}(\vec{k}, \omega) = \lim_{\eta \to +0} \frac{4\pi}{k^2 - \left(\frac{\omega}{c} - i\eta\right)^2} \tag{37b}$$

$$D_{c}(\vec{k}, \omega) = \lim_{\eta \to +0} \frac{4\pi}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - i\eta} \tag{37c}$$

$$D_{ac}(\vec{k}, \omega) = \lim_{\eta \to +0} \frac{4\pi}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + i\eta} \tag{37d}$$

$$D_{p}(\vec{k}, \omega) = \mathcal{P}\ \frac{4\pi}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \tag{37e}$$

Die Differenz zwischen jeweils zwei der oben angegebenen $D$–Funktionen ergibt immer eine Lösung der homogenen Differentialgleichung $\Box\, D_{hom} = 0$ .

## II.3.C. Die retardierten Potentiale

Führt man die Berechnung der retardierten Greenfunktion

$$D_{ret}(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t') = \lim_{\eta\to+0} \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}^3k \; \mathrm{e}^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,')} \int \mathrm{d}\omega \; \mathrm{e}^{-i\omega(t-t')} \frac{4\pi}{k^2 - \left(\frac{\omega}{c}+i\eta\right)^2} \tag{38}$$

zuerst ($\omega$-Integration) mittels des Cauchyschen Integralsatzes und dann ($\mathrm{d}^3k$-Integration) unter Verwendung von Polarkoordinaten für den Vektor $\vec{k}$ durch (wobei die $k_z$–Achse in Richtung von $\vec{r}-\vec{r}\,'$ gewählt wird), so ergibt sich das folgende einfache Resultat:

$$D_{ret}(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \; \delta\!\left(t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right) \; \Theta(t-t') \quad . \tag{39}$$

Hiebei ist die Thetafunktion durch

$$\Theta(t-t') = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad t > t' \\ 0 & \text{für} \quad t < t' \end{cases} \tag{40}$$

gegeben.

**Gleichungen für die retardierten Potentiale**

Setzt man aus Gl. 39 in die Gl. 32 und 33 ein, so erhält man die retardierten Potentiale

$$\begin{aligned} \phi_{ret}(\vec{r},t) &= \int \mathrm{d}^3r' \; \mathrm{d}t' \; \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \; \delta\left(t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right) \; \Theta(t-t') \; \varrho(\vec{r}\,',t') \; , & \text{(41a)} \\ \vec{A}_{ret}(\vec{r},t) &= \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3r' \; \mathrm{d}t' \; \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \; \delta\left(t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right) \; \Theta(t-t') \; \vec{\jmath}(\vec{r}\,',t') \; , & \text{(41b)} \end{aligned}$$

bzw. nach der $t'$-Integration (Verwendung der Deltafunktion)

$$\begin{aligned} \phi_{ret}(\vec{r},t) &= \int \mathrm{d}^3r' \; \frac{\varrho\left(\vec{r}\,',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \; , & \text{(42a)} \\ \vec{A}_{ret}(\vec{r},t) &= \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3r' \; \frac{\vec{\jmath}\left(\vec{r}\,',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \; . & \text{(42b)} \end{aligned}$$

Diese Potentiale erfüllen die Lorenz–Eichung (dies kann durch eine explizite Nachrechnung direkt verifiziert werden).

**Randbedingungen**

Die Gleichungen 42a und 42b geben Lösungen an, die die sogenannten **natürlichen Randbedingungen** (dies bedeutet das hinreichend starke Verschwinden aller Größen im Unendlichen, wenn die Quellen nur in einem endlich großen Gebiet vorhanden sind) sowie die **Abstrahlungsbedingung** erfüllen.
Zur Erfüllung **spezieller Randbedingungen** sind diesen retardierten Lösungen immer noch Lösungen der homogenen Gleichungen

$$\Box\, \phi_{hom}(\vec{r},t) = 0 \qquad , \qquad \Box\, \vec{A}_{hom}(\vec{r},t) = 0 \tag{43}$$

hinzuzufügen, welche aber $\quad \mathrm{div}\; \vec{A}_{hom} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,\phi_{hom} = 0 \quad$ erfüllen müssen.

# II.4. Energie- und Impulsbilanz

## II.4.A. Energiesatz der Elektrodynamik

Auf ein Teilchen mit der Ladung $q$ wirkt in einem elektromagnetischen Feld die Kraft (siehe Gl. 8)

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right) \quad ,$$

so daß bei einer Verschiebung um die Strecke $\mathrm{d}\vec{s} = \vec{v}\,\mathrm{d}t$ die mechanische Arbeit

$$\mathrm{d}A^{mech} = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{v}\,\mathrm{d}t \, = q\,\vec{E} \cdot \vec{v}\,\mathrm{d}t \tag{44a}$$

geleistet wird. Betrachten wir ein Volumen $V$, so gilt

$$\frac{\mathrm{d}A^{mech}}{\mathrm{d}t} = \int_V \mathrm{d}^3r \;\; \underbrace{\varrho(\vec{r},t)\;\vec{v}(\vec{r},t)}_{\vec{\jmath}(\vec{r},t)} \cdot \vec{E}(\vec{r},t) \quad . \tag{44b}$$

### Umformung mittels der Maxwellgleichungen

Das Produkt $\vec{\jmath} \cdot \vec{E}$ können wir mittels der Maxwellgleichungen durch die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ausdrücken. Multiplizieren wir Gl. 12b mit $\vec{E}$ (inneres Produkt) und Gl. 10b mit $\vec{B}$, so erhalten wir nach Subtraktion der beiden Gleichungen und Erweiterung mit den Faktor $c/(4\pi)$ die Gleichung

$$\vec{\jmath} \cdot \vec{E} = -\mathrm{div}\,\frac{c}{4\pi}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\,\frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) \quad .$$

Führen wir für die in dieser Gleichung auftretenden Ausdrücke die Bezeichnungen

$$\vec{S}(\vec{r},t) \;=\; \frac{c}{4\pi}\left(\vec{E}(\vec{r},t) \times \vec{B}(\vec{r},t)\right) \quad , \tag{45}$$

$$w_{em}(\vec{r},t) \;=\; \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}(\vec{r},t)^2 + \vec{B}(\vec{r},t)^2\right) \tag{46}$$

ein, wobei $\vec{S}$ als **Poynting-Vektor** (oder auch als Vektor der Energiestromdichte) und $w_{em}$ als die **Energiedichte des elektromagnetischen Feldes** bezeichnet werden, so können wir Gl. 44b in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{\mathrm{d}A^{mech}}{\mathrm{d}t} = -\int_V \mathrm{d}^3r \;\, \mathrm{div}\,\vec{S}(\vec{r},t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathrm{d}^3r \;\, w_{em}(\vec{r},t) \tag{47}$$

Bezeichnen wir die gesamte im Volumen $V$ vorhandene elektromagnetische Feldenergie mit $A^{feld}$,

$$A^{feld}(t) = \int_V \mathrm{d}^3r \;\, w_{em}(\vec{r},t) \quad , \tag{48}$$

so ergibt sich der **Energieerhaltungssatz der Elektrodynamik**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A^{mech} + A^{feld}\right) = -\oint_F \mathrm{d}^2\vec{f} \cdot \vec{S} \quad , \tag{49}$$

d.h. die zeitliche Änderung der gesamten im Volumen $V$ vorhandenen Energie (mechanische Energie plus elektromagnetische Feldenergie) ist durch den durch die Oberfläche des betrachteten Volumens fließenden Energiestrom gegeben.

## II.4.B. Impulssatz der Elektrodynamik

Die gesamte mechanische Kraft auf eine Ladungs– und Stromverteilung in einem Volumen $V$ ist durch das Volumsintegral der Lorentzkraftdichte gegeben. Da diese mechanische Kraft der zeitlichen Änderung des mechanischen Impulses $\vec{P}^{mech}$ entspricht, gilt

$$\vec{F}^{mech} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{P}^{mech} = \int_V \mathrm{d}^3r\,\left(\varrho\,\vec{E} + \frac{1}{c}\,\vec{\jmath}\times\vec{B}\right) \quad . \tag{50}$$

**Umformung mittels der Maxwellgleichungen**

Den ersten Term im Integranden von Gl. 50 können wir mittels der Maxwellgleichungen durch die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ausdrücken, indem wir Gl. 12a mit $\vec{E}$ und Gl. 10a mit $\vec{B}$ multiplizieren, die beiden Gleichungen addieren und durch den Faktor $4\pi$ dividieren:

$$\varrho\,\vec{E} = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\mathrm{div}\,\vec{E} + \vec{B}\mathrm{div}\,\vec{B}\right) \quad .$$

Den zweiten Term im Integranden von Gl. 50 können wir mittels der Maxwellgleichungen durch die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ausdrücken, indem wir äußere Produkte von Gl. 12b mit $\vec{B}$ und von Gl. 10b mit $\vec{E}$ bilden, die beiden Gleichungen addieren und durch den Faktor $4\pi$ dividieren:

$$\frac{1}{c}\,\vec{\jmath}\times\vec{B} = \frac{1}{4\pi}\left(\mathrm{rot}\,\vec{B}\times\vec{B} + \mathrm{rot}\,\vec{E}\times\vec{E}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\,\frac{1}{4\pi c}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) \quad .$$

Zusammenfassen dieser beiden Gleichungen ergibt

$$\varrho\,\vec{E} + \frac{1}{c}\,\vec{\jmath}\times\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot\frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\circ\vec{E} + \vec{B}\circ\vec{B} - \frac{1}{2}\,\overleftrightarrow{\mathbf{1}}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right)\right) - \frac{\partial}{\partial t}\,\frac{1}{4\pi c}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) \quad . \tag{51}$$

Führen wir für die in dieser Gleichung auftretenden Ausdrücke die Bezeichnungen

$$\overleftrightarrow{\mathbf{T}}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}(\vec{r},t)\circ\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{B}(\vec{r},t)\circ\vec{B}(\vec{r},t)\right) - \frac{1}{8\pi}\,\overleftrightarrow{\mathbf{1}}\left(\vec{E}(\vec{r},t)^2 + \vec{B}(\vec{r},t)^2\right) \tag{52}$$

$$\vec{g}_{em}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi c}\left(\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{B}(\vec{r},t)\right) \tag{53}$$

ein, wobei $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$ als **Maxwellscher Spannungstensor** und $\vec{g}_{em}$ als die **Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes** bezeichnet werden, so können wir Gl. 50 in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{P}^{mech} = \int_V \mathrm{d}^3r\,\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{T}}(\vec{r},t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathrm{d}^3r\;\vec{g}_{em}(\vec{r},t) \quad . \tag{54}$$

Bezeichnen wir den gesamten im Volumen $V$ vorhandene elektromagnetischen Feldimpuls mit $\vec{P}^{feld}$,

$$\vec{P}^{feld}(t) = \int_V \mathrm{d}^3r\;\vec{g}_{em}(\vec{r},t) \quad , \tag{55}$$

so ergibt sich der **Impulserhaltungssatz der Elektrodynamik**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{P}^{mech} + \vec{P}^{feld}\right) = \oint_F \mathrm{d}^2\vec{f}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{T}}(\vec{r},t) \quad , \tag{56}$$

d.h. die zeitliche Änderung des gesamten im Volumen $V$ vorhandenen Impulses (mechanischer Impuls plus elektromagnetischer Feldimpuls) ist durch die auf die Oberfläche des betrachteten Volumens einwirkende Kraft (= Fläche mal Spannung) gegeben.