Beispiel 1: Drehimpuls, Kopplungen, Wahrscheinlichkeiten

Ein Zweiteilchen–System besteht aus zwei Spin–1–Teilchen deren räumliche Freiheitsgrade nicht berücksichtigt sind. Der zugehörige Gesamthilbertraum $\mathscr{H}_{\text{gesamt}} = \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$ ist daher 9–dimensional und wird von den orthonormierten Elementen $|1, r; 1, s\rangle$ der Produktbasis $\mathsf{E}^{1\otimes 1}$ aufgespannt

$$\mathsf{E}^{1\otimes 1} = \{|r, s\rangle \,|\, -1 \le r, s \le +1\} \qquad |r, s\rangle = |1, r; 1, s\rangle = |1, r\rangle^{(1)} \otimes |1, s\rangle^{(2)}$$

wobei $|r, s\rangle$ als Kurzschreibweise für die Elemente der Produktbasis aufgefasst wird. Die Faktoren $|1, r\rangle^{(1)}$ bzw. $|1, s\rangle^{(2)}$ der Elemente der Produktbasis sind Elemente von Drehimpulsbasen E^{j_1} bzw. E^{j_2} mit $j_1 = 1$ bzw. $j_2 = 1$ womit $r = -1, 0, +1$ bzw. $s = -1, 0, +1$ zu verstehen ist. Beachte dabei, dass im allgemeinen Elemente $|j, m\rangle$ von Drehimpulsbasen $\mathsf{E}^j = \{|j, m\rangle \,|\, -j \le m \le +j\}$ per definitionem den folgenden Gleichungen zu genügen haben

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{J}}^2 \,|j, m\rangle &= \hbar^2 j(j+1)\,|j, m\rangle \\
\mathbf{J}_z \,|j, m\rangle &= \hbar m \,|j, m\rangle \\
\mathbf{J}_\pm \,|j, m\rangle &= \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\,|j, m \pm 1\rangle
\end{aligned}$$

wobei $\mathbf{J}_\pm = \mathbf{J}_x \pm i\mathbf{J}_y$ die entsprechenden Schiebeoperatoren darstellen. Der Hamiltonoperator $\mathbf{H}$ des Zweiteilchen–Systems ist durch den folgenden Ausdruck gegeben

$$\boxed{\mathbf{H} = \tfrac{1}{\hbar^2}\left(\mathbf{S}_z^{(1)} + \mathbf{S}_z^{(2)}\right)^2 + \tfrac{2}{\hbar^2}\underline{\mathbf{S}}^{(1)} \cdot \underline{\mathbf{S}}^{(2)}}$$

wobei $\underline{\mathbf{S}}^{(1)} \cdot \underline{\mathbf{S}}^{(2)} = \mathbf{S}_x^{(1)} \otimes \mathbf{S}_x^{(2)} + \mathbf{S}_y^{(1)} \otimes \mathbf{S}_y^{(2)} + \mathbf{S}_z^{(1)} \otimes \mathbf{S}_z^{(2)}$ bedeutet, bzw. $\mathbf{S}_z^{(1)} + \mathbf{S}_z^{(2)} = \mathbf{S}_z^{(1)} \otimes \mathbf{1}_{(2)} + \mathbf{1}_{(1)} \otimes \mathbf{S}_z^{(2)}$ zu verstehen ist.

1. Stelle $\mathbf{H}$ als Funktion des Gesamtdrehimpulsoperators $\underline{\mathbf{S}} = [\mathbf{S}_x, \mathbf{S}_y, \mathbf{S}_z]^\mathsf{T} = \underline{\mathbf{S}}^{(1)} + \underline{\mathbf{S}}^{(2)}$ dar.

2. Berechne mit Hilfe der im folgenden angegebenen Clebsch–Gordan Koeffizienten die Eigenzustände $|(11)SM\rangle$ des Gesamtdrehimpulses für $S = 0$ und $S = 2$,

$$|(11)SM\rangle = \textstyle\sum_{s=-1}^{+1} \langle 1, M - s; 1, s \,|\, SM\rangle \; |1, M - s; 1, s\rangle$$

dh. drücke die Elemente $|(11)SM\rangle$ der Standardbasis für $S = 0$ und $S = 2$ **explizit** als Linearkombination der Elemente $|r, s\rangle$ der Produktbasis aus. Beachte, dass die Zustände $|(11)1M\rangle$ für $M = 0, \pm 1$ für dieses Beispiel nicht explizit zu berechnen sind.

$$\begin{aligned}
<1,M{-}s;1,s\,|\,2M> &= \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{(2+M)!(2-M)!}{(1+M-s)!(1-M+s)!(1+s)!(1-s)!}} \\
<1,M{-}s;1,s\,|\,1M> &= \frac{(1+M-s)(1-s)-(1-M+s)(1+s)}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{(1+M)!(1-M)!}{(1+M-s)!(1-M+s)!(1+s)!(1-s)!}} \\
<1,-s;1,s\,|\,00> &= (-1)^{1+s}\,\frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

3. Verwende die Tatsache, dass die Eigenzustände $|(11)SM\rangle$ des Gesamtdrehimpulses auch Eigenzustände des Hamiltonoperators $\mathbf{H}$ sind und berechne damit die Eigenwerte E_{SM} von $\mathbf{H}$. Gib auch die Entartung der Eigenwerte samt zugehörigen Eigenvektoren an und ordne die EWe entsprechend ihrer Größe beginnend mit dem kleinsten.

4. Berechne die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung der z–Komponente des ersten Spin–1–Teilchens den Messwert $+\hbar$ **und** bei der z–Komponente des zweiten Spin–1–Teilchens den Messwert $-\hbar$ zu messen, wenn sich das System im Grundzustand befindet.

Beispiel 2: Zeitunabhängige Störungstheorie

Ein Zweiteilchen–System besteht aus zwei Spin–1–Teilchen deren räumliche Freiheitsgrade nicht berücksichtigt sind. Der zugehörige Gesamthilbertraum $\mathscr{H}_{\text{gesamt}} = \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$ ist daher 9–dimensional und wird, wie in **Beispiel 1**, von den orthonormierten Elementen $|1,r;1,s\rangle$ der Produktbasis $\mathsf{E}^{1\otimes 1}$ aufgespannt

$$\mathsf{E}^{1\otimes 1} = \left\{|r,s\rangle \mid -1 \leq r,s \leq +1\right\} \qquad |r,s\rangle = |1,r;1,s\rangle = |1,r\rangle^{(1)} \otimes |1,s\rangle^{(2)}$$

wobei $|r,s\rangle$ als Kurzschreibweise für die Elemente der Drehimpuls–Produktbasis aufgefasst wird. Beachte dabei wieder, dass Elemente $|j,m\rangle$ von Drehimpulsbasen $\mathsf{E}^j = \left\{|j,m\rangle \mid -j \leq m \leq +j\right\}$ ihren Definitionsgleichungen zu genügen haben, die bereits in Beispiel 1 angegeben sind.

Der Gesamt–Hamiltonoperator $\mathbf{H}(\xi) = \mathbf{H}_0 + \mathbf{W}(\xi)$ des Zweiteilchen–Systems ist als Summe der Operatoren $\mathbf{H}_0$ und $\mathbf{W}(\xi) = \xi\,\mathbf{W}$ gegeben, wobei der Operator $\mathbf{H}_0$ den ungestörten Hamiltonoperator, der Operator $\mathbf{W}(\xi)$ die Störung, bzw. ξ mit $0 < \xi < 1$ einen dimensionslosen Parameter darstellt.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\xi) &= \mathbf{H}_0 + \mathbf{W}(\xi) \\ \mathbf{H}_0 &= \tfrac{1}{\hbar^4}\left(\mathbf{S}_z^{(1)} + \mathbf{S}_z^{(2)}\right)^4 + \tfrac{2}{\hbar^2}\underline{\mathbf{S}}^{(1)} \cdot \underline{\mathbf{S}}^{(2)} \\ \mathbf{W} &= \tfrac{1}{\hbar^2}\mathbf{S}_z^{(1)} \otimes \mathbf{S}_z^{(2)} \end{aligned}$$

Beachte, dass $\underline{\mathbf{S}}^{(1)} \cdot \underline{\mathbf{S}}^{(2)} = \mathbf{S}_x^{(1)} \otimes \mathbf{S}_x^{(2)} + \mathbf{S}_y^{(1)} \otimes \mathbf{S}_y^{(2)} + \mathbf{S}_z^{(1)} \otimes \mathbf{S}_z^{(2)}$ bedeutet, bzw. unter $\mathbf{S}_z^{(1)} + \mathbf{S}_z^{(2)} = \mathbf{S}_z^{(1)} \otimes \mathbf{1}_{(2)} + \mathbf{1}_{(1)} \otimes \mathbf{S}_z^{(2)}$ zu verstehen ist.

1. Stelle den ungestörten Hamiltonoperator $\mathbf{H}_0$ als Funktion des Gesamtdrehimpulsoperators $\underline{\mathbf{S}} = [\mathbf{S}_x, \mathbf{S}_y, \mathbf{S}_z]^{\mathsf{T}} = \underline{\mathbf{S}}^{(1)} + \underline{\mathbf{S}}^{(2)}$ dar.

2. Berechne mit Hilfe der in Beispiel 1 angegebenen Clebsch–Gordan Koeffizienten die Eigenzustände $|(11)1M\rangle$ mit $M = 0, \pm 1$ des Gesamtdrehimpulses, dh. drücke auch die Elemente $|(11)1M\rangle$ der Standardbasis **explizit** als Linearkombination der Elemente $|r,s\rangle$ der Produktbasis aus. Benutze, dass der Gesamtdrehimpuls–Zustand $|(11)00\rangle$ und die Gesamtdrehimpuls–Zustände für $S = 2$ mit $M = 0, \pm 1, \pm 2$ bereits in **Beispiel 1** explizit zu berechnen sind.

3. Verwende die Tatsache, dass die Eigenzustände $|(11)SM\rangle$ des Gesamtdrehimpulses auch Eigenzustände des Hamiltonoperators $\mathbf{H}_0$ sind und berechne damit die Eigenwerte E_{SM} von $\mathbf{H}_0$. Gib auch die Entartung der Eigenwerte E_{SM} samt zugehörigen Eigenvektoren an und ordne die EWe entsprechend ihrer Größe beginnend mit dem kleinsten.

4. Berechne für die Grundzustandsenergie $E^{(0)}_{\min}$ von $\mathbf{H}_0$ in 1.ter Ordnung zeitunabhängiger Störungstheorie für <u>nicht–entartete</u> Energieniveaus die Energiekorrektur $\varepsilon^{(1)}_{\min}(\xi)$. Verwende dabei die Formel $\varepsilon^{(1)}_{\min}(\xi) = \langle \mathbf{u}_{\min} | \mathbf{W}(\xi) | \mathbf{u}_{\min} \rangle$, wobei $|\mathbf{u}_{\min}\rangle$ den Grundzustand darstellt.

5. Berechne für den höchsten angeregten Zustand $E^{(0)}_{\max}$ von $\mathbf{H}_0$ in 1.ter Ordnung zeitunabhängiger Störungstheorie für <u>entartete</u> Energieniveaus die Energiekorrekturen $\varepsilon^{(1)}_{\max,\ell}(\xi)$ mit $\ell = 1, 2, \ldots$. Beachte dabei, dass die Größen $\varepsilon^{(1)}_{\max,\ell}(\xi)$ die Eigenwerte jener Matrix sind, die dem Störoperator $\mathbf{W}(\xi)$ in der orthonormierten Eigenbasis von $\mathbf{H}_0$ zugeordnet ist, die von den Eigenzuständen von $\mathbf{H}_0$ aufgespannt werden, die zum entarteten Energieeigenwert $E^{(0)}_{\max}$ gehören.