Quantentheorie ÜBUNGEN SS 1997

Beispiele die im PLENUM vorgerechnet werden

URL http://tph.tuwien.ac.at/~kreuzer/PS/qtp.ps

P1: Randbedingungen bei $\delta-$förmigen Potentialen

Man leite im zeitunabhängingen Fall die Randbedingung an die Wellenfunktion für ein Potential der Form

$$V(x) = V_s(x) + a\delta(x)$$

mit (bis auf Potentialstufen) stetigem V_s her.

Hinweis: Integriere die Schrödingergleichung über $|x| < \varepsilon$ mit $\varepsilon \to 0$.

P2: Gebundene Zustände bei $\delta-$förmigem Potential

Man bestimme alle gebundenen Zustände (Energien und normierte Wellenfunktionen) für das Potential

$$V(x) = -c\,\delta(x), \qquad c > 0.$$

Hinweis: Gebundene Zustände werden durch normierbare Eigenfunktionen des Hamilton-Operators beschrieben; für $V(x) = V_{\text{stetig}} + a\,\delta(x)$ muss u stetig sein und $u'(0_+) - u'(0_-) = a\frac{2m}{\hbar^2}u(0)$.

P3: Unendlich hohe Potentialstufe

Zeige daß im Limes einer unendlich hohen Potentialstufe die Wellenfunktion an der Stufe eine Nullstelle haben muß.

P4: Symmetrieeigenschaften der Wellenfunktion

Zeige daß für ein gerades Potential alle Eigenfunktionen des Hamiltonoperators entweder gerade oder ungerade gewählt werden können.

P5: Reflexion und Transmission bei einem Potential mit 2 $\delta-$Funktionen

Man berechne den Reflexions- und Transmissionskoeffizienten für das Potential

$$V(x) = -b\frac{\hbar^2}{2m}\,\delta(x+a) - b\frac{\hbar^2}{2m}\,\delta(x-a).$$

Für welche Energien gibt es vollständige Transmission? Kann es vollständige Reflexion geben?

Denksport: Kann im Fall verschieden starker $\delta-$Funktionen, also für das Potential $V(x) = -b_1\frac{\hbar^2}{2m}\,\delta(x+a) - b_2\frac{\hbar^2}{2m}\,\delta(x-a)$, $T = 1$ sein (Resonanzeffekt)?

Quantentheorie ÜBUNGEN SS 1997

Beispiele die im PLENUM vorgerechnet werden

URL http://tph.tuwien.ac.at/~kreuzer/PS/qtp.ps

P6: Unendlich tiefer Potentialtopf mit δ-Funktion

Berechne die Energieeigenwerte für das Potential

$$V(x) = \begin{cases} -b\frac{\hbar^2}{2m}\delta(x) & \text{für } |x| \le a \\ \infty & \text{für } |x| > a \end{cases}.$$

(die Lösungen sind graphisch zu bestimmen). Wie kann man verstehen, daß die Eigenwerte im Limes $b \to -\infty$ entartet sind (d.h. daß es zu jedem Eigenwert zwei linear unabhängige Eigenfunktionen gibt)?

Bemerkung: Im eindimensionalen Fall kann man zeigen, daß für stetige Potentiale die Eigenwerte zu normierbaren Energie–Eigenfunktionen nicht entartet sind.

Für Randwertprobleme von Sturm–Liouville Operatoren gilt der Knotensatz (Oszillationssatz): Eigenfunktionen u_n zu den geordneten Eigenwerten $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ haben $n-1$ Nullstellen.

Daraus folgt insbesondere, daß die Wellenfunktion des Grundzustandes im Fall eines geraden Potentials eine gerade Funktion ist.

P7: Gebundene Zustände mit δ-Funktionen

Diskutiere die Zahl der zu erwartenden gebundenen Zustände bei einem Potential das aus einer Summe von δ-Funktionen besteht.

P8: Orts- und Impulsunschärfe im Topfpotential

Man berechne die Ortsunschärfe und die Impulsunschärfe für die Energieeigenzustände im unendlich tiefen Potentialtopf

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| < a \\ \infty & \text{für } |x| > a \end{cases}$$

und vergleiche das Ergebnis mit der Unschärferelation.

Hinweise: Für beliebige Operatoren A gilt $(\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - (\langle A \rangle)^2$.

Die Unschärferelation kann zu $(\Delta A)(\Delta B) \ge \frac{1}{2}\sqrt{|\langle [A,B] \rangle|^2 + |\langle \{A,B\} \rangle|^2}$ verschärft werden.

P9: Zahl der gebundenen Zustände im Potentialtopf

Wie wächst die Zahl der gebundenen Zustände im Topfpotential mit der Tiefe und mit der Breite des Potentials?

Quantentheorie ÜBUNGEN SS 1997

Beispiele die im PLENUM vorgerechnet werden

URL http://tph.tuwien.ac.at/~kreuzer/PS/qtp.ps

P10: Energiemessung im Topf

Wir betrachten ein Teilchen im unendlich tiefen eindimensionalen Topfpotential $V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| < a \\ \infty & \text{für } |x| > a \end{cases}$. Zur Zeit $t = 0$ sei die Wellenfunktion

$$u(x) = \begin{cases} A(a^2 - x^2) & \text{für } |x| < a \\ 0 & \text{für } |x| > a \end{cases}.$$

1. Berechne die Wahrscheinlichkeit, zu $t = 0$ den Energiemeßwert $E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2}n^2$ zu finden.
2. Zeige, daß Erwartungswert und Unschärfe der Energie für $t = 0$ die Werte $\langle H \rangle = \frac{5\hbar^2}{4ma^2}$ und $\Delta E = \frac{\sqrt{5}\hbar^2}{4ma^2}$ haben.

Hinweis: Die Wahrscheinlichkeit W_n dafür, den Energieeigenwert E_n zu messen, ist $W_n = |\langle u|n\rangle|^2$, wobei $|u\rangle$ und $|n\rangle$ die normierte Wellenfunktion des Teilchens und die normierte Energieeigenfunktion zur Energie E_n sind. Für den Erwartungswert einer Observablen A gilt $\langle A \rangle = \sum a_n W_n$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}, \qquad \int dx\; x^2 \cos ax = \frac{2x}{a^2}\cos ax + \frac{a^2x^2 - 2}{a^3}\sin ax.$$

P11: Messung in einem System mit 2 Zuständen

Für ein quantenmechanisches System mit den zwei Zuständen $|1\rangle$ und $|2\rangle$ und den zugehörigen Energieeigenwerten E_1 und E_2 ist der Hilbertraum zweidimensional. Jeder lineare Operator entspricht daher einer 2×2 Matrix $A_{ij} = \langle i|A|j\rangle$.
1.Welche Relationen müssen die Matrixelemente A_{ij} erfüllen, damit der Operator A selbstadjungiert ist (und damit einer Observablen entspricht).
2.Berechne die möglichen Meßwerte a_n der Observablen mit Matrixdarstellung

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ -2i & -1 \end{pmatrix}.$$

3.Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird einer der beiden möglichen Meßwerte a_1 und a_2 für diese Observable gemessen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten $W_1(t)$ und $W_2(t)$ dafür, daß für A zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$ der Wert a_1 bzw. a_2 gemessen wird.
4.Gibt es auch eine zeitliche Änderung der Wahrscheinlichkeit für die Messung eines bestimmten Energieeigenwertes?

Quantentheorie ÜBUNGEN SS 1997

Beispiele die im PLENUM vorgerechnet werden

URL http://tph.tuwien.ac.at/~kreuzer/PS/qtp.ps

P12: Topfpotential im Halbraum

Man bestimme die Energieeigenwerte der gebundenen Zustände im Potential

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & \text{für } x < 0 \\ -V_0 & \text{für } 0 < x < a \\ 0 & \text{für } a < x \end{cases}.$$

Wie groß ist die minimale Zahl gebundener Zustände?

P13: Rechenregeln für das Differenzieren λ-abhängiger Operatoren

Für λ-abhängige Operatoren A und B und λ-unabhängiges C zeige man

$$\begin{array}{llcll} (1.) & \partial_\lambda (AB) & = & \partial_\lambda A\ B + A\ \partial_\lambda B & \\ (2.) & \partial_\lambda\ A^{-1} & = & -A^{-1}\ \partial_\lambda A\ A^{-1} & \text{falls } A^{-1} \text{ existiert} \\ (3.) & \partial_\lambda\ e^{\lambda C} & = & Ce^{\lambda C} & \text{falls } \partial_\lambda C = 0 \end{array}$$

$\partial_\lambda := \frac{\partial}{\partial\lambda}$ ist eine Abkürzung für die (partielle) Ableitung.
Berechne mit diesen Regeln $\partial_\lambda A^n$ und zeige für λ-unabhängige C und D

$$\partial_\lambda(e^{\lambda C} D e^{-\lambda C}) = e^{\lambda C}[C, D]e^{-\lambda C}, \qquad \partial_\lambda(e^{\lambda C} e^{\lambda D}) = e^{\lambda C}(C + D)e^{\lambda D}.$$

P14: Baker–Campbell–Hausdorff Formel

Zeige für Operatoren A und B mit verschindenden "Zweifachkommutatoren"

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$$

die Baker–Campbell–Hausdorff Formel

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}.$$

Hinweis: Man leite eine Operatordifferentialgleichung für $G(\lambda) = e^{\lambda A} e^{\lambda B}$ her.

Quantentheorie ÜBUNGEN SS 1997

Beispiele die im PLENUM vorgerechnet werden

URL http://tph.tuwien.ac.at/~kreuzer/PS/qtp.ps

P15: Quantenmechanisches Virialtheorem

Wir betrachten die zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$H\psi = E\psi, \qquad H = T + V = \frac{\vec{P}^2}{2m} + V$$

für ein Potential, das eine homogene Funktion vom Grad n der Koordinaten x_i ist, d.h. $V(\lambda\vec{x}) = \lambda^n V(\vec{x})$ für jede reelle Zahl λ. Durch Ableiten nach λ folgt dann für $\lambda = 1$ die Eulersche Formel $\sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} V(\vec{x}) = n\, V(\vec{x})$. Zeige für einen gebundenen Zustand in einem homogenen Potential das Virialtheorem

$$2\langle T\rangle = n\langle V\rangle.$$

Hinweis: Zeige, daß für gebundene Zustände $\langle [A,H]\rangle = 0$ gilt und berechne den Kommutator von H mit dem Operator $A = \frac{1}{2}\left(\vec{X}\cdot\vec{P} + \vec{P}\cdot\vec{X}\right)$.

(Was ergibt sich speziell für das Coulombpotential und den harmonischen Oszillator?)

P16: Wahrscheinlichkeiten bei Rotationsfreiheitsgraden

Betrachte ein quantenmechanisches System, dessen Freiheitsgrade Drehungen im Raum entsprechen. Zu einem bestimmten Zeitpunkt werde der Zustand des Systems durch die Wellenfunktion

$$u(\theta,\varphi) = \langle\theta,\varphi|u\rangle = C(\sin\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi + \sqrt{3}\cos\theta)$$

mit den Polarwinkeln θ, φ beschrieben (C ist eine Normierungskonstante).

1. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, bei der Messung des Drehimpulsquadrats den Wert $2\hbar^2$ zu finden.

2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man bei einer gleichzeitigen Messung der Observablen $(\vec{L}^2, L_z)$ die Meßwerte $(2\hbar^2, 0)$?

Hinweis: Verwende die Formeln

$$Y_{1,0} = \sqrt{\tfrac{3}{4\pi}}\cos\theta, \qquad Y_{1,\pm 1} = \mp\sqrt{\tfrac{3}{8\pi}}\sin\theta\; e^{\pm i\varphi}$$

P17: Kohärente Zustände

Man zeige, daß die sogenannten kohärenten Zustände

$$|\lambda\rangle := e^{\lambda a^\dagger}|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

Eigenzustände des Vernichtungsoperators eines harmonischen Oszillators sind und berechne die Energieunschärfe für einen solchen Zustand.

Quantentheorie ÜBUNGEN SS 1997

Beispiele die im PLENUM vorgerechnet werden

URL http://tph.tuwien.ac.at/~kreuzer/PS/qtp.ps

P18: Unschärfe selbstadjungierter Operatoren

Man zeige, daß ein Vektor $|u\rangle$ mit Norm 1 im Hilbertraum genau dann Eigenvektor eines selbstandjungierten Operators A ist, wenn die Unschärfe ΔA verschwindet, wobei $(\Delta A)^2 := \langle u|(A - \langle u|A|u\rangle)^2|u\rangle$.

P19: Reine Zustände und inkohärentes Gemisch

Ein quantenmechanisches System besitze nur zwei Zustände $|1\rangle$ und $|2\rangle$, die den beiden Energien E_1 und E_2 entsprechen. Man bestimme die Schrödingergleichung und die zeitliche Entwicklung des Systems. Wie groß ist die Energieunschärfe in einem reinen Zustand mit Energie $\langle H\rangle = \frac{1}{3}E_1 + \frac{2}{3}E_2$ und im Fall eines Mischzustandes aus Energieeigenzuständen mit dem gleichen Erwartungswert der Energie?

P20: Zeitentwicklung und Unschärfe kohärenter Zustände

Kohärente Zustände sind Eigenzustände des Vernichtungsoperators a eines harmonischen Oszillators zum Eigenwert λ,

$$|\lambda\rangle := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = e^{\lambda a^\dagger}|0\rangle, \qquad a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle, \qquad \langle\mu|\lambda\rangle = e^{(\mu^*\lambda)},$$

(wobei wir die Normierung $\langle\lambda|\lambda\rangle = \exp(|\lambda|^2)$ gewählt haben).

1. Berechne die Erwartungswerte der Operatoren X und P und ihre Unschärfen (verwende $a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$ und die dazu hermitisch konjugierte Gleichung).

2. Zeige, daß die Zeitentwicklung durch $e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\lambda\rangle = e^{-i\frac{\omega_0}{2}t}|e^{-i\omega_0 t}\lambda\rangle$ gegeben ist.

3. Löse die Differentialgleichung $(a-\lambda)\psi = 0$ um die explizite Form der Wellenfunktion $\psi(x) = \langle x|\lambda\rangle$ zu bestimmen.

P21: Raumrichtung eines Spinzustandes

Ein Spin $s = \frac{1}{2}$ sei zu einem bestimmten Zeitpunkt im Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1+i}{2}|-\rangle.$$

Für welche Raumrichtung hat die Projektion des Spins minimale Unschärfe?
(Der Operator der Spinprojektion in Richtung $\vec{e}$ mit $|\vec{e}| = 1$ ist durch $\vec{e}\vec{S}$ gegeben.)

Quantentheorie ÜBUNGEN SS 1997

Beispiele die im PLENUM vorgerechnet werden

URL http://tph.tuwien.ac.at/~kreuzer/PS/qtp.ps

P22: Meßwahrscheinlichkeiten mit zwei Spin 1/2 Teilchen

Ein System von zwei unterscheidbaren Spin 1/2 Teilchen befinde sich im Zustand mit Gesamtspin 0. Nun wird gleichzeitig der Spin des einen Teilchens in Richtung $\vec{e}_1 = (0,0,1)$ und der Spin des anderen Teilchens in Richtung $\vec{e}_2 = (\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \cos\theta)$ gemessen. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß beide Werte positiv sind (d.h. 'Spin auf' in Richtung $\vec{e}_1$ bzw. $\vec{e}_2$).

P23: Wechselwirkung mit Magnetfeld

Die Welchselwirkung einer Apparatur mit einem Elektron werde durch

$$\langle\pm|H_S|\pm\rangle = 0, \qquad \langle\pm|H_S|\mp\rangle = \hbar\omega_0$$

beschrieben (dabei sind $|\pm\rangle$ die Eigenzustände zu S_z.

1. Berechne die Wahrscheinlichkeit einer Messung von $|+\rangle$ zur Zeit t wenn zur Zeit $t_0 = 0$ der Zustand $|+\rangle$ gemessen wurde.

2. Welche Linearkombinationen von $|\pm\rangle$ entsprechen stationären Zuständen und was sind die zugehörigen Energien?

3. Bestimme die Richtung $\vec{e}(t)$ für die der Spinzustand '+' ist.

Bemerkung: Ein entsprechende experimentelle Situation wäre ein Magnetfeld mit vorhergehender Präparierung und anschliessender Messung von S_z durch eine Stern-Gerlach Anordnung.

P24: Spinaustauschoperator

Betrachte den Produkthilbertraum $H = H_1 \otimes H_2$ von zwei Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen und zeige, daß

$$P_{(12)} := \frac{1}{2}\left(\mathbf{1} + \frac{4}{\hbar^2}\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2\right)$$

$P_{(12)}|m_1 m_2\rangle = |m_2 m_1\rangle$ erfüllt und somit der Spinaustauschoperator ist.

P25: Berechnung von Clebsch–Gordan Koeffizienten

Berechne durch wiederholte Anwendung des Operators J_- auf den Zustand $|j,j\rangle = |j_{(1)}, j_{(1)}\rangle \otimes |j_{(2)}, j_{(2)}\rangle$ mit $j = j_{(1)} + j_{(2)}$ die Clebsch–Gordan Koeffizienten.

$$\langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j_1, j_2, j = j_1 + j_2, m = m_1 + m_2\rangle.$$

Es gilt: $\quad J_\pm|j,m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1))}\ |j, m \pm 1\rangle, \quad J_\pm = J_1 \pm iJ_2.$

Quantentheorie ÜBUNGEN SS 1997

Beispiele die im PLENUM vorgerechnet werden

URL http://tph.tuwien.ac.at/~kreuzer/PS/qtp.ps

P26: Drehoperator für Spin 1/2

Berechne den Drehoperator

$$D(\varphi\vec{e}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi\vec{S}\cdot\vec{e}}$$

im Fall eines Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchens (verwende die Eigenschaften der Paulimatrizen). Benütze das Ergebnis für die Berechnung der Drehmatrixelemente $D^{(1/2)}_{m'm}(\alpha\beta\gamma)$.

P27: Störungstheorie im Oszillator mit elektrischem Feld

Für ein Elektron im harmonischen Potential mit konstantem elektrischen Feld betrachte man die Wechselwirkung mit dem E-Feld als Störung

$$H = H_0 + W = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 - qEx, \qquad W = -qEx,$$

und berechne die Energieeigenwerte in 2. Ordnung Störungstheorie und die Eigenfunktionen in 1. Ordnung Störungstheorie. (Welche Konvergenzeigenschaften sind aufgrund der Kenntnis der exakten Lösung zu erwarten?)

P28: Anharmonischer Oszillator

Berechne für ein Elektron im anharmonischen Oszillatorpotential

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 + \lambda\sqrt{\frac{m^3\omega^5}{\hbar}}X^3 + \mu\frac{m^2\omega^3}{\hbar}X^4$$

die Korrektur zu den Energieeigenwerten in 1. Ordnung Störungstheorie.

Bemerkung: Die Störungsreihe divergiert auch für kleine $\mu > 0$, da das Potential für $\mu < 0$ und für $\mu = 0$ und $\lambda \neq 0$ nicht nach unten beschränkt ist. Als asymptotische Reihe erlaubt die Störungstheorie aber trotzdem für kleine Störungen auch für instabile Potentiale eine näherungsweise Berechnung der 'Energieniveaus' quasigebundener Zustände.
Beachte, daß im harmonischen Potential für Störungen, die Polynome in X und P sind, in jeder Ordnung nur endliche Summen beitragen.

Quantentheorie ÜBUNGEN SS 1997

Beispiele die im PLENUM vorgerechnet werden

URL http://tph.tuwien.ac.at/~kreuzer/PS/qtp.ps

P29: Gestörter zweidimensionaler harmonischer Oszillator

Der Hamiltonoperator eines zweidimensionalen Oszillators sei $H = H_0 + W$ mit

$$H_0 = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{m\omega^2}{2}(x_1^2 + x_2^2), \qquad W = \gamma \frac{m^2\omega^3}{\hbar} x_1^2 x_2^2.$$

Man berechne die störungstheoretische Energiekorrektur für das erste und das zweite angeregte Energieniveau.

P30: Variationsrechnung

Man führe das Ritzsche Variationsverfahren für den harmonischen Oszillator unter Verwendung der Versuchsfunktionenschar $u(x;a,b) = \frac{N}{(x-b)^2+a^2}$ durch.

P31: Zeitabhängige Störungstheorie

Berechne für den harmonischen Oszillator mit Störung durch ein E-Feld

$$E(t) = \frac{A}{\sqrt{\pi}\tau} e^{-t^2/\tau^2}$$

die Übergangswahrscheinlichkeit für einen Übergang aus dem Grundzustand in einen angeregten Zustand im Zeitintervall $-\infty < t < \infty$.

P32: Tensoroperatoren

Man zerlege den Tensoroperator $X^i X^j$ bezüglich der Drehgruppe in irreduzible Komponenten.

Quantentheorie ÜBUNGEN SS 1997

Beispiele die im PLENUM vorgerechnet werden

URL http://tph.tuwien.ac.at/~kreuzer/PS/qtp.ps

P33: Identische Teilchen

Zeige, daß zwei spinlose identische Teilchen im Schwerpunktsystem nur einen geraden Wert $l \in 2\mathbb{Z}$ für den Gesamtdrehimpuls haben können (identische Teilchen mit ganzzahligem Spin gehorchen der Bose-Statistik, d.h. die Wellenfunktion muß symmetrisiert werden).

Bemerkung: Daraus folgt z.B., daß angeregtes Be_4^8 in einem Zustand mit Spin=1 nicht in $He_2^4 + He_2^4$ zerfallen kann.

P34: Fermionen im Oszillatorpotential

Zwei identische Teilchen mit Spin 1/2 befinden sich im eindimensionalen Oszillatorpotential $V = m\omega^2 x^2/2$. Man gebe die richtig symmetrisierten Eigenfunktionen zu den drei niedrigsten Energieniveaus und deren Entartung an (für den Spinanteil verwende man Triplett- und Singuletteigenfunktionen). Welche von diesen Zuständen erfahren bei Einschalten einer als Störung zu betrachtenden Wechselwirkung $V' = W\delta(x_1 - x_2)$ keine Energiekorrektur?

P35: Wigner-Eckart Theorem

Man zeige, daß für Vektoroperatoren $\vec{A}$ und den Drehimpulsoperator $\vec{J}$ die folgende Beziehung zwischen Erwartungswerten gilt:

$$\langle \tau j, m | \vec{J}\vec{A} | \tau j m \rangle = \frac{j(j+1)}{m} \hbar \langle \tau j, m | A_z | \tau j m \rangle.$$

Hinweis: Es gilt $J_\pm |j, m\rangle = \hbar \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1))}\ |j, m \pm 1\rangle$ und

$$\langle j1m, \pm 1 | j, m \pm 1 \rangle = \mp \sqrt{\frac{(j \pm m + 1)(j \mp m)}{2j(j+1)}}, \qquad \langle j1m0 | jm \rangle = \frac{m}{\sqrt{j(j+1)}}$$