Quantentheorie TUTORIUM SS 1997

Angaben für Beispiele zum Ankreuzen / Fr. 21.3.

URL http://tph.tuwien.ac.at/~kreuzer/PS/qtt.ps

T1: Abschätzung für Atomkerne

Die Ausdehnung eines Atomkerns ist von der Größenordnung $r_0 \approx 10^{-13} cm$. Aus der Unschärferelation schätze man die Größenordnung der kinetischen Energie eines im Kern gebundenen Nukleons ab (Nukleonmasse $\approx 2 \cdot 10^{-24} g$). Man vergleiche sie mit der Coulombenergie zweier Protonen im Abstand r_0 und diskutiere die Bedeutung der elektromagnetischen Wechelwirkungen im Kern.

T2: Rechenregeln für Operatoren

a. Der Kommutator $[A, B]$ zweier Operatoren A und B ist definiert durch $[A, B] := AB - BA$. Zeige die folgenden Rechenregeln:

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C], \qquad [AB, C] = [A, C]B + A[B, C].$$

(Die erste Regel kann man als “Leibnizregel” für die Operation $[A, *]$ wirkend auf das nichtkommutative Produkt BC lesen.) Wie lautet die analoge Formel für den Kommutator $[A, BCD]$ mit einem dreifachen Produkt?

b. Berechne für Operatoren A und B mit konstantem Kommutator $[A, B] = 7$ und für natürliche Zahlen m und n die Kommutatoren $[A, B^n]$ und $[A^m, B^n]$.

c. Weiters beweise man die Jacobi Identität

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

(die “zyklische Summe” eines “Doppelkommutators” verschwindet; die 3 Terme entstehen durch zyklische Vertauschungen von A, B, C).

T3: Gebundene Zustände

Für das Potential

$$V(x) = -a\delta(x) + b\theta(x), \qquad a > 0$$

(mit δ-Funktion plus Potentialstufe im Ursprung) berechne man die Energieeigenwerte gebundener Zustände.

Hinweis: Für $V = V_s + a\delta(x)$ ist u stetig und $u'(0_+) - u'(0_-) = a\frac{2m}{\hbar^2}u(0)$.

Quantentheorie TUTORIUM SS 1997

Angaben für Beispiele zum Ankreuzen / Fr. 11.4.

URL http://tph.tuwien.ac.at/~kreuzer/PS/qtt.ps

T4: Erwartungswerte und Unschärfen

Die Wellenfunktionen der Energieeigenfunktionen im unendlich tiefen Topfpotential $V(x) = 0$ für $|x| < a$ und $V(x) = \infty$ für $|x| > a$ sind

$$u_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \sin(\frac{n\pi}{2a}(x+a)) & |x| \le a \\ 0 & |x| \ge a \end{cases} \qquad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Berechne den Erwartungswert der k-ten Potenz P^k des Impulsoperators, sowie die Unschärfen für P^k und den Ortsoperator X.

T5: Eine Anwendung der Unschärferelation

Verwende die allgemeine Unschärferelation für die Operatoren P^k und X um den Erwartungswert von P^{2k} als Funktion der Unschärfe von X und der Erwartungswerte von P^k und P^{k-1} nach unten abzuschätzen.

Hinweis: Für beliebige Operatoren A gilt $(\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - (\langle A \rangle)^2$.

T6: Gebundene Zustände (graphische Lösung)

Ein Teilchen (eindimensional) befinde sich im Potential

$$V(x) = -A\delta(x+a) - B\delta(x) - A\delta(x-a), \qquad A, B \gg \frac{\hbar^2}{m}.$$

a: Man berechne die Energieeigenwerte zu **ungeraden** Energieeigenfunktionen (graphische Lösung der Eigenwertgleichung).

b: Wieviele Energieeigenzustände mit gerader Wellenfunktion sind zu erwarten? Man skizziere die geraden Wellenfunktionen (hier ist keine Rechnung gefragt!).

Hinweis: Für $V(x) = V_{\text{stetig}} - C\,\delta(x)$ muss u stetig sein und $u'(0_+) - u'(0_-) = -C\frac{2m}{\hbar^2}u(0)$.

Quantentheorie TUTORIUM SS 1997

Angaben für Beispiele zum Ankreuzen / Fr. 18.4.

URL http://tph.tuwien.ac.at/~kreuzer/PS/qtt.ps

T7: Transmission

Berechne Transmissions- und Reflexionskoeffizienten für das Potential

$$V(x) = A\delta(x) + B\theta(x)$$

mit Potentialstufe und δ-Funktion.

T8: Meßwahrscheinlichkeiten im Wasserstoffatom

Im Wasserstoffatom mit $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{e^2}{r}$ haben die Energieeigenfunktionen die Form $u_{nlm} = R_{nl}(r)Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$. Insbesondere gilt:

$$R_{10} = a^{-\frac{3}{2}}\, 2e^{-\frac{r}{a}}, \qquad R_{20} = a^{-\frac{3}{2}}\, \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1 - \frac{r}{2a})e^{-\frac{r}{2a}}, \qquad R_{21} = a^{-\frac{3}{2}}\, \tfrac{1}{\sqrt{6}}\frac{r}{2a}e^{-\frac{r}{2a}},$$

$$Y_{0,0} = \sqrt{\tfrac{1}{4\pi}}, \qquad Y_{1,0} = \sqrt{\tfrac{3}{4\pi}}\cos\vartheta, \qquad Y_{1,\pm 1} = \mp\sqrt{\tfrac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\ e^{\pm i\varphi}$$

mit $a = \hbar^2/me^2$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Wellenfunktion des Elektrons durch

$$\psi(x, 0) = Ne^{-2r/a}$$

gegeben. Man berechne die Normierungskonstante N und die Wahrscheinlichkeiten dafür, bei einer Messung zu diesem Zeitpunkt das Elektron im Grundzustand (i.e. $n = 1$) oder in einem der Zustände auf dem 1. angeregten Energieniveaus (i.e. $n = 2$) zu finden.

T9: Meßwahrscheinlichkeit für Impulsbereich

Ein Teilchen besitze zu einem bestimmten Zeitpunkt die Wellenfunktion

$$u(x) = \begin{cases} A\,x\,e^{-ax} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases},$$

wobei $a > 0$ sei (eindimensionales Problem). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei einer Messung des Impulses zu diesem Zeitpunkt ein Wert zwischen $-\hbar a$ und $\hbar a$ gemessen wird?

Hinweis: Da die Eigenwerte des Impulsoperators kontinuierlich sind, muß hier über die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\tilde{u}(p)|^2$ integriert werden (für die Fouriertransformierte Wellenfunktion, i.e. die Wellenfunktion im Impulsraum, kann man auch $\tilde{u}(p) = \langle p|\psi\rangle$ schreiben). Verwende die Formeln

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a}, \qquad \int_0^\infty dx\ x^n e^{-ax} = \frac{n!}{a^{n+1}}.$$

Quantentheorie TUTORIUM SS 1997

Angaben für Beispiele zum Ankreuzen / Fr. 25.4.

URL http://tph.tuwien.ac.at/~kreuzer/PS/qtt.ps

T10: Exponentialfunktion einer Matrix

Für die selbstadjungierte Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$$

berechne man durch Auswerten der Reihenentwicklung die Exponentialfunktion

$$T(\alpha) := e^{i\alpha A}.$$

Weiters ist nachzurechnen, daß $T(\alpha)$ die Matrixdifferentialgleichung $\partial_\alpha T = iAT$ erfüllt.

T11: Formeln für Operatoren

Zeige für λ-unabhängige Operatoren A und B, daß

$$e^{\lambda B} A e^{-\lambda B} = A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} [B, A]_{(n)}$$

gilt, wobei

$$[B, A]_{(n+1)} := [B, [B, A]_{(n)}], \qquad [B, A]_{(1)} := [B, A].$$

Berechne mit diesen Formeln unter der Voraussetzung $[A, B] = \mathbf{1}$ die Operatoren

$$F(A, B) = e^{-iBt} A^2 e^{iBt}, \qquad G(A, B) = e^{-iB^2 t} A^2 e^{iB^2 t}.$$

Hinweis: Verwende die Formel $\partial_\lambda (e^{\lambda B} A e^{-\lambda B}) = e^{\lambda B} [B, A] e^{-\lambda B}$ für die Berechnung der Taylorreihe von $e^{\lambda B} A e^{-\lambda B}$.

T12: Eichinvarianz

Man zeige, daß die Schrödingergleichung im Elektromagnetischen Feld $H\psi = i\hbar\dot{\psi}$ mit $H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 + e\varphi$ unter Eichtransformationen

$$\vec{A}' = \vec{A} + \hbar c\, \vec{\partial} \Lambda, \qquad \varphi' = \varphi - \hbar \dot{\Lambda}, \qquad \psi' = e^{ie\Lambda} \psi$$

invariant ist.

Welche Eichtransformation entspricht einer Verschiebung $\varphi' = \varphi + \Delta E$ des Nullpunktes der Energie?

Welche Eichtransformationen erhalten die in Formel (3.104) des Skriptums verwendete Coulombeichung?

Quantentheorie TUTORIUM SS 1997

Angaben für Beispiele zum Ankreuzen / Fr. 2. 5.

URL http://tph.tuwien.ac.at/~kreuzer/PS/qtt.ps

T13: Messung in einem System mit 3 Zuständen

In einem System mit 3 Zuständen wird zum Zeitpunkt $t = 0$ der Eigenwert $\lambda = 8$ des Operators mit Matrixdarstellung

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

gemessen (wobei der Hamiltonoperator in dieser Basis die diagonale Matrixdarstellung $H = \mathrm{diag}(E_1, E_2, E_3)$ habe). In welchem Zustand befindet sich das System unmittelbar nach der Messung und wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer erneuten Messung der Observablen A zum Zeitpunkt $t > 0$ den gleichen Meßwert wiederzufinden.

T14: Potentielle und kinetische Energie

Für die Energieeigenzustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$, sowie für den Zustand $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ des harmonischen Oszillators sind die Erwartungswerte der kinetischen und der potentiellen Energie zu berechnen.
(Man vergleiche die Ergebnisse mit dem Virialtheorem $2\langle T\rangle = n\langle V\rangle$ mit $n = 2$ für den harmonischen Oszillator; siehe Bsp. P15.)

Hinweis: Die Energieeigenzustände (siehe Skriptum p. 2-27) sind

$$|n\rangle = \psi_n = A_n H_n(u) e^{-u^2/2} \quad \text{mit} \quad u = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x, \quad A_n^2 = \frac{1}{2^n n!}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar\pi}}$$

Eigenschaften der Hermitepolynome H_n findet man im Anhang A.1.

T15: Matrizenmechanik

Berechne die Matrixdarstellungen $X_{mn} = \langle m|X|n\rangle$ und $P_{mn} = \langle m|P|n\rangle$ des Ortsoperators X und des Impulsoperators P für den harmonischen Oszillator (verwende die Energieeigenfunktionen $|n\rangle$ mit $n = 0, 1, 2, \dots$ wie in T14). Zeige, daß $[X, P] = i\hbar\mathbf{1}$ ist, wobei $\mathbf{1}$ die Einheitsmatrix ist. Mit anderen Worten:

$$\sum_{n\geq 0} (X_{mn} P_{nl} - P_{mn} X_{nl}) = i\hbar\delta_{ml}.$$

Quantentheorie TUTORIUM SS 1997

Angaben für Beispiele zum Ankreuzen / Fr. 9. 5.

URL http://tph.tuwien.ac.at/~kreuzer/PS/qtt.ps

T16: Zeitentwicklung des Vernichtungsoperators

Berechne die Zeitentwicklung (Heisenbergbild) des Vernichtungsoperators $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha X + \frac{i}{\hbar\alpha}P)$ mit $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}$ im harmonischen Potential:

$$a_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht}\ a\ e^{-\frac{i}{\hbar}Ht},$$

wobei $H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 X^2 = \hbar\omega_0(a^\dagger a + \frac{1}{2})$ und $[a, a^\dagger] = 1$ gilt.

Hinweis: Man verwende die Formel

$$e^{\lambda B} A e^{-\lambda B} = A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}[B, A]_{(n)} \qquad \text{mit} \quad [B, A]_{(n+1)} := [B, [B, A]_{(n)}], \qquad [B, A]_{(1)} := [B, A].$$

T17: Dichtematrix

Für ein quantenmechanisches System mit Rotationsfreiheitsgraden wird für den Gesamtdrehimpuls $\vec{L}^2$ der Wert $\hbar^2 l(l+1)$ mit $l = 2$ gemessen. Für die restlichen Quantenzahlen muß Gleichverteilung angenommen werden. Berechne die Dichtematrix, die den Zustand des Systems nach der Messung beschreibt, sowie Erwartungswert und Unschärfe der Drehimpuls-Komponente L_z.

T18: Zweidimensionaler harmonischer Oszillator

Gegeben sei der Hamiltonoperator $H = H_1 + H_2 = \frac{P_1^2 + P_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2(X_1^2 + X_2^2)$ und die zugehörigen Vernichtungsoperatoren $a_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha X_i + \frac{i}{\hbar\alpha}P_i)$ mit $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}$.

a. Wie groß ist die Entartung des 2. angeregten Energieniveaus $E = 3\hbar\omega_0$?

b. Stelle den Drehimpulsoperator $L := X_1 P_2 - X_2 P_1$ durch a_i und $a_i^\dagger$ dar.

c. Berechne die Kommutatoren $[L, a_1]$, $[L, a_1^\dagger]$, $[L, a_2]$ und $[L, a_2^\dagger]$.

d. Berechne den Kommutator von L mit $A_\pm := a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2 \pm i(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1)$.

Hinweis: Es gelten die folgenden Formeln:

$$X_j = \frac{1}{\sqrt{2}\ \alpha}(a_j^\dagger + a_j), \qquad P_j = \frac{i\hbar\alpha}{\sqrt{2}}(a_j^\dagger - a_j)$$

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, \qquad [a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0.$$

Quantentheorie TUTORIUM SS 1997

Angaben für Beispiele zum Ankreuzen / Fr. 23. 5.

URL http://tph.tuwien.ac.at/~kreuzer/PS/qtt.ps

T19: Messung des Spins

Ein Spinsystem befinde sich im reinen Zustand mit Erwartungswert $\langle S_z \rangle = \hbar/2$ (d.h. $|u\rangle = |+\rangle$ bezüglich der Spin-Komponente in $z-$Richtung). Berechne die Wahrscheinlichkeit des Meßwerts $\hbar/2$ bei einer Messung der Spinkomponente $S_{z'}$ bezüglich einer $z'-$Achse, die mit der $z-$Achse einen Winkel θ einschließt. Wie groß ist der Erwartungswert $\langle S_{z'} \rangle$.

T20: Spin 1/2 Teilchen und Dichtematrix

a. Stelle die Eigenzustände der Spinkomponente in z-Richtung als Linearkombinationen der Eigenzustände der Spinkomponente in x-Richtung dar.

b. Ein Spin 1/2 Teilchen befinde sich in einem gemischten Zustand mit Dichtematrix

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Für welche Richtung ist die Unschärfe des Spins minimal?

Hinweis: Für einen Operator A ist die Unschärfe in einem gemischten Zustand durch $(\Delta A)^2 = \mathrm{Sp}(\rho A^2) - (\mathrm{Sp}(\rho A)\,)^2$ gegeben.

T21: Spinwechselwirkung

Ein System von zwei Spins $s = \frac{1}{2}$ werde durch den Hamiltonoperator

$$H = \frac{a}{\hbar}(S_z^{(1)} + S_z^{(2)}) + \frac{4b}{\hbar^2}\vec{S}^{(1)} \cdot \vec{S}^{(2)}$$

mit $a, b > 0$ beschrieben. Berechne die Energieeigenwerte und die zugehörigen Eigenzustände in der Basis $|m_1, m_2\rangle = |m_1\rangle^{(1)} \otimes |m_2\rangle^{(2)}$ mit $m_i = \pm$. Für welches Verhältnis der beiden 'Kopplungskonstanten' a und b kommt es zu Entartung?

Bemerkung: Der erste Term kann z.B. als Wechselwirkung mit einem Magnetfeld in z-Richtung gedeutet werden, der zweite beschreibt die Wechselwirkung der magnetischen Momente. Derartige Modelle mit einer Kette von Spins, wobei nur benachbarte Spins Wechselwirken, werden in der Festkörperphysik verwendet (Spinketten).

Fr. 30. 5. 97 Rektorstag !!!

Quantentheorie TUTORIUM SS 1997

Angaben für Beispiele zum Ankreuzen / Fr. 6. 6.

URL http://tph.tuwien.ac.at/~kreuzer/PS/qtt.ps

T22: Clebsch–Gordan Koeffizienten

Man überprüfe für den Fall $j_1 = 1$ und $j_2 = \frac{1}{2}$, daß die Matrix $\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | jm \rangle$ der Clebsch–Gordan Koeffizienten orthogonal ist.

Hinweis: In unserem Fall handelt es sich um eine 6×6 Matrix.
Verwende eine Tabelle der Clebsch–Gordan Koeffizienten, wie z.B. jene in D. Grau, *Übungsaufgaben zur Quantentheorie,* Anhang F.

T23: Drehung im Spin–Raum

Man berechne für ein Teilchen mit Spin $s = 1$ die Darstellungsmatrizen von S_x, S_y und S_z in der Basis $|m_z\rangle$ in der S_z diagonal ist. Weiters berechne man in dieser Basis die Drehmatrix $D(\varphi \vec{e}_x) = e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi S_x}$ für eine Drehung mit Winkel φ um die x-Achse.

Hinweis: $S_\pm |s, m\rangle = \hbar \sqrt{(s \mp m)(s \pm m + 1))}\ |s, m \pm 1\rangle$ mit $S_\pm = S_x \pm i S_y$.
Verwende die Spektraldarstellung um die Exponentialfunktion auszuwerten (dazu berechne man zuerst die Eigenvektoren $|1, m_x\rangle$ der Matrix S_x und die unitäre 3×3 Matrix $\langle 1, m_z | 1, m_x \rangle$).

T24: Relativistischer Oszillator: Störungstheorie

Die relativistische Energie eines Teilchens $E = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}$ kann für kleine Geschwindigkeiten in $E = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{8}\frac{p^4}{m^3 c^2} + O(p^6)$ entwickelt werden. Berechne mit Hilfe dieser Näherung in erster Ordnung Störungstheorie die relativistische Korrektur zu den Energieniveaus und Energieeigenfunktionen des harmonischen Oszillators

$$H = H_0 + V, \qquad H_0 = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 X^2, \qquad V = -\frac{1}{8 m^3 c^2} P^4$$

(die Ruheenergie mc^2 kann in diesem Zusammenhang weggelassen werden). Welche Bedingung muß ω erfüllen, damit dieses Ergebnis eine gute Näherung sein kann?

Formeln: Die Matrixelemente von P^4 ergeben sich aus $P = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(a^\dagger - a)$ und

$$\langle m | (a^\dagger - a)^4 | n \rangle = (6n^2 + 6n + 3)\,\delta_{m,n} - (4n+6)\sqrt{(n+2)(n+1)}\,\delta_{m,n+2} - (4n-2)\sqrt{n(n-1)}\,\delta_{m,n-2}$$
$$+ \sqrt{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}\,\delta_{m,n+4} + \sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}\,\delta_{m,n-4}.$$

Quantentheorie TUTORIUM SS 1997

Angaben für Beispiele zum Ankreuzen / Fr. 13. 6.

URL http://tph.tuwien.ac.at/~kreuzer/PS/qtt.ps

T25: Relativistischer Oszillator: Variationsverfahren

Für hochrelativistische Teilchen mit $p \gg mc$ kann die kinetische Energie durch $\sqrt{c^2p^2 + m^2c^4} \approx c|p|$ approximiert werden. Man verwende diese Näherung und das Variationsverfahren mit der Versuchsfunktionenschar

$$u(p,a) = \langle p|u(a)\rangle = Ne^{-ap^2}$$

um für den Hamiltonoperator eines hochrelativistischen eindimensionalen Oszillators

$$H = c|P| + \frac{1}{2}m\omega^2X^2$$

den optimalen Wert für den Parameter a und die zugehörige Näherung für die Grundzustandsenergie zu berechnen. (Wegen des Terms $|P|$ im Hamiltonoperator muß die Rechnung im Impulsraum durchgeführt werden.)

Formeln:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ap^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |p|e^{-ap^2} = \frac{1}{a}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} p^2e^{-ap^2} = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

T26: Variationsverfahren im 3-dimensionalen Oszillator

Man verwende das Variationverfahren mit $u(x;a) = Ne^{-a|\vec{x}|}$ als Versuchswellenfunktion, um die Grundzustandsenergie des dreidimensionalen harmonischen Oszillators abzuschätzen.

T27: Entartete Störungstheorie

Im Hilbertraum eines Spin-$\frac{3}{2}$ Teilchens sei ein Störterm im Hamiltonoperator durch

$$W = \mu\Big(|\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\rangle\langle\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}| + |\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\rangle\langle\tfrac{3}{2},-\tfrac{3}{2}| + |\tfrac{3}{2},-\tfrac{3}{2}\rangle\langle\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}| + |\tfrac{3}{2},-\tfrac{3}{2}\rangle\langle\tfrac{3}{2},-\tfrac{3}{2}|\Big)$$

$$+2\lambda\Big(|\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\rangle\langle\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}| + |\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\rangle\langle\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}| + |\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle\langle\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}| + |\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle\langle\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}|\Big)$$

gegeben. Berechne die Energiekorrekturen in niedrigster Ordnung Störungstheorie.

Quantentheorie TUTORIUM SS 1997

Angaben für Beispiele zum Ankreuzen / Fr. 20. 6.

URL http://tph.tuwien.ac.at/~kreuzer/PS/qtt.ps

T28: Zeitabhängige Störungstheorie

Für den harmonischen Oszillator mit Störung durch ein elektrisches Feld

$$E(t) = E_0 \, e^{-|t|/\tau}$$

berechne man in 1. Ordnung Störungstheorie die Übergangswahrscheinlichkeit für einen Übergang aus dem Grundzustand in einen angeregten Zustand im Zeitintervall $-\infty < t < \infty$.

T29: Gestörtes Zweizustandssystem

Ein System mit zwei Eigenzuständen $|1\rangle$, $|2\rangle$ und der Energiedifferenz $\hbar\omega_{21}$ wird durch ein zeitabhängiges äußeres Feld gestört. Die Matrixelemente der Störung seien in der Basis der ungestörten Eigenzustände durch

$$\begin{pmatrix} 0 & \hbar\omega_0 e^{i\omega t} \\ \hbar\omega_0 e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das System im Zustand $|1\rangle$.
a) Um das Problem exakt zu lösen leite man ein System von gekoppelten Differentialgleichungen für die Koeffizientenfunktionen $c_1(t)$ und $c_2(t)$ und daraus $\ddot{c}_2(t) + i(\omega - \omega_{21})\dot{c}_2(t) + \omega_0^2 c_2(t) = 0$ her und löse diese Gleichung mit den passenden Anfangsbedingungen für c_2 und c_1. (Man betrachte das Verhalten der Besetzungswahrscheinlichkeit $|c_2(t)|^2$ in Abhängigkeit von ω.)
b) Man berechne die Übergangswahrscheinlichkeit $W_{21}(t)$ in erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie und vergleiche das Ergebnis mit $|c_2(t)|^2$.

T30: Vielteilchensystem: Pauliprinzip und Slaterdeterminante

a) In einem unendlich tiefen eindimensionalen Topfpotential ($V(x) = 0$ für $0 \le x \le a$, $V(x) = \infty$ sonst) befinden sich N nicht wechselwirkende identische Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen. Bis zu welchem Energiewert sind die Eigenzustände im Grundzustand des Systems besetzt, und wie groß ist die Grundzustandsenergie E_0 des Systems? Wie verhält sich E_0 für $N \gg 1$? Wie groß wäre die Grundzustandsenergie eines Systems aus N nicht wechselwirkenden Bosonen in diesem Potential?
b) In dem Topfpotential befinden sich drei Elektronen, deren Wechselwirkung untereinander vernachlässigt werde. Man bestimme die niedrigsten zwei Energien des Systems und die Wellenfunktionen aller zugehörigen Zustände des Dreiteilchensystems.