

ELEKTRODYNAMIK UND RELATIVITÄTSTHEORIE

Vorlesung für Studenten der Technischen Physik

Helmut Nowotny

Technische Universität Wien

Institut für Theoretische Physik

7., von A. Rebhan korrigierte Auflage

Wien, Februar 2006

Für den Inhalt verantwortlich:

Helmut Nowotny, Wien.

Verlag und Druck:

Institut für Theoretische Physik, Technische Universität Wien.

Alle Rechte

beim Autor Helmut Nowotny, Wien.

*Vielleicht, daß mancher eh' die Wahrheit finden sollte,
Wenn er mit mindrer Müh die Wahrheit suchen wollte;
Und mancher hätte sie wohl zeitiger entdeckt,
Wofern er nicht geglaubt, sie wäre tief versteckt.
Verborgen ist sie wohl; allein nicht so verborgen,
Daß du der finstern Schriften Wust,
Um sie zu sehn, mit tausend Sorgen
Bis auf den Grund durchwühlen mußt.
Verlaß dich nicht auf fremde Müh,
Such selbst, such aufmerksam, such oft; du findest sie.
Die Wahrheit, lieber Freund! die alle nötig haben,
Die uns als Menschen glücklich macht,
Ward von der weisen Hand, die sie uns zugedacht,
Nur leicht verdeckt, nicht tief vergraben.*

(Christian Fürchtegott Gellert)

Vorwort zur 6. Auflage

Das vorliegende Skriptum "Elektrodynamik und Relativitätstheorie" umfaßt den Vorlesungsstoff meiner gleichnamigen Vorlesung, ersetzt aber nicht völlig den Vorlesungsbesuch, da es nicht als eigenständiges Lehrbuch anzusehen ist. Hiezu fehlen nämlich viele ergänzende Erläuterungen und Darstellungen, die zu einem umfassenden und vollkommen selbsttragenden Aufbau dieser klassischen Theorien gehören.

Außer der Behebung einiger Schreibfehler weist diese 6. Auflage zwei wesentliche Unterschiede zu den früheren Auflagen auf. Das neue Kapitel XIII.3 beschreibt einen allgemeinen Zugang zu den elektrotechnischen Begriffen Impedanz und Admittanz über die elektromagnetischen Felder. Ferner wurde versucht (über das ganze Skriptum verteilt), die beiden bei harmonischer Zeitabhängigkeit üblichen Darstellungen (einerseits als Realteil eines komplexen Ausdruckes, wobei aber die Angabe, daß nur der Realteil betrachtet wird, weggelassen wird, und andererseits als Summe eines komplexen Ausdruckes plus konjugiert komplexer Ausdruck, was vor allem in Hinblick auf Multiplikationen rechen-technisch vorteilhaft ist) so zu verwenden, daß bei beiden Darstellungen die gleichen Amplituden auftreten.

Konzeption der Vorlesung

Die Vorlesung ist so konzipiert, daß nach einer kurzen historischen Erläuterung die allgemeine Struktur und die vollen Grundgleichungen der jeweiligen Theorie postuliert werden, aus denen dann alle Spezialfälle hergeleitet werden. Dies entspricht nicht der historischen Entwicklung, die erst nach vielen Irrwegen und Umwegen zu den heute gebräuchlichen Formulierungen geführt hat. Es erleichtert aber den Durchblick durch diese Theorien und vermeidet so das gesonderte Lernen der vielen Teilaussagen, die ja alle aus den Grundgleichungen folgen (diese müssen auf jeden Fall gelernt werden).

Aufbau der Vorlesung

Nach einer vor allem historischen Einleitung werden die folgenden drei Teilgebiete behandelt: Elektrodynamik im Vakuum (Teil 1), spezielle Relativitätstheorie (Teil 2) und Elektrodynamik in Materie (Teil 3). Ein möglicher Einwand gegenüber diesen Vorlesungsaufbau mag sein, daß Teil 1 und Teil 3 viele Wiederholungen aufweisen und deshalb zweckmäßigerweise zusammen betrachtet werden sollen. Hiebei kommt jedoch ein Punkt

zu kurz: die Elektrodynamik im Vakuum stellt eine im wesentlichen geschlossene Theorie dar analog zu der im Teil 2 behandelten speziellen Relativitätstheorie, während die Elektrodynamik in Materie ein nicht exakt lösbares Vielteilchenproblem ist und somit grundlegend auf Näherungen angewiesen ist, die die Gültigkeit der jeweiligen Aussagen einschränken (auch wenn dies nicht immer sofort ersichtlich ist). Es war mir ein Anliegen, diesen Punkt wesentlich herauszuarbeiten, und dies dürfte durch eine getrennte Betrachtung am besten zu erreichen sein.

Im Sinne einer noch geschlosseneren Behandlung des Vorlesungsstoffes wäre die spezielle Relativitätstheorie an den Anfang der Vorlesung zu stellen und die Elektrodynamik in einer Viererformulierung zu postulieren. Ich habe dies bewußt nicht getan und formuliere die Elektrodynamik entsprechend der historischen Entwicklung zuerst mit Dreiervektoren, da das Rechnen in dieser Formulierung vor allem für technische Anwendungen sehr wichtig ist.

Einheitensysteme

Bedingt durch die getrennte Entwicklung einzelner Teilgebiete der Elektrodynamik haben sich im Laufe der Zeit mehrere Einheitensysteme entwickelt. Im wesentlichen beschränken wir uns auf zwei Einheitensysteme: auf das in technischen Anwendungen gebräuchliche Internationale Einheitensystem (SI-System) und auf das Gaußsche System, welches (vor allem im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie) die physikalische Struktur der Theorie der Elektrodynamik klar zu Tage treten läßt. Diese beiden Maßsysteme (und auch andere) stiften oft Verwirrung, die einen ganz einfachen Grund hat: es werden Größen, die zwar zur Kennzeichnung einer physikalischen Eigenschaft gleich gut geeignet sind, aber doch nicht gleich sind, mit dem gleichen Namen und dem gleichen Symbol bezeichnet (und erst der Hinweis auf das jeweilige Maßsystem macht die Kennzeichnung eindeutig). Dieses freizügige Vorgehen führt letzten Endes dazu, daß manche Gleichungen, die denselben physikalischen Sachverhalt beschreiben, in den verschiedenen Einheitensystemen verschieden sind, d.h. die Verwendung bestimmter Gleichungen bedingt bereits die Verwendung eines bestimmten Einheitensystems und umgekehrt. Hiemit ergibt sich ein eklatanter Unterschied z.B. zur Mechanik, in der die Gleichungen unabhängig vom verwendeten Einheitensystem sind und vor einer zahlenmäßigen Auswertung noch jedes gewünschte Einheitensystem verwendet werden kann. Wenn man diese Problematik einmal durchschaut hat, sollte es mit den Einheiten der Elektrodynamik keine Schwierigkeiten mehr geben (leider trüben Prüfungserfahrungen diese Erkenntnis).

Danksagung

Zu ganz besonderem Dank bin ich meinem Kollegen Dietrich Grau verpflichtet, welcher den gesamten Vorlesungsstoff einer kritischen Durchleuchtung unterzogen und viele Fehler und Schwachpunkte aufgezeigt hat. Seine Anregungen sind in der vorliegenden Auflage des Skriptums weitgehend berücksichtigt. Es wurden aber keine Anpassungen an die neuen Rechtschreibregeln vorgenommen. Schließlich danke ich für allfällige Hinweise auf sicherlich noch vorhandene weitere Fehler oder auch auf zu große Gedankensprünge in den Herleitungen und Überlegungen bereits im Voraus.

Wien, im September 2003

Helmut Nowotny

INHALTSVERZEICHNIS

I. Einleitung

1. Historische Entwicklung der Elektrodynamik	1
A. Elektrizität	1
B. Magnetismus, elektrische Ströme	2
C. Optik	3
2. Vektor- und Tensorrechnung (dreidimensional)	4
A. Vektoren	4
B. Tensoren	5
C. Formeln zur Vektorrechnung	6
3. Vektorfelder	7
A. Tensorfelder	7
B. Integralsätze	8
C. Graphische Darstellung von Vektorfeldern	9
4. Grundlegende Experimente der Elektrodynamik	11
A. Coulombsches Gesetz	11
B. Gaußsche Methode zur Ausmessung von Magnetfeldern	12
C. Magnetfeld und Ströme	14
D. Versuche zur Feststellung des Äthers	15
5. Maßsysteme	16
A. Die verschiedenen Einheitensysteme	16
B. Das Gaußsche System	19
C. Das SI-System	20

Teil 1 : Elektrodynamik im Vakuum

II. Grundgleichungen

1. Feld-, Kraft- und Bewegungsgleichungen	21
A. Übersicht	21
B. Maxwellgleichungen	22
C. Lorentzkraft	23
D. Bewegungsgleichungen	23
2. Potentiale und Eichtransformationen	24
A. Elektrodynamische Potentiale	24
B. Lorenz-Eichung	25
C. Coulomb-Eichung (Strahlungs-Eichung)	26
3. Berechnung der Felder bei gegebenen Quellen	27
A. Fouriertransformierte Maxwellgleichungen	27
B. Greensche Funktionen D	28
C. Die retardierten Potentiale	29
4. Energie- und Impulsbilanz	30
A. Energiesatz der Elektrodynamik	30
B. Impulssatz der Elektrodynamik	31

III. Elektrostatik im Vakuum

1. Randwertprobleme der Elektrostatik	32
A. Elektrische Felder mit natürlichen Randbedingungen	32
B. Randbedingungen auf geschlossenen Flächen	33
C. Randbedingungen bei Anwesenheit von Leitern	35
D. Methode der Bildladungen	36
2. Elektrische Multipolentwicklung	38
A. Feld in weiter Entfernung von lokalisierten Quellen	38
B. Sphärische Multipolmomente	40
C. Mittelwert des elektrischen Feldes (Kugelbereich)	41
3. Elektrostatische Energie	42
A. Selbstenergie und Wechselwirkungsenergie	42
B. Kapazitätskoeffizienten	43
C. Lokalisierte Ladungsverteilung in einem äußeren Feld	44
D. Wechselwirkung zweier Dipole	45
4. Kräfte in elektrischen Feldern	46
A. Kraft auf eine lokalisierte Ladungsverteilung	46
B. Maxwellscher Spannungstensor	47
C. Bewegung eines geladenen Teilchens	48

IV. Magnetostatik im Vakuum

1. Stationäre Ströme, Magnetostatik	49
A. Magnetische Felder mit natürlichen Randbedingungen	49
B. Magnetisches Dipolmoment	50
C. Mittelwert des magnetischen Feldes (Kugelbereich)	51
D. Vergleich: elektrischer und magnetischer Dipol	52
2. Magnetische Multipolentwicklung	54
A. Skalares magnetisches Potential	54
B. Sphärische magnetische Multipolmomente	55
C. Vektorielle Kugelflächenfunktionen	56
3. Magnetostatische Energie	57
A. Selbstenergie und Wechselwirkungsenergie	57
B. Induktionskoeffizienten	58
C. Lokalisierte Stromverteilung in einem äußeren Feld	59
4. Kräfte in magnetischen Feldern	60
A. Kraft auf eine lokalisierte Stromverteilung	60
B. Bewegung eines geladenen Teilchens	61
C. Magnetische Flasche	62

V. Wellen im Vakuum

1. Ebene Wellen	64
A. Aperiodische ebene Wellen	64
B. Monochromatische ebene Wellen	65
2. Polarisation	66
A. Lineare, zirkulare, elliptische Polarisation	66
B. Graphische Darstellung der Polarisation	68
3. Energie und Impuls von ebenen Wellen	69
A. Poyntingvektor und Energiedichte	69
B. Maxwellscher Spannungstensor und Impulsdichte	69
4. Wellen in Hohlleitern	71
A. Randbedingungen für Hohlleiter	71
B. Zerlegung der Maxwellgleichungen	72
C. Transversale elektromagnetische Wellen (TEM Wellen)	73
D. TM-Wellen und TE-Wellen	74

VI. Elektromagnetische Felder im Vakuum

1. Das Feld eines beliebig bewegten Teilchens	77
A. Liénard–Wiechert–Potentiale	77
B. Berechnung der Felder	79
C. Beispiel: gleichförmig bewegtes Teilchen	81
2. Bewegte Ladungen: Abstrahlung von Wellen	84
A. Berechnung der Felder für $r \rightarrow \infty$	84
B. Abstrahlungsleistung	85
C. Berechnung des Vektors \vec{q}	86
D. Hertzscher Vektor \vec{Z}	88
E. Beispiel: gleichmäßige Abbremsung eines Teilchens	90
3. Abstrahlung bei periodischer Zeitabhängigkeit	91
A. Näherungsentwicklung	91
B. Elektrische Dipolstrahlung	92
C. Magnetische Dipolstrahlung	93
D. Elektrische Quadrupolstrahlung	94
4. Multipolstrahlung	95
A. Berechnung von $\vec{r} \cdot \vec{B}$ und $\vec{r} \cdot \vec{E}$	95
B. Elektrische Multipolfelder	97
C. Magnetische Multipolfelder	98
D. Berechnung der Strahlungsfelder	99
E. Multipolkoeffizienten	101

Teil 2 : Spezielle Relativitätstheorie

VII. Relativistische Kinematik

1. Grundlagen der speziellen Relativitätstheorie	103
A. Versuch von Michelson–Morley	103
B. Längenkontraktion, Zeitdilatation	105
C. Postulate der speziellen Relativitätstheorie	105
D. Lorentztransformationen	106
2. Vierergrößen	108
A. Raum–Zeit–Welt	108
B. Längenkontraktion, Zeitdilatation	110
C. Vierervektoren, Metrik	111
D. Vierergeschwindigkeit, Viererbeschleunigung	113
3. Relativistische Addition von Geschwindigkeiten	114
A. Berechnung mittels Lorentztransformationen	114
B. Berechnung mittels Weltlinie	115
4. Sichtbarkeit der Längenkontraktion?	116
A. Superschnappschuß	116
B. Satz von Terrell	118

VIII. Relativistische Mechanik

1. Punktteilchen	120
2. Relativistische Bewegungsgleichung	121
A. Bewegungsgleichung, Viererkraft	121
B. Energiesatz	122
C. Freies Punktteilchen	122
D. Gleichförmig beschleunigte Bewegung	123
3. Teilchenstöße	125
A. Gesamtimpulserhaltung	125
B. Schwerpunktsystem	126
C. Elastische und inelastische Stoßprozesse	127
4. Beispiele von Teilchenstößen	129
A. Elastischer Stoß zweier Teilchen	129
B. Compton–Streuung	130
C. Inelastische Proton–Proton Streuung	131
D. Zerfall eines Photons	132

IX. Relativistische Elektrodynamik

1. Feldstärketensor, Maxwellgleichungen	133
A. Viererstrom, Viererpotential	133
B. Die inhomogenen Maxwellgleichungen	134
C. Die homogenen Maxwellgleichungen	135
D. Kontinuitätsgleichung und Ladungserhaltung	136
2. Transformationseigenschaften	137
A. Transformationsgleichungen des Feldstärketensors	137
B. Invarianten des Feldstärketensors	138
3. Kraft- und Energiegleichungen	139
A. Lorentzkraftdichte	139
B. Elektromagnetischer Energie-Impuls-Tensor	140
C. Bilanzgleichungen	140
D. Bewegungsgleichung für eine geladenes Punktteilchen	141
4. Relativistische Optik	142
A. Ebene Wellen	142
B. Doppler-Effekt	142
C. Aberration	143

X. Relativistische Hamiltonfunktionen

1. Hamilton-Formalismus	145
A. Grundlagen	145
B. Extremalprinzip für die Wirkung	146
C. Hamiltonsche Gleichungen	147
2. Hamiltonfunktion eines freien Punktteilchens	148
A. Nichtrelativistische Hamiltonfunktion	148
B. Relativistische Hamiltonfunktion	148
C. Bewegungsgleichungen eines freien Punktteilchens	149
3. Freie elektromagnetische Felder	150
A. Elektrodynamik als Lagrangesche Feldtheorie	150
B. Lagrangedichte des freien elektromagnetischen Feldes	151
C. Bewegungsgleichungen des freien Feldes	151
4. Elektromagnetische Wechselwirkung	152
A. Lagrangefunktion der Wechselwirkung	152
B. Bewegungsgleichungen der elektromagnetischen Felder	152
C. Bewegungsgleichungen eines Punktteilchens	153

Teil 3 : Elektrodynamik in Materie

XI. Grundgleichungen (Materie)

1. Aufteilung der Quellen, Elektronentheorie	155
A. Übersicht	155
B. Mittelwertbildung	156
C. Modifikation der Teilfelder	157
2. Makroskopische Maxwellgleichungen	161
A. Maxwellgleichungen	161
B. Materialgleichungen	161
C. Randbedingungen an der Grenzfläche zweier Medien	163
D. Einheitensysteme	163
3. Materialeigenschaften, Dispersionsrelationen	164
A. Grenzen der Anwendbarkeit der Materialgleichungen	164
B. Beziehung von Clausius – Mossotti	165
C. Orientierungspolarisierbarkeit	166
D. Kramers – Kronig Relationen	167
E. Normale und anomale Dispersion	169
4. Energie- und Impulsbilanz	170
A. Bilanzgleichungen der makroskopischen Maxwelltheorie	170
B. Minkowski-Tensor für lineare Medien	171
C. Dissipative Medien	173

XII. Elektro- und Magnetostatik

1. Elektrostatik	175
A. Gleichungen, Randbedingungen, Feldlinienverlauf	175
B. Lösungsmethoden für Probleme der Elektrostatik	176
C. Punktladung vor einem dielektrischen Halbraum	176
D. Dielektrische Kugel in einem homogenen Feld	178
2. Energie und Kräfte im elektrischen Feld	180
A. Elektrostatische Energie in dielektrischen Medien	180
B. Kraftdichte in einem dielektrischen Medium	180
C. Beispiel: Dielektrikum in einem Plattenkondensator	182
3. Magnetostatik	184
A. Gleichungen, Randbedingungen, Feldlinienverlauf	184
B. Lösungsmethoden für Probleme der Magnetostatik	185
C. Homogen magnetisierte Kugel	186
D. Kugel in einem homogenen magnetischen Feld	187
4. Energie und Kräfte im magnetischen Feld	189
A. Feldenergie in einem magnetisierbaren Medium	189
B. Kraftdichte in einem magnetisierbaren Material	190

XIII. Elektrotechnik

1. Elektrodynamik quasistationärer Ströme	191
A. Lineare Stromkreise	191
B. Ohmsches Gesetz	191
C. Beispiel: Kondensatorentladung	193
2. Elektrotechnische Stromkreise	195
A. Kirchhoffsche Gesetze	195
B. Elektrische Leistung	196
C. Beispiel: Parallelresonanzkreis	198
3. Elektromagnetische Zweipole	200
A. Energiebilanz für lineare Medien	200
B. Eingangsimpedanz eines linearen Zweipols	202
C. Strahlungswiderstand von Antennen	204

XIV. Wellen in Materie

1. Wellenausbreitung in materiellen Medien	208
A. Telegraphengleichungen	208
B. Zeitliche Fouriertransformation	209
C. Dispersionsrelationen für monochromatische ebene Wellen	209
2. Reflexion und Brechung von Wellen	211
A. Reflexionsgesetz, Brechungsgesetz	211
B. Randbedingungen für die Wellenamplituden	214
C. Fresnelsche Formeln	215
D. Brewster–Winkel, Totalreflexion	217
3. Elektrodynamik in Metallen	219
A. Ladungen und Wellen in Metallen	219
B. Metalloptik	220
C. Skineffekt	221
4. Kristalloptik	223
A. Ebene Wellen in Kristallen	223
B. Fresnelsche Normalengleichung	224
C. Doppelbrechung	226

XV. Ausbreitung elektromagnetischer Wellen

1. Interferenzerscheinungen	230
A. Lichtintensität und Lichtemission	230
B. Interferenz mehrerer Lichtwellen	231
2. Skalare Beugungstheorie	233
A. Kirchhoff–Identität, Kirchhoff–Verfahren	233
B. Babinetsches Theorem	237
C. Fraunhofer–Beugung	238
D. Fresnelsche Beugung	240

XVI. Elektrodynamik bewegter Materie

1. Grundgleichungen	242
A. Feldgleichungen	242
B. Materialgleichungen	244
C. Näherungsgleichungen für langsam bewegte Materie	246
2. Momententensor	247
A. Elektrische Polarisierung und Magnetisierung	247
B. Transformation des Momententensors	247
3. Experimente	248
A. Unipolarinduktion	248
B. Der Versuch von Fizeau	249

Anhang**A. Mathematische Ergänzungen**

1. Formeln zur Vektorrechnung	252
1.1 Vektorrechnung (dreidimensional)	252
1.2 Integralsätze (dreidimensional)	254
1.3 Vektorrechnung (vierdimensional)	255
1.4 Integralsätze (vierdimensional)	258
2. Kugelfunktionen	260
2.1 Laplace Gleichung	260
2.2 Legendre Polynome	262
2.3 Kugelflächenfunktionen	263
2.4 Vektorielle Kugelflächenfunktionen	265
3. Zylinderfunktionen	267
3.1 Laplace Gleichung	267
3.2 Zylinderfunktionen	267
3.3 Helmholtz Gleichung	268
3.4 Sphärische Zylinderfunktionen	269
4. Spezielle dreidimensionale Koordinatensysteme	271
4.1 Kartesische Koordinaten	271
4.2 Zylinderkoordinaten	273
4.3 Kugelkoordinaten (Polarkoordinaten)	275

B. Einheitensysteme

1. Gaußsches Maßsystem	277
1.1 Gaußsche Einheiten	277
1.2 Formeln der Elektrodynamik (Gaußsches System)	278
2. SI-System	279
2.1 SI – Einheiten	279
2.2 Formeln der Elektrodynamik (SI – System)	280
3. Umrechnungen	281
3.1 Umrechnungstabelle für Formeln	281
3.2 Umrechnungstabelle für Einheiten	282
4. Konstante	283
5. Konsistente Zahlenwerte der Konstanten im SI-System	285

Literatur	287
------------------------	-----