

ELEKTRODYNAMIK UND RELATIVITÄTSTHEORIE

Kapitel 1: Einleitung

Vorlesung für Studenten der Technischen Physik

Helmut Nowotny

Technische Universität Wien

Institut für Theoretische Physik

7., von A. Rebhan korrigierte Auflage

Wien, Februar 2006

I. EINLEITUNG

I.1. Historische Entwicklung der Elektrodynamik

I.1.A. Elektrizität

400 v.Chr. Reibungselektrizität (Kräfte, die von geriebenem Bernstein ausgehen).

1660 Elektrisiermaschine (Otto von Guericke, 1602–1686).

1733 Charles-Francois de Cisternay Dufay (1698–1739) postuliert die Existenz von zwei Arten der Elektrizität: positive (glaselektrisch) und negative (harzelektrisch).

1745 Pieter van Musschenbroek (1692–1761), Professor in Leyden, entdeckt die Möglichkeit der Akkumulierung von Ladung: Leydener Flasche.

1747 Benjamin Franklin (1706–1790): Gesetz von der Erhaltung der Ladung.

1767 Joseph Priestley (1733–1804) schließt aus dem Fehlen einer elektrostatischen Kraftwirkung im Innern eines Leiters auf ein Kraftgesetz, welches proportional $\frac{1}{r^2}$ ist (gleiches Abstandsverhalten wie bei dem Gravitationsgesetz).

1785 Charles Augustin **Coulomb** (1736–1806, französischer Physiker) weist dieses Gesetz mittels einer Drehwaage experimentell nach.

Coulomb'sches Gesetz:
$$\vec{F} = k_1 \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

1785 Pierre Simon Laplace (1749–1827) stellt einen Zusammenhang zwischen der Gleichung $\Delta V = 0$ im materiefreien Raum und der Kraft her: $\vec{F} = \text{grad } V$.

1813 Simeon Denis Poisson (1781–1840) erweitert Laplacegleichung zu $\Delta V = -4\pi\varrho$.

1828 George Green (1793–1841) führt für V den Namen Potential ein.

1853 Georg Riemann (1826–1866) macht den Vorschlag, die Poissongleichung $\Delta\phi + 4\pi\rho = 0$ folgendermaßen zu ändern: $\Delta\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi + 4\pi\rho = 0$ (dieser Vorschlag wurde 1867 veröffentlicht, ist aber zu wenig für eine Theorie).

1857 Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887) entdeckt, daß die Ausbreitung von elektrischen Störungen entlang eines Drahtleiters mit Lichtgeschwindigkeit erfolgt.

1862 James Clark Maxwell (1831–1879) führt den Verschiebungsstrom ein, d.h. er betrachtet in der Gleichung $\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{s}$ den gesamten Strom \vec{s} als die Summe von Leitungsstrom und Verschiebungsstrom: $\vec{s} = \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$.

1867 Ludwig Lorenz (1829–1891) entwirft eine elektromagnetische Theorie des Lichtes
Übergang von $\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ auf $\phi(\vec{r}, t) = \int d^3r' \frac{\varrho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$
(dies ist eine zur Maxwell-Theorie äquivalente Theorie).

I.1.B. Magnetismus, elektrische Ströme

400 v.Chr. Kenntnis der Kräfte von Magnetstein.

300 v.Chr. Ausnutzung des Erdmagnetfeldes zur Richtungsbestimmung (China).

1600 William Gilbert (1544–1603) verwendet in seinem Buch über Magnetismus und Elektrizität erstmals die Namen elektrische Kraft und magnetische Kraft. Er stellt fest, daß positive und negative Magnetpole nicht getrennt werden können. Er deutet das Erdmagnetfeld als Feld einer magnetischen Kugel.

1780 Luigi Galvani (1737–1798) stellt fest, daß Froschschenkel unter bestimmten Bedingungen zucken: 'tierische Elektrizität'.

1794 Alessandro Volta (1745–1827) stellt 'metallische Elektrizität' fest. Aus 'galvanischen Elementen' aufgebaute 'Voltasche Säulen' erlauben die Erzeugung von Dauerströmen.

1820 Im Juli 1820 beobachtet Hans Christian Oersted (1777–1851) die Ablenkung einer Magnetsnadel in der Nähe eines stromdurchflossenen Leiters. Hiemit wird erstmalig eine Verbindung zwischen elektrischen und magnetischen Erscheinungen hergestellt (aber vorest nur in qualitativer Form).

1820 Im Oktober 1820 geben Jean-Baptiste Biot (1774–1862) und Félix Savart (1791–1841) einen quantitativen Ausdruck für das von einem Leiterstück $d\vec{s}$, in dem ein Strom I fließt, an der Stelle \vec{r} erzeugte Magnetfeld an:
$$d\vec{B} = k_3 \frac{I d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} .$$

1825 André-Marie Ampère (1775–1836) führt den Namen 'Elektrodynamik' ein.

Quantitativer Ausdruck für die Kraft, die ein Magnetfeld \vec{B} auf ein von einem Strom I durchflossenes Leiterstück $d\vec{s}$ ausübt:
$$d\vec{F} = k_4 I d\vec{s} \times \vec{B} .$$

Er zeigt, daß zwei parallele Leiter im Abstand d , die von den Strömen I_1 und I_2 durchflossen werden, sich anziehen:
$$\frac{F}{l} = k_3 k_4 \frac{2I_1 I_2}{d} .$$

1826 Georg Simon Ohm (1787–1854) findet die Proportionalität zwischen Spannung und Strom:
$$U = RI \quad (\text{Ohmsches Gesetz}).$$

1831 Michael Faraday (1791–1867) findet das elektromagnetische Induktionsgesetz:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -k_4 \frac{\partial}{\partial t} \int d^2f \cdot \vec{B} .$$
 Er prägt den Begriff des magnetischen und des elektrischen Kraftfeldes sowie der Feldlinien.

In Analogie zur Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$ einer Flüssigkeit der Dichte ρ und der Geschwindigkeit \vec{v} erfolgt die Aufstellung der elektrischen Kontinuitätsgleichung:
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0 \quad (1843).$$

Ab nun erfolgt die Entwicklung gemeinsam mit der Elektrizitätslehre.

I.1.C. Optik

300 v.Chr. Reflexion: Einfallswinkel = Ausfallswinkel.

1621 Willebrord Snellius (1580–1626) findet das Brechungsgesetz $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$ experimentell und informiert einige Personen (keine Publikation).

1637 René Descartes gibt eine Ableitung des Brechungsgesetzes im Teilchenbild an, wobei die Lichtteilchen im optisch dichteren Medium schneller sind, damit die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit bei der Brechung ungeändert bleibt (typisches Beispiel, wie mit falschen Voraussetzungen ein richtiges Ergebnis erhalten werden kann).

1665 Pierre de Fermat (1601–1665) erhält das Brechungsgesetz aus einem Extremalprinzip: der optische Weg bzw. die Zeit zum Durchlaufen zwischen zwei Punkten soll ein Minimum sein (Teilchengeschwindigkeit im dichteren Medium ist langsamer).

1666 Nach Isaak Newton (1642–1727) besteht das weiße Licht aus allen Farben. Er weist darauf hin, daß das Licht ein periodischer Vorgang ist, wobei verschiedene Perioden verschiedenen Farben entsprechen (Newtonsche Ringe).

1675 Olaus Roemer (1644–1710) stellt fest, daß die Umlaufdauer der Jupitermonde verschieden ist bei der Bewegung der Erde zum Jupiter hin oder vom Jupiter weg. Er schließt hieraus auf eine endliche Lichtgeschwindigkeit (die Entfernung Sonne – Erde wird in 11 Minuten zurückgelegt, später auf 7 Minuten verkürzt).

1678 Christiaan Huygens (1629–1695) entwirft eine Wellentheorie des Lichtes und gibt systematische Erklärungen für die geradlinige Ausbreitung, die Reflexion und die Brechung aus der Wellenvorstellung.

1801 Thomas Young (1773–1829) entdeckt das Interferenzprinzip.

1808 Etienne-Louis Malus (1775–1812) beobachtet, daß das unter einem Winkel von $52^{\circ}45'$ an Wasser reflektierte Licht alle Eigenschaften eines der beiden Strahlen der Doppelbrechung zeigt. Diese Eigenschaften besitzen teilweise alle reflektierten Strahlen. Malus bezeichnet diese Eigenschaft mit Polarisation.

1815 David Brewster (1781–1868) findet, daß totale Polarisation immer dann vorliegt, wenn gebrochener und reflektierter Strahl zueinander normal sind.

1823 Augustin Fresnel (1788–1827) gibt eine Theorie der Brechung und der Reflexion an und findet die Fresnelschen Formeln. Fresnel behandelte auch das Problem der Brechung an bewegten Körpern und nahm eine teilweise Mitführung des Äthers an.

1851 Armand Hippolyte Louis Fizeau (1819–1896) verifizierte eine solche Mitführung, indem er Licht durch fließendes Wasser leitete und Interferenz mit dem ungestörten Normalstrahl beobachtete.

1888 Durch die Versuche von Heinrich Hertz (1857–1894) wurde gezeigt, daß Lichtwellen elektromagnetische Wellen sind.

I.2. Vektor- und Tensorrechnung (dreidimensional)

I.2.A. Vektoren

Der Begriff "Vektor" wird in zweifacher Bedeutung verwendet:

- a) **algebraisch:** ein geordnetes n -Tupel von Zahlen heißt n -Vektor (Zeilen- bzw. Spaltenvektor).
- b) **geometrisch:** ein geordnetes n -Tupel von Zahlen, die sich bei bestimmten Transformationen in genau definierter Weise benehmen, heißt n -Vektor.

Wir verwenden immer die Begriffsbildung b !

Bei Tensoren ist die Terminologie unmißverständlich: die algebraische Größe ($m \times n$ -Anordnung von Zahlen) heißt $m \times n$ -Matrix, die entsprechende geometrische Größe heißt Tensor zweiter Stufe.

Vektor

Ein Vektor ist ein geordnetes Tripel von Zahlen $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \equiv (a_1, a_2, a_3)$, welches sich bei Drehungen des Koordinatensystems wie die Koordinaten $(x, y, z) \equiv (x_1, x_2, x_3)$ verhalten.

Gilt für ein gedrehtes Koordinatensystem (gestrichene Koordinaten)

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 D_{ij} x_j \quad ,$$

wobei die konstanten Koeffizienten D_{ij} die Drehung der beiden Koordinatensysteme angeben (und z.B. durch drei Drehwinkel oder durch eine Drehachse und einen Drehwinkel ausgedrückt werden können), so gilt

$$a'_i = \sum_{j=1}^3 D_{ij} a_j \quad .$$

Die Zahlen a_i ($i=1,2,3$) heißen die (kartesischen) Komponenten des Vektors \vec{a} .

Der Vektor \vec{a} selbst ist ein kovarianter Begriff, d.h. er ist unabhängig von den Werten seiner Komponenten in verschiedenen Koordinatensystemen.

Da physikalische Sachverhalte stets so zu formulieren sind, daß sie von einem gewählten Koordinatensystem unabhängig sind, sind Vektoren (Tensoren) für eine solche Formulierung bestens geeignet.

Symbolische Schreibweise: man schreibt alle Gleichungen zwischen Vektorkomponenten als solche zwischen 'Größen mit Pfeilen', die Gleichungen gelten dann in jedem Koordinatensystem, sind aber recht abstrakt. Man muß sich Rechenregeln merken, trotzdem unpraktisch für Tensoren höherer Stufe.

Komponentenschreibweise: man betrachtet direkt die (kartesischen) Komponenten und braucht sich daher keine Rechenregeln zu merken. Zweckmäßigerweise verwendet man das (Einsteinsche) Summationsübereinkommen: über doppelt vorkommende Indizes wird summiert.

I.2.B. Tensoren

Skalar: Tensor nullter Stufe, Invariante: Zahl, die bei Drehung des Koordinatensystems invariant bleibt.

Vektor: Ein Vektor kann als Tensor erster Stufe betrachtet werden.

Koordinaten: Komponenten des Ortsvektors $\vec{x} \equiv \vec{r} \equiv (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$.

Tensor 2-ter Stufe: Gilt für zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} die Beziehung $a_i = t_{ij}b_j$, so bilden die Zahlen t_{ij} die Komponenten eines Tensors $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{t}}$. Explizit kann dieser Tensor in der Form

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{t}} \equiv (t_{ij}) = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$$

angegeben werden. Z.B. bildet das direkte Produkt zweier Vektoren einen Tensor zweiter Stufe. Jeder Tensor zweiter Stufe kann als Summe eines symmetrischen und eines antisymmetrischen Tensors geschrieben werden:

$$t_{ij} = \underbrace{\frac{1}{2}(t_{ij} + t_{ji})}_{\text{symmetrisch}} + \underbrace{\frac{1}{2}(t_{ij} - t_{ji})}_{\text{antisymmetrisch}}$$

Einteilung der Tensoren nach ihrer Parität

Bei einer Spiegelung des Koordinatensystems gilt die Transformationsgleichung $t'_{ij\dots} = p t_{ij\dots}$ mit der Parität $p = +1$ oder $p = -1$.

	$p = +1$	$p = -1$
Skalar	(echter) Skalar z.B. Abstand zweier Punkte, Energie eines Teilchens	Pseudoskalar z.B. Volumenelement
Vektor	Pseudovektor, axialer Vektor z.B. Drehimpuls, Winkelgeschwindigkeit	(polarer) Vektor z.B. Ortsvektor, Impuls eines Teilchens
Tensor 2.Stufe	Tensor 2.Stufe	Pseudotensor 2.Stufe
Tensor 3.Stufe	Pseudotensor 3.Stufe z.B. ε -Tensor	Tensor 3.Stufe

Definition des ε -Tensors:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{wenn } ijk \text{ gerade Permutation von } 123 \\ -1 & \text{wenn } ijk \text{ ungerade Permutation von } 123 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1)$$

Es gelten die folgenden Summenformeln:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \quad , \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} = 2\delta_{il} \quad , \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6 \quad . \quad (2)$$

I.2.C. Formeln zur Vektorrechnung

Vektoralgebra:

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \quad \text{bzw.} \quad d_i = a_i + b_i \quad (3a)$$

$$\vec{d} = c \vec{a} = \vec{a} c = (ca_1, ca_2, ca_3) \quad \text{bzw.} \quad d_i = ca_i \quad (3b)$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{d}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{d} \quad (4a)$$

$$c(\vec{a} + \vec{b}) = c\vec{a} + c\vec{b} \quad (4b)$$

Direktes Produkt

Das direkte Produkt führt zu Tensoren höherer Stufe, z.B.

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{t}} = \vec{a} \circ \vec{b} \quad \text{bzw.} \quad t_{ij} = a_i b_j \quad .$$

Skalarprodukt

Das skalare Produkt (inneres Produkt, Verjüngung) führt zu Tensoren niedriger Stufe, z.B.

$$\text{Skalar} \quad c = \vec{a} \cdot \vec{b} \quad \text{bzw.} \quad c = a_i b_i$$

$$\text{Vektor} \quad \vec{d} = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{t}} \cdot \vec{a} \quad \text{bzw.} \quad d_i = t_{ij} a_j$$

Gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, dann stehen die Vektoren senkrecht zueinander, d.h. $\vec{a} \perp \vec{b}$

$$\text{Betrag (Länge) eines Vektors:} \quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = a$$

$$\text{Einheitsvektor } \vec{e}: \quad \text{es gilt } \vec{e} \cdot \vec{e} = 1$$

$$\text{Dreibein } \vec{e}_{(i)} \quad (i=1,2,3): \quad \text{es gilt } \vec{e}_{(i)} \cdot \vec{e}_{(j)} = \delta_{ij}$$

$$\text{Spur eines Tensors zweiter Stufe:} \quad \text{Sp } \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{t}} = t_{ii}$$

Äußeres Produkt zweier Vektoren

$$\text{Dieses Produkt ergibt einen Pseudovektor:} \quad \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \text{bzw.} \quad c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} = 0 \quad (5a)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad (5b)$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \quad (5c)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) (\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d}) (\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad (5d)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \quad (5e)$$

I.3. Vektorfelder

I.3.A. Tensorfelder

Tensorfelder sind Tensoren (beliebiger Stufe), deren Komponenten vom Ort abhängen: $a_{ij\dots}(\vec{r})$.

Speziell: $\phi(\vec{r})$ Skalarfeld, $\vec{a}(\vec{r})$ Vektorfeld.

Wenn die Tensorkomponenten als Funktion der Ortskoordinaten hinreichend oft differenzierbar sind, können Differentiationen besonders einfach dargestellt werden, wenn man den **Vektoroperator**

$$\vec{\nabla} = (\partial_i) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

benutzt, welcher als **Nabla-Operator** bezeichnet wird.

Gradient: $\text{grad } \phi(\vec{r}) = \vec{\nabla} \phi(\vec{r}) = (\partial_i \phi) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$

Divergenz: $\text{div } \vec{a}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \partial_i a_i = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$

Rotation: $\text{rot } \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a}$ bzw. $(\text{rot } \vec{a})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j a_k$

Hiemit können auch höhere Ableitungen gebildet werden. Ein wichtiger Differentialoperator zweiter Ordnung ist der **Laplaceoperator**

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \partial_i \partial_i = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad .$$

div grad: $\text{div grad } \phi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi) = \Delta \phi$

rot grad: $\text{rot grad } \phi = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = 0$ (siehe $\varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi$)

div rot: $\text{div rot } \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = 0$ (siehe $\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j a_k$)

grad div: $\text{grad div } \vec{a} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{a})$ (entspricht $\partial_i \partial_j a_j$)

rot rot: $\text{rot rot } \vec{a} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} = \text{grad div } \vec{a} - \Delta \vec{a}$

Es gelten die folgenden wichtigen Aussagen:

Ein wirbelfreies Vektorfeld läßt sich immer als Gradient eines Skalarfeldes darstellen

$$\text{rot } \vec{a} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{a} = \text{grad } \phi \quad . \quad (6)$$

Ein divergenzfreies Vektorfeld läßt sich immer als Rotation eines Vektorfeldes darstellen

$$\text{div } \vec{b} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{b} = \text{rot } \vec{a} \quad . \quad (7)$$

I.3.B. Integralsätze

Diese Integralsätze verknüpfen Integrale über Ableitungen von Feldern mit den Werten der Felder am Rand des Integrationsgebietes.

Linienintegral

$$\int_{\vec{x}_A}^{\vec{x}_B} d\vec{s} \cdot \vec{\nabla} \phi = \phi(\vec{x}_B) - \phi(\vec{x}_A) \quad (8)$$

Hiebei gilt $ds_i = \frac{dx_i}{du} du$, wenn $x_i = x_i(u)$ die Kurvengleichung ist.

Stokes'scher Integralsatz

$$\int_F d^2\vec{f} \cdot (\text{rot } \vec{a}) = \oint_C d\vec{s} \cdot \vec{a} \quad (9)$$

Hiebei gilt $d^2f_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial v} du dv$, wenn $x_i = x_i(u, v)$ die Flächengleichung ist. Der Durchlaufsinne der Randkurve C bildet zusammen mit $d^2\vec{f}$ eine Rechtsschraube.

Gaußscher Integralsatz

$$\int_V d^3r \text{div } \vec{a} = \oint_F d^2\vec{f} \cdot \vec{a} \quad (10)$$

Man kann diese Integralsätze zur Veranschaulichung (oder auch zur Definition) der Größen div , rot , grad verwenden, indem man infinitesimale Integrationsgebiete betrachtet.

Diese drei Integralsätze können auch symbolisch geschrieben werden:

$$\int_{\vec{x}_A}^{\vec{x}_B} ds_i \partial_i \dots = \dots |_{\vec{x}_B} - \dots |_{\vec{x}_A} \quad (11a)$$

$$\int_F d^2f_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \dots = \oint_C ds_k \dots \quad (11b)$$

$$\int_V d^3r \partial_i \dots = \oint_F d^2f_i \dots \quad (11c)$$

Greensche Integralsätze

Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf das Vektorfeld $\phi \vec{\nabla} \chi$ ergibt den **1. Greenschen Integralsatz**

$$\int_V d^3r [(\vec{\nabla} \phi) \cdot (\vec{\nabla} \chi) + \phi \Delta \chi] = \oint_F d^2\vec{f} \cdot \phi \vec{\nabla} \chi \quad , \quad (12a)$$

während die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf das Vektorfeld $\phi \vec{\nabla} \chi - \chi \vec{\nabla} \phi$ den **2. Greenschen Integralsatz** ergibt:

$$\int_V d^3r (\phi \Delta \chi - \chi \Delta \phi) = \oint_F d^2\vec{f} \cdot (\phi \vec{\nabla} \chi - \chi \vec{\nabla} \phi) \quad . \quad (12b)$$

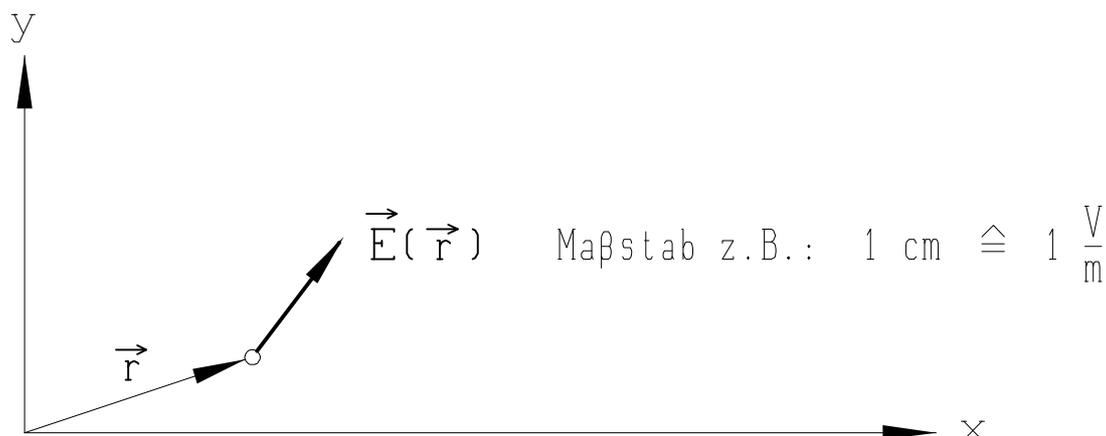


Fig. 1.1 Graphische Darstellung eines Vektors eines Vektorfeldes

I.3.C. Graphische Darstellung von Vektorfeldern

Wenn ein Vektorfeld $\vec{E}(\vec{r})$ gegeben ist, so ist mittels eines frei wählbaren Maßstabes die graphische Darstellung des Vektors $\vec{E}(\vec{r})$ an jeder Stelle \vec{r} möglich, wie dies in Fig. 1.1 angedeutet ist.

Feldlinien

Ausgehend von einem Punkt \vec{r}_0 zeichnet man alle Vektoren $\vec{E}(\vec{r})$, wobei die Änderung von \vec{r} immer in der Richtung des jeweiligen Vektors $\vec{E}(\vec{r})$ stattfindet (siehe Bildteil a) von Fig. 1.2). Die gerichtete Einhüllende all dieser Vektoren ist die **Feldlinie** durch

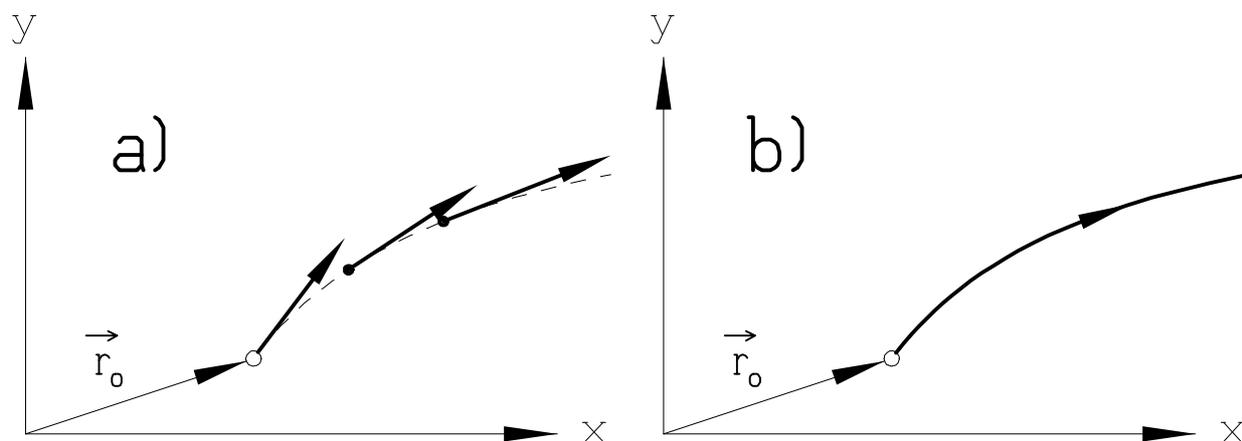


Fig. 1.2 a) Graphische Darstellung mehrerer Vektoren eines Vektorfeldes
 b) Darstellung der zugehörigen Feldlinie

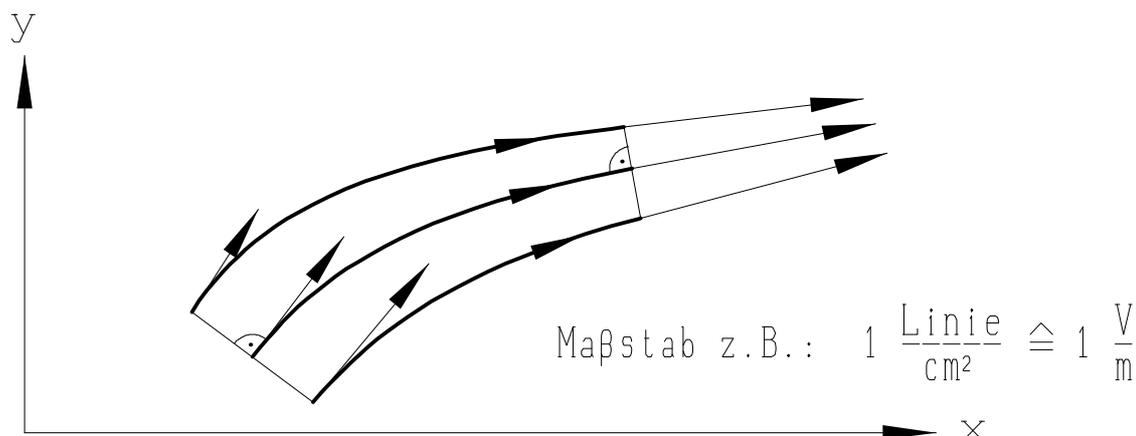


Fig. 1.3 Graphische Darstellung mehrerer Feldlinien eines Vektorfeldes

den Ausgangspunkt \vec{r}_0 . Wenn nur die gerichtete Feldlinie dargestellt wird, so ist für alle Punkte \vec{r} dieser Linie die **Richtung** von $\vec{E}(\vec{r})$ bekannt (eine solche Feldlinie ist im Bildteil b von Fig. 1.2 angegeben).

Führt man dieses Verfahren für verschiedene Ausgangspunkte durch, so erhält man beliebig viele Feldlinien. Hierbei gilt eine wichtige Aussage: **Feldlinien können sich niemals schneiden**, da in jedem Raumpunkt \vec{r} nur eine Richtung $\vec{E}(\vec{r})$ vorhanden ist !

Feldliniendichte

Um in einer Feldliniendarstellung eines Vektorfeldes $\vec{E}(\vec{r})$ außer der Richtung der Vektoren auch ihren Betrag angeben zu können, trifft man die folgende Annahme: die **Flächendichte der Feldlinien** (die jeweilige Fläche steht senkrecht auf die Feldlinien) wird über einen geeigneten Maßstab **proportional zum Betrag** von $\vec{E}(\vec{r})$ gewählt.

Man erkennt so in einer graphischen Darstellung eines Vektorfeldes aus der Dichte der Feldlinien direkt die jeweilige Stärke des Vektorfeldes (siehe Fig. 1.3).

Gilt für das darzustellende Vektorfeld $\vec{E}(\vec{r})$ in einem Raumbereich die Gleichung $\text{div } \vec{E}(\vec{r}) = 0$, so ist die richtige Flächendichte der Feldlinien in diesem Raumbereich automatisch dadurch gewährleistet, daß alle für eine Fläche F_0 einmal gewählten Feldlinien in diesen Raumbereich fortgesetzt werden, d.h. es treten in diesem Raumbereich keine neuen Feldlinien auf. Feldlinien entstehen oder enden immer in einem Raumbereich, in dem für das darzustellende Vektorfeld $\vec{E}(\vec{r})$ die Divergenz nicht verschwindet. Verschwindet die Divergenz eines Vektorfeldes im gesamten Raum, so bedeutet dies, daß in der graphischen Darstellung des betreffenden Vektorfeldes nur geschlossene Feldlinien auftreten können.

I.4. Grundlegende Experimente der Elektrodynamik

I.4.A. Coulombsches Gesetz

Die Kraft F_{12} auf eine Punktladung Q_1 an der Stelle \vec{r}_1 , welche durch eine Punktladung Q_2 an der Stelle \vec{r}_2 bewirkt wird, ist durch

$$\vec{F}_{12} = k_1 \cdot \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \cdot \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad (13)$$

gegeben, d.h. sie wirkt in Richtung der Verbindungslinie der beiden Punktladungen und ist für Ladungen mit dem gleichen Vorzeichen abstoßend, da die Konstante k_1 positiv ist (der Wert und die Dimension dieser Konstanten k_1 werden durch das verwendete Maßsystem festgelegt bzw. umgekehrt kann durch Festlegung dieser Konstanten ein Maßsystem festgelegt werden).

Die durch die Punktladung Q_1 auf die Punktladung Q_2 ausgeübte Kraft F_{21} ist genau entgegengesetzt gleich groß wie die Kraft F_{12} , sodaß die Gesamtkraft Null ist (siehe Fig. 1.4).

Bei Vorhandensein mehrerer Punktladungen gilt das Superpositionsprinzip

$$\vec{F}_1 = k_1 Q_1 \cdot \sum_{i=2}^N Q_i \cdot \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_i}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_i|^3} \quad (14)$$

d.h. die Gesamtkraft ist durch die Summe aller Zweiteilchenkräfte gegeben.

Die **elektrische Feldstärke** \vec{E} an der Stelle \vec{r} ist durch die Kraft auf die Einheitsladung an dieser Stelle \vec{r} gegeben:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{Q} \quad (15)$$

Dies ergibt explizit

$$\vec{E}(\vec{r}) = k_1 \sum_i Q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (16a)$$

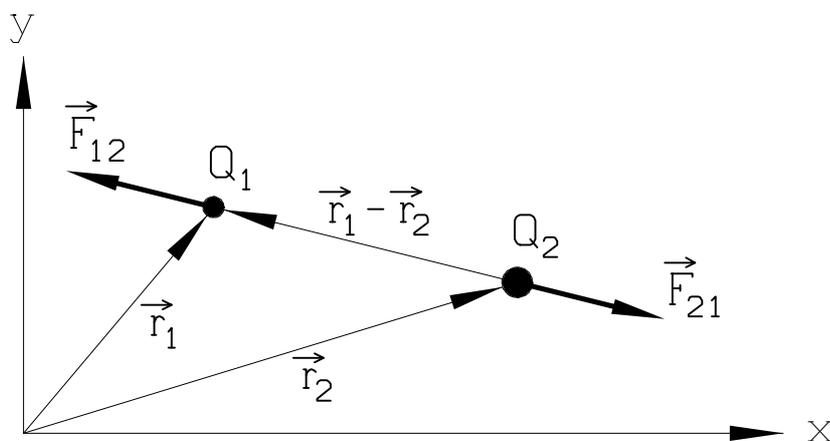


Fig. 1.4 Kräfte zwischen zwei Punktladungen Q_1 und Q_2

bzw. für eine kontinuierliche Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r})$

$$\vec{E}(\vec{r}) = k_1 \int d^3r' \varrho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} . \quad (16b)$$

Mittels der Integralformel (vergleiche hierzu auch die Gleichungen IV.6 und III.40)

$$\oint_F d^2\vec{f} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \begin{cases} 4\pi & \text{wenn } \vec{r}' \text{ innerhalb von } F \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

können wir diese Gleichung in der Form

$$\oint_F d^2\vec{f} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = k_1 4\pi \int_V d^3r' \varrho(\vec{r}') \quad (17)$$

schreiben. Es ist dies die **Integralform der 1. Maxwellgleichung**, aus der mittels des Gaußschen Integralsatzes die **Differentialform der 1. Maxwellgleichung** gewonnen werden kann:

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = k_1 4\pi \varrho(\vec{r}) . \quad (18)$$

I.4.B. Gaußsche Methode zur Ausmessung von Magnetfeldern

Die Grundgleichungen zur Ausmessung von Magnetfeldern sind nicht ganz so einfach wie bei den elektrischen Feldern, da es keine magnetischen Ladungen, sondern nur magnetische Dipole gibt. Auf diese magnetischen Dipole wirkt in einem Magnetfeld \vec{B}_o ein Drehmoment

$$\vec{N} = k_{2a} \vec{m} \times \vec{B}_o , \quad (19)$$

welches diese Dipole in Richtung von \vec{B}_o ausrichtet, wie dies in Fig. 1.5 angedeutet ist. Somit ist die Bestimmung der Richtung von \vec{B}_o leicht möglich (die Konstante k_{2a} wird durch das Maßsystem festgelegt bzw. legt das Maßsystem fest).

Bei Auslenkung des magnetischen Dipoles wirkt auf diesen ein rücktreibendes Drehmoment, welches gemäß Gl. 19 proportional zu $|\vec{m}| \cdot |\vec{B}_o| \sin \varphi$ ist. Entsprechend der

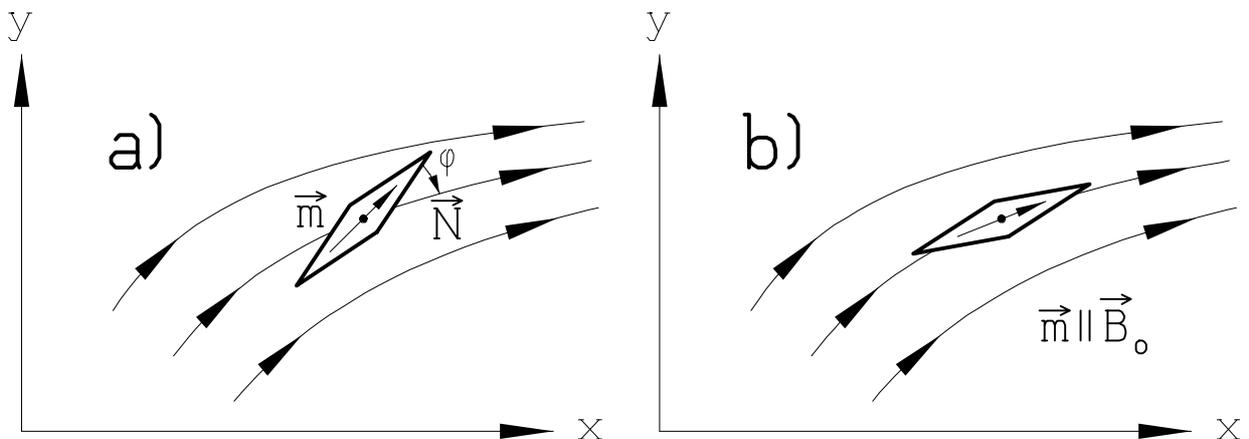


Fig. 1.5 Einstellung einer frei drehbaren Magnetnadel in einem Magnetfeld

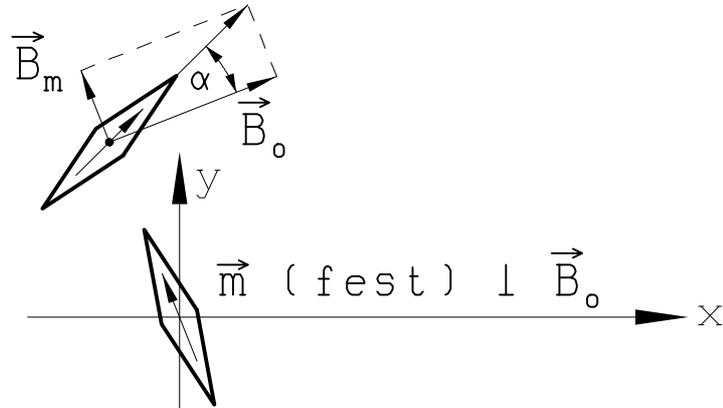


Fig. 1.6 Änderung der Einstellung einer frei drehbaren Magnetnadel bei Anwesenheit einer weiteren fest fixierten Magnetnadel

Schwingungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\Theta\dot{\varphi} = -k_{2a} mB_o \sin \varphi \quad (20a)$$

bzw. für kleine Auslenkungen

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi \quad \text{mit} \quad \omega^2 = k_{2a} mB_o/\Theta \quad (20b)$$

ist daher aus der Messung der Schwingungsdauer die Bestimmung des Produktes mB_o möglich (unter Verwendung des mechanischen Trägheitsmomentes Θ).

Überlagert man nun dem ursprünglichen Magnetfeld das von einem festgehaltenen magnetischen Dipol \vec{m} stammende Magnetfeld, so kann man mittels einer weiteren Magnetnadel die Richtung des Gesamtfeldes bestimmen (siehe Fig. 1.6). Wählt man die Richtung von \vec{m} senkrecht zur bereits bestimmten Richtung von \vec{B}_o , so folgt aus mehreren Richtungsmessungen des Gesamtfeldes, daß für das Magnetfeld des Dipoles in Richtung des Dipolmomentes die Abstandsabhängigkeit

$$\vec{B}_m = k_{2b} \frac{2\vec{m}}{r^3} \quad \text{für } \vec{r} \text{ in Richtung von } \vec{m} \quad (21)$$

besteht. Somit kann aus der Richtung des Gesamtfeldes in einem Abstand r vom zur Richtung von \vec{B}_o senkrecht angeordneten Dipol auf die Größe m/B_o geschlossen werden. Ist α der Winkel zwischen der Richtung des Gesamtfeldes und der Richtung von \vec{B}_o , so gilt

$$\text{tg}\alpha = \frac{B_m}{B_o} = k_{2b} \frac{2}{r^3} \frac{m}{B_o} \quad (22)$$

Zusammen mit dem bereits aus der Schwingungsdauermessung erhaltenen Wert von mB_o kann nun sowohl der Wert B_o des Magnetfeldes als auch der Wert m des magnetischen Momentes ausgerechnet werden. Die Konstante k_{2b} in Gl. 21 legt wieder das Maßsystem fest bzw. umgekehrt.

Die Nichtexistenz von magnetischen Ladungen bewirkt für das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ die Gültigkeit der **2. Maxwellgleichung**

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad . \quad (23)$$

I.4.C. Magnetfeld und Ströme

Das Magnetfeld $d\vec{B}$ eines von einem Strom I durchflossenen Leiterelementes $d\vec{l}$ in der Entfernung \vec{r} ist durch das Biot-Savartsche Gesetz gegeben:

$$d\vec{B} = k_3 \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad . \quad (24)$$

Der analoge Sachverhalt wird in integraler Form durch das Oersted'sche Gesetz

$$\oint_C d\vec{s} \cdot \vec{B} = k_3 4\pi I = k_3 4\pi \int_F d^2\vec{f} \cdot \vec{j} \quad (25)$$

beschrieben, welches mittels des Stokes'schen Integralsatzes auf die **3. Maxwellgleichung** (ohne Verschiebungsstrom) führt:

$$\operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}) = k_3 4\pi \vec{j}(\vec{r}) \quad . \quad (26)$$

Die vollständige 3. Maxwellgleichung erhält man durch die aus der Kontinuitätsgleichung und der 1. Maxwellgleichung folgenden Beziehung

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \left[\vec{j} + \frac{1}{k_1} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] = 0 \quad , \quad (27)$$

indem man in Gl. 26 auf der rechten Seite für $\vec{j}(\vec{r})$ den in der eckigen Klammer von Gl. 27 stehenden Ausdruck verwendet, damit sichergestellt ist, daß $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B}$ immer Null ist.

Faraday'sches Induktionsgesetz, Ampere'sches Kraftgesetz

Das Faraday'sche Induktionsgesetz verknüpft die Änderung des magnetischen Flusses Φ_m durch eine Leiterschleife mit der in der Leiterschleife induzierten Spannung

$$\oint_C d\vec{s} \cdot \vec{E} = -k_4 \frac{d}{dt} \Phi_m = -k_4 \frac{d}{dt} \underbrace{\int d^2\vec{f} \cdot \vec{B}}_{\Phi_m} \quad . \quad (28a)$$

Diese Gleichung stellt in Integralform die **4. Maxwellgleichung** dar, aus der mittels des Stokes'schen Integralsatzes diese Maxwellgleichung in differentieller Form

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -k_4 \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (28b)$$

erhalten werden kann.

Verknüpft mit diesem Induktionsgesetz ist das (erste) Ampere'sche Gesetz

$$d\vec{F} = k_4 I d\vec{l} \times \vec{B} \quad , \quad (29)$$

welches die in einem Magnetfeld \vec{B} auf ein stromdurchflossenes Leiterelement $Id\vec{l}$ wirkende Kraft angibt. Die Verknüpfung dieser beiden Gesetze drückt sich durch das Auftreten des gleichen Koeffizienten k_4 in beiden Gesetzen aus.

I.4.D. Versuche zur Feststellung des Äthers

Versuch von Fizeau (Fizeauscher Interferenzversuch)

Bei diesem Interferenzversuch wird ein Lichtstrahl in zwei Teilstrahlen zerlegt, von denen einer durch ein mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegtes Medium geleitet wird. Aus der beobachteten Interferenz kann auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes im bewegten Medium geschlossen werden. Dieser Versuch wurde erstmalig von A. H. L. Fizeau (1819–1896) im Jahre **1851** durchgeführt, wobei das bewegte Medium fließendes Wasser war. Es ergab sich eine teilweise Mitführung des Lichtes durch das bewegte Medium.

Die Lichtgeschwindigkeit im bewegten Wasser betrug $\frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega}\right) v$.

Der in der runden Klammer stehende Ausdruck wird als Fizeauscher Mitführungskoeffizient bezeichnet (siehe hierzu auch Kapitel XVI.3.B).

Michelson-Versuch

Dieser Versuch wurde von Maxwell vorgeschlagen und dient zur Feststellung der Anisotropie der Lichtausbreitung relativ zur Erde (Erde bewegt sich gegenüber den Äther, welcher das Ausbreitungsmedium für die Lichtstrahlen sein soll). Bei diesem Experiment wird ein Lichtstrahl in zwei Teilstrahlen zerlegt, die nach Durchlaufen der gleichen Wegstrecke (aber in verschiedenen Richtungen) wieder zur Interferenz gebracht werden, um Unterschiede in der Ausbreitungsgeschwindigkeit der beiden Teilstrahlen festzustellen (dieser Versuch wird im Kapitel VII.1.A näher betrachtet).

Dieser Versuch wurde erstmalig **1881** von A. A. Michelson (1852–1931) ausgeführt und ergab ein negatives Ergebnis, d.h. es konnte keine Verschiebung von Interferenzstreifen festgestellt werden (auch die Wiederholung nach einem halben Jahr ergibt kein anderes Ergebnis; dies soll nur sicherstellen, daß nicht zufällig die Erde gegenüber den Äther ruht, da nach einem halben Jahr die Geschwindigkeit der Erde auf ihrem Umlauf um die Sonne entgegengesetzt gerichtet ist).

Versuch von Trouton-Noble

Bei diesem Versuch wird ein Stab, an dessen beiden Enden sich Ladungen Q befinden, betrachtet. Bei Bewegung dieser Anordnung müßte wegen der Lorentzkraft ein Drehmoment auftreten, welches bei einer entsprechend drehbar gelagerten Anordnung beobachtet werden müßte.

Dieser Versuch wurde von Fr. T. Trouton und R. H. Noble (Proc. Roy. Soc. **72**, 132) im Jahre **1903** erstmals durchgeführt und ergab ein negatives Ergebnis, d.h. es konnte kein Auftreten eines Drehmomentes festgestellt werden (bei der praktischen Versuchsdurchführung wurde der Stab mit den Ladungen durch einen geladenen Kondensator ersetzt).

I.5. Maßsysteme

I.5.A. Die verschiedenen Einheitensysteme

Die verschiedenen Darstellungen der Elektrodynamik unterscheiden sich leider oft weitgehend, so daß jeder Anfänger große Schwierigkeiten haben kann, die Gleichungen eines Lehrbuches mit denen eines anderen zu vergleichen. Oft wird gesagt, diese Unterschiede kämen von der verschiedenen Wahl der Einheiten. Das ist jedoch nicht richtig. Man kann nämlich alle Beziehungen der Physik als Größengleichungen schreiben, und dann sind sie von der Wahl der Einheiten unabhängig. Wir wollen immer mit Größengleichungen arbeiten, d.h. wenn wir mit $|\vec{F}|$ eine Kraft bezeichnen, so ist darunter das Produkt aus einer Zahl mal einer Einheit zu verstehen, also in einem speziellen Fall etwa $|\vec{F}| = 3$ Newton. Die Aufteilung in Zahlenwert und Einheit ist völlig willkürlich, die physikalische Größe ist davon unabhängig. In einer richtigen Größengleichung wie $\vec{F} = m\vec{a}$ kann man jede einzelne Größe in einer beliebig vorgeschriebenen Einheit der gleichen Dimension schreiben, denn in ihr kommen nur die gegen Einheitenwechsel invarianten Größen, d.h. die Produkte aus Zahlenwert und Einheit vor. Man braucht also bei ihr die zu wählenden Einheiten gar nicht festzulegen.

Das Problem der verschiedenen Begriffssysteme in der Elektrodynamik besteht darin, daß man verschiedene physikalische Größen gleich bezeichnet (und meist auch das gleiche Formelzeichen verwendet). Wir werden im folgenden diese verschiedenen Größen durch Indizes unterscheiden und die entsprechenden Umrechnungsgleichungen angeben, so daß das eingangs erwähnte Problem nicht auftreten sollte.

Die Wahl der Einheiten

Die Maxwellgleichungen lauten mit den bisher noch nicht festgelegten Konstanten k_1 , k_3 und k_4 folgendermaßen:

$$\operatorname{div} \vec{E} = k_1 4\pi \varrho \quad (30a)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (30b)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = k_3 4\pi \vec{j} + \frac{k_3}{k_1} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \quad (30c)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -k_4 \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad . \quad (30d)$$

Die Kraftgleichungen für die elektrischen und magnetischen Kräfte können wir zu der Lorentzkraftdichte \vec{f} zusammenfassen:

$$\vec{f} = \varrho \vec{E} + k_4 \vec{j} \times \vec{B} \quad . \quad (31)$$

Man kann zeigen, daß die Konstanten k_1 , k_3 und k_4 (sowie k_{2a} und k_{2b} , siehe die Gl. 19 und 21), die in unseren bisherigen Gleichungen aufgetreten sind, teilweise voneinander abhängen. Wählt man eine beliebige Ladung als Einheit $[Q_o]$ der elektrischen Ladung und einen beliebigen Magneten als Einheit $[M_o]$ des magnetischen Momentes und verwendet zur Verknüpfung zwischen elektrischer Ladung Q und elektrischen Strom I die Größengleichung

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad , \quad (32)$$

so ergibt sich als Einheit für die Koeffizientenkombinationen $(k_1 k_{2b})/(k_3^2 k_{2a})$ und $(k_1 k_{2a})/(k_4^2 k_{2b})$ jeweils das Quadrat einer Geschwindigkeit, also eine von der Wahl der elektromagnetischen Einheiten völlig unabhängige Größe. **Experimentell** ergibt sich für diese Geschwindigkeit der Wert der **Lichtgeschwindigkeit** c , d.h. es gelten die Beziehungen

$$\frac{k_1 k_{2b}}{k_3^2 k_{2a}} = c^2 \quad \text{und} \quad \frac{k_1 k_{2a}}{k_4^2 k_{2b}} = c^2 \quad , \quad \text{somit auch} \quad \frac{k_1}{k_3 k_4} = c^2 \quad . \quad (33)$$

Daher können nur einige Koeffizienten frei gewählt werden. Durch die verschiedene Wahl dieser (teilweise dimensionsbehafteten) Koeffizienten ergeben sich nun die verschiedenen Begriffssysteme:

Das System der elektrostatischen CGS-Einheiten (E.S.E.)

Zur Definition der elektrostatischen Größen wählt man $k_1 = 1$ und legt hiemit die Dimension der elektrischen Ladung im CGS-System fest. Der Anschluß der magnetischen Größen erfolgt mit der Wahl von $k_4 = 1$ und $k_{2b} = 1$. Somit ist das E.S.E.-System durch die folgenden Konstantenwerte charakterisiert:

$$k_1^{[s]} = 1 \quad , \quad k_{2a}^{[s]} = c^2 \quad , \quad k_{2b}^{[s]} = 1 \quad , \quad k_3^{[s]} = \frac{1}{c^2} \quad , \quad k_4^{[s]} = 1 \quad . \quad (34)$$

Die Grundgleichungen der Elektrodynamik lauten in diesem System somit

$$\operatorname{div} \vec{E}^{[s]} = 4\pi \varrho^{[s]} \quad (35a)$$

$$\operatorname{div} \vec{B}^{[s]} = 0 \quad (35b)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B}^{[s]} = \frac{4\pi}{c^2} \vec{j}^{[s]} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}^{[s]} \quad (35c)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}^{[s]} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}^{[s]} \quad (35d)$$

$$\vec{f} = \varrho^{[s]} \vec{E}^{[s]} + \vec{j}^{[s]} \times \vec{B}^{[s]} \quad (35e)$$

Das System der elektromagnetischen CGS-Einheiten (E.M.E.)

Zur Definition der magnetischen Größen wählt man $k_{2a} = 1$, $k_{2b} = 1$, und legt hiemit die Dimension des magnetischen Momentes und der magnetischen Feldstärke im CGS-System fest. Der Anschluß der elektrischen Größen erfolgt mit der Wahl von $k_4 = 1$. Somit ist das E.M.E.-System durch die folgenden Konstantenwerte charakterisiert:

$$k_1^{[m]} = c^2 \quad , \quad k_{2a}^{[m]} = 1 \quad , \quad k_{2b}^{[m]} = 1 \quad , \quad k_3^{[m]} = 1 \quad , \quad k_4^{[m]} = 1 \quad . \quad (36)$$

Die Grundgleichungen der Elektrodynamik lauten in diesem System somit

$$\operatorname{div} \vec{E}^{[m]} = 4\pi c^2 \varrho^{[m]} \quad (37a)$$

$$\operatorname{div} \vec{B}^{[m]} = 0 \quad (37b)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B}^{[m]} = 4\pi \vec{j}^{[m]} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}^{[m]} \quad (37c)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}^{[m]} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}^{[m]} \quad (37d)$$

$$\vec{f} = \varrho^{[m]} \vec{E}^{[m]} + \vec{j}^{[m]} \times \vec{B}^{[m]} \quad (37e)$$

Das System der gemischten CGS-Einheiten (Gaußsches System)

In diesem System gibt man die elektrischen Größen im E.S.E.-System und die magnetischen Größen im E.M.E.-System an, d.h. man wählt $k_1 = 1$ und $k_{2a} = 1$, $k_{2b} = 1$. Somit ist das Gaußsche System durch die folgenden Konstantenwerte charakterisiert:

$$k_1 = 1 \quad , \quad k_{2a} = 1 \quad , \quad k_{2b} = 1 \quad , \quad k_3 = \frac{1}{c} \quad , \quad k_4 = \frac{1}{c} \quad . \quad (38)$$

Die Grundgleichungen der Elektrodynamik sind in diesem System, welches wir im Verlauf der weiteren Vorlesung verwenden werden, sehr symmetrisch (siehe Kap. I.5.B.).

Das Internationale Einheitensystem (SI)

Dieses Einheitensystem verwendet die Gleichung

$$\frac{F}{l} = k_3 k_4 \frac{2I_1 I_2}{d} \quad , \quad (39)$$

welche die Kraft pro Längeneinheit zwischen zwei parallelen linienförmigen Strömen I_1 und I_2 angibt, zur Definition der Grundeinheit 'Ampere' [A] für den elektrischen Strom und ergänzt so das MKS-System zum MKSA-System. Gemäß der Definition ($F/l = 2 \cdot 10^{-7}$ N/m, wenn $d = 1$ m) gilt somit $k_3 k_4 \equiv 10^{-7}$ N/A². Der Anschluß der weiteren Größen erfolgt mit der Wahl von $k_4 = 1$ sowie $k_{2b} = 1/(4\pi)$. Somit ist das SI-System durch die folgenden Konstantenwerte charakterisiert:

$$k_1^{[SI]} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \quad , \quad k_{2a}^{[SI]} = \frac{1}{\mu_o} \quad , \quad k_{2b}^{[SI]} = \frac{1}{4\pi} \quad , \quad k_3^{[SI]} = \frac{\mu_o}{4\pi} \quad , \quad k_4^{[SI]} = 1 \quad . \quad (40)$$

Hiebei gilt $\mu_o \equiv 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A² = $4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am

sowie $\epsilon_o = \frac{1}{c^2 \mu_o} = 8.86 \cdot 10^{-12}$ As/Vm .

Dieses Einheitensystem wird in Kap. I.5.C. näher betrachtet.

I.5.B. Das Gaußsche System

Die Grundgleichungen der Elektrodynamik lauten in diesem System

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \varrho \quad (41a)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (41b)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \quad (41c)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (41d)$$

$$\vec{f} = \varrho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} \quad (41e)$$

Die cgs-Einheiten der einzelnen physikalischen Größen sind in der folgenden Tabelle angegeben.

Größe	Symbol	Gaußsche Einheit	Bezeichnung
Länge	l	cm	Zentimeter (Basiseinheit)
Masse	m	g	Gramm (Basiseinheit)
Zeit	t	s	Sekunde (Basiseinheit)
Frequenz	f, ν	s^{-1}	Hertz (Hz)
Kraft	\vec{F}	$g \text{ cm } s^{-2}$	dyn
Kraftdichte	\vec{f}	$g \text{ cm}^{-2} s^{-2}$	dyn/cm ³
Arbeit, Energie	W, U	$g \text{ cm}^2 s^{-2}$	erg
Leistung	P	$g \text{ cm}^2 s^{-3}$	erg/s
Drehmoment	\vec{N}	$g \text{ cm}^2 s^{-2}$	dyn cm
elektrische Ladung	q, Q	$g^{1/2} \text{ cm}^{3/2} s^{-1}$	statcoulomb
elektrische Ladungsdichte	ϱ	$g^{1/2} \text{ cm}^{-3/2} s^{-1}$	statcoulomb/cm ³
elektrische Feldstärke	\vec{E}	$g^{1/2} \text{ cm}^{-1/2} s^{-1}$	statvolt/cm = dyn/statcoulomb
elektrisches Potential	ϕ, V	$g^{1/2} \text{ cm}^{1/2} s^{-1}$	statvolt = statcoulomb/cm
elektrischer Strom	I	$g^{1/2} \text{ cm}^{3/2} s^{-2}$	statampere
elektrische Stromdichte	\vec{j}	$g^{1/2} \text{ cm}^{-1/2} s^{-2}$	statampere/cm ²
magnetische Feldstärke	\vec{B}	$g^{1/2} \text{ cm}^{-1/2} s^{-1}$	Gauß (G) = dyn/statcoulomb
magnetisches Moment	\vec{m}	$g^{1/2} \text{ cm}^{5/2} s^{-1}$	erg/Gauß
magnetischer Fluß	Φ_m	$g^{1/2} \text{ cm}^{3/2} s^{-1}$	Maxwell (Mx) = G cm ²

Der Zusammenhang mit den Größen des E.S.E.-Systems und des E.M.E.-Systems ist durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$Q = Q^{[s]} = c Q^{[m]}, \quad \varrho = \varrho^{[s]} = c \varrho^{[m]}, \quad \vec{E} = \vec{E}^{[s]} = \frac{1}{c} \vec{E}^{[m]}, \quad (42a)$$

$$\phi = \phi^{[s]} = \frac{1}{c} \phi^{[m]}, \quad I = I^{[s]} = c I^{[m]}, \quad \vec{j} = \vec{j}^{[s]} = c \vec{j}^{[m]}, \quad (42b)$$

$$\vec{B} = c \vec{B}^{[s]} = \vec{B}^{[m]}, \quad \vec{m} = c \vec{m}^{[s]} = \vec{m}^{[m]}, \quad \Phi_m = c \Phi_m^{[s]} = \Phi_m^{[m]}. \quad (42c)$$

I.5.C. Das SI-System

Die Grundgleichungen der Elektrodynamik lauten in diesem System

$$\operatorname{div} \vec{E}^{[SI]} = \frac{1}{\epsilon_o} \varrho^{[SI]} \quad (43a)$$

$$\operatorname{div} \vec{B}^{[SI]} = 0 \quad (43b)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B}^{[SI]} = \mu_o \vec{j}^{[SI]} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}^{[SI]} \quad (43c)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}^{[SI]} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}^{[SI]} \quad (43d)$$

$$\vec{f} = \varrho^{[SI]} \vec{E}^{[SI]} + \vec{j}^{[SI]} \times \vec{B}^{[SI]} \quad (43e)$$

Die SI-Einheiten der einzelnen physikalischen Größen sind in der folgenden Tabelle angegeben.

Größe	Symbol	SI Einheit	Bezeichnung
Länge	l	m	Meter (Grundeinheit)
Masse	m	kg	Kilogramm (Grundeinheit)
Zeit	t	s	Sekunde (Grundeinheit)
Frequenz	f, ν	s^{-1}	Hertz (Hz)
Kraft	\vec{F}	kg m s^{-2}	Newton (N)
Kraftdichte	\vec{f}	$\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-2}$	N/m^3
Arbeit, Energie	W, U	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$	Joule (J) = N m = W s
Leistung	P	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-3}$	Watt (W) = J/s = V A
Drehmoment	\vec{N}	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$	N m
elektrische Ladung	$Q^{[SI]}, q^{[SI]}$	s A	Coulomb (C) = A s
elektrische Ladungsdichte	$\rho^{[SI]}$	$\text{m}^{-3} \text{s A}$	Coulomb/m ³
elektrische Feldstärke	$\vec{E}^{[SI]}$	$\text{kg m s}^{-3} \text{A}^{-1}$	V/m = N/C
elektrisches Potential	$\phi^{[SI]}, V$	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-3} \text{A}^{-1}$	Volt (V) = W/A
elektrischer Strom	$I^{[SI]}$	A	Ampere (Grundeinheit)
elektrische Stromdichte	$\vec{j}^{[SI]}$	$\text{m}^{-2} \text{A}$	Ampere/m ²
magnetische Feldstärke	$\vec{B}^{[SI]}$	$\text{kg s}^{-2} \text{A}^{-1}$	Tesla (T) = N A ⁻¹ m ⁻¹
magnetisches Moment	$\vec{m}^{[SI]}$	$\text{m}^2 \text{A}$	J/T
magnetischer Fluß	$\Phi_m^{[SI]}$	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \text{A}^{-1}$	Weber (Wb) = T m ² = V s

Der Zusammenhang mit den Größen des Gaußschen Systems ist durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_o}} Q^{[SI]}, \quad \varrho = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_o}} \varrho^{[SI]}, \quad \vec{E} = \sqrt{4\pi\epsilon_o} \vec{E}^{[SI]}, \quad (44a)$$

$$\phi = \sqrt{4\pi\epsilon_o} \phi^{[SI]}, \quad I = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_o}} I^{[SI]}, \quad \vec{j} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_o}} \vec{j}^{[SI]}, \quad (44b)$$

$$\vec{B} = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_o}} \vec{B}^{[SI]}, \quad \vec{m} = \sqrt{\frac{\mu_o}{4\pi}} \vec{m}^{[SI]}, \quad \Phi_m = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_o}} \Phi_m^{[SI]}. \quad (44c)$$