Vorbereitungspraktikum aus der Quantenfeldtheorie (135.465)

# Dimensionale Reduktion und Dilatongravitation


von
Martin Franz Ertl
unter Anleitung von Prof. Wolfgang Kummer*


Wien, im Oktober 1994


**Zusammenfassung**

In diesem Artikel werden spezielle Lösungen der vierdimensionalen Einsteinschen Allgemeinen Relativitätstheorie gesucht, nämlich Lösungen, die drei- oder zweidimensionalen Allgemeinen Relativitätstheorien mit zusätzlichen, skalaren Feldern entsprechen, womit auch die Dilatongravitation in diesen speziellen Lösungen enthalten ist.



*Institut für Theoretische Physik der Technischen Universität Wien

# Inhaltsverzeichnis



# 1 Einleitung

Die Untersuchung der vierdimensionalen Einsteinschen Allgemeinen Relativitätstheorie ist sehr schwierig, weshalb es sich als zweckmäßig erweist, zwei- und dreidimensionale Modelle zu studieren. Besonders auf dem Gebiet der zweidimensionalen Modelle hat man in letzter Zeit viele Erkenntnisse über das Phänomen der schwarzen Löcher gewonnen.

Es erscheint daher sinnvoll, Überlegungen über den Zusammenhang dieser niederdimensionalen Modelle mit der vierdimensionalen Allgemeinen Relativitätstheorie durchzuführen. Durch direktes Ableiten von der Einsteinschen Theorie findet man Lösungen, die für sich bereits drei- oder zweidimensionale Allgemeine Relativitätstheorien mit neuhinzugekommenen Skalarfeldern darstellen.

In seinem Artikel „D=3 General Relativity is not D=3 Gravity“ zeigte Y. Verbin erstmals, daß sich ausgehend von der vierdimensionalen Allgemeinen Relativitätstheorie eine dreidimensionale Gravitationstheorie (D=3 Gravity) herleiten läßt, welche nicht wie die dreidimensionale Allgemeine Relativitätstheorie durch das Fehlen des Newtonschen Limits oder die Flachheit im materiefreien Raum eingeschränkt ist. In diesem Artikel wird zunächst die „Dreidimensionale Gravitation“ abgeleitet, und die dabei gewonnenen Erkenntnisse werden für eine weitere Reduktion auf zwei Dimensionen verwendet. Diese Ableitung ist auch dann gültig, wenn man eine Allgemeine Relativitätstheorie mit mehr als vier Dimensionen reduziert, wodurch man beispielsweise eine Einsteintheorie mit Skalarfeld erhält. Die „Zweidimensionale Gravitation“ zeigt schließlich, daß die Dilatongravitation von Curtis G. Callan Jr., Steven B. Giddings, Jeffrey A. Harvey und Andrew Strominger — es handelt sich dabei um eine zweidimensionale

Quantengravitation — bereits in Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie enthalten ist.

## 2 Konventionen

Als Referenz für Definitionen von differentialgeometrischen Größen diente das Buch von Roman U. Sexl und Helmuth K. Urbantke [SU]. Beispielsweise gilt für die Signatur $(+---)$, $(+--)$ oder $(+-)$, je nach den betrachteten Dimensionen. Unabhängig von der Dimension ist der Riemanntensor wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} A_{i;jk} - A_{i;kj} = R^l{}_{ijk} A_l \qquad &\Longleftrightarrow \\ R^r{}_{ijk} = \Gamma^r{}_{ik,j} - \Gamma^r{}_{ij,k} + \Gamma^r{}_{mj}\Gamma^m{}_{ki} - \Gamma^r{}_{mk}\Gamma^m{}_{ji} \,. \end{aligned}$$

Lateinische Indizes repräsentieren in folgenden Abschnitten die Werte 0–3 und griechische Indizes die Werte 0–2 oder 0 und 1.

Die Symbole der differentialgeometrischen Größen (siehe Tab. 1) des vierdimensionalen Raumes werden groß geschrieben. Zu deren Berechnung wird der metrische Tensor $g_{ij}$ des vierdimensionalen Raumes verwendet. Durch dimensionale Reduktion erhält jede dieser Größen ein drei- oder zweidimensionales Pendant, welches klein geschrieben wird. Auch Operationen wie das Indexheben oder die kovariante Differentiation sind entweder mit der Metrik $g_{ij}$ bei großgeschriebenen Symbolen oder der reduzierten Metrik $\gamma_{\alpha\beta}$ bei kleingeschriebenen durchzuführen. Als Beispiel sei hier die Berechnung des Christoffelsymbols

$$\begin{aligned} \Gamma^k{}_{ij} &= \frac{1}{2} g^{kl} \left( g_{li,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l} \right) , \\ \gamma^\lambda{}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \gamma^{\lambda\rho} \left( \gamma_{\rho\alpha,\beta} + \gamma_{\beta\rho,\alpha} - \gamma_{\alpha\beta,\rho} \right) \end{aligned}$$

sowie des Einsteintensors

$$\begin{aligned} G_{ij} &= R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R \,, \qquad G^k{}_j = g^{ki} G_{ij} \quad \text{und} \\ g_{\alpha\beta} &= r_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} r \,, \qquad g^\rho{}_\beta = \gamma^{\rho\alpha} g_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

angegeben. Die Unterscheidung zwischen $g_{\alpha\beta}$ als Einsteintensor des reduzierten Raumes und $g_{\alpha\beta}$ als die $\alpha\beta$-Komponenten des vierdimensionalen metrischen Tensors ergibt sich aus dem Zusammenhang.

Sofern eine Größe des reduzierten Raumes nicht ein entsprechendes Gegenstück im vierdimensionalen Raum besitzt, wird nicht zwischen Groß- und Kleinschreibung unterschieden. Das Indexheben und die kovariante Differentiation werden für diese mit der Metrik $\gamma_{\alpha\beta}$ durchgeführt.

| | D=4 | D=3 od. 2 |
|---|---|---|
| Metrik | $g_{ij}$ | $\gamma_{\alpha\beta}$ |
| Christoffelsymbol | $\Gamma^i{}_{jk}$ | $\gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ |
| Riemanntensor | $R^r{}_{ijk}$ | $r^\rho{}_{\alpha\beta\kappa}$ |
| Riccitensor | $R_{ij}$ | $r_{\alpha\beta}$ |
| Krümmungsskalar | $R$ | $r$ |
| Einsteintensor | $G_{ij}$ | $g_{\alpha\beta}$ |
| Energie- Impulstensor | $T_{ij}$ | $t_{\alpha\beta}$ |

Tabelle 1: Differentialgeometrische Größen

# 3 Dreidimensionale Gravitation

Grundlage dieses Abschnittes ist der Artikel von Verbin [V]. In diesem werden dreidimensionale Lösungen von Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie gesucht. Unter einer dreidimensionalen Allgemeinen Relativitätstheorie versteht man eine Theorie, welche der Einsteinschen entspricht, allerdings in einer dreidimensionalen Raum-Zeit. Die dreidimensionale Gravitation wird nun aus der vierdimensionalen Einsteintheorie abgeleitet und ist eine dreidimensionale Allgemeine Relativitätstheorie mit einem zusätzlichen Skalarfeld. Eine ähnliche dimensionale Reduktion wurde bereits vor einigen Jahrzehnten von Kaluza und Klein durchgeführt, allerdings von fünf auf vier Dimensionen.

Für den metrischen Tensor setzt man an:

$$g_{ij}\left(x^\lambda\right) = \left(\begin{array}{c|c} \gamma_{\alpha\beta}\left(x^\lambda\right) & B_\alpha\left(x^\lambda\right) \\ \hline B^T_\alpha\left(x^\lambda\right) & -\Phi^2\left(x^\lambda\right) \end{array}\right) \quad \text{bzw.}$$
$$ds^2 = \gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + 2B_\alpha dx^\alpha dx^3 - \Phi^2\left(dx^3\right)^2, \tag{1}$$

wobei griechische Indizes die Werte 0–2 repräsentieren, und alle auftretenden Größen Funktionen von $x^\lambda$ sind.

Der kontravariante metrische Tensor lautet hiermit:

$$g^{ij} = \left(\begin{array}{c|c} \gamma^{\alpha\beta} - \frac{B^\alpha B^\beta}{\Phi^2+B^2} & \frac{B^\alpha}{\Phi^2+B^2} \\ \hline \frac{B^{T\alpha}}{\Phi^2+B^2} & -\frac{1}{\Phi^2+B^2} \end{array}\right). \tag{2}$$

Der Ausdruck $B^2$ ist dabei eine Kurzschreibweise für $B^2 = B^\lambda B_\lambda$, wobei das Indexheben mit der Metrik $\gamma^{\alpha\beta}$ durchgeführt wird, womit sich weiter $B^2 = \gamma^{\alpha\beta}B_\alpha B_\beta$ ergibt.

Sucht man nun Geodäten $x^i(\tau)$ im vierdimensionalen Riemannschen Raum mit $x^3(\tau) = konst.$ und beliebigem $x^\alpha(\tau)$,

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i{}_{mn}\frac{dx^m}{d\tau}\frac{dx^n}{d\tau} = 0$$

| | | |
|---|---|---|
| $\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \gamma_{\alpha\beta\gamma}$ | $R_{\eta\alpha\beta\kappa} = r_{\eta\alpha\beta\kappa}$ | $R_{\alpha\beta} = r_{\alpha\beta} + \frac{\Phi_{;\alpha\beta}}{\Phi}$ |
| $\Gamma_{\alpha 33} = \Phi\Phi_{,\alpha}$ | $R_{3\alpha 3\kappa} = \Phi_{;\alpha\kappa}$ | $R_{33} = -\Phi\Phi_{;}{}^{\lambda}{}_{\lambda}$ |
| $\Gamma_{33\alpha} = -\Phi\Phi_{,\alpha}$ | | |
| $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ | $R^{\rho}{}_{\alpha\beta\kappa} = r^{\rho}{}_{\alpha\beta\kappa}$ | $R = r + 2\frac{\Phi_{;}{}^{\lambda}{}_{\lambda}}{\Phi}$ |
| $\Gamma^{3}{}_{3\alpha} = \frac{\Phi_{,\alpha}}{\Phi}$ | $R^{\rho}{}_{3\beta 3} = \Phi\Phi_{;}{}^{\rho}{}_{\beta}$ | |
| $\Gamma^{\alpha}{}_{33} = \Phi\Phi_{;}{}^{\alpha}$ | $R^{3}{}_{\alpha\beta 3} = \frac{\Phi_{;\alpha\beta}}{\Phi}$ | |

Tabelle 2: Differentialgeometrische Größen bei Reduktion auf drei Dimensionen

$$\frac{d^2x^3}{d\tau^2} + \Gamma^3{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} + 2\Gamma^3{}_{3\alpha}\frac{dx^3}{d\tau}\frac{dx^\alpha}{d\tau} + \Gamma^3{}_{33}\frac{dx^3}{d\tau}\frac{dx^3}{d\tau} = 0\,,$$

so führt dies zur Bedingung $\Gamma^3{}_{\alpha\beta} = 0$, oder durch die Metrik ausgedrückt:

$$\Gamma^3{}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left(\frac{B_{\alpha;\beta} + B_{\beta;\alpha}}{\Phi^2 + B^2}\right) = 0\,. \tag{3}$$

Unter dieser Bedingung wird die Gleichung für $x^\lambda(\tau)$ zur Geodätengleichung einer dreidimensionalen Allgemeinen Relativitätstheorie,

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0\,, \tag{4}$$

welche geodätische Bewegungen in der Hyperebene $x^3 = konst.$ beschreibt. Das Feld $B_\alpha$ ist allerdings durch die Killing-Gleichung (Gl. 3) der Metrik $\gamma_{\alpha\beta}$ eingeschränkt. Verbin argumentiert nun mit der Unerfüllbarkeit dieser Forderung im allgemeinen Fall und setzt $B_\alpha = 0$. Dadurch beschränkt man sich auf Systeme, die unter der Transformation $\bar{x}^3 = -x^3$ invariant sind. Der Rest dieses Abschnittes beschäftigt sich mit diesen spiegelungsinvarianten Systemen.

Mit dieser Vereinfachung ist der Aufwand zur Berechnung des Einsteintensors geringer. Eine Zusammenfassung der dabei auftretenden Größen liefert Tab. 2. Alle Werte, die sich nicht aus Symmetrieeigenschaften herleiten lassen, sind gleich Null.

Die Einsteingleichungen lauten nun:

$$g_{\alpha\beta} + \frac{1}{\Phi}\left(\Phi_{;\alpha\beta} - \gamma_{\alpha\beta}\Phi_{;}{}^{\lambda}{}_{\lambda}\right) = -\kappa T_{\alpha\beta} \quad \text{und} \tag{4a}$$

$$\frac{1}{2}\Phi^2 r = -\kappa T_{33} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2}r = \kappa T^3{}_3\,. \tag{4b}$$

Die zweite Gleichung läßt sich auch umschreiben. Man bildet die Spur von Gl. 4a und eliminiert $r$ mittels Gl. 4b:

$$\frac{\Phi_{;}{}^{\lambda}{}_{\lambda}}{\Phi} = \frac{\kappa}{2}\left(T^\lambda{}_\lambda - T^3{}_3\right). \tag{5}$$

Diese Gleichungen können vom Standpunkt einer dreidimensionalen Einstein-gravitation mit einem zusätzlichen skalaren Feld $\Phi$ aus betrachtet werden:

$$g_{\alpha\beta} = -\kappa t_{\alpha\beta}, \quad t_{\alpha\beta} = \frac{1}{\kappa\Phi}\left(\Phi_{;\alpha\beta} - \gamma_{\alpha\beta}\Phi_{;}{}^{\lambda}{}_{\lambda}\right) + T_{\alpha\beta}\,. \tag{6}$$

Die ursprünglich als Teil der Metrik auftretende Größe $\Phi$ wird jetzt zu einem eigenständigen Feld mit der Gl. 5 als Wellengleichung. Die relativistische Energie-Impulserhaltung gilt auch hier:

$$t^{\lambda}{}_{\beta;\lambda} = T^{\lambda}{}_{\beta;\lambda} + (\ln\Phi)_{;\lambda}\, T^{\lambda}{}_{\beta} - (\ln\Phi)_{;\beta}\, T^{3}{}_{3} = 0\,. \tag{7}$$

In drei Dimensionen besitzt der Krümmungstensor sechs unabhängige Komponenten. Dies entspricht der Anzahl der unabhängigen Komponenten des Einsteintensors, weshalb man $r^{\rho}{}_{\alpha\beta\kappa}$ linear durch den Einsteintensor $g_{\alpha\beta}$ ausdrücken kann (siehe [W, 6.7] od. [J, III.A]). Deshalb ist in der dreidimensionalen Allgemeinen Relativitätstheorie der materiefreie Raum ($t_{\alpha\beta}\left(x^{\lambda}\right) = 0$) lokal nicht gekrümmt. In der „D=3 Gravity" von Verbin ist aber, auch wenn $T^{\alpha}{}_{\beta}\left(x^{\lambda}\right) = 0$ ist, im allgemeinen $t_{\alpha\beta}\left(x^{\lambda}\right) \neq 0$, weil das Feld $\Phi$ zur Materie beiträgt, aber nur im Fall $T^{\alpha}{}_{\alpha} - T^{3}{}_{3} \neq 0$.

Die Feldgleichungen 4a und 4b lassen sich auch mittels Variationsprinzip aus dem Wirkungsintegral

$$W = \int d^3x\sqrt{\gamma}\left(\frac{\Phi r}{2\kappa} + \Phi L_M\right) \tag{8}$$

herleiten, wobei $L_M$ die Lagrangedichte des ursprünglichen Materiefeldes der vierdimensionalen Theorie ist, welches zum Energie-Impulstensor $T_{ij}$ führt.

Für manche Überlegungen ist es zweckmäßiger, $\Phi = \exp(\lambda\phi)$ zu setzen. Energie-Impulstensor, Wellengleichung und Energie-Impulserhaltung lauten dann:

$$t_{\alpha\beta} = \frac{1}{\kappa}\left[\lambda\phi_{;\alpha\beta} + \lambda^2\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} - \gamma_{\alpha\beta}\left(\lambda\phi_{;}{}^{\lambda}{}_{\lambda} + \lambda^2\phi_{;}{}^{\lambda}\phi_{;\lambda}\right)\right] + T_{\alpha\beta}\,, \tag{9}$$

$$\lambda\phi_{;}{}^{\lambda}{}_{\lambda} + \lambda^2\phi_{;}{}^{\lambda}\phi_{;\lambda} = \frac{\kappa}{2}\left(T^{\lambda}{}_{\lambda} - T^{3}{}_{3}\right) \quad \text{und} \tag{10}$$

$$t^{\lambda}{}_{\beta;\lambda} = T^{\lambda}{}_{\beta;\lambda} + \lambda\phi_{;\lambda}T^{\lambda}{}_{\beta} - \lambda\phi_{;\beta}T^{3}{}_{3} = 0\,. \tag{11}$$

## 4 Zweidimensionale Gravitation

In diesem Abschnitt wird die Reduktion von vier auf zwei Dimensionen durchgeführt, wobei genau wie im vorigen Abschnitt vorgegangen wird. Griechische Indizes repräsentieren von hier an die Werte 0 und 1. Der metrische Tensor wird ähnlich wie vorher angesetzt, und auch hier sind alle auftretenden Größen

Funktionen von $x^\lambda$, d. h.

$$
\begin{aligned}
g_{ij} &= \left(\begin{array}{c|cc} \gamma_{\alpha\beta} & C_\alpha & D_\alpha \\ \hline C_\alpha^T & -\Psi^2 & S \\ D_\alpha^T & S & -\Phi^2 \end{array}\right) \quad \text{bzw.} \\
ds^2 &= \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + 2C_\alpha dx^\alpha dx^2 + 2D_\alpha dx^\alpha dx^3 - \\
&\quad -\Psi^2 \left(dx^2\right)^2 + 2S dx^2 dx^3 - \Phi^2 \left(dx^3\right)^2 .
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Längere Rechnung ergibt für den kontravarianten metrischen Tensor

$$
g^{ij} = \left(\begin{array}{c|cc} \bar{\gamma}^{\alpha\beta} & \bar{C}^\alpha & \bar{D}^\alpha \\ \hline \bar{C}^{T\alpha} & -\bar{\Psi}^2 & \bar{S} \\ \bar{D}^{T\alpha} & \bar{S} & -\bar{\Phi}^2 \end{array}\right), \tag{13}
$$

wobei die gequerten Größen durch

$$
\begin{aligned}
\bar{\gamma}^{\alpha\beta} &= \gamma^{\alpha\beta} - \left[C^\alpha C^\beta \left(D^2 + \Phi^2\right) - \left(C^\alpha D^\beta + D^\alpha C^\beta\right)(CD - S) + \right. \\
&\quad \left. + D^\alpha D^\beta \left(C^2 + \Psi^2\right)\right] / N \\
\bar{C}^\alpha &= \left[C^\alpha \left(D^2 + \Phi^2\right) - D^\alpha (CD - S)\right] / N \\
\bar{D}^\alpha &= \left[D^\alpha \left(C^2 + \Psi^2\right) - C^\alpha (CD - S)\right] / N \\
\bar{\Psi}^2 &= \left(D^2 + \Phi^2\right) / N \\
\bar{\Phi}^2 &= \left(C^2 + \Psi^2\right) / N \\
\bar{S} &= (CD - S) / N \\
N &= \left(C^2 + \Psi^2\right)\left(D^2 + \Phi^2\right) - (DC - S)^2
\end{aligned}
$$

gegeben sind. Analog zu den Überlegungen von Verbin sucht man nun Geodäten im vierdimensionalen Raum mit $x^2(\tau) = konst.$ und $x^3(\tau) = konst.$ bei beliebigem $x^\lambda(\tau)$, wodurch man Bedingungen für $C^\alpha$ und $D^\alpha$ erhält:

$$
{\Gamma^2}_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{und} \quad {\Gamma^3}_{\alpha\beta} = 0 \, , \tag{14}
$$

mit

$$
{\Gamma^2}_{\alpha\beta} = \left[-\frac{1}{2}\left(D^2 + \Phi^2\right)\left(C_{\alpha;\beta} + C_{\beta;\alpha}\right) + \frac{1}{2}(CD - S)\left(D_{\alpha;\beta} + D_{\beta;\alpha}\right)\right] / N
$$

und

$$
{\Gamma^3}_{\alpha\beta} = \left[-\frac{1}{2}\left(C^2 + \Psi^2\right)\left(D_{\alpha;\beta} + D_{\beta;\alpha}\right) + \frac{1}{2}(CD - S)\left(C_{\alpha;\beta} + C_{\beta;\alpha}\right)\right] / N .
$$

| | |
|---|---|
| $\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \gamma_{\alpha\beta\gamma}$ | $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ |
| $\Gamma_{\alpha 22} = \Psi\Psi_{,\alpha}$ | $\Gamma^{\alpha}{}_{22} = \Psi\Psi_{;}{}^{\alpha}$ |
| $\Gamma_{22\alpha} = -\Psi\Psi_{,\alpha}$ | $\Gamma^{2}{}_{2\alpha} = \frac{\Psi_{,\alpha}}{\Psi}$ |
| $\Gamma_{\alpha 33} = \Phi\Phi_{,\alpha}$ | $\Gamma^{\alpha}{}_{33} = \Phi\Phi_{;}{}^{\alpha}$ |
| $\Gamma_{33\alpha} = -\Phi\Phi_{,\alpha}$ | $\Gamma^{3}{}_{3\alpha} = \frac{\Phi_{,\alpha}}{\Phi}$ |
| $R_{\alpha\beta} = r_{\alpha\beta} + \frac{\Psi_{;\alpha\beta}}{\Psi} + \frac{\Phi_{;\alpha\beta}}{\Phi}$ | |
| $R_{22} = -\Psi\Psi_{;}{}^{\lambda}{}_{\lambda} - \Psi\Psi_{;}{}^{\lambda}\frac{\Phi_{;\lambda}}{\Phi}$ | |
| $R_{33} = -\Phi\Phi_{;}{}^{\lambda}{}_{\lambda} - \Phi\Phi_{;}{}^{\lambda}\frac{\Psi_{;\lambda}}{\Psi}$ | |
| $R = r + 2\left(\frac{\Psi_{;}{}^{\lambda}{}_{\lambda}}{\Psi} + \frac{\Psi_{;}{}^{\lambda}\Phi_{;\lambda}}{\Psi\Phi} + \frac{\Phi_{;}{}^{\lambda}{}_{\lambda}}{\Phi}\right)$ | |

Tabelle 3: Differentialgeometrische Größen bei Reduktion auf zwei Dimensionen

Die Gleichung für $x^{\lambda}(\tau)$ wird damit zur Geodätengleichung einer zweidimensionalen Allgemeinen Relativitätstheorie:

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{d\tau^2} + \gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau} = 0\,. \tag{15}$$

Forthin wird die Berechnung auf Metriken mit $C_{\alpha} = D_{\alpha} = S = 0$ eingeschränkt. Zwischenergebnisse bei der Berechnung der Einsteinschen Feldgleichungen sind in Tab. 3 zusammengestellt. Die Feldgleichungen lauten hiermit:

$$g_{\alpha\beta} + \frac{\Psi_{;\alpha\beta}}{\Psi} + \frac{\Phi_{;\alpha\beta}}{\Phi} - \gamma_{\alpha\beta}\left(\frac{\Psi_{;}{}^{\lambda}{}_{\lambda}}{\Psi} + \frac{\Psi_{;}{}^{\lambda}\Phi_{;\lambda}}{\Psi\Phi} + \frac{\Phi_{;}{}^{\lambda}{}_{\lambda}}{\Phi}\right) = -\kappa T_{\alpha\beta}\,, \tag{15a}$$

$$\frac{1}{2}\Psi^2 r + \Psi^2\frac{\Phi_{;}{}^{\lambda}{}_{\lambda}}{\Phi} = -\kappa T_{22} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2}r + \frac{\Phi_{;}{}^{\lambda}{}_{\lambda}}{\Phi} = \kappa T^{2}{}_{2} \tag{15b}$$

und

$$\frac{1}{2}\Phi^2 r + \Phi^2\frac{\Psi_{;}{}^{\lambda}{}_{\lambda}}{\Psi} = -\kappa T_{33} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2}r + \frac{\Psi_{;}{}^{\lambda}{}_{\lambda}}{\Psi} = \kappa T^{3}{}_{3}\,. \tag{15c}$$

Der zweidimensionale Einsteintensor $g_{\alpha\beta}$ ist allerdings Null. Er wurde nur deswegen in der obigen Gleichung angeschrieben, weil dieselben Resultate auch bei einer Reduktion von $N > 4$ auf $n = N - 2$ Dimensionen erhalten werden, und der Einsteintensor dort nicht verschwindet. Diese Feldgleichungen können mittels Variationsprinzip aus dem Wirkungsintegral

$$w = \int d^n x\sqrt{\epsilon\gamma}\,\Psi\Phi\left[\frac{r}{2\kappa} - \frac{1}{\kappa}\frac{\Psi_{;}{}^{\lambda}\Phi_{,\lambda}}{\Psi\Phi} + L_M\right], \tag{16}$$

das sich direkt von dem vierdimensionalen Wirkungsintegral ableiten läßt, berechnet werden.

Für die folgenden Abschnitte ist es notwendig $\Psi = \exp(\lambda\psi)$ und $\Phi = \exp(\mu\phi)$ zu setzen, womit man für die Feldgleichungen

$$g_{\alpha\beta} + \lambda\psi_{;\alpha\beta} + \lambda^2\psi_{,\alpha}\psi_{,\beta} + \mu\phi_{;\alpha\beta} + \mu^2\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} -$$

$$
\begin{aligned}
&- \gamma_{\alpha\beta}\left(\lambda\psi_{;}{}^{\lambda}{}_{\lambda} + \lambda^2\psi_{;}{}^{\lambda}\psi_{,\lambda} + \lambda\mu\,\psi_{;}{}^{\lambda}\phi_{,\lambda} + \mu\phi_{;}{}^{\lambda}{}_{\lambda} + \mu^2\phi_{;}{}^{\lambda}\phi_{,\lambda}\right) = \\
&= -\kappa T_{\alpha\beta}\,,
\end{aligned} \tag{16a}
$$

$$
\frac{1}{2}r + \mu\phi_{;}{}^{\lambda}{}_{\lambda} + \mu^2\phi_{;}{}^{\lambda}\phi_{,\lambda} = \kappa T^2{}_2 \tag{16b}
$$

und

$$
\frac{1}{2}r + \lambda\psi_{;}{}^{\lambda}{}_{\lambda} + \lambda^2\psi_{;}{}^{\lambda}\psi_{,\lambda} = \kappa T^3{}_3\,, \tag{16c}
$$

sowie für das Wirkungsintegral schließlich

$$
w = \int d^n x\sqrt{\epsilon\gamma}\, e^{(\lambda\psi+\mu\phi)}\left[\frac{r}{2\kappa} - \frac{\lambda\mu}{\kappa}\,\psi_{;}{}^{\lambda}\phi_{,\lambda} + L_M\right] \tag{17}
$$

erhält.

## 5 Skalares Feld durch Dimensionale Reduktion

Durch Reduktion von $N$ auf $n = N - 2$ Dimensionen kann man aus Teilen des metrischen Tensors ein Skalarfeld konstruieren, wenn für $\Psi$ des vorigen Abschnittes $\Psi = \exp(\sqrt{\kappa/2}\,F)$ gesetzt wird, und desgleichen $\Phi = \exp(-\sqrt{\kappa/2}\,F)$ für $\Phi$. Dadurch erhält man folgende Gleichungen:

$$
g_{\alpha\beta} = -\kappa\left(F_{,\alpha}F_{,\beta} - \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}F_{;}{}^{\lambda}F_{;\lambda} + T_{\alpha\beta}\right) \quad \text{und} \tag{18}
$$

$$
F_{;}{}^{\lambda}{}_{\lambda} = \sqrt{\frac{\kappa}{2}}\,\left(T^3{}_3 - T^2{}_2\right). \tag{19}
$$

In ihnen erkennt man den Energie-Impulstensor eines skalaren Feldes $F$ wieder, der aus der Lagrangedichte

$$
l_F = \frac{1}{2}F_{;}{}^{\lambda}F_{,\lambda} \tag{20}
$$

folgt. Das vollständige n-dimensionale Wirkungsintegral, welches sich direkt aus dem N-dimensionalen ableiten läßt, lautet:

$$
w = \int d^n x\sqrt{\epsilon\gamma}\,\left(\frac{r}{2\kappa} + l_F + l_M\right), \tag{21}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
l_M &= l_M\left(\Omega, \Omega_{,\lambda}; \phi, \phi_{,\lambda}; \gamma^{\alpha\beta}, \gamma^{\alpha\beta}{}_{,\lambda}\right) \\
&= L_M\Big(\Omega, \Omega_{,\lambda}; \gamma^{\alpha\beta}, \gamma^{\alpha\beta}{}_{,\lambda}; -e^{-\sqrt{2\kappa}\,\phi}, \sqrt{2\kappa}\,e^{-\sqrt{2\kappa}\,\phi}\,\phi_{,\lambda}; \\
&\qquad\qquad -e^{\sqrt{2\kappa}\,\phi}, -\sqrt{2\kappa}\,e^{\sqrt{2\kappa}\,\phi}\,\phi_{,\lambda}\Big).
\end{aligned}
$$

$L_M$ ist dabei die Lagrangedichte der Materiefelder $\Omega$ und demnach auch ein Funktional der Metrik: $L_M(\Omega, \Omega_{,\lambda}; \gamma^{\alpha\beta}, \gamma^{\alpha\beta}{}_{,\lambda}; \gamma^{22}, \gamma^{22}{}_{,\lambda}; \gamma^{33}, \gamma^{33}{}_{,\lambda})$.

## 6 Dilatongravitation

Als Beispiel für die Reduktion von vier auf zwei Dimensionen wird in diesem Abschnitt die Dilatongravitation abgeleitet, die eine renormierbare, zweidimensionale Quantengravitationstheorie ist. Sie wurde erstmals im Jahre 1991 von Curtis G. Callan Jr., Steven B. Giddings, Jeffrey A. Harvey und Andrew Strominger [CGHS] entwickelt. Das Wirkungsintegral, die Einsteinsche Feldgleichung und die Wellengleichungen für $\phi$ und $f$ der Dilatongravitation lauten:

$$w = \int d^2x \sqrt{-\gamma} \left\{ e^{-2\phi} \left[ r + 4\phi_{;}{}^{\mu}\phi_{,\mu} + 4\lambda^2 \right] - \frac{1}{2} f_{;}{}^{\mu} f_{,\mu} \right\}, \tag{22}$$

$$\begin{aligned} e^{-2\phi} \left[ -2\phi_{;\alpha\beta} + 8\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} - \gamma_{\alpha\beta} \left( -2\phi_{;}{}^{\mu}{}_{\mu} + 6\phi_{;}{}^{\mu}\phi_{,\mu} + 2\lambda^2 \right) \right] = \\ = \frac{1}{2} \left( f_{,\alpha} f_{,\beta} - \frac{1}{2} f_{;}{}^{\mu} f_{,\mu} \right) \quad \text{sowie} \end{aligned} \tag{23}$$

$$r + 4\phi_{;}{}^{\mu}{}_{\mu} - 4\phi_{;}{}^{\mu}\phi_{,\mu} + 4\lambda^2 = 0 \quad \text{und} \tag{24}$$

$$f_{;}{}^{\mu}{}_{\mu} = 0\,. \tag{25}$$

Obiges Wirkungsintegral läßt sich aus der vierdimensionalen Wirkung

$$W = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ R + 4\lambda^2 - \frac{1}{2} F_{;}{}^{\mu} F_{,\mu} \right] \tag{26}$$

ableiten, wenn man

$$g_{ij} = \left( \begin{array}{c|cc} \gamma_{\alpha\beta} & \multicolumn{2}{c}{\emptyset} \\ \hline \emptyset & -e^{-2\left(1+\sqrt{3}\right)\phi} & 0 \\ & 0 & -e^{-2\left(1-\sqrt{3}\right)\phi} \end{array} \right) \tag{27}$$

und

$$F_{,\mu} = e^{\phi} f_{,\mu} \tag{28}$$

setzt, wobei sich auch das Wirkungsintegral $W$ (Gl. 26) aus einer höherdimensionalen Allgemeinen Relativitätstheorie ableiten läßt, wie der vorige Abschnitt zeigte.

## 7 Schlußbemerkungen

Verbin konnte durch dimensionale Reduktion zeigen, daß sich eine dreidimensionale Gravitationstheorie konstruieren läßt, die nicht das Manko eines fehlenden Newtonschen Limits besitzt.

In diesem Artikel konnte durch dimensionale Reduktion von vier auf zwei Dimensionen gezeigt werden, daß sich die Dilatongravitation als Teillösung der Einsteinschen Allgemeinen Relativitätstheorie darstellen läßt, wenn man $F_{,\mu}$ entsprechend wählt (siehe Gl. 28).

# A Formelsammlung

Im Folgenden eine Zusammenstellung der Formeln, die bei den Berechnungen dieses Artikels Verwendung fanden:

### Ableitungen der Metrik

$$\begin{aligned} g_{,l} &= 2g\Gamma^k{}_{kl} \\ (\sqrt{\epsilon g}\,)_{,l} &= \sqrt{\epsilon g}\,\Gamma^k{}_{kl} \\ g^{ij}{}_{,k} &= -g^{im}g^{jn}g_{mn,k} \end{aligned}$$

### Variation von $g^{ij}$

$$\int d^N x < expl > = \int d^N x < expr >$$

| *expl* | *expr* |
|---|---|
| $\delta(\sqrt{\epsilon g}\,aR)$ | $\sqrt{\epsilon g}\left(aG_{ij} + a_{;ij} - g_{ij}a_{;}{}^l{}_l\right)\,\delta g^{ij}$ |
| $\delta\left(\sqrt{\epsilon g}\,aA^l{}_{;l}\right)$ | $\sqrt{\epsilon g}\left(-a_{,j}A_i + 1/2\,g_{ij}a_{;}{}^l A_l\right)\,\delta g^{ij}$ |
| $\delta\left(\sqrt{\epsilon g}\,A^l B_l\right)$ | $\sqrt{\epsilon g}\,\left(A_i B_j - 1/2\,g_{ij}A^l B_l\right)\,\delta g^{ij}$ |
| $\delta\sqrt{\epsilon g}$ | $-1/2\,\sqrt{\epsilon g}\,g_{ij}\,\delta g^{ij}$ |
| $\sqrt{\epsilon g}\,a\,\delta R$ | $\sqrt{\epsilon g}\left(aR_{ij} + a_{;ij} - g_{ij}a_{;}{}^l{}_l\right)\,\delta g^{ij}$ |
| $\sqrt{\epsilon g}\,a\,\delta A^l{}_{;l}$ | $\sqrt{\epsilon g}\left[-a_{,j}A_i + 1/2\,g_{ij}\left(aA^l{}_{;l} + a_{;}{}^l A_l\right)\right]\,\delta g^{ij}$ |
| $\sqrt{\epsilon g}\,ag^{ij}\,\delta R_{ij}$ | $\sqrt{\epsilon g}\left(a_{;ij} - g_{ij}a_{;}{}^l{}_l\right)\,\delta g^{ij}$ |
| $\sqrt{\epsilon g}\,ag^{ij}\,\delta A_{i;j}$ | $\sqrt{\epsilon g}\left[-aA_{i;j} - a_{,j}A_i + 1/2\,g_{ij}\left(aA^l{}_{;l} + a_{;}{}^l A_l\right)\right]\,\delta g^{ij}$ |
| $\sqrt{\epsilon g}\,aA_r g^{ij}\,\delta\Gamma^r{}_{ij}$ | $\sqrt{\epsilon g}\left[aA_{i;j} + a_{;j}A_i - 1/2\,g_{ij}\left(aA^l{}_{;l} + a_{;}{}^l A_l\right)\right]\,\delta g^{ij}$ |
| $\sqrt{\epsilon g}\,A^i\,\delta\Gamma^k{}_{ik}$ | $\sqrt{\epsilon g}\,1/2\,g_{ij}A^l{}_{;l}\,\delta g^{ij}$ |
| $\sqrt{\epsilon g}\,aA_r g^{rk}g^{ij}\,\delta\Gamma_{kij}$ | $\sqrt{\epsilon g}\left[aA_{i;j} + a_{,j}A_i - aA_i g^{lt}\Gamma_{jlt} +\right.$ |
| | $\left.+1/2\,g_{ij}\left(aA^l{}_{;l} + a_{;}{}^l A_l\right)\right]\,\delta g^{ij}$ |
| $\sqrt{\epsilon g}\,A^i g^{kj}\,\delta\Gamma_{kij}$ | $\sqrt{\epsilon g}\left(1/2\,g_{ij}A^l{}_{;l} - A^l\Gamma_{ilj}\right)\,\delta g^{ij}$ |
| $\delta g_{mn}$ | $-g_{mi}g_{nj}\,\delta g^{ij}$ |
| $\delta g_{mn,k}$ | $-g_{mi}g_{nj}\,\delta g^{ij}{}_{,k}$ |

### Variation von $\Phi$

$$\int d^N x\sqrt{\epsilon g}\,< expl > = \int d^N x\sqrt{\epsilon g}\,< expr >$$

| *expl* | *expr* |
|---|---|
| $\delta\Big(e^{-2\varphi}\,\Phi_{;}{}^{l}\Phi_{,l}\Big)$ | $e^{-2\varphi}\,\Big(4\varphi_{;}{}^{l}\Phi_{,l}-2\Phi_{;}{}^{l}\Phi_{,l}\Big)\;\delta\Phi$ |
| $\delta\Big(e^{-2\Phi}\,\Phi_{;}{}^{l}\Phi_{,l}\Big)$ | $e^{-2\Phi}\,\Big(-2\Phi_{;}{}^{l}{}_{l}+2\Phi_{;}{}^{l}\Phi_{,l}\Big)\;\delta\Phi$ |
| $\delta\Big(\Phi_{;}{}^{l}\Phi_{,l}\Big)$ | $-2\Phi_{;}{}^{l}{}_{l}\,\delta\Phi$ |
| $e^{-2\Phi}\;\delta\Big(\Phi_{;}{}^{l}\Phi_{,l}\Big)$ | $e^{-2\Phi}\,\Big(-2\Phi_{;}{}^{l}{}_{l}+4\Phi_{;}{}^{l}\Phi_{,l}\Big)\;\delta\Phi$ |

## Literatur


[SU] Roman U. Sexl, Helmuth K. Urbantke. *Gravitation und Kosmologie*: Eine Einf. in d. Allg. Relativitätstheorie. – 2. überarb. u. erw. Aufl. – Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich, 1983.

[W] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology*: Principles and applications of the general theory of relativity. – John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, 1972.

[V] Y. Verbin. *D=3 General Relativity is not D=3 Gravity.* – Physics group. The Open University of Israel, Tel Aviv.

[J] R. Jackiw. *Topics in Planar Physics.* – XXIX. Internationale Universitätswochen für Kernphysik. Schladming, March 1–10, 1990.

[CGHS] Curtis G. Callan Jr., Steven B. Giddings, Jeffrey A. Harvey, Andrew Strominger. *Evanescent black holes.* – Physical Review D. Volume 45, Number 4, February 15, 1992.