DIPLOMARBEIT

Zweidimensionale Supergravitation

ausgeführt am Institut für
Theoretische Physik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
O. Univ. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Wolfgang Kummer

von

Martin Franz Ertl

Streitwiesen 13
A-3653 Weiten

Wien, im September 1996

Meinen Eltern

Danksagung

Ich möchte mich bei Prof. Wolfgang Kummer für die Diskussions- und Hilfsbereitschaft bei der Betreuung meiner Diplomarbeit bedanken. Außerdem sei meinen Kollegen am Institut für das herzliche Arbeitsklima, insbesondere jedoch Herrn M. Nikbakht Tehrani für die geduldige Beantwortung vieler Fragen, gedankt.

Mein besonderer Dank gilt meinen Freunden und Verwandten, aber vor allem meinen Eltern und meiner Schwester, die mir mein Studium ermöglicht haben.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die Supergravitation zählt zu den wichtigsten Entwicklungen der modernen Theoretischen Physik. Obwohl sie bereits seit etwa zwanzig Jahren bekannt ist [WZ, DZ, FNF, FN], wird auf diesem Gebiet weiterhin sehr lebhaft geforscht. Die physikalischen Modelle in denen Supersymmetrietransformationen vorhanden sind, beschränken sich dabei nicht nur auf die vierdimensionale Raum-Zeit, sondern reichen von zwei [H, We], einer Raum- und einer Zeitdimension, bis zu zwölf Dimensionen [W, V], womit zehn Raum- und zwei Zeitdimensionen gemeint sind. Die Komplexität der Modelle und der Rechenaufwand, welcher für deren Untersuchung notwendig ist, nehmen dabei mit der Zahl der Dimensionen zu, weshalb es für Novizen empfehlenswert ist, die aufgrund der Nichtkommutativität diverser Größen der Supergravitation auftretenden Komplikationen anhand zweidimensionaler Modelle zu meistern.

Somit ist das Ziel dieser Arbeit angesprochen, die zweidimensionale Supergravitation. Diese ist nicht nur wegen ihrer Einfachheit, im Vergleich zu höheren Dimensionen, interessant, sondern auch deshalb, weil sie die Grundlage der Superstringtheorie [GSW] bildet, in welcher Abbildungen einer zweidimensionalen Supermannigfaltigkeit in einen höherdimensionalen Zielraum betrachtet werden. Das Bild der zweidimensionalen Supermannigfaltigkeit im Zielraum wird Weltfläche genannt, eine Verallgemeinerung der Weltlinie von Punktteilchen.

Von besonderer Bedeutung sind gewöhnliche zweidimensionale Gravitationsmodelle, die auch als Teillösungen vierdimensionaler Raum-Zeit-Modelle auftreten, und die in der Form der Dilatongravitation [CGHS] und ihren Verallgemeinerungen [KKL1, KKL2, LVA] zur Untersuchung quantenmechanischer Effekte von Raum-Zeit-Singularitäten verwendet werden. Für diese nicht-Einsteinschen Gravitationstheorien mit dynamischer Torsion in zwei Dimensionen [KV1, KV2, K1, K2, K3, KW1, KW2] wurde ein allgemeiner Formalismus entwickelt, der sich einer Poissonstruktur im Zielraum bedient. Anhand dieser Poisson-Sigma-Modelle [SS1, SS2, KS1, KS2] werden auch topologische Eigenschaften studiert. Während Feldtheorien oft nur lokal betrachtet wurden, versucht man nun den ganzen Raum durch Zusammenkleben einzelner Karten zu überdecken. Möglicherweise kann man die Supergravitation im Sinne der nicht-Einsteinschen Gravitationstheorie erweitern, wobei man auf die bereits vorhandenen Erfahrungen mit Poisson-Sigma-Modellen zurückgreifen kann.

Voraussetzung dafür ist ein fundiertes Verständnis der grundlegenden Arbeit von Howe [H], dessen Überlegungen im Detail nachvollzogen wurden. Die dazu notwendigen Grundlagen sind zu Beginn meiner Arbeit dargestellt, die nach einer Behandlung der Cliffordalgebra [BMB, SU1, R] und der Spinoren in lokalen Rahmen [BMB, GS] auf wesentliche Elemente der Supermathematik [Be, DW, B, CG, BK] eingeht. Die Bausteine der Supermathematik sind die Superzahlen, welche eine Erweiterung der komplexen um die antikommutierenden Zahlen darstellen, was natürlich einige Änderungen in der für Gravitationstheorien notwendigen Differentialgeometrie mit sich bringt. Zuerst erscheint die neue Mathematik ungewohnt, sie bringt aber auch, vor allem durch die notwendige Unterscheidung zwischen Links- und Rechtswirkungen, Vorteile für die gewöhnliche Differentialgeometrie mit sich. Außerdem kommen die Unzulänglichkeiten der üblichen Matrizenrechnung zu Tage, die nur indirekt auf diese Unterscheidung eingeht. Nach Herleitung wichtiger Gleichungen aus der geometrischen Formulierung von Eichtheorien [BMB, GS, GH, SU2] mit den Methoden der Supermathematik [HR, WB, WFN, F] folgt derjenige Teil, der sich detailliert mit der Arbeit von Howe [H] befaßt.

Der mathematische Hintergrund der Theorie von Howe ist eine Supermannigfaltigkeit, die über einem Raum mit zwei kommutierenden und zwei antikommutierenden, reellen Zahlenmengen modelliert ist. Diese Formulierung folgt dabei weitgehend jener der Einstein-Cartanschen Gravitationstheorie, wobei aber der Tangentialraum der Supermannigfaltigkeit in bosonische und fermionische Teilräume getrennt ist und die Lorentzgruppe auf diese Teilräume gemeinsam wirkt. Die Kinematik des Systems wird durch Superfelder beschrieben, deren Komponentenfelder durch geeignete Zwangsbedingungen reduziert werden. Die Lösung dieser Zwangsbedingungen brachte erheblichen Rechenaufwand mit sich, weshalb hierfür ein Computerprogramm [L] adaptiert wurde. Die Rechnungen ergaben neben zahlreichen, augenscheinlichen Druckfehlern in [H] auch Abweichungen in einzelnen Ausdrücken. Offensichtlich wird in der Sekundärliteratur [We] eine korrigierte Version verwendet.

Ziel dieser Arbeit war es auch, eine konsistente und einheitliche Notation zu entwickeln, die eine solide Basis für die bereits erwähnten Erweiterungen der üblichen, zweidimensionalen Supergravitation in Richtung Gravitationstheorien mit dynamischer Torsion bietet.

Kapitel 2

Lokale Rahmen und Spinoren

Die Grundlage des bosonischen Teiles der Theorie bildet eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit M mit den Koordinatenfunkionen (x^m), $m = 1, 2$. Die Indizes aus der Mitte des lateinischen Alphabetes bezeichnen somit Elemente der Mannigfaltigkeit wie z. B. die Koordinatenbasis $\{\frac{\partial}{\partial x^m}\}$ des Tangentialraumes T oder die Koordinatenbasis $\{dx^m\}$ des Kotangentialraumes T^*. Der Tangentialraum in Gravitationstheorien ist ein Raum mit einer Metrik, die abstrakt durch $(u_x, v_x) \in \mathbb{R}$ für $u_x, v_x \in T_x$ und $x \in M$ bezeichnet wird.

Im Tangentialbündel wird nun ein System von Schnittbasen über Umgebungen U von M eingeführt. Die Komponenten bezüglich dieser lokalen Schnittbasen und die Elemente der Schnittbasen erhalten kleingeschriebene Lorentzindizes $\{a, b, c, \dots\}$ vom Beginn des lateinischen Alphabetes, die die Werte $\{0, 1\}$ annehmen können. Eine auch Rahmen genannte Schnittbasis wird also durch $\{e_a\}_{a=0,1}$ bezeichnet. Das Rahmensystem soll die Eigenschaft besitzen, daß für jeden lokalen Rahmen $\{e_a\}$ die Komponenten der Metrik durch

$$\eta_{ab} := \mathrm{diag}(-1, +1) \tag{2.1}$$

gegeben, und alle Rahmen gleich orientiert sind. Diese Metrik ist die Lorentzmetrik in zwei Dimensionen, und obige Rahmen sind orientierte Orthonormalrahmen.

Die Basistransformationen innerhalb dieses Systems der Orthonormalrahmen nennen wir lokale Lorentztransformationen. Da sie die Lorentzmetrik $\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1, +1)$ invariant lassen, werden sie auch mit $\mathrm{SO}(1, 1)$ bezeichnet.

Das Kotangentialbündel T^* wird aus den Kotangentialräumen T^*_x, dies sind die Vektorräume der linkslinearen Abbildungen ω_x: $T_x \to \Lambda_\infty$, zusammengesetzt. Das Adjektiv „linkslinear“ bezeichnet dabei die Eigenschaft

$$(\alpha u_x)\underline{\omega_x} = \alpha(u_x)\underline{\omega_x}$$

der $\omega_x \in T^*_x$, die für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $u_x \in T_x$ gilt. Die ungewohnte Schreibweise, daß die Funktion rechts vom Argument steht, macht diese Eigenschaft augenfällig. Im Bedarfsfall wird zur Unterscheidung zwischen Funktion und Argument die Funktion unterstrichen, was z. B. schon bei dem Ausdruck $(u)\underline{(\alpha\omega)}$ erforderlich ist, der die Anwendung der Funktion $\alpha\omega$ auf das Argument u bezeichnet. Die Verwendung dieser Schreibweise erscheint in der kommutativen Algebra überflüssig, da hier ohnedies $\alpha(u)\underline{\omega} = (u)\underline{\omega}\alpha = (u)\underline{(\omega\alpha)} = (u)\underline{(\alpha\omega)} = (u\alpha)\underline{\omega} = (\alpha u)\underline{\omega}$ gilt, wird aber in der nichtkommutativen Algebra unbedingt erforderlich und wird deshalb jetzt verwendet.

Mit Hilfe des Kroneckersymbols

$$\delta(a,b) := \begin{cases} 1 & a = b \\ 0 & a \neq b \end{cases} \tag{2.2}$$

wird der duale Rahmen $\{e^a\}$ definiert, dessen Elemente die Beziehung

$$(e_a)\underline{e^b} = \delta(a,b) \tag{2.3}$$

erfüllen. Der duale Rahmen ist ebenfalls orthonormiert, und die Komponenten seiner Metrik sind aus

$$\eta_{ac}\eta^{cb} = \delta(a,b)$$

zu berechnen. Man erhält

$$\eta^{ab} = \mathrm{diag}(-1,+1)\,. \tag{2.4}$$

Der Kroneckertensor $\delta = e^a \otimes \delta_a{}^b \otimes e_b$ beschreibt den identischen Schnitt; für seine Komponenten gilt:

$$\delta_a{}^b := \delta(a,b) \quad \text{und} \quad \delta^a{}_b = \delta(a,b)\,. \tag{2.5}$$

Das total antisymmetrische Epsilonsymbol in zwei Dimensionen sei mittels

$$\epsilon(0,1) := +1 \quad \text{und} \quad \epsilon(a,b) = -\epsilon(b,a) \tag{2.6}$$

gegeben. Im obigen Orthonormalrahmensystem wird damit der Epsilontensor, bzw. vielmehr seine Komponenten

$$\epsilon_{ab} := \epsilon(a,b) \quad \text{und} \quad \epsilon^{ab} = -\epsilon(a,b) \tag{2.7a}$$

definiert, was der Konvention in [H] entspricht, während in [We] der Epsilontensor durch $\epsilon^{ab} := \epsilon(a,b)$ definiert ist. Die Komponenten des Epsilontensors in den durch die Metrik isomorphen Tensorproduktbündeln sind aus folgender Aufstellung ersichtlich:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ab} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \qquad \epsilon_a{}^b &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \epsilon^{ab} &= -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \qquad \epsilon^a{}_b &= -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.7b}$$

Sie erfüllen weiters die Beziehung

$$\epsilon_a{}^c \epsilon_c{}^b = \delta_a{}^b \,. \tag{2.7c}$$

Der Epsilontensor ist der Erzeuger der Lorentztransformationen, mit dem man die Parameter der infinitesimalen Lorentztransformationen

$$\delta e_a = l_a{}^b e_b \tag{2.8a}$$

in der Form

$$l_a{}^b = l \epsilon_a{}^b \tag{2.8b}$$

schreiben kann. Sei $v = v^a e_a$, dann gilt

$$\delta v = v' - v = v^a \delta e_a = v^a l_a{}^b e_b =: \delta v^b e_b \,,$$

womit man für die infinitesimalen Transformationen der Komponenten die Gleichung

$$\delta v^b = v^a l_a{}^b \tag{2.8c}$$

erhält.

Durch die Metrik η^{ab} wird eine Cliffordalgebra definiert, die sich mit der gegebenen Basis als Matrizenalgebra realisieren läßt, d. h. die Cliffordmultiplikation der Basisvektoren wird durch die Matrizenmultiplikation der Gammamatrizen dargestellt. Die Gammamatrizen werden mittels der Antikommutatorrelationen

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab} 1 \tag{2.9}$$

definiert. Ein Satz von reellen Matrizen, der diese Relationen erfüllt, ist

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{2.10a}$$

Anders gesagt, die Realisierung als Matrixalgebra ist eine Abbildung des Kotangentialraumes in den Raum der 2×2 Matrizen, $\rho \colon T^*(U) \to \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $e^a \mapsto \rho(e^a) = \gamma^a$. Die Cliffordalgebra ist also so konstruiert, daß die Cliffordmultiplikation eines Vektors $u \in T_x$ mit sich selbst gleich seinem Skalarprodukt ist, gemäß $uu = (u, u)$. Für eine detaillierte Diskussion von Cliffordalgebren siehe [R]. Mit der Definition

$$\gamma_5 := \gamma^0 \gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.10b}$$

erhält man schließlich durch der Menge $\{1, \gamma^a, \gamma_5\}$ eine Basis dieser Algebra. Weil alle Matrizen reell sind, ist sie eine Majorana Basis, und da γ_5 diagonal ist, auch eine Weyl Basis. Die nachfolgenden Rechnungen bestehen zum Großteil aus Manipulationen von Gammamatrizen, die nun angegebenen Beziehungen sind also von besonderer Wichtigkeit:

$$\gamma^a\gamma^b = \eta^{ab}1 - \epsilon^{ab}\gamma_5 \tag{2.11a}$$

$$[\gamma^a, \gamma^b] = -2\epsilon^{ab}\gamma_5 \tag{2.11b}$$

$$\begin{gathered} \gamma_5\gamma^a = -\gamma^a\gamma_5 \\ \gamma_5\gamma^a = \gamma^b\epsilon_b{}^a\,, \qquad \gamma^a\gamma_5 = \epsilon^a{}_b\gamma^b \end{gathered} \tag{2.11c}$$

$$\gamma_a\gamma^b\gamma^a = 0 \tag{2.11d}$$

$$\begin{gathered} \gamma^0\gamma^0 = -1\,, \qquad \gamma^1\gamma^1 = 1\,, \qquad \gamma_5\gamma_5 = 1 \\ \gamma^0\gamma^1 = \gamma_5\,, \qquad \gamma^1\gamma^0 = -\gamma_5 \\ \gamma_5\gamma^0 = \gamma^1\,, \qquad \gamma_5\gamma^1 = \gamma^0 \end{gathered} \tag{2.11e}$$

Die Gammamatrizen sind Operatoren in $\mathbb{R}^2$, z. B.:

$$\gamma^a \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \quad \psi \mapsto \gamma^a\psi\,, \tag{2.12}$$

Die Spaltenvektoren $\psi \in \mathbb{R}^2$ nennt man Spinoren.

Bei Verwendung von Spinoren bedient man sich vielfach der Indexschreibweise. Für Spinorindizes werden die Zeichen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ vom Beginn des griechischen Alphabetes verwendet, sie können die Werte $\{1, 2\}$ annehmen. Die folgende Aufstellung zeigt den Zusammenhang zwischen Index- und Matrixschreibweise:

$$\begin{gathered} \delta_\alpha{}^\beta \leftrightarrow 1\,, \qquad (\gamma^a)_\alpha{}^\beta \leftrightarrow \gamma^a\,, \qquad (\gamma_5)_\alpha{}^\beta \leftrightarrow \gamma_5 \\ \psi_\beta \leftrightarrow \psi \\ (\gamma^a)_\alpha{}^\beta\psi_\beta \leftrightarrow \gamma^a\psi \\ (\gamma^0)_\alpha{}^\gamma\,(\gamma^1)_\gamma{}^\beta \leftrightarrow \gamma^0\gamma^1 \end{gathered}$$

Die Bedingung, daß bei einer Rahmentransformation im Kotangentialbündel die Matrizen der Cliffordalgebra nicht geändert werden, bewirkt eine gleichzeitige Transformation der Spinoren. Man kann aber auch umgekehrt vorgehen und zuerst die Transformation der Spinoren durch die Liegruppe $\mathrm{Spin}(1, 1)$ definieren, was im Folgenden auch gemacht wird.

Zu jeder Liegruppe gehört eine Lie-Algebra, mit der man zumindest eine Umgebung der Einheit der Liegruppe mittels Exponentieren erzeugen kann. Im Fall der Spingruppen $\mathrm{Spin}(r, s)$ ist die Lie-Algebra durch die Kommutatoralgebra der Matrizen

$$\gamma_{ab} := \frac{1}{2}[\gamma_a, \gamma_b] \tag{2.13a}$$

gegeben, die sich bei $Spin(1,1)$ auf die Matrix γ_5,

$$\frac{1}{2}[\gamma_a, \gamma_b] = -\epsilon_{ab}\gamma_5\,, \tag{2.13b}$$

reduziert. Infinitesimale Transformationen von Spinoren lauten

$$\delta\psi = -\frac{1}{4}l^{ab}\gamma_{ab}\psi\,, \tag{2.14a}$$

wobei die Transformationsparameter l^{ab} ebenfalls antisymmetrisch sind. Somit gilt mit $l^{ab} = l\epsilon^{ab}$ in zwei Dimensionen

$$\delta\psi = -l\,\frac{1}{2}\gamma_5\psi\,. \tag{2.14b}$$

Die Elemente g der Gruppe $\mathrm{Spin}(1,1)$ erhält man nun durch Exponentieren,

$$g = e^{-\frac{1}{4}l^{ab}\gamma_{ab}}\,, \tag{2.15a}$$

wobei die Exponentialfunktion formal als Entwicklung in ihre Taylorreihe zu verstehen ist. Führt man die Entwicklung durch und benützt die Beziehung $\gamma_5\gamma_5 = 1$, so findet man

$$g = \cosh(\frac{l}{2})1 - \sinh(\frac{l}{2})\gamma_5\,. \tag{2.15b}$$

Eine Transformation auf dem Spinorraum lautet daher

$$\psi \xrightarrow{l} \psi' = g\psi\,. \tag{2.16}$$

Mit der Reversion, in zwei Dimensionen durch $\tilde{1} = 1$, $\tilde{\gamma}^a = \gamma^a$ und $\tilde{\gamma}_5 = -\gamma_5$ gegeben, sieht man, daß die $g \in \mathrm{Spin}(1,1)$ den Betrag

$$\|g\| = \sqrt{g\tilde{g}} = 1$$

haben.

Bildet man nun die Vektoren $v \in T$ in die Matrixalgebra ab,

$$\rho(v) = \rho(v^a e_a) = v^a\rho(e_a) = v^a\gamma_a\,,$$

so ist die Wirkung von $\mathrm{Spin}(1,1)$ auf die Elemente $V := \rho(v)$ durch

$$V \xrightarrow{l} V' = gV\tilde{g} \tag{2.17a}$$

gegeben. Für deren infinitesimale Transformation gilt:

$$\delta V = V' - V = -\frac{1}{4}l^{ab}[\gamma_{ab}, V] \tag{2.17b}$$

Mit den Relationen für die Gammamatrizen findet man

$$\begin{aligned}\delta V &= -\frac{1}{2}l\,[\gamma_5, V] = -\frac{1}{2}l\,[\gamma_5, v^a\gamma_a] = -\frac{1}{2}lv^a[\gamma_5, \gamma_a]\\ &= lv^a\epsilon_a{}^b\gamma_b = v^a l_a{}^b\gamma_b\,.\end{aligned}$$

Dies sind tatsächlich die infinitesimalen Lorentztransformationen, die oben bereits angeschrieben wurden. Somit ist gezeigt, daß jede Lorentztransformation im Tangentialbündel eine Transformation der Spinoren und jede Transformation der Spinoren durch die Spingruppe eine Transformation der Tangentialvektoren bewirkt. Will man einen Basiswechsel im Tangentialraum durchführen, so muß man, um diese Analogie aufrecht zu erhalten, auch eine Basis im Spinorraum S^* einführen. Sei die Spinorbasis mit $\{e^\alpha\}$ bezeichnet, dann werden die vormals als Spinoren bezeichneten Größen ψ_α zu Spinorkomponenten, und $\psi = e^\alpha \psi_\alpha$ zu dualen Spinoren. Die Basis von $S^{**} = S$ ist dann in üblicher Weise durch

$$\underline{e_\alpha}(e^\beta) = \delta(\alpha, \beta) \tag{2.18}$$

gegeben. Folglich läßt sich die Matrixdarstellung ρ als Abbildung der äußeren Algebra des Kotangentialraumes über einer Umgebung U von M in den Raum der Endomorphismen von S^* schreiben:

$$\begin{aligned} \rho\colon \Lambda(U) \to \mathrm{End}(S^*)\,, \qquad\qquad 1 &\mapsto e^\alpha \otimes \delta_\alpha{}^\beta \otimes e_\beta \\ e^a &\mapsto e^\alpha \otimes (\gamma^a)_\alpha{}^\beta \otimes e_\beta \\ e^0 \wedge e^1 &\mapsto e^\alpha \otimes (\gamma_5)_\alpha{}^\beta \otimes e_\beta \end{aligned} \tag{2.19}$$

Der Spinorraum S^* besitzt ebenfalls eine invariante Metrik, die über die Spinorkomponenten

$$\epsilon^{\alpha\beta} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

definiert ist. Die Spinormetrik induziert, da sie nicht ausgeartet ist, einen Isomorphismus zwischen S^* und S. Aufgrund der Antisymmetrie, $\epsilon^{\alpha\beta} = -\epsilon^{\beta\alpha}$, ist aber auf die Reihenfolge der Kontraktionen der Spinorindizes zu achten. Es gilt die Merkregel „links oben – rechts unten“:

$$\psi^\alpha := \epsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta \qquad T_{\cdots\alpha\beta}{}^\lambda{}_{\delta\cdots} = \epsilon^{\lambda\gamma} T_{\cdots\alpha\beta\gamma\delta\cdots} \tag{2.21}$$

Die Komponenten der dualen Spinormetrik sind aus

$$\epsilon^{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\gamma} = \epsilon_\alpha{}^\beta := \delta(\alpha, \beta) \tag{2.22}$$

zu bestimmen. Damit erhält man für die diversen Indexstellungen die Matrizen:

$$\begin{aligned} \epsilon^{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \qquad \epsilon_\alpha{}^\beta &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \epsilon_{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \qquad \epsilon^\alpha{}_\beta &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Außerdem kann man mit $\epsilon_{\alpha\beta}$ die Spinorindizes wieder herunterziehen. Auch hier gilt die „links oben – rechts unten“ Regel:

$$\psi_\beta = \psi^\gamma \epsilon_{\gamma\beta} \qquad T_{\cdots\alpha\beta\gamma\delta\cdots} = T_{\cdots\alpha\beta}{}^\lambda{}_{\delta\cdots}\,\epsilon_{\lambda\gamma} \tag{2.23}$$

Bei Vertauschung der Positionen der kontrahierten Indizes ist unbedingt der Vorzeichenwechsel

$$T_{\cdots\alpha\cdots}{}^{\alpha}{}_{\cdots} = -T_{\cdots}{}^{\alpha}{}_{\cdots\alpha\cdots} \tag{2.24}$$

zu beachten.

Nach Anwenden der Spinormetrik findet man die Symmetrieeigenschaften der Gammamatrizen, von denen in den nachfolgenden Rechnungen häufig Gebrauch gemacht wird:

$$\begin{aligned} (\gamma^a)_{\alpha\beta} &= (\gamma^a)_{\beta\alpha} \qquad & (\gamma_5)_{\alpha\beta} &= (\gamma_5)_{\beta\alpha} \\ (\gamma^a)^{\alpha\beta} &= (\gamma^a)^{\beta\alpha} \qquad & (\gamma_5)^{\alpha\beta} &= (\gamma_5)^{\beta\alpha} \end{aligned} \tag{2.25}$$

Die Abbildung ρ der Differentialformen über U in den Raum $S^* \otimes S$ läßt sich invertieren, denn aus der Fierzidentität

$$2\delta_\alpha{}^\beta \delta_\gamma{}^\delta = \delta_\alpha{}^\delta \delta_\gamma{}^\beta + (\gamma_a)_\alpha{}^\delta (\gamma^a)_\gamma{}^\beta + (\gamma_5)_\alpha{}^\delta (\gamma_5)_\gamma{}^\beta \tag{2.26}$$

folgt die Vollständigkeit der Gammamatrizen, weshalb sich jede Matrix M nach den Gammamatrizen entwickeln läßt:

$$M = 1m + \gamma^a m_a + \gamma_5 m_5 \tag{2.27a}$$

Dabei sind die Koeffizienten durch

$$m = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}(M)\,, \tag{2.27b}$$

$$m_a = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}(M\gamma_a) \quad \text{und} \tag{2.27c}$$

$$m_5 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}(M\gamma_5) \tag{2.27d}$$

gegeben. Für $\psi \otimes \chi \in S^* \otimes S$ erhält man

$$\begin{aligned} &\rho^{-1}(\psi \otimes \chi) = \\ &\qquad \frac{1}{2}\left(\psi_\alpha \chi^\alpha\right) + e^a\,\frac{1}{2}\left(\psi_\beta \chi^\alpha (\gamma_a)_\alpha{}^\beta\right) + e^0 \wedge e^1\,\frac{1}{2}\left(\psi_\beta \chi^\alpha (\gamma_5)_\alpha{}^\beta\right)\,, \end{aligned} \tag{2.28}$$

und durch Projektion auf die homogenen Teilräume von $\Lambda(U)$ die Komponenten

$$\bar{\chi}\psi := \chi^\alpha \psi_\alpha\,, \tag{2.29a}$$

$$\bar{\chi}\gamma_a\psi := \chi^\alpha (\gamma_a)_\alpha{}^\beta \psi_\beta \quad \text{und} \tag{2.29b}$$

$$\bar{\chi}\gamma_5\psi := \chi^\alpha (\gamma_5)_\alpha{}^\beta \psi_\beta\,, \tag{2.29c}$$

die bei infinitesimalen Lorentztransformationen das richtige Transformationsverhalten zeigen:

$$\delta(\bar{\chi}\psi) = 0\,, \tag{2.30a}$$

$$\delta(\bar{\chi}\gamma_a\psi) = -l_a{}^b(\bar{\chi}\gamma_b\psi) \quad \text{und} \tag{2.30b}$$

$$\delta(\bar{\chi}\gamma_5\psi) = 0\,. \tag{2.30c}$$

Kapitel 3

Supermathematik

3.1 Superzahlen

Sei Λ_N die *Graßmannalgebra* über $\mathbb{C}$, erzeugt vom Einheitselement $1 \in \mathbb{C}$ und den Elementen ζ^μ, $\mu = 1, \dots, N$, welche die Antikommutationsrelationen

$$\zeta^\mu \zeta^\nu + \zeta^\nu \zeta^\mu = 0 \tag{3.1}$$

erfüllen. Durch Nebeneinanderstellen wird dabei das Graßmannprodukt bezeichnet. Die 2^N Elemente $1, \zeta^\mu, \zeta^\mu\zeta^\nu, \dots, \zeta^1\zeta^2\cdots\zeta^N$, in den Produkten sind die linksseitigen Indizes immer kleiner ($\mu < \nu$), bilden eine Basis des Vektorraumes der Graßmannalgebra.

Ein Element $a \in \Lambda_N$ hat damit die Form

$$a = \alpha + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} \beta_{\mu_1 \cdots \mu_k} \zeta^{\mu_k} \dots \zeta^{\mu_1} , \tag{3.2}$$

wobei $\alpha, \beta_{\mu_1 \dots \mu_k} \in \mathbb{C}$, und die $\beta_{\mu_1 \dots \mu_k}$ total antisymmetrisch sind. Betrachtet man den formalen Limes $N \to \infty$, dann bezeichnet man die Algebra mit Λ_∞. Die Elemente von Λ_∞ heißen *Superzahlen*. Jede Superzahl kann in „Body“ und „Soul“ getrennt werden:

$$z = z_B + z_S \tag{3.3a}$$

$$z_B = \alpha \tag{3.3b}$$

$$z_S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \beta_{\mu_1 \cdots \mu_k} \zeta^{\mu_k} \dots \zeta^{\mu_1} . \tag{3.3c}$$

Betrachtet man die Algebra Λ_N, dann gilt $z_s^{N+1} = 0$.

Eine Superzahl ist genau dann invertierbar, wenn ihr Body nicht verschwindet. Die inverse Superzahl ist eindeutig und durch

$$z^{-1} = z_B^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-z_B^{-1} z_S)^n \tag{3.4}$$

gegeben.

Reihen dieser Art dienen zur Erweiterung beliebiger analytischer Funktionen auf $\mathbb{C}$ zu superzahlwertigen Funktionen auf Λ_∞,

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_B) z_S^n \,, \tag{3.5}$$

wobei $f^{(n)}(z_B)$ die n-te Ableitung von f an der Stelle z_B der komplexen Ebene bezeichnet.

Jede Superzahl kann außerdem in den kommutierenden Anteil z_c und in den antikommutierenden Anteil z_a zerlegt werden, gemäß

$$z = z_c + z_a \,. \tag{3.6a}$$

Die Entwicklung nach den erzeugenden Elementen von Λ_∞ lautet dann:

$$z_c = z_B + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k!} \beta_{\mu_1 \cdots \mu_{2k}} \zeta^{\mu_{2k}} \ldots \zeta^{\mu_1} \quad \text{und} \tag{3.6b}$$

$$z_a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \beta_{\mu_1 \cdots \mu_{2k+1}} \zeta^{\mu_{2k+1}} \ldots \zeta^{\mu_1} \,. \tag{3.6c}$$

Die Menge der kommutierenden Superzahlen wird mit $\mathbb{C}_c$ die der antikommutierenden Superzahlen mit $\mathbb{C}_a$ bezeichnet. Die Superzahlen Λ_∞ bilden somit eine $\mathbb{Z}_2$-graduierte Algebra:

$$\begin{gathered} \Lambda_\infty = \mathbb{C}_c + \mathbb{C}_a \\ \mathbb{C}_c \cdot \mathbb{C}_c \subseteq \mathbb{C}_c \qquad \mathbb{C}_c \cdot \mathbb{C}_a \subseteq \mathbb{C}_a \qquad \mathbb{C}_a \cdot \mathbb{C}_a \subset \mathbb{C}_c \end{gathered} \tag{3.7}$$

Superzahlen, die entweder aus $\mathbb{C}_c$ oder aus $\mathbb{C}_a$ sind, heißen *homogen.* Ihre *Graduierung* oder *Parität* p: $\mathbb{C}_c \cup \mathbb{C}_a \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}_2$ ist durch

$$p(z) := \begin{cases} 0 & z \in \mathbb{C}_c \\ 1 & z \in \mathbb{C}_a \end{cases} \tag{3.8}$$

gegeben.

Auf Λ_∞ läßt sich eine Involution, die man auch *komplexe Konjugation* nennt und dann mit * bezeichnet, einführen. Mit der Bezeichnung $\bar{\alpha}$ für die gewöhnliche komplexe Konjugation von $\alpha \in \mathbb{C}$ lauten die definierenden Eigenschaften der Involution

$$\begin{gathered} (\zeta^\mu)^* = \zeta^\mu \,, \\ (z + z')^* = z^* + z'^* \,, \\ (zz')^* = z'^* z^* \quad \text{und} \quad (\alpha z)^* = \bar{\alpha} z^* \end{gathered} \tag{3.9}$$

für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ und alle $z, z' \in \Lambda_\infty$. Somit gilt für beliebige Elemente der Graßmannalgebra

$$z^{**} = z \,,$$

und für deren erzeugende Elemente

$$(\zeta^{\mu_1}\zeta^{\mu_2}\ldots\zeta^{\mu_k})^* = \zeta^{\mu_k}\ldots\zeta^{\mu_2}\zeta^{\mu_1}\,.$$

Superzahlen welche die Eigenschaft $z^* = z$ besitzen heißen *reell,* wenn sie $z^* = -z$ erfüllen heißen sie *komplex.* Mit $\mathbb{R}_c$ wird die Unteralgebra der reellen Superzahlen von $\mathbb{C}_c$, mit $\mathbb{R}_a$ die Teilmenge der reellen Superzahlen von $\mathbb{C}_a$ bezeichnet.

3.2 Superfunktionen

Das p-fache Kroneckerprodukt von $\mathbb{R}_c$ wird mit $\mathbb{R}_c^p$, das q-fache Kroneckerprodukt von $\mathbb{R}_a$ mit $\mathbb{R}_a^q$ bezeichnet. Der Superraum $\mathbb{R}^{p|q} := \mathbb{R}_c^p \times \mathbb{R}_a^q$ ist also die Menge aller Elemente der Form

$$z = (z^1, \ldots, z^{(p+q)}) = (x^1, \ldots, x^p, \theta^1, \ldots, \theta^q)\,, \tag{3.10a}$$

wobei die $x^m \in \mathbb{R}_c$ und die $\theta^\mu \in \mathbb{R}_a$ sind. Symbolisch werden die Elemente von $\mathbb{R}^{p|q}$ mittels

$$z = (z^M) = (x^m, \theta^\mu) \tag{3.10b}$$

dargestellt. Die kleingeschriebenen Indizes m und μ werden also zu einem großgeschriebenen Superindex M zusammengefaßt, mit dem man für die Parität die Abkürzung

$$p(M) := p(z^M) = \begin{cases} 0 & M = m \\ 1 & M = \mu \end{cases} \tag{3.11}$$

eingeführt. Oftmals wird für $(-1)^{p(M)}$ nur $(-1)^M$ geschrieben.

Eine superzahlwertige Funktion auf $\mathbb{R}^{p|q}$,

$$f\colon \mathbb{R}^{p|q} \to \Lambda_\infty\,, \tag{3.12a}$$

heißt *superanalytisch,* wenn sie in eine Taylorreihe nach z^M entwickelt werden kann, entsprechend

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x^1, \ldots, x^p, \theta^1, \ldots, \theta^q) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f_{M_1\cdots M_k}\, z^{M_k}\ldots z^{M_1}\,, \quad f_{M_1\cdots M_k} \in \Lambda_\infty\,. \end{aligned} \tag{3.12b}$$

Für superanalytische Funktionen $f\colon \mathbb{R}_a \to \Lambda_\infty$ gilt:

$$f(\theta) = a + b\theta\,, \quad a, b \in \Lambda_\infty\,. \tag{3.13}$$

Bei der Entwicklung einer superanalytischen Funktion auf $\mathbb{R}_a^q$ bleiben ebenfalls nur endlich viele Terme über:

$$f(\theta^1, \ldots, \theta^q) = f_0 + \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k!} f_{[\mu_1 \cdots \mu_k]} \theta^{\mu_k} \ldots \theta^{\mu_1}\,, \quad f_0,\, f_{[\mu_1 \cdots \mu_k]} \in \Lambda_\infty \tag{3.14}$$

Anders sieht die Situation bei Funktionen von kommutierenden Superzahlen aus, denn Taylorreihen von superanalytischen Funktionen auf $\mathbb{R}_c$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k\,, \quad f_k \in \Lambda_\infty\,, \tag{3.15}$$

brechen im allgemeinen nicht ab. Jede superanalytische Funktion auf $\mathbb{R}_c$ läßt sich aber nach den Erzeugern von Λ_∞ entwickeln,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{[\mu_1 \cdots \mu_k]}(x)\, \zeta^{\mu_k} \ldots \zeta^{\mu_1}\,, \tag{3.16a}$$

wobei die Koeffizientenfunktionen $f_{[\mu_1 \cdots \mu_k]}$ von der Form

$$f(x) = f(x_B + x_S) = \tilde{f}(x_B) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \tilde{f}^{(k)}(x_B)\, x_S^k\,, \tag{3.16b}$$

und die $\tilde{f}$ gewöhnliche, analytische Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ sind. Baut man die Superfunktionen aus Funktionen $\tilde{f} \in C^\infty$ auf, so nennt man jene Super-C^∞.

Für superanalytische Funktionen $f\colon \mathbb{R}_c^p \to \Lambda_\infty$ ist die Taylorreihenentwicklung durch

$$f(x^1, \ldots, x^p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f_{(m_1 \cdots m_k)} x^{m_k} \ldots x^{m_1}\,, \quad f_{(m_1 \cdots m_k)} \in \Lambda_\infty \tag{3.17}$$

gegeben.

Jede superanalytische Funktion $f\colon \mathbb{R}^{p|q} \to \Lambda_\infty$ läßt sich daher mittels

$$f(x^1, \ldots, x^p, \theta^1, \ldots, \theta^q) = \\ f_0(x^1, \ldots, x^p) + \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k!} f_{[\mu_1 \cdots \mu_k]}(x^1, \ldots, x^p)\, \theta^{\mu_k} \ldots \theta^{\mu_1} \tag{3.18}$$

darstellen, wobei f_0 und die $f_{[\mu_1 \cdots \mu_k]}$ superanalytische Funktionen auf $\mathbb{R}_c^p$ sind. Für die häufig gebrauchte Einschränkung des Definitionsbereiches auf den Teilraum $\mathbb{R}_c^p$ wird

$$f|_{\theta=0} = f| = f_0 \tag{3.19}$$

geschrieben, wobei die zweite Form nur dann verwendet werden kann, wenn offensichtlich ist, welche antikommutierenden Variablen Null gesetzt werden.

Sei $f\colon \mathbb{R}^{p|q} \to \Lambda_\infty$ eine Superfunktion, dann läßt sich das Bild jedes Punktes $z \in \mathbb{R}^{p|q}$ in dessen geraden und ungeraden Anteil zerlegen,

$$f(z) = f_e(z) + f_o(z) \quad \text{mit} \quad f_e(z) \in \mathbb{C}_c \quad \text{und} \quad f_o(z) \in \mathbb{C}_a\,. \tag{3.20}$$

Die $f_e\colon \mathbb{R}^{p|q} \to \mathbb{C}_c$ heißen *bosonische* oder *gerade,* und die $f_o\colon \mathbb{R}^{p|q} \to \mathbb{C}_a$ heißen *fermionische* oder *ungerade* Superfunktionen. Ihnen wird die *Parität* mittels

$$p(f) = \begin{cases} 0\,, & \text{wenn } f \text{ bosonisch} \\ 1\,, & \text{wenn } f \text{ fermionisch} \end{cases} \tag{3.21}$$

zugeordnet. Superfunktionen werden *homogen* genannt, wenn sie entweder gerade oder ungerade sind.

3.3 Ableitung von Superfunktionen

Zur Definition und Herleitung von Rechenregeln für Ableitungen von Superfunktionen, die nur von antikommutierenden Variablen abhängen, bedient man sich der Taylorreihenentwicklung. Ableitungen von Superfunktionen, die nur von kommutierenden Variablen abhängen, zeigen Eigenschaften, wie man es von der üblichen Analysis her gewohnt ist.

Sei $f\colon \mathbb{R}_a \to \Lambda_\infty$, dann kann man f in eine Taylorreihe mit Linkskoeffizienten,

$$f(\theta) = a + b\theta\,, \tag{3.22a}$$

oder in eine Taylorreihe mit Rechtskoeffizienten,

$$f(\theta) = a + \theta\tilde{b}\,, \tag{3.22b}$$

entwickeln, wobei $a, b, \tilde{b} \in \Lambda_\infty$ sind, und für die Beziehungen zwischen Links- und Rechtskoeffizienten die Gleichungen $b_c = \tilde{b}_c$ und $b_a = -\tilde{b}_a$ gelten. Damit kann man die *Linksableitung* einer Superfunktion durch

$$f(\theta)\frac{\overleftarrow{d}}{d\theta} = b\,, \tag{3.23a}$$

und ihre *Rechtsableitung* durch

$$\frac{\overrightarrow{d}}{d\theta} f(\theta) = \tilde{b} \tag{3.23b}$$

definieren.

Sei $f\colon \mathbb{R}_a^q \to \Lambda_\infty$, dargestellt mittels Taylorreihe mit Linkskoeffizienten,

$$f(\theta^1, \ldots, \theta^q) = \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} f_{[\mu_k \cdots \mu_1]} \theta^{\mu_1} \ldots \theta^{\mu_k}\,, \quad f_{[\mu_k \cdots \mu_1]} \in \Lambda_\infty\,,$$

dann gilt für die *partiellen Linksableitungen:*

$$f(\theta^1,\ldots,\theta^q)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\lambda}=\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{(k-1)!}\,f_{[\lambda\mu_{k-1}\cdots\mu_1]}\theta^{\mu_1}\ldots\theta^{\mu_{k-1}}\,. \tag{3.24a}$$

Mit Hilfe der Taylorreihenentwicklung nach Rechtskoeffizienten,

$$f(\theta^1,\ldots,\theta^q)=\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!}\,\theta^{\mu_k}\ldots\theta^{\mu_1}\,\tilde{f}_{[\mu_1\cdots\mu_k]}\,,\qquad \tilde{f}_{[\mu_1\cdots\mu_k]}\in\Lambda_\infty\,,$$

erhält man die *partiellen Rechtsableitungen*

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial\theta^\lambda}f(\theta^1,\ldots,\theta^q)=\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{(k-1)!}\,\theta^{\mu_{k-1}}\ldots\theta^{\mu_1}\,\tilde{f}_{[\mu_1\cdots\mu_{k-1}\lambda]}\,. \tag{3.24b}$$

Aus dem Vergleich der Taylorreihen (3.24a) und (3.24b) findet man für homogene Funktionen die Beziehungen

$$f(\theta)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\lambda}=-(-1)^{p(f)}\frac{\vec{\partial}}{\partial\theta^\lambda}f(\theta) \tag{3.25}$$

zwischen partiellen Links- und Rechtsableitungen, und aus dem Vergleich der Taylorreihe von $(\frac{\vec{\partial}}{\partial\theta^\lambda}f)^*$ mit $\frac{\vec{\partial}}{\partial\theta^\lambda}(f^*)$ die Beziehung

$$\left(\frac{\vec{\partial}}{\partial\theta^\lambda}f\right)^*=-(-1)^{p(f)}\frac{\vec{\partial}}{\partial\theta^\lambda}\,(f^*)\ . \tag{3.26}$$

Bei Superfunktionen, die nur von kommutierenden Variablen abhängen, sind die Links- und die Rechtskoeffizienten der Reihenentwicklungen identisch, weshalb nicht zwischen Links- und Rechtsableitungen unterschieden werden braucht. Zur Definition der r-ten Ableitung von Superfunktionen auf $\mathbb{R}_c$ bedient man sich der Entwicklung (3.16b) und fordert

$$f^{(r)}(x)=\frac{d^rf(x)}{dx^r}=\tilde{f}^{(r)}(x_B)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\,\tilde{f}^{(r+k)}(x_B)\,x_S^k\,. \tag{3.27}$$

Die partiellen Ableitungen von Superfunktionen f: $\mathbb{R}_c^p\to\Lambda_\infty$ sind dann mit der Taylorreihenentwicklung

$$f(x^1,\ldots,x^p)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,f_{(m_k\cdots m_1)}x^{m_1}\ldots x^{m_k}\,,\qquad f_{(m_k\cdots m_1)}\in\Lambda_\infty$$

wie üblich durch

$$\frac{\partial}{\partial x^n}f(x^1,\ldots,x^p)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,f_{(nm_k\cdots m_1)}x^{m_1}\ldots x^{m_k} \tag{3.28}$$

gegeben.

Zum partiellen Ableiten von Superfunktionen, die sowohl von kommutierenden als auch von antikommutierenden Variablen abhängen, entwickelt man wie in (3.18) nach den antikommutierenden Variablen und behandelt den jeweils anderen Variablentyp als Konstante.

Analog zur Schreibweise $(z^M) = (x^m, \theta^\mu)$ für Elemente von $\mathbb{R}^{p|q}$ faßt man die partiellen Ableitungen durch

$$(\frac{\partial}{\partial z^M}) := (\frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial \theta^\mu}) \tag{3.29}$$

zusammen. Mit der Definition

$$p(\frac{\partial}{\partial z^M}) := p(M) \tag{3.30}$$

für deren Parität und aus der Untersuchung der Reihenentwicklungen erhält man für die Parität von abgeleiteten Superfunktionen die Gleichung

$$p(\frac{\partial}{\partial z^M} f) = p(M) + p(f) \pmod 2 \,. \tag{3.31}$$

Die Eigenschaften der partiellen Ableitungen von Funktionen f: $\mathbb{R}^{p|q} \to \Lambda_\infty$ lassen sich nun in kompakter Form schreiben:

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial z^M} f = (-1)^{p(M)(1+p(f))} f \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial z^M} \tag{3.32}$$

und

$$\left(\frac{\vec{\partial}}{\partial z^M} f \right)^* = (-1)^{p(M)(1+p(f))} \frac{\vec{\partial}}{\partial z^M} f^* \,. \tag{3.33}$$

Sei ${\delta_M}^N := \delta(M, N)$, und $\delta(M, N)$ das übliche Kroneckersymbol, dann sind die partiellen Ableitungen der Koordinatenfunktionen durch

$$\frac{\partial}{\partial z^M} z^N = {\delta_M}^N \tag{3.34a}$$

gegeben, die Vertauschungsrelationen für partielle Ableitungen lauten

$$\frac{\partial}{\partial z^M} \frac{\partial}{\partial z^N} = (-1)^{p(M)p(N)} \frac{\partial}{\partial z^N} \frac{\partial}{\partial z^M} \,, \tag{3.34b}$$

und für die Leibnizregel gilt die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial z^M}(fg) = (\frac{\partial}{\partial z^M} f)g + (-1)^{p(M)p(f)} f(\frac{\partial}{\partial z^M} g) \,. \tag{3.34c}$$

3.4 Supermannigfaltigkeiten

Zur Definition einer Supermannigfaltigkeit benötigt man eine geeignete Topologie für den Modellraum $\mathbb{R}^{p|q}$. Aus der Untersuchung von Abbildungen des Raumes $\mathbb{R}^{p|q}$ auf sich selbst gewinnt man die Informationen, die es gestatten die „richtige" Topologie zu wählen. Nach der Definition der Supermannigfaltigkeit werden die Begriffe der Superskalar- und Supervektorfelder erklärt.

Eine Abbildung ϕ eines Bereiches des $\mathbb{R}^{p|q}$ in einen anderen Bereich desselben ist von der Form:

$$\begin{aligned}
\bar{x}^m &= \sum_{r=0}^{q}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{i^{r(r+1)/2}}{r!\,s!} \frac{\partial^s X^m_{\lambda_1\cdots\lambda_r}(x_B)}{\partial x_B^{l_1}\ldots\partial x_B^{l_s}}\, x_S^{l_s}\ldots x_S^{l_1}\,\theta^{\lambda_r}\ldots\theta^{\lambda_1} \\
\bar{\theta}^\mu &= \sum_{r=0}^{q}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{i^{r(r-1)/2}}{r!\,s!} \frac{\partial^s X^\mu_{\lambda_1\cdots\lambda_r}(x_B)}{\partial x_B^{l_1}\ldots\partial x_B^{l_s}}\, x_S^{l_s}\ldots x_S^{l_1}\,\theta^{\lambda_r}\ldots\theta^{\lambda_1}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Die $X^m_{\lambda_1\cdots\lambda_r}$ sind dabei C^∞-Funktionen von $\mathbb{R}^p$ nach $\mathbb{R}_c$ oder $\mathbb{R}_a$, je nachdem ob r gerade oder ungerade ist, und die $X^\mu_{\lambda_1\cdots\lambda_r}$ sind ebenfalls C^∞-Funktionen auf $\mathbb{R}^p$, bei geradem r jedoch mit Werten in $\mathbb{R}_a$ und bei ungeradem r mit Werten in $\mathbb{R}_c$. Diese Abbildung ist genau dann invertierbar, wenn die eingeschränkte Jacobi-Supermatrix

$$\left.\frac{\partial \bar{z}^M}{\partial z^N}\right|_{\substack{x_S^l=0\\ \theta^\lambda=0}} = \begin{pmatrix} \partial X^m(x_B)/\partial x_B^n & iX^m_\lambda(x_B) \\ \partial X^\mu(x_B)/\partial x_B^n & X^\mu_\lambda(x_B) \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

regulär ist, d.h. wenn die Matrizen $(\partial X^m(x_B)/\partial x_B^n)$ und $\left(X^\mu_\lambda(x_B)\right)$ regulär sind. Eine differenzierbare Abbildung eines Bereiches des $\mathbb{R}^{p|q}$ in einen anderen ist somit genau dann bijektiv, wenn die Jacobi-Supermatrix bei der Projektion auf $\mathbb{R}^p$ regulär ist.

Die Projektion auf den Body, bei der jede Koordinate x^M durch ihren Body ersetzt wird, sei mit

$$\pi\colon \mathbb{R}^{p|q} \to \mathbb{R}^p \tag{3.37}$$

bezeichnet. Die Menge $\pi^{-1}(\pi(z))$ heißt der *Soul-Unterraum* über z. Sei $\mathcal{O}$ eine offene Menge des $\mathbb{R}^p$, und die Einschränkung der Jacobi-Supermatrix einer differenzierbaren Abbildung $\phi\colon \mathbb{R}^{p|q} \to \mathbb{R}^{p|q}$ auf $\mathcal{O}$ regulär, dann ist ϕ injektiv im Bereich $\pi^{-1}(\mathcal{O})$. Sei $\bar{z} = \phi(z)$, dann gilt $\pi^{-1}(\pi(\bar{z})) = \phi(\pi^{-1}(\pi(z)))$. Es werden also Soul-Unterräume auf Soul-Unterräume abgebildet.

Diese letzte Eigenschaft gibt Anlaß zur Definition einer für die Theorie der Supermannigfaltigkeiten passenden *groben Topologie*. Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^{p|q}$ ist genau dann offen, wenn sie die Form $\pi^{-1}(\mathcal{O})$ hat und $\mathcal{O}$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^p$ ist. Diese Topologie ist keine Hausdorfftopologie, da es aber für $\pi(z') \neq \pi(z)$ immer zwei disjunkte, offene Teilmengen, die jeweils z und z' enthalten, gibt, ist der $\mathbb{R}^{p|q}$ ein projektiver Hausdorffraum.

Eine *Supermannigfaltigkeit der Dimension* (p, q) ist ein Raum M zusammen mit einem System von Karten (U_i, ϕ_i), wobei jedes U_i eine Teilmenge von M ist und jedes ϕ_i eine bijektive Abbildung von U_i auf eine offene Teilmenge – im obigen, groben Sinne – des $\mathbb{R}^{p|q}$. Das System von Karten, Atlas genannt, muß weiters die Eigenschaften

$$\bigcup_i U_i = M \quad \text{und}$$

$$\text{„}\phi_i \circ \phi_j^{-1} \text{ ist differenzierbar über alle nicht leeren Mengen } U_i \cap U_j\text{“}$$

erfüllen. Besitzt die Supermannigfaltigkeit M einen zweiten Atlas, so ist dieser mit dem ersten kompatibel, wenn die Vereinigung beider Atlanten wieder einen Atlas ergibt. Die Vereinigung aller zu dem ersten Atlas kompatiblen Atlanten ist ein vollständiger Atlas von M. Er beschreibt alle möglichen Koordinatensysteme der Supermannigfaltigkeit.

Die Abbildungen ϕ_i einer Karte (U_i, ϕ_i) werden vielfach mit den Koordinatenfunktionen x_i^m: $U_i \to \mathbb{R}_c$, $m = 1, \ldots, p$ und θ_i^μ: $U_i \to \mathbb{R}_a$, $\mu = 1, \ldots, q$ als $\phi_i = (x_i^m, \theta_i^\mu)$ geschrieben, wobei jene mit großgeschriebenem Superindex zu $\phi_i = (z_i^M)$ zusammengefaßt werden.

Eine Abbildung ϕ von M zu einer anderen Supermannigfaltigkeit $\bar{M}$ ist differenzierbar, wenn die Abbildungen $\bar{\phi}_j \circ \phi \circ \phi_i^{-1}$ von $\phi(U_i)$ nach $\bar{\phi}(\bar{U}_j)$ für jede Karte (U_i, ϕ_i) von M und jede Karte $(\bar{U}_i, \bar{\phi}_i)$ von $\bar{M}$, für die $\phi(U_i) \cap \bar{U}_j$ nicht leer ist, differenzierbar sind. Die Abbildung ϕ wird *Superdiffeomorphismus* genannt, wenn sie zusätzlich bijektiv, und die inverse Abbildung ebenfalls differenzierbar ist.

Eine Abbildung f von M nach Λ_∞ ist differenzierbar, wenn die Abbildungen $f \circ \phi_i^{-1}$ von $\phi_i(U_i)$ nach Λ_∞ für alle Karten (U_i, ϕ_i) von M differenzierbar sind. Differenzierbare Abbildungen einer Supermannigfaltigkeit M nach Λ_∞ heißen *Superskalarfelder*, deren Gesamtheit mit $\mathfrak{F}(M)$ bezeichnet wird. Mit den Definitionen

$$(f + g)(P) := f(P) + g(P)\,, \tag{3.38a}$$
$$(\alpha f)(P) := \alpha f(P)\,, \tag{3.38b}$$
$$(f\alpha)(P) := f(P)\alpha \quad \text{und} \tag{3.38c}$$
$$f^*(P) := (f(P))^* \tag{3.38d}$$

für alle $f, g \in \mathfrak{F}(M)$, alle $\alpha \in \Lambda_\infty$ und alle $P \in M$ wird $\mathfrak{F}(M)$ zu einem Supervektorraum, dessen gerade und ungerade Anteile durch $f_e(P) = (f(P))_c$ und $f_o(P) = (f(P))_a$ gegeben sind. Zusätzlich läßt sich noch die Multiplikation

$$(fg)(P) := f(P)g(P) \tag{3.38e}$$

zweier Superskalarfelder f und g einführen.

Ein *kontravariantes Supervektorfeld* v auf M ist eine rechtslineare Abbildung von $\mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)$,

$$v(f\alpha) = v(f)\alpha \quad \text{und} \tag{3.39a}$$
$$v(f + g) = v(f) + v(g)\,, \tag{3.39b}$$

welche die Derivationseigenschaft

$$v(fg) = (vf)g + (-1)^{p(f)p(g)}(vg)f \tag{3.39c}$$

für alle $\alpha \in \Lambda_\infty$ und alle homogenen Funktionen $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ erfüllt.

Alternativ dazu könnte man kontravariante Supervektorfelder als linkslineare Derivationen auf $\mathfrak{F}(M)$ definieren; sie hätten dann die Eigenschaften

$$(\alpha f)\underline{\tilde{v}} = \alpha(f)\underline{\tilde{v}}, \tag{3.40a}$$
$$(f+g)\underline{\tilde{v}} = (f)\underline{\tilde{v}} + (g)\underline{\tilde{v}} \quad \text{und} \tag{3.40b}$$
$$(fg)\underline{\tilde{v}} = f(g)\underline{\tilde{v}} + (-1)^{p(f)p(g)}g(f)\underline{\tilde{v}}. \tag{3.40c}$$

Man kann aber auch links- und rechtskontravariante Supervektorfelder als die zwei verschiedenen Repräsentanten der Klasse der kontravarianten Supervektorfelder betrachten. Im Folgenden beziehen sich die Ausführungen über kontravariante Supervektorfelder, wenn nichts Gegenteiliges vermerkt ist, auf rechtslineare Supervektorfelder. Linkslineare Supervektorfelder wären analog zu behandeln.

Die Menge der kontravarianten Supervektorfelder über M wird mit $\mathfrak{X}(M)$ bezeichnet. Sie wird durch die Definitionen

$$(v+w)f := vf + wf, \tag{3.41a}$$
$$(\alpha v)f := \alpha(vf) \quad \text{und} \tag{3.41b}$$
$$(v\alpha)f := v(\alpha f) \tag{3.41c}$$

für alle $\alpha \in \Lambda_\infty$, alle $f \in \mathfrak{F}(M)$ und alle $v, w \in \mathfrak{X}(M)$ zu einem Supervektorraum, dessen Elemente sich eindeutig in gerade und ungerade Anteile zerlegen lassen,

$$v = v_e + v_o, \tag{3.42a}$$

die mit Hilfe der Gleichungen

$$v_e = (vf_e)_e + (vf_o)_o \quad \text{und} \quad v_o = (vf_e)_o + (vf_o)_e \tag{3.42b}$$

zu bestimmen sind. Damit erhält man für homogene Größen zwischen Links- und Rechtsskalarmultiplikation den Zusammenhang

$$\alpha v = (-1)^{p(\alpha)p(v)} v\alpha, \tag{3.43}$$

und für die Leibnizregel (3.39c) kann man auch

$$v(fg) = (vf)g + (-1)^{p(v)p(f)}f(vg) \tag{3.44}$$

schreiben.

Betrachtet man rechts- und linkslineare Vektorfelder als äquivalent, dann entscheidet sich die Eigenschaft der Rechts- oder Linkslinearität beim Anwenden auf ein Skalarfeld aus der Stellung bezüglich zu diesem, wobei die Beziehung zwischen den zwei Repräsentanten eines kontravarianten Vektorfeldes v durch die Gleichung

$$\underline{v}f = (-1)^{p(v)p(f)} f\underline{v} \tag{3.45}$$

gegeben ist. Dies zeigt eine weitere Möglichkeit auf, mit der man die Form der Leibnizregel (3.39c) abändern kann:

$$(f\underline{v})g + f(\underline{v}g) = (-1)^{p(f)p(v)}\underline{v}(fg) = (-1)^{p(v)p(g)}(fg)\underline{v} \tag{3.46}$$

Die *komplexe Konjugation* eines Supervektorfeldes wird durch lineare Erweiterung der Definition

$$v^*(f) := (-1)^{p(v)p(f)}\,(vf^*)^* \tag{3.47a}$$

erhalten. Beschränkt man sich nicht auf rechtslineare Vektorfelder, so kann man diese auch in der Form

$$v^*(f) = (f^*\underline{v})^* \tag{3.47b}$$

schreiben, was im Einklang mit (3.45) steht. Bezüglich der Skalarmultiplikation mit $\alpha \in \Lambda_\infty$ gelten die Regeln

$$(\alpha v)^* = v^*\alpha^* \quad \text{und} \quad (v\alpha)^* = \alpha^* v^*\,. \tag{3.48}$$

Die kontravarianten Vektorfelder bilden eine *Lie-Superalgebra,* denn der *Superkommutator* zweier Vektorfelder $u, v \in \mathfrak{X}(M)$,

$$[u, v] := u \circ v - (-1)^{p(u)p(v)} v \circ u\,, \tag{3.49}$$

ist wieder eine Derivation auf dem Raum der Skalarfelder $\mathfrak{F}(M)$ und daher ebenfalls ein kontravariantes Vektorfeld. Der Superkommutator ist superantisymmetrisch,

$$[u, v] = -(-1)^{p(u)p(v)}[v, u]\,, \tag{3.50a}$$

und erfüllt die *Super-Jacobi-Identität*

$$[u,[v,w]] + (-1)^{p(u)(p(v)+p(w))}[v,[w,u]] + (-1)^{p(w)(p(u)+p(v))}[w,[u,v]] = 0\,. \tag{3.50b}$$

Mit dieser Notation ist es nicht möglich, zwischen Superkommutator, Superantikommutator, normalem Kommutator und normalem Antikommutator zu unterscheiden. Mit einem Ausdruck wie $[u_o, v_o]$, dessen Elemente bereits den Paritätsteilräumen zugewiesen sind, wird daher der normale Kommutator $u_o v_o - v_o u_o$ verstanden, was gleichfalls für den normalen Antikommutator $\{u_o, v_o\} = u_o v_o + v_o u_o$ gilt.

Mit einer Karte (U, ϕ), $\phi = (z^M) = (x^m, \theta^\mu)$, der Supermannigfaltigkeit M kann man eine Funktion $f \in \mathfrak{F}(M)$ durch die Abbildung $\bar{f}: \mathbb{R}^{p|q} \to \Lambda_\infty$, die aus der Gleichung

$$f = \bar{f} \circ \phi \tag{3.51}$$

folgt, darstellen. Für $P \in M$ gilt also

$$f(P) = \bar{f}(x^1(P), \ldots, x^p(P), \theta^1(P), \ldots, \theta^q(P)) .$$

Unter Verwendung der Kettenregel für die Wirkung eines Supervektorfeldes v auf die Darstellung $f = \bar{f} \circ \phi$,

$$(v(f))(P) = v(z^M) \left[\frac{\vec{\partial}}{\partial y^M} \bar{f}(y) \right]_{y=\phi(P)} , \tag{3.52}$$

findet man die Komponenten $v(z^M)$ des Vektorfeldes v, die durch

$$v^M := v(z^M) \tag{3.53}$$

abgekürzt werden. Mit einem Mißbrauch der Notation kann man nun (3.52) in die übliche Form

$$v(f) = v^M \frac{\partial}{\partial z^M} f \tag{3.54}$$

bringen. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial z^M}$, für die oftmals nur

$$\partial_M := \frac{\partial}{\partial z^M} \tag{3.55}$$

geschrieben wird, bilden einen Koordinatenrahmen des Tangentialbündels. Mit ihnen ist die Trennung in die geraden und ungeraden Teilräume der Vektorfelder bereits vollzogen:

$$v = v^M \frac{\partial}{\partial z^M} = v^m \frac{\partial}{\partial x^m} + v^\mu \frac{\partial}{\partial \theta^\mu} \tag{3.56}$$

Bei der Behandlung von Vektorfeldern ist man aber nicht auf die Koordinatenrahmen eingeschränkt, sondern man kann in einem Bereich einer Supermannigfaltigkeit beliebige Schnitte e_A des Tangentialbündels auswählen, die an jedem Punkt P des Bereiches eine Basis $\{e_A|_P\}$ des Tangentialraumes $T_P(M)$ bilden, wodurch ein *lokaler Rahmen* $\{e_A\}$ erzeugt wird. Lokale Rahmen, die keine Koordinatenrahmen sind, und Komponenten die sich auf solche Rahmen beziehen, werden mit Buchstaben vom Beginn des lateinischen Alphabetes indiziert. Für die Entwicklung eines Vektorfeldes im lokalen Rahmen wird also

$$v = v^A e_A = v^a e_a + v^\alpha e_\alpha \tag{3.57}$$

geschrieben, mit $\{e_a\}$ als geradem und $\{e_\alpha\}$ als ungeradem Teilrahmen. In einer Karte kann man den lokalen Rahmen nach den Elementen des Koordinatenrahmens entwickeln, wobei aus der Vollständigkeit und Unabhängigkeit der Rahmenvektorfelder die Invertierbarkeit der Entwicklung folgt, gemäß

$$e_A = e_A{}^M \partial_M \quad \text{und} \quad \partial_M = e_M{}^A e_A \,. \tag{3.58}$$

Die Superfunktionen $e_M{}^A$ und $e_A{}^M$ erfüllen die Gleichungen

$$e_A{}^M e_M{}^B = \delta_A{}^B \quad \text{und} \quad e_M{}^A e_A{}^N = \delta_M{}^N$$

und sind dabei so zu wählen, daß $p(e_M{}^A) = p(M) + p(A) \pmod 2$ gilt. Sie werden die *Supervielbeine* bzw. die *inversen Supervielbeine* genannt. Mit ihnen kann man die Komponenten der Vektorfelder zwischen den Rahmen umrechnen,

$$v = v^M \partial_M = v^M e_M{}^A e_A = v^A e_A \,,$$

womit man die Formel

$$v^A = v^M e_M{}^A = v^m e_m{}^A + v^\mu e_\mu{}^A \tag{3.59}$$

erhält.

Um die Derivationseigenschaft der kontravarianten Vektorfelder zu verdeutlichen, wird für die Elemente eines lokalen Rahmens $\{e_A\}$ in Anlehnung an die Symbole ∂_M der partiellen Ableitungen oft D_A geschrieben, z. B.:

$$e_A(f) = D_A f = e_A{}^M \partial_M f$$

Bildet man den Superkommutator von Elementen eines lokalen Rahmens, so ist das Ergebnis, da der Superkommutator nicht aus dem Raum der kontravarianten Vektorfelder herausführt, wieder mit Rahmenelementen darstellbar:

$$[D_A, D_B] = C_{AB}{}^C D_C \tag{3.60a}$$

Die Größen $C_{AB}{}^C$ werden *Anholonomiekoeffizienten* genannt. Sie sind superantisymmetrisch in den unteren Indizes und können mittels

$$C_{AB}{}^C = (D_A e_B{}^M) e_M{}^C - (-1)^{AB} (D_B e_A{}^M) e_M{}^C \tag{3.60b}$$

aus den Supervielbeinen berechnet werden. Die partiellen Ableitungen erfüllen die Kommutatorrelationen

$$[\partial_M, \partial_N] = 0 \,,$$

weshalb die Koordinatenrahmen durch das Verschwinden der Anholonomiekoeffizienten ausgezeichnet sind und auch holonome Rahmen genannt werden.

3.5 Superdifferentialformen

Das *Superdifferential* oder der *Supergradient* df eines Superskalarfeldes $f \in \mathfrak{F}(M)$ auf einer Supermannigfaltigkeit M wird durch die Beziehung

$$(v)\underline{df} = v(f)\,, \tag{3.61}$$

die für alle Supervektorfelder $v \in \mathfrak{X}(M)$ gelten soll, definiert. Das Superdifferential ist somit eine Abbildung $d\colon \mathfrak{F}(M) \to T^*(M)$, welche die Eigenschaften

$$d(f+g) = df + dg\,, \tag{3.62a}$$
$$d(\alpha f) = \alpha df\,, \tag{3.62b}$$
$$d(f\alpha) = df\alpha \quad \text{und} \tag{3.62c}$$
$$d(fg) = fdg + dfg \tag{3.62d}$$

für alle $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ und alle $\alpha \in \Lambda_\infty$ besitzt. Bezüglich der komplexen Konjugation gilt die Gleichung

$$(df)^* = d(f^*)\,. \tag{3.63}$$

Anzumerken ist, daß die Elemente ω von $T^*(M)$ Abbildungen von $T(M) \to \mathfrak{F}(M)$ sind, die sich an jedem Punkt $P \in M$ in Abbildungen $\omega|_P\colon T_P \to \Lambda_\infty$ zerlegen lassen und die Eigenschaft der Linkslinearität $(\alpha v)\underline{\omega} = \alpha(v)\underline{\omega}$ erfüllen.

Das obige Superdifferential ist mit Hilfe von Supervektorfeldern, die Rechtsderivationen auf dem Raum $\mathfrak{F}(M)$ sind (siehe S. 18), konstruiert. Nimmt man als Grundlage jedoch Linksderivationen $\tilde{v}$ auf $\mathfrak{F}(M)$, dann lautet die definierende Gleichung des Superdifferentiales

$$df(\tilde{v}) = (f)\underline{\tilde{v}}\,. \tag{3.64}$$

Diese Superdifferentiale sind rechtslinear, $df(\tilde{v}\alpha) = df(\tilde{v})\alpha$, werden aber in der Folge nicht weiter behandelt.

Die Differentiale der Koordinatenfunktionen z^M einer Karte (U, ϕ) bilden den zu $\{\partial/\partial z^M\}$ dualen Rahmen, wie aus

$$(\frac{\partial}{\partial z^M})\underline{dz^N} = \frac{\partial}{\partial z^M}(z^N) = \delta_M{}^N$$

ersichtlich ist. Die Komponenten des Kroneckertensors sind dabei durch $\delta_M{}^N = \delta(M, N)$ gegeben. Mit dieser Koordinatenschnittbasis kann man die Elemente von $T^*(U)$, die auch 1-Formen über U genannt werden, nach Rechtskoordinaten entwickeln,

$$\omega = dz^M\omega_M = dx^m\omega_m + d\theta^\mu\omega_\mu\,. \tag{3.65}$$

Die Aufteilung des Koordinatenrahmens $\{dz^M\}$ in seine geraden und ungeraden Teilrahmen $\{dx^m\}$ und $\{d\theta^\mu\}$ macht den Kotangentialraum offensichtlich zu einem Supervektorraum, dessen Parität durch die Parität der Basiselemente,

$$p(dz^M) := p(M)\,, \tag{3.66}$$

gegeben ist.

Das *äußere Produkt* zweier 1-Formen ω, ω' wird durch Superantisymmetrisierung des Tensorproduktes definiert,

$$\omega \wedge \omega' := \omega \otimes \omega' - (-1)^{p(\omega)p(\omega')} \omega' \otimes \omega \,. \tag{3.67}$$

Die Fortsetzung zu Tensoren höherer Stufe erzeugt die *äußere Algebra* oder *Graßmannalgebra* $\Lambda(M)$ über der Supermannigfaltigkeit M, deren Elemente auch *Superdifferentialformen* genannt werden. Die äußere Algebra ist eine $\mathbb{Z}$-graduierte Algebra, $\Lambda(M) = \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}} \Lambda^r(M)$, deren Teilräume unter anderen $\Lambda^0(M)$, die Superskalarfelder $\mathfrak{F}(M)$, und $\Lambda^1(M) = T^*(M)$, die kovarianten Supervektorfelder, sind. Die Superskalarfelder werden daher auch 0-Formen, und die Elemente von $\Lambda^r(M)$ r-Formen genannt.

Für das äußere Produkt einer r-Form ϕ und einer s-Form ψ gilt die Vertauschungsrelation

$$\phi \wedge \psi = (-1)^{p(\phi)p(\psi)+rs}\, \psi \wedge \phi \,. \tag{3.68}$$

Mit Hilfe der äußeren Produkte der Koordinatendifferentiale, die beim Kommutieren die Beziehung

$$dz^M \wedge dz^N = -(-1)^{NM} dz^N \wedge dz^M \tag{3.69}$$

erfüllen, bildet man eine Basis im Raum der r-Formen. Jede Superdifferentialform $\phi \in \Lambda^r(M)$ läßt sich nach dieser, entsprechend der Gleichung

$$\phi = \frac{1}{r!}\, dz^{M_1} \wedge \cdots \wedge dz^{M_r}\, \phi_{M_r \cdots M_1} \,, \tag{3.70}$$

entwickeln, wobei die Koeffizientenfunktionen beim Vertauschen der Indizes graduiert antisymmetrisch sind:

$$\phi_{M_r \cdots M_i \hat{K} M_j \cdots M_1} = -(-1)^{(M_i + M_j)p(\hat{K}) + M_j M_i} \phi_{M_r \cdots M_j \hat{K} M_i \cdots M_1} \tag{3.71}$$

Der Index $\hat{K}$ bezeichnet dabei einen Multiindex, $\phi_{\hat{K}} = \phi_{M_k M_{k-1} \cdots M_{l+1} M_l}$, dessen Parität durch

$$p(\hat{K}) = p(M_k) + p(M_{k-1}) + \cdots + p(M_{l+1}) + p(M_l) \pmod 2$$

gegeben ist. An der gemischten Symmetrie der Komponenten sieht man, daß der Raum der Superformen einer Stufe, die größer ist als die Dimension der Supermannigfaltigkeit, im Gegensatz zu Differentialformen auf gewöhnlichen Mannigfaltigkeiten über $\mathbb{R}^p$, nicht verschwindet.

In den durchgeführten Rechnungen werden meistens Superdifferentialformen mit der Parität $p(\phi) = 0$, was äquivalent ist mit $p(\phi_{M_r \cdots M_1}) = p(M_r) + \cdots + p(M_1)$, benötigt. Für die Komponenten des äußeren Produktes einer r-Form ϕ

und einer s-Form ψ, deren Paritäten Null seien, findet man mit einer einfachen Rechnung,

$$\begin{aligned}
\lambda &= \phi \wedge \psi \\
&= (\frac{1}{r!}\, dz^{M_1} \wedge \cdots \wedge dz^{M_r}\, \phi_{M_r \cdots M_1}) \wedge (\frac{1}{s!}\, dz^{N_1} \wedge \cdots \wedge dz^{N_s}\, \psi_{N_s \cdots N_1}) \\
&= (-1)^{rs} \frac{1}{r!\, s!}\, dz^{N_1} \wedge \cdots \wedge dz^{N_s} \wedge dz^{M_1} \wedge \cdots \wedge dz^{M_r}\, \phi_{[M_r \cdots M_1} \psi_{N_s \cdots N_1]} \\
&= \frac{1}{(r+s)!}\, dz^{M_1} \wedge \cdots \wedge dz^{M_{r+s}}\, \lambda_{M_{r+s} \cdots M_1}\,,
\end{aligned}$$

den Ausdruck

$$\lambda_{M_{r+s} \cdots M_1} = (-1)^{rs} \frac{(r+s)!}{r!\, s!} \phi_{[M_{r+s} \cdots M_{s+1}} \psi_{M_s \cdots M_1]}\,. \tag{3.72}$$

Im Ergebnis wurden Superantisymmetrisierungsklammern, die für ein Indexpaar durch

$$\phi_{[M} \psi_{N]} := \frac{1}{2}(\phi_M \psi_N - (-1)^{MN} \psi_N \phi_M) \tag{3.73}$$

definiert sind, verwendet.

Weiters treten in den Rechnungen auch bündelwertige Superdifferentialformen auf. Als Beispiel sind tangentialbündelwertige Formen zu nennen, die mit der Schnittbasis $\{\partial_M\}$ durch

$$\Phi = \Phi^M \otimes \partial_M \tag{3.74a}$$

dargestellt werden können. Die Komponenten Φ^M lassen sich dann entsprechend

$$\Phi^M = \frac{1}{r!}\, dz^{N_1} \wedge \cdots \wedge dz^{N_r}\, \Phi_{N_r \cdots N_1}{}^M \tag{3.74b}$$

nach den Koordinatendifferentialen entwickeln. Gelten für die Paritäten der Komponenten zweier bündelwertiger Formen, $\Phi^M \in \Lambda^r(U)$ und $\Psi^N \in \Lambda^s(U)$, die Beziehungen $p(\Phi^M) = p(M)$ und $p(\Psi^N) = p(N)$, dann erfüllen die Komponenten die Vertauschungsrelationen

$$\Phi^M \wedge \Psi^N = (-1)^{rs+MN}\, \Psi^N \wedge \Phi^M\,. \tag{3.75}$$

Diese Konstruktion ist für beliebige Vektorbündel möglich und wird auch benötigt. Sei E ein Vektorbündel über der Basismannigfaltigkeit M, dann wird der Raum der E-wertigen Formen über einer Umgebung U von M mit $\Lambda(E)(U)$ bezeichnet. Die Standardfaser des Vektorbündels kann auch ein Supervektorraum sein, wie dies beim Tangentialbündel der Fall ist.

Das Differential von Superfunktionen kann man für Differentialformen erweitern. Seien $\phi \in \Lambda^r(M)$, $\psi \in \Lambda^s(M)$ und $\alpha \in \Lambda_\infty$, dann wird die *äußere Ableitung* d durch die Gleichungen

$$d(\alpha\phi) = \alpha d\phi\,, \tag{3.76a}$$

$$d(\phi + \psi) = d\phi + d\psi\,, \tag{3.76b}$$

$$d(\phi \wedge \psi) = \phi \wedge d\psi + (-1)^s d\phi \wedge \psi \quad \text{und} \tag{3.76c}$$

$$d^2\phi = 0\,, \tag{3.76d}$$

zusammen mit der Forderung, daß df das gewöhnliche Superdifferential (Def. siehe (3.61)) sei, wenn f eine 0-Form ist, definiert. Mit der Koordinatenbasis erhält man für die äußere Ableitung einer r-Form

$$\phi = \frac{1}{r!}\, dz^{M_1} \wedge \cdots \wedge dz^{M_r}\, \phi_{M_r \cdots M_1}$$

die Entwicklung

$$d\phi = \frac{1}{r!}\, dz^{M_1} \wedge \cdots \wedge dz^{M_r} \wedge dz^N\, \partial_N \phi_{M_r \cdots M_1}\, . \tag{3.77}$$

Daran erkennt man, daß die äußere Ableitung die Stufe der Superdifferentialformen um eins erhöht, $d\colon \Lambda^r(M) \to \Lambda^{r+1}(M)$, und deren Parität nicht ändert, $p(d\phi) = p(\phi)$. Weiters läßt sich nachprüfen, daß (3.76c) durch die Leibnizregel der partiellen Ableitungen (siehe (3.34c)) bedingt ist.

Für den einfacheren, oft benötigten Fall $p(\phi) = 0$ erhält man aus den Entwicklungen

$$\begin{aligned} \lambda &= d\phi \\ &= \frac{1}{p!}\, dz^{M_1} \wedge \cdots \wedge dz^{M_r} \wedge dz^N\, \partial_{[N} \phi_{M_r \cdots M_1]} \\ &= \frac{1}{(p+1)!}\, dz^{M_1} \wedge \cdots \wedge dz^{M_r} \wedge dz^N\, \lambda_{N M_r \cdots M_1} \end{aligned}$$

die Komponenten

$$\begin{aligned} \lambda_{N M_r \cdots M_1} &= \frac{(r+1)!}{r!}\, \partial_{[N} \phi_{M_r \cdots M_1]} \\ &= \partial_N \phi_{M_r \cdots M_1} - \sum_{l=1}^{r} (-1)^{(N+M_l)(M_r + \cdots + M_{l+1}) + N M_l} \\ &\qquad \cdot \partial_{M_l} \phi_{M_r \cdots M_{l+1} N M_{l-1} \cdots M_1}\, . \end{aligned} \tag{3.78}$$

Ist ein lokaler Rahmen $\{e_A\}$ im Tangentialbündel gegeben (siehe S. 21), so ist der dazu *duale Rahmen* $\{e^A\}$, welcher durch

$$(e_A)\underline{e^B} = \delta_A{}^B \tag{3.79}$$

definiert ist, ein lokaler Rahmen des Kotangentialbündels. Die Entwicklungen der Rahmenelemente nach den Koordinatendifferentialen einer Karte sind wiederum durch die Supervielbeine gegeben,

$$e^A = dz^M e_M{}^A \quad \text{und} \quad dz^M = e^A e_A{}^M\, . \tag{3.80}$$

Mit ihnen kann man die Komponenten einer 1-Form

$$\omega = dz^M \omega_M = e^A e_A{}^M \omega_M = e^A \omega_A$$

im dualen Rahmen $\{e^A\}$ bestimmen und erhält für jene die Formel

$$\omega_A = e_A{}^M \omega_M = e_A{}^m \omega_m + e_A{}^\mu \omega_\mu\, . \tag{3.81}$$

Genauso wie man aus den Koordinatendifferentialen die Basiselemente der äußeren Algebra konstruiert (siehe (3.70)), kann man durch äußere Produkte der Elemente eines lokalen Rahmens des Kotangentialraumes einen lokalen Rahmen der äußeren Algebra bilden. Man erhält z. B. für eine 2-Form ϕ nach kurzer Rechnung,

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{2}\, dz^M \wedge dz^N\, \phi_{NM} \\ &= \frac{1}{2}\, (e^A e_A{}^M) \wedge (e^B e_B{}^N)\, \phi_{NM} \\ &= (-1)^{B(A+M)} \frac{1}{2}\, e^A \wedge e^B\, e_A{}^M e_B{}^N \phi_{NM} \\ &= \frac{1}{2}\, e^A \wedge e^B\, \phi_{BA}\,,\end{aligned}$$

die Komponenten

$$\phi_{BA} = (-1)^{B(A+M)} e_A{}^M e_B{}^N \phi_{NM}\,. \tag{3.82}$$

Die Elemente des Rahmens $\{e^A\}$ sind 1-Formen, man kann daher deren äußere Ableitung betrachten, wobei man unter Zuhilfenahme der Gleichungen

$$D_C(e_A{}^M e_M{}^B) = 0$$

die Anholonomiekoeffizienten (vergl. S. 22) wiederfindet,

$$\begin{aligned}de^A &= dz^M \wedge dz^N\, \partial_N e_M{}^A \\ &= -\frac{1}{2}\, dz^M \wedge dz^N\, C_{NM}{}^A \\ &= -\frac{1}{2}\, e^B \wedge e^C\, C_{CB}{}^A\,,\end{aligned}$$

die sich somit als Komponenten der 2-Formen

$$C^A := \frac{1}{2}\, e^B \wedge e^C\, C_{CB}{}^A \tag{3.83}$$

herausstellen. Mit den Supervielbeinen gelten für die Komponenten der Differentialformen C^A die Gleichungen

$$C_{NM}{}^A = -2\, \partial_{[N} e_{M]}{}^A \quad \text{und} \tag{3.84a}$$

$$C_{CB}{}^A = -(-1)^{C(B+M)} 2\, e_B{}^M e_C{}^N \partial_{[N} e_{M]}{}^A\,. \tag{3.84b}$$

Für die äußere Ableitung der 1-Formen e^A kann man somit

$$de^A = -C^A \tag{3.85}$$

schreiben. Damit läßt sich unter Verwendung der Anholonomiekoeffizienten die äußere Ableitung in beliebigen Rahmen berechnen. Für die Ableitung einer 1-Form erhält man

$$\begin{aligned}d\phi &= d(e^A \phi_A) \\ &= e^A \wedge d\phi_A + de^A\, \phi_A \qquad (3.86a) \\ &= e^A \wedge e^B\, (D_{[B}\phi_{A]} - \frac{1}{2}\, C_{BA}{}^C \phi_C)\,, \qquad (3.86b)\end{aligned}$$

und die Ableitung einer r-Form

$$\phi = \frac{1}{r!}\, e^{A_1} \wedge \cdots \wedge e^{A_r}\, \phi_{A_r \cdots A_1}$$

kann man ebenfalls aus der Gleichung

$$d\phi = \frac{1}{r!}\, e^{A_1} \wedge \cdots \wedge e^{A_r} \wedge d\phi_{A_r \cdots A_1} + \frac{1}{r!}\, d(e^{A_1} \wedge \cdots \wedge e^{A_r})\, \phi_{A_r \cdots A_1} \tag{3.87}$$

bestimmen.

Kapitel 4

Konnexion, Krümmung und Torsion

4.1 Wirkung einer Liegruppe

Sei E ein Vektorbündel über der Basismannigfaltigkeit M und $\{b_A\}$ ein Rahmen über der Umgebung U von M. Jedes Element b_A ist daher ein Schnitt des Vektorbündels E und für jedes $P \in U$ bildet die Menge $\{b_A(P)\}$ eine Basis der Faser E_P. Mit Hilfe dieses Rahmens kann die *Rechtswirkung einer Liegruppe G auf E_U* durch

$$b_A \underline{X} := X_A{}^C b_C \tag{4.1}$$

beschrieben werden, wobei die $X_A{}^B$ Funktionen auf der Basismannigfaltigkeit sind, die jedem Punkt von M ein Element aus der Matrixdarstellung von G zuordnen. Diese Gruppenwirkung ist daher fasertreu. Die Wirkung von rechts bezeichnet dabei die Eigenschaft

$$(b_A \underline{X}) \underline{Y} = b_A \underline{(XY)}\,. \tag{4.2}$$

Mit Hilfe der linksdualen Schnittbasis $\{b^A\}$, deren Basisvektoren mittels

$$(b_A) \underline{b^B} = \delta_A{}^B \tag{4.3}$$

definiert sind, läßt sich X auch als Schnitt des Produktbündels $E^* \otimes E$ auffassen,

$$X = b^B \otimes X_B{}^C \otimes b_C\,. \tag{4.4}$$

Die Gruppenwirkung ist also als Teilraum der Endomorphismen der Fasern des Bündels E realisiert. In dieser Formulierung kann man daher die rechte Seite von (4.1) mit

$$b_A \underline{X} = b_A \underline{(b^B \otimes X_B{}^C \otimes b_C)} = (b_A) \underline{b^B} X_B{}^C b_C = X_A{}^C b_C$$

berechnen. Für eine E-wertige Differentialform $\phi = \phi^A \otimes b_A$ lautet also die Rechtswirkung einer lokalen Transformation,

$$\phi' = \phi\underline{X} = (\phi^A \otimes b_A)\underline{X} = \phi^A \otimes (b_A)\underline{X} = \phi^A \otimes X_A{}^B \otimes b_B\,. \tag{4.5a}$$

Betrachtet man nur die Komponenten des Schnittes bei fester Basis, so liest man

$$\phi'^A(z) = \phi^B(z) X_B{}^A(z) \tag{4.5b}$$

aus obiger Gleichung ab.

Das *innere Produkt* zwischen einem Schnitt ϕ des Vektorbündels E und einem Schnitt λ des dualen Bündels E^* ist durch

$$\phi \cdot \lambda := (\phi)\underline{\lambda} \tag{4.6}$$

definiert. Für eine Schnittbasis $\{b_A\}$ und der dazu dualen Schnittbasis $\{b^A\}$ gilt insbesondere, daß

$$b_A \cdot b^B = \delta_A{}^B\,. \tag{4.7}$$

Sei f eine Funktion auf U, dann erfüllt das innere Produkt die Eigenschaften

$$(f\phi) \cdot \lambda = f(\phi \cdot \lambda)\,, \tag{4.8a}$$
$$\phi \cdot (\lambda f) = (\phi \cdot \lambda) f \quad \text{und} \tag{4.8b}$$
$$(\phi f) \cdot \lambda = \phi \cdot (f\lambda)\,. \tag{4.8c}$$

Bezeichnet $\phi\underline{X}$ die Rechtswirkung eines Elementes X einer Liegruppe G auf den Raum $\Lambda^0(E)(U)$, und $\underline{X}\lambda$ die Linkswirkung von X auf den Raum $\Lambda^0(E^*)(U)$, dann erfüllt das innere Produkt auch die Eigenschaft der Balanciertheit

$$(\phi\underline{X}) \cdot \lambda = \phi \cdot (\underline{X}\lambda)\,. \tag{4.9}$$

In Komponentenschreibweise lautet das innere Produkt

$$\phi \cdot \lambda = \phi^A \lambda_A\,. \tag{4.10a}$$

Ist aber Ψ eine E-wertige, und Λ eine E^*-wertige Differentialform, so gilt per Definition:

$$\Psi \cdot \Lambda := \Psi^A \wedge \Lambda_A\,. \tag{4.10b}$$

4.2 Konnexion

Sei E ein Vektorbündel über der Basismannigfaltigkeit M mit der Standardfaser V. Die folgenden Ausführungen sind auch dann gültig, wenn M eine Supermannigfaltigkeit und V ein Supervektorraum ist. Eine *Konnexion* auf einem (Super-)Vektorbündel ist eine Abbildung

$$\mathcal{D}\colon \Lambda^0(E) \to \Lambda^1(E)\,, \tag{4.11a}$$

welche die Leibnizregel,

$$\mathcal{D}(f\phi) = f\,\mathcal{D}(\phi) + df \otimes \phi\,, \tag{4.11b}$$

für alle Schnitte $\phi \in \Lambda^0(E)(U)$ und alle $f \in \mathfrak{F}(U)$ erfüllt. Bei analytischen Mannigfaltigkeiten ist die Bedingung der Differenzierbarkeit entsprechend zu ersetzen.

Nach Vorgabe einer Schnittbasis $\{b_A\}$ von E über U kann man die Konnexion oder kovariante Ableitung

$$\mathcal{D}(b_A) = \Omega_A{}^B \otimes b_B \tag{4.12}$$

mit den Koeffizienten $\Omega_A{}^B \in \Lambda^1(U)$ entwickeln. Bildet man aus der *Konnexionsmatrix* $(\Omega_A{}^B)$ mit Hilfe des dualen Rahmens $\{b^A\}$ die $(E^* \otimes E)$-wertige 1-Form, genannt die *Konnexionsform,*

$$\Omega = b^A \otimes \Omega_A{}^B \otimes b_B \tag{4.13}$$

auf U, dann läßt sich aufgrund der Beziehung

$$(b_A) \otimes \underline{\Omega} = (b_A) \otimes \underline{(b^C \otimes \Omega_C{}^B \otimes b_B)} = (b_A)\underline{b^C}\,\Omega_C{}^B \otimes b_B = \Omega_A{}^B \otimes b_B$$

für die Entwicklung der Konnexion auch

$$\mathcal{D}(b_A) = (b_A) \otimes \underline{\Omega} \tag{4.14}$$

schreiben. Die $\Omega \in \Lambda^1(E^* \otimes E)$ bilden daher jeden Tangentialvektor $u_P \in T_P(U)$ in den Raum der Endomorphismen der Faser E_P,

$$\Omega(u_P) = b^A|_P \otimes \Omega_A{}^B(u_P) \otimes b_B|_P\,,$$

ab. Durch $\Omega(u_P)$ ist daher eine Rechtswirkung auf der Menge der Schnitte über U gegeben.

Bei einem Wechsel der Schnittbasis $\{b_A\} \to \{\bar b_A\}$ mit $\bar b_A = X_{\bar A}{}^B b_B$ erhält man aus

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\bar b_A) &= \mathcal{D}(X_{\bar A}{}^B b_B) = X_{\bar A}{}^B \mathcal{D}(b_B) + d(X_{\bar A}{}^B) \otimes b_B \\
&= X_{\bar A}{}^B \Omega_B{}^C \otimes b_C + dX_{\bar A}{}^B \otimes b_B \\
&= \Big(X_{\bar A}{}^B \Omega_B{}^C (X^{-1})_C{}^{\bar D} + dX_{\bar A}{}^B (X^{-1})_B{}^{\bar D} \Big) \otimes \bar b_D
\end{aligned}$$

die Konnexionsmatrix in der neuen Schnittbasis

$$\mathcal{D}(\bar b_A) = \Omega'_{\bar A}{}^{\bar B} \otimes \bar b_B = \bar b_A \otimes \underline{\Omega'}\,. \tag{4.15a}$$

Die Differentialform $\Omega \in \Lambda^1(E^* \otimes E)$ ist also nicht invariant bei einem Wechsel des lokalen Rahmens, sondern zeigt das Transformationsverhalten einer sogenannten *Eichtransformation,* $\Omega \to \Omega' = \bar b^A \otimes \Omega'_{\bar A}{}^{\bar B} \otimes \bar b_B$, mit der Transformation

$$\Omega'_{\bar A}{}^{\bar B} = X_{\bar A}{}^C \Omega_C{}^D (X^{-1})_D{}^{\bar B} + dX_{\bar A}{}^B (X^{-1})_B{}^{\bar D} \tag{4.15b}$$

der Konnexionsmatrix.

Die kovariante Ableitung der dualen Schnittbasisvektoren folgt aus der Leibnizregel oder *Metrizitätsbedingung* bezüglich des inneren Produktes,

$$\mathcal{D}(b_A \cdot b^B) = b_A \cdot (\mathcal{D}b^B) + (\mathcal{D}b_A) \cdot b^B\,, \tag{4.16}$$

und aus $\mathcal{D}(b_A \cdot b^B) = \mathcal{D}\delta_A{}^B = d\delta_A{}^B = 0$, womit man die Entwicklung

$$\mathcal{D}(b^A) = -\underline{\Omega} \otimes b^A = -b^B \otimes \Omega_B{}^A \tag{4.17}$$

erhält.

Mit den bereits bekannten Eigenschaften der Konnexion kann man leicht die kovariante Ableitung eines Schnittes $\phi \in \Lambda^0(E)$ in der Schnittbasis $\{b_A\}$ über der Umgebung U

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\phi) &= \mathcal{D}(\phi^A b_A) = \phi^A \mathcal{D}(b_A) + d\phi^A \otimes b_A \\ &= \phi^A \Omega_A{}^B \otimes b_B + d\phi^A \otimes b_A & (4.18\text{a}) \\ &= \phi \otimes \underline{\Omega} + d\phi^A \otimes b_A & (4.18\text{b})\end{aligned}$$

und die kovariante Ableitung eines dualen Schnittes $\lambda \in \Lambda^0(E^*)$ in der dualen Schnittbasis $\{b^A\}$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\lambda) &= \mathcal{D}(b^A \lambda_A) = b^A \otimes d\lambda_A + \mathcal{D}(b^A)\lambda_A \\ &= b^A \otimes d\lambda_A - b^B \otimes \Omega_B{}^A \lambda_A & (4.19\text{a}) \\ &= b^A \otimes d\lambda_A - \underline{\Omega} \otimes \lambda\,. & (4.19\text{b})\end{aligned}$$

bestimmen.

Die Konnexion läßt sich auch für bündelwertige Formen $\Phi \in \Lambda^p(E)$ zu

$$\mathcal{D}\colon \Lambda^p(E) \to \Lambda^{p+1}(E) \tag{4.20}$$

erweitern. Dazu bedient man sich der Leibnizregel

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\xi \otimes \phi) &= \xi \wedge \mathcal{D}(\phi) + d\xi \otimes \phi \\ \mathcal{D}(\phi \otimes \xi) &= \phi \otimes d\xi + (-1)^p\, \mathcal{D}(\phi) \wedge \xi\end{aligned} \tag{4.21}$$

für Schnitte $\phi \in \Lambda^0(E)(U)$ und gewöhnliche Differentialformen $\xi \in \Lambda^p(U)$, wodurch man für die kovariante Ableitung des Tensorproduktes zweier bündelwertiger Formen $\Phi \in \Lambda^p(E)$ und $\Psi \in \Lambda^q(E)$ die Leibnizregel

$$\mathcal{D}(\Phi \otimes \Psi) = \Phi \otimes \mathcal{D}(\Psi) + (-1)^q\, \mathcal{D}(\Phi) \otimes \Psi \tag{4.22}$$

erhält.

Sei $\Phi \in \Lambda^p(E)$, dann lautet die kovariante Ableitung in der lokalen Schnittbasis $\{b_A\}$ über U:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\Phi) &= \mathcal{D}(\Phi^A \otimes b_A) = \Phi^A \wedge \mathcal{D}(b_A) + d\Phi^A \otimes b_A \\ &= \Phi \wedge \underline{\Omega} + d\Phi^A \otimes b_A\,,\end{aligned} \tag{4.23a}$$

bzw. in Komponentenform

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\Phi) &=: (\mathcal{D}\Phi)^A \otimes b_A \\ (\mathcal{D}\Phi)^A &= d\Phi^A + \Phi^B \wedge \Omega_B{}^A \end{aligned} \tag{4.23b}$$

oder nach der holonomen Basis des Tangentialbündels entwickelt

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\Phi &= dz^M \wedge (\partial_M \Phi) + (\Phi \wedge dz^M)\underline{\Omega_M} \\ &= \frac{1}{k!} dz^{N_1} \wedge \ldots \wedge dz^{N_k} \wedge dz^M \\ &\quad \otimes \left(\partial_{[M}\Phi_{N_k \cdots N_1]} + (-1)^{M(N_k + \cdots + N_1)}\Phi_{[N_k \cdots N_1}\underline{\Omega_{M]}}\right) \\ &=: dz^M \wedge (\mathcal{D}_M \Phi)\,. \end{aligned} \tag{4.23c}$$

Zu beachten ist, daß für die Komponenten der kovariant abgeleiteten Tensoren, $(\mathcal{D}\Phi)^A$, oftmals nur $\mathcal{D}\Phi^A$ geschrieben wird.

Schlußendlich findet man für die kovariante Ableitung von $\Lambda \in \Lambda^q(E^*)$ in der dualen Schnittbasis $\{b^A\}$ über U, daß

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\Lambda) = \mathcal{D}(b^A \otimes \Lambda_A) &= b^A \otimes d\Lambda_A + (-1)^q \mathcal{D}(b^A) \wedge \Lambda_A \\ &= b^A \otimes d\Lambda_A - (-1)^q\, \underline{\Omega} \wedge \Lambda\,, \end{aligned} \tag{4.24a}$$

oder – in Komponenten geschrieben –

$$(\mathcal{D}\Lambda)_A = d\Lambda_A - (-1)^q\, \Omega_A{}^B \wedge \Lambda_B\,. \tag{4.24b}$$

4.3 Krümmung

Sei $\xi \in \Lambda^p(U)$ und $\Phi \in \Lambda^q(E)(U)$, dann gilt für das Quadrat der Konnexion

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2(\xi \wedge \Phi) &= \mathcal{D}(\xi \wedge \mathcal{D}(\Phi) + (-1)^q d\xi \wedge \Phi) \\ &= \xi \wedge \mathcal{D}^2(\Phi) \end{aligned} \tag{4.25a}$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2(\Phi \wedge \xi) &= \mathcal{D}(\Phi \wedge d\xi + (-1)^p\, \mathcal{D}(\Phi) \wedge \xi) \\ &= \mathcal{D}^2(\Phi) \wedge \xi\,. \end{aligned} \tag{4.25b}$$

Der differentielle Anteil von $\mathcal{D}^2$ fällt daher weg und man kann

$$\mathcal{D}^2(b_A) =: R_A{}^B \otimes b_B = b_A \otimes \underline{R} \tag{4.26}$$

nach den Basisvektoren $\{b_A\}$ über der Umgebung U entwickeln. Die Komponenten $R_A{}^B \in \Lambda^2(U)$ bilden die *Krümmungsmatrix* $(R_A{}^B)$ und die bündelwertige

Differentialform $R = b^A \otimes R_A{}^B \otimes b_B \in \Lambda^2(E^* \otimes E)(U)$ wird als die *Krümmungsform* oder kurz als die *Krümmung* bezeichnet. Eine einfache Rechnung zeigt, daß

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2(b_A) &= \mathcal{D}(\Omega_A{}^B \otimes b_B) \\ &= \Omega_A{}^B \wedge \mathcal{D}(b_B) + d\Omega_A{}^B \otimes b_B \\ &= \left(\Omega_A{}^C \wedge \Omega_C{}^B + d\Omega_A{}^B\right) \otimes b_B\,, \end{aligned}$$

woraus man die Gleichung für die Krümmungsmatrix,

$$R_A{}^B = \Omega_A{}^C \wedge \Omega_C{}^B + d\Omega_A{}^B\,, \tag{4.27}$$

erhält, die die *2. Cartansche Strukturgleichung* genannt wird. Beim Wechsel des Rahmens $\{b_A\} \to \{\bar{b}_A\}$ mit $\bar{b}_A = X_{\bar{A}}{}^B b_B$ zeigt sich, daß die Krümmungsform $R \in \Lambda^2(E^* \otimes E)$ invariant ist

$$\mathcal{D}^2(\bar{b}_A) = \bar{b}_A \otimes \underline{R}\,. \tag{4.28}$$

Im neuen Rahmen gilt $R = \bar{b}^A \otimes R_{\bar{A}}{}^{\bar{B}} \otimes \bar{b}_B$ mit den üblichen Transformationen der Komponenten

$$R_{\bar{A}}{}^{\bar{B}} = X_{\bar{A}}{}^C R_C{}^D (X^{-1})_D{}^{\bar{B}}\,. \tag{4.29}$$

Unter Zuhilfenahme der Leibnizregel bezüglich des inneren Produktes,

$$\mathcal{D}^2(b_A \cdot b^B) = \mathcal{D}\left(b_A \cdot \mathcal{D}(b^B) + \mathcal{D}(b_A) \cdot b^B\right)\,, \tag{4.30}$$

und der Balanciertheit von Wirkungen auf Vektorbündel (siehe Abschnitt 4.1),

$$(b_A \otimes \underline{R}) \cdot b^B = b_A \cdot (\underline{R} \otimes b^B)\,,$$

erhält man für die quadratische, kovariante Ableitung der dualen Basisvektoren

$$\mathcal{D}^2(b^B) = -\underline{R} \otimes b^B\,. \tag{4.31}$$

Die quadratischen Konnexionen einer beliebigen Schnittform $\Phi \in \Lambda^p(E)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2(\Phi) &= \mathcal{D}^2(\Phi^A \otimes b_A) = \Phi^A \wedge \mathcal{D}^2(b_A) \\ &= \Phi^A \wedge R_A{}^B \otimes b_B \\ &= \Phi \wedge \underline{R}\,, \end{aligned} \tag{4.32a}$$

und einer dualen Schnittform $\Lambda \in \Lambda^q(E^*)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2(\Lambda) &= \mathcal{D}^2(b^A \otimes \Lambda_A) = \mathcal{D}^2(b^A) \wedge \Lambda_A \\ &= -b^B \otimes R_B{}^A \wedge \Lambda_A \\ &= -\underline{R} \wedge \Lambda\,, \end{aligned} \tag{4.32b}$$

sind mit den bereits bekannten Relationen leicht zu bestimmen. Die Gleichungen (4.32a) und (4.32b) sind die *Bianchi-Identitäten der ersten Art.*

Aus der kovarianten Ableitung von Formen $F \in \Lambda^p(E^* \otimes E)$,

$$\mathcal{D}(F) = F \wedge \underline{\Omega} + b^A \otimes dF_A{}^B \otimes b_B - (-1)^p\, \underline{\Omega} \wedge F\,, \tag{4.33}$$

findet man die kovariante Ableitung der Krümmungsform

$$\mathcal{D}(R) = 0\,, \tag{4.34a}$$

auch *2. Bianchi-Identität* genannt. Nach dem holonomen Rahmen des Tangentialbündels entwickelt lautet diese Bianchi-Identität

$$dz^M \wedge dz^N \wedge dz^L \otimes (\mathcal{D}_L R_{NM}) = dz^M \wedge dz^N \wedge dz^L \otimes (\mathcal{D}_{[L} R_{NM]}) = 0\,.$$

Somit gilt für die Komponentenfunktionen

$$\mathcal{D}_{[L} R_{NM]} = 0 \tag{4.34b}$$

oder

$$\mathcal{D}_L R_{NM} + (-1)^{L(N+M)} \mathcal{D}_N R_{ML} + (-1)^{M(N+L)} \mathcal{D}_M R_{LN} = 0\,.$$

4.4 Torsion

Sei E ein Vektorbündel über der Basismannigfaltigkeit M, $\{b_A\}$ ein Rahmen über der Umgebung U von M, und $\{b^A\}$ der dazu duale Rahmen. Der Schnitt

$$\delta = b^A \otimes \delta_A{}^B \otimes b_B = b^A \otimes b_A \tag{4.35}$$

beschreibt die identische Abbildung $\delta\colon \Lambda^0(E)(U) \to \Lambda^0(E)(U)$, $\phi \mapsto \phi$. Für die kovariante Ableitung dieses Schnittes gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\delta) &= \mathcal{D}(b^A \otimes b_A) = b^A \otimes \mathcal{D}(b_A) + \mathcal{D}(b^A) \otimes b_A\\ &= b^A \otimes \Omega_A{}^B \otimes b_B - b^A \otimes \Omega_A{}^B \otimes b_B = 0\,.\end{aligned}$$

Daraus sieht man, daß die Gleichung $\mathcal{D}(\delta) = 0$ äquivalent ist zur Metrizitätsbedingung (4.16) der Konnexion bezüglich innerer Produkte.

Ist ein lokaler Bündelmorphismus $E^*_U \to T^*(U)$ gegeben, so geht mit diesem kanonisch die Abbildung

$$V\colon \Lambda^0(E)(U) \to \Lambda^1(U)\,, \quad b^A \mapsto V(b^A) = dz^M E_M{}^A \tag{4.36}$$

einher und umgekehrt. Damit läßt sich die *Verschmelzungsform*

$$\delta' = V(b^A) \otimes b_A = (dz^M E_M{}^A) \otimes b_A \tag{4.37a}$$

bilden. Mit der Abkürzung

$$E^A := V(b^A) \quad \in \Lambda^1(U)$$

kann man auch

$$\delta' = E^A \otimes b_A \quad \in \Lambda^1(E)(U) \tag{4.37b}$$

schreiben. Die kovariante Ableitung der Verschmelzungsform

$$T := \mathcal{D}(\delta') \tag{4.38}$$

definiert die *Torsion* oder *Torsionsform* $T \in \Lambda^2(E)$. Mit

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\delta') &= \mathcal{D}(E^A \otimes b_A) = E^A \wedge \mathcal{D}(b_A) + dE^A \otimes b_A \\ &= E^A \wedge {\Omega_A}^B \otimes b_B + dE^A \otimes b_A\end{aligned}$$

findet man die Gleichung für die Torsionskomponenten von $T = T^A \otimes b_A$,

$$T^A = E^B \wedge {\Omega_B}^A + dE^A \quad \in \Lambda^2(U)\,, \tag{4.39}$$

die man *1. Cartansche Strukturgleichung* nennt.

Aus der quadratischen kovarianten Ableitung der Verschmelzungsform

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^2(\delta') &= \mathcal{D}(T) = T^A \wedge \mathcal{D}(b_A) + dT^A \otimes b_A \\ &= T^A \wedge {\Omega_A}^B \otimes b_B + dT^A \otimes b_A\end{aligned}$$

findet man unter Zuhilfenahme der Bianchi-Identitäten der ersten Art (siehe (4.32a) und (4.32b)),

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^2(\delta') &= \mathcal{D}^2(E^A \otimes b_A) = E^A \wedge \mathcal{D}^2(b_A) \\ &= E^A \wedge {R_A}^B \otimes b_B\,,\end{aligned}$$

die Beziehung $\mathcal{D}(T) = E^A \wedge {R_A}^B \otimes b_B$, deren Komponentenform

$$T^A \wedge {\Omega_A}^B + dT^B = E^A \wedge {R_A}^B \tag{4.40}$$

als die *1. Bianchi-Identität* bekannt ist.

Kapitel 5

Supergravitation in zwei Dimensionen

Die Grundlage dieses Kapitels ist ein Artikel [H], in dem zweidimensionale $(1,1)$-Supergravitation untersucht wird. Die Rechnungen werden im Superfeldformalismus durchgeführt, d. h die vorkommenden Größen sind Objekte auf einer Supermannigfaltigkeit M. Damit die Komponentenfelder der diversen Superfelder auf drei unabhängige Felder reduziert werden können, stellt man sogenannte kinematische Zwangsbedingungen an die Supertorsion. Diese Zwangsbedingungen, deren Konsequenzen und die schließlich übrig bleibenden, physikalischen Felder werden in den folgenden Abschnitten behandelt.

5.1 Ort der Handlung

ist eine Supermannigfaltigkeit M über dem Modellraum $\mathbb{R}^{2|2}$. Die Koordinatenfunktionen werden $(z^M) = (x^m, \theta^\mu)$ bezeichnet, mit $(x^m)\colon U \to \mathbb{R}^2_c$ und $(\theta^\mu)\colon U \to \mathbb{R}^2_a$, wobei U eine Umgebung von M ist. Ein Superfeld $F\colon U \to \Lambda_\infty$ in der Koordinatendarstellung kann nach den fermionischen Koordinatenfunkionen (θ^μ) entwickelt werden (siehe auch (3.18)),

$$F(x^m, \theta^\mu) = f(x^m) + \theta^\lambda f_\lambda(x^m) + \frac{1}{2}\theta^\lambda\theta_\lambda\, f_3(x^m)\,,$$

wobei

$$\theta^\lambda\theta_\lambda := \theta^\lambda\theta^\kappa\epsilon_{\kappa\lambda}$$

mit der antisymmetrischen und invertierbaren Größe

$$\epsilon_{\kappa\lambda} = -\epsilon_{\lambda\kappa}\,, \qquad \epsilon^{\mu\kappa}\epsilon_{\lambda\kappa} = \delta_\lambda{}^\mu\,.$$

Sei $\{E^A\}$ eine Schnittbasis des Kotangentialbündels T^* von M. Das Bündel T^* läßt sich in die bosonischen und fermionischen Teilbündel $T^* = T^*_e \oplus T^*_o$ zerlegen, wobei $\{E^a\}$ die Schnittbasis von T^*_e und $\{E^\alpha\}$ die Schnittbasis von T^*_o

seien. Als Strukturgruppe wird die Lorentzgruppe SO(1,1) gewählt. Elemente der Komponente T_e^* transformieren nach der Vektordarstellung von SO(1,1), und Elemente der Komponente T_o^* nach der Spinordarstellung von SO(1,1). Die Wirkung einer lokalen, infinitesimalen Lorentztransformation auf die Basisvektoren,

$$\delta E^A = E^B L_B{}^A \quad \text{mit} \quad L_B{}^A = L \Lambda_B{}^A \,, \tag{5.1a}$$

wird somit durch ein Superfeld L und die Größen $\Lambda_B{}^A$,

$$\Lambda_b{}^a = \epsilon_b{}^a \,, \quad \Lambda_\beta{}^\alpha = \frac{1}{2}(\gamma_5)_\beta{}^\alpha \quad \text{und} \quad \Lambda_b{}^\alpha = \Lambda_\beta{}^a = 0 \,, \tag{5.1b}$$

beschrieben.

Die Konnexionsmatrix (siehe Abschnitt 4.2) ist durch

$$\Omega_B{}^A = \Omega \Lambda_B{}^A \tag{5.2a}$$

mit der 1-Superform

$$\Omega = dz^M \Omega_M \tag{5.2b}$$

gegeben, die sich unter infinitesimalen Lorentztransformationen nach

$$\delta\Omega = -dL \tag{5.3}$$

transformiert.

Mit obiger Konnexion findet man für die Krümmungsmatrix

$$R_B{}^A = d\Omega_B{}^A + \Omega_A{}^C \wedge \Omega_C{}^B \tag{4.27}$$

die Beziehung

$$R_B{}^A = F \Lambda_B{}^A \quad \text{mit} \quad F = d\Omega \,. \tag{5.4}$$

Die 2. Bianchi-Identität (4.34a), $\mathcal{D} R_B{}^A = 0$, reduziert sich in diesem Fall auf die triviale Gleichung

$$dF = 0 \,. \tag{5.5}$$

5.2 Kinematische Zwangsbedingungen

Sei ϕ eine 0-Superform. Aus

$$d^2\phi = 0$$

folgt durch Entwickeln von $d = E^A D_A$, daß

$$([D_B, D_A] - C_{BA}{}^C D_C)\phi = 0 \,, \tag{5.6}$$

wobei $C_{BA}{}^C$ die Anholonomiekoeffizienten (3.60b) sind.

Aus der quadratischen, kovarianten Ableitung $\mathcal{D}^2\psi$ eines Schnittes des Tangentialbündels,

$$\mathcal{D}^2\psi = E^A \wedge E^B \otimes (\mathcal{D}_{[B}\mathcal{D}_{A]} + \frac{1}{2}T_{BA}{}^C\mathcal{D}_C)\psi\,, \tag{5.7}$$

und der Bianchi-Identität (4.32a), $\mathcal{D}^2\psi = \psi\underline{R}$, resultiert die Algebra der kovarianten Ableitungen,

$$[\mathcal{D}_B, \mathcal{D}_A]\psi = -T_{BA}{}^C\mathcal{D}_C\psi + \psi\underline{R_{BA}}\,. \tag{5.8}$$

Bei dieser Rechnung sind

$$\psi\underline{R} = \frac{1}{2}E^A \wedge E^B \otimes \psi\underline{R_{BA}}$$

und $(E_C)\underline{R_{BA}} = (-1)^{C(B+A)}R_{BAC}{}^D E_D$ zu beachten.

Schreibt man die Torsion (4.39) in Komponentenform,

$$\begin{aligned} T_{BA}{}^C &= -C_{BA}{}^C + 2\Omega_{[BA]}{}^C \\ &= -C_{BA}{}^C + \Omega_B\Lambda_A{}^C - (-1)^{BA}\,\Omega_A\Lambda_B{}^C\,, \end{aligned} \tag{5.9}$$

so sieht man damit die Beziehung zwischen Torsionskomponenten und Anholonomiekoeffizienten und im Falle verschwindender Konnexion, d. h. verschwindender Krümmung, sieht man deren Gleichheit.

Stellt man nun kinematische Zwangsbedingungen an die Torsion,

$$T_{\beta\gamma}{}^a = 2i(\gamma^a)_{\beta\gamma} \quad \text{und} \quad T_{\beta\gamma}{}^\alpha = 0\,, \tag{5.10}$$

dann reduziert sich die Algebra (5.8) auf die Gleichungen

$$\{\mathcal{D}_\beta, \mathcal{D}_\alpha\}\psi = -2i(\gamma^c)_{\beta\alpha}\mathcal{D}_c\psi + \psi\underline{R_{\beta\alpha}}\,. \tag{5.11a}$$

Auch die Beziehungen zwischen Torsionskomponenten und Anholonomiekoeffizienten, (5.9), werden durch die Zwangsbedingungen (5.10) vereinfacht:

$$\begin{aligned} T_{\beta\alpha}{}^c &= -C_{\beta\alpha}{}^c \\ T_{\beta\alpha}{}^\gamma &= -C_{\beta\alpha}{}^\gamma + \Omega_\beta\frac{1}{2}(\gamma_5)_\alpha{}^\gamma + \Omega_\alpha\frac{1}{2}(\gamma_5)_\beta{}^\gamma \end{aligned}$$

Folglich erhält man bei $\Omega \to 0$ für die Basisvektoren D_A die Relationen

$$\{D_\beta, D_\alpha\} = -2i(\gamma^c)_{\beta\alpha}D_c\,. \tag{5.11b}$$

Als weitere Zwangsbedingungen werden in [H] die Gleichungen

$$T_{bc}{}^a = 0 \tag{5.12}$$

gewählt, was die Algebra (5.8) weiter einschränkt auf

$$[\mathcal{D}_b, \mathcal{D}_a]\psi = -T_{ba}{}^\gamma\mathcal{D}_\gamma\psi + \psi\underline{R_{ba}}\,. \tag{5.13a}$$

Im Fall $\Omega \to 0$ folgen daraus mit den Gleichungen (5.9), die sich zu

$$\begin{aligned} T_{ba}{}^c &= -C_{ba}{}^c + \Omega_b\epsilon_a{}^c - \Omega_a\epsilon_b{}^c \quad \text{und} \\ T_{ba}{}^\gamma &= -C_{ba}{}^\gamma \end{aligned}$$

vereinfachen, die Beziehungen der Basisvektoren,

$$[D_b, D_a] = C_{ba}{}^\gamma D_\gamma\,. \tag{5.13b}$$

5.3 Lösung der Bianchi-Identitäten

Obige Zwangsbedingungen (5.10) und (5.12) werden nun in die Bianchi-Identität,

$$\mathcal{D}T^D = E^C \wedge R_C{}^D \,, \tag{4.40}$$

die in Komponentenschreibweise

$$R_{[ABC]}{}^D = \mathcal{D}_{[A}T_{BC]}{}^D + T_{[AB|}{}^E T_{E|C]}{}^D \tag{5.14}$$

lautet, eingesetzt. Aus der Belegung der Superindizes von Gleichung (5.14), die ab sofort durch $R_{[ABC]}{}^D$ bezeichnet wird, mit bosonischen und fermionischen Indizes kann man die Komponenten von Torsion und Krümmung berechnen. Die Belegungsreihenfolge und die sich daraus ergebenden Größen sind:

$$\begin{aligned} R_{[\alpha\beta\gamma]}{}^d &\Longrightarrow T_{e\gamma}{}^d \\ R_{[\alpha\beta c]}{}^d &\Longrightarrow F_\alpha{}^\beta, T_{c\alpha}{}^\beta \\ R_{[\alpha\beta\gamma]}{}^\delta & \quad \text{ist bereits erfüllt} \\ R_{[\alpha bc]}{}^d, R_{[ab\gamma]}{}^\delta &\Longrightarrow T_{cb}{}^\delta, F_{\alpha b} \\ R_{[ab\gamma]}{}^\delta &\Longrightarrow F_{ab} \end{aligned}$$

In den nächsten Abschnitten wird die Berechnung der Torsions- und Krümmungskomponenten dieser Aufstellung entsprechend durchgeführt.

Dabei ist zu beachten, daß vor dem Einsetzen der Zwangsbedingungen (5.10) und (5.12) die Antisymmetriesierungsklammern aufgelöst werden müssen. Nur wenn alle drei Indizes in der Klammer vom gleichen Typ sind kann direkt eingesetzt werden.

5.3.1 Lösung von $R_{[\alpha\beta\gamma]}{}^d$:

Einsetzen der Zwangsbedingung $T_{\beta\gamma}{}^\alpha = 0$, (5.10), in die Gleichung

$$R_{[\alpha\beta\gamma]}{}^d = \mathcal{D}_{[\alpha}T_{\beta\gamma]}{}^d + T_{[\alpha\beta|}{}^e T_{e|\gamma]}{}^d + T_{[\alpha\beta|}{}^\epsilon T_{\epsilon|\gamma]}{}^d$$

und Berücksichtigung von $\mathcal{D}_\alpha T_{\beta\gamma}{}^a = 0$ ergibt

$$T_{e\gamma}{}^d = 0\,. \tag{5.15}$$

5.3.2 Lösung von $R_{[\alpha\beta c]}{}^d$:

Auflösen der Antisymmetriesierungsklammern der Gleichung für $R_{[\alpha\beta c]}{}^d$ und Berücksichtigung der Zwangsbedingungen (5.10) und (5.12) sowie der bereits berechneten Lösung (5.15) ergibt die Gleichung

$$F_{\alpha\beta}\epsilon_c{}^d = 2i\left(T_{c\beta}{}^\epsilon(\gamma^d)_{\epsilon\alpha} + T_{c\alpha}{}^\epsilon(\gamma^d)_{\epsilon\beta}\right)\,.$$

Diese Gleichung kann mit dem Ansatz

$$F_\alpha{}^\beta = f\delta_\alpha{}^\beta + f^a(\gamma_a)_\alpha{}^\beta + f_5(\gamma_5)_\alpha{}^\beta$$
$$T_{c\alpha}{}^\beta = t_c\delta_\alpha{}^\beta + t_c{}^a(\gamma_a)_\alpha{}^\beta + t_{5c}(\gamma_5)_\alpha{}^\beta$$

gelöst werden. Dabei ist zu beachten, daß $F_\alpha{}^\beta = \epsilon^{\beta\gamma}F_{\alpha\gamma}$ für fermionische, und $t_{cb} = \eta_{ba}t_c{}^a$ für bosonische Komponenten gilt.

Die einzelnen Komponenten des Ansatzes erhält man durch Kontraktion diverser Indizes und Multiplikation mit $(\gamma^a)_\beta{}^\alpha$ oder $(\gamma_5)_\beta{}^\alpha$, wie aus folgender Aufstellung ersichtlich ist:

$$F_\alpha{}^\alpha\epsilon_c{}^d \implies f = 0 \quad \text{und} \tag{5.16a}$$
$$F_\alpha{}^\beta(\gamma^a)_\beta{}^\alpha\epsilon_c{}^d \implies f^a\epsilon_c{}^d = 4i\left(\eta^{da}t_c - \epsilon^{da}t_{5c}\right) . \tag{5.16b}$$

Die Gleichung (5.16b) wird weiter kontrahiert,

$$f^a\epsilon_c{}^c \implies t_a = -\epsilon_a{}^c t_{5c} \,,$$
$$f^a\epsilon_c{}^d\epsilon_d{}^c \implies f^a = 0 \quad \text{und}$$
$$f^a\epsilon_a{}^d\epsilon_d{}^e \implies t_{5a} = 0 \,.$$

Schließlich erhält man die Komponente $t_c{}^a$ aus

$$F_\alpha{}^\beta(\gamma_5)_\beta{}^\alpha\epsilon_c{}^d \implies t_{cb} = \frac{i}{4}\eta_{cb}f_5 \,. \tag{5.16c}$$

Für die verbleibende Komponente f_5 wird $f_5 = -iS$ gewählt, mit einem beliebigen reellen Superfeld S.

Die Lösung lautet somit:

$$T_{c\alpha}{}^\beta = \frac{1}{4}(\gamma_c)_\alpha{}^\beta S \quad \text{und} \tag{5.17}$$
$$F_\alpha{}^\beta = -i(\gamma_5)_\alpha{}^\beta S \,. \tag{5.18}$$

5.3.3 Lösung von $R_{[\alpha\beta\gamma]}{}^\delta$:

Die Gleichung für $R_{[\alpha\beta\gamma]}{}^\delta$ lautet unter Berücksichtigung der Zwangsbedingungen (5.10), $T_{\beta\gamma}{}^\delta = 0$ und $T_{\alpha\beta}{}^e = 2i(\gamma^e)_{\alpha\beta}$,

$$F_{\alpha\beta}\,\frac{1}{2}(\gamma_5)_\gamma{}^\delta + F_{\alpha\gamma}\,\frac{1}{2}(\gamma_5)_\beta{}^\delta + F_{\gamma\beta}\,\frac{1}{2}(\gamma_5)_\alpha{}^\delta =$$
$$2i(\gamma^e)_{\alpha\beta}\,T_{e\gamma}{}^\delta + 2i(\gamma^e)_{\alpha\gamma}\,T_{e\beta}{}^\delta + 2i(\gamma^e)_{\gamma\beta}\,T_{e\alpha}{}^\delta \,.$$

Diese Gleichung enthält keine neuen Komponenten der Torsion und der Krümmung mehr, und sollte daher mit obigen Resultaten (5.17) und (5.18) bereits erfüllt sein, was man auch mit Hilfe der Fierzidentität

$$2\delta_\alpha{}^\beta\delta_\gamma{}^\delta = \delta_\alpha{}^\delta\delta_\gamma{}^\beta + (\gamma_a)_\alpha{}^\delta(\gamma^a)_\gamma{}^\beta + (\gamma_5)_\alpha{}^\delta(\gamma_5)_\gamma{}^\beta \tag{2.26}$$

nachprüfen kann.

5.3.4 Lösung von $R_{[\alpha bc]}{}^{d}$:

Nach Einsetzen der Zwangsbedingungen (5.10) und (5.12) sowie der bereits bekannten Torsionskomponenten (5.15) und (5.17) in die Gleichung $R_{[\alpha bc]}{}^{d} = \mathcal{D}_{[\alpha}T_{bc]}{}^{d} + T_{[\alpha b|}{}^{\epsilon}T_{\epsilon|c]}{}^{d} + T_{[\alpha b|}{}^{e}T_{e|c]}{}^{d}$ erhält man

$$F_{\alpha b}\,\epsilon_{c}{}^{d} - F_{\alpha c}\,\epsilon_{b}{}^{d} = -T_{cb}{}^{\epsilon}\,2i(\gamma^{d})_{\epsilon\alpha}\,.$$

Da die Torsionskomponente $T_{cb}{}^{\epsilon}$ antisymmetrisch in den unteren Indizes ist, kann man

$$T_{cb}{}^{\epsilon} = \epsilon_{cb}\,t^{\epsilon} \tag{5.19a}$$

ansetzen, womit sich für $F_{\alpha b}$ die Gleichung

$$F_{\alpha b} = -2i\,t^{\epsilon}(\gamma_{b})_{\epsilon\alpha} \tag{5.19b}$$

ergibt. Die Größe t^{ϵ} läßt sich dann mit Hilfe der Bianchi-Identität für die Komponenten $R_{[\alpha b\gamma]}{}^{\delta}$ bestimmen, wie ich im nächsten Abschnitt zeigen werde.

5.3.5 Lösung von $R_{[\alpha b\gamma]}{}^{\delta}$:

Mit Hilfe der Zwangsbedingungen (5.10), (5.12) und den Torsionskomponenten (5.15), (5.17), d. h. ohne den noch unbestimmten Komponenten des vorigen Abschnittes, erhält man:

$$F_{\alpha b}\,\frac{1}{2}(\gamma_5)_{\gamma}{}^{\delta} + F_{\gamma b}\,\frac{1}{2}(\gamma_5)_{\alpha}{}^{\delta} = \frac{1}{4}(\gamma_b)_{\gamma}{}^{\delta}\,\mathcal{D}_{\alpha}S + \frac{1}{4}(\gamma_b)_{\alpha}{}^{\delta}\,\mathcal{D}_{\gamma}S - 2i(\gamma^{e})_{\alpha\gamma}\,T_{eb}{}^{\delta}\,.$$

Setzt man nun die Gleichungen (5.19a) und (5.19b) des vorigen Abschnittes ein und multipliziert mit $\epsilon^{bc}(\gamma_c)^{\gamma\alpha}$, so erhält man direkt das Ergebnis

$$t^{\epsilon} = -\frac{1}{4}(\gamma_5)^{\epsilon\alpha}\,\mathcal{D}_{\alpha}S\,.$$

Somit hat man bereits alle Komponenten der Torsion,

$$T_{cb}{}^{\delta} = -\frac{i}{4}\epsilon_{cb}(\gamma_5)^{\delta\alpha}\,\mathcal{D}_{\alpha}S\,, \tag{5.20}$$

und eine weitere Komponente der Krümmung,

$$F_{\alpha b} = -\frac{1}{2}(\gamma_5\gamma_b)_{\alpha}{}^{\beta}\mathcal{D}_{\beta}S\,, \tag{5.21}$$

bestimmt.

5.3.6 Lösung von $R_{[ab\gamma]}{}^{\delta}$:

Im letzten Abschnitt zur Lösung der Bianchi-Identitäten (5.14) wird die Komponente F_{ab} der Krümmung bestimmt. Diese wird aus der Gleichung für $R_{[ab\gamma]}{}^{\delta}$,

$$F_{ab}\,\frac{1}{2}(\gamma_5)_\gamma{}^\delta = \mathcal{D}_a T_{b\gamma}{}^\delta + \mathcal{D}_\gamma T_{ab}{}^\delta + \mathcal{D}_b T_{\gamma a}{}^\delta + T_{\gamma a}{}^\epsilon T_{\epsilon b}{}^\delta + T_{b\gamma}{}^\epsilon T_{\epsilon a}{}^\delta \,,$$

unter Berücksichtigung der Zwangsbedingungen (5.10) und (5.12) sowie den bereits berechneten Komponenten der Torsion, (5.15), (5.17) und (5.20), durch Multiplizieren mit $(\gamma_5)_\delta{}^\gamma$ berechnet. Dadurch findet man schließlich

$$F_{ab} = \frac{i}{4}\epsilon_{ab}\,\mathcal{D}_\gamma \mathcal{D}^\gamma S - \frac{1}{4}\epsilon_{ab} S^2 \,. \tag{5.22}$$

5.3.7 Zusammenfassung der Lösungen

Die an die Komponenten der Supertorsion gestellten Zwangsbedingungen

$$T_{\beta\gamma}{}^a = 2i(\gamma^a)_{\beta\gamma}\,, \quad T_{\beta\gamma}{}^\alpha = 0 \tag{5.10}$$
$$\text{und} \quad T_{bc}{}^a = 0 \tag{5.12}$$

schränken, unter der Voraussetzung daß die Bianchi-Identitäten (5.14) weiterhin erfüllt bleiben sollen, die restlichen Komponenten von Supertorsion und Superkrümmung ein. Die allgemeine Lösung obiger Zwangsbedingungen läßt sich in Abhängigkeit eines beliebigen reellen Superfeldes $S\colon U \to \mathbb{R}_c$, wobei U eine Umgebung der Supermannigfaltigkeit M über dem Modellraum $R^{2|2}$ ist, angeben:

$$T_{\epsilon\gamma}{}^d = 0 \tag{5.15}$$
$$T_{c\alpha}{}^\beta = \frac{1}{4}(\gamma_c)_\alpha{}^\beta S \tag{5.17}$$
$$F_\alpha{}^\beta = -i(\gamma_5)_\alpha{}^\beta S \tag{5.18}$$
$$T_{cb}{}^\delta = -\frac{i}{4}\epsilon_{cb}(\gamma_5)^{\delta\alpha}\,\mathcal{D}_\alpha S \tag{5.20}$$
$$F_{\alpha b} = -\frac{1}{2}(\gamma_5\gamma_b)_\alpha{}^\beta \mathcal{D}_\beta S \tag{5.21}$$
$$F_{ab} = \frac{i}{4}\epsilon_{ab}\,\mathcal{D}_\gamma \mathcal{D}^\gamma S - \frac{1}{4}\epsilon_{ab} S^2 \tag{5.22}$$

Die hier gewonnenen Lösungen stimmen mit jenen in [H] überein, wenn man zwei offensichtliche Druckfehler, einen in der Zeile über der Formel [H]-(2.17), in welcher $R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta$ durch $R_{\alpha b\gamma}{}^\delta$ zu ersetzen ist, und einen in der Formel [H]-(2.18) – $F_{\alpha\beta}$ ist hier durch $F_{\alpha b}$ zu ersetzen – berücksichtigt, und wenn man schließlich in [H]-(2.19), dies ist die Formel für F_{ab}, den Ausdruck $-\frac{i}{4}\epsilon_{ab}S^2$ durch $-\frac{1}{4}\epsilon_{ab}S^2$ ersetzt.

5.4 Eichfixierung von Supervielbein und Superkonnexion

Bei einem Kartenwechsel auf der Supermannigfaltigkeit M, beschrieben durch die Übergangsfunktionen $z'^M = z'^M(z)$, lauten die Transformationen der Komponenten des Supervielbeines:

$$E_M{}^A(z) = \frac{\partial z'^N}{\partial z^M}(z) E'_N{}^A(z'(z)) \,. \tag{5.23}$$

Die Übergangsfunktionen, in bosonischen und fermionischen Teil getrennt und nach den fermionischen Koordinaten entwickelt, seien durch

$$x'^m = x'^m(x) + \theta^\lambda \, \xi_\lambda{}^m(x) + \frac{1}{2}\theta^\lambda\theta_\lambda \, g^m(x) \quad \text{und} \tag{5.24a}$$

$$\theta'^\mu = \xi^\mu(x) + \theta^\lambda \, \xi_\lambda{}^\mu(x) + \frac{1}{2}\theta^\lambda\theta_\lambda \, \eta^\mu(x) \tag{5.24b}$$

gegeben. Man sieht, daß die Komponenten $E_\mu{}^A$ des Supervielbeines ein einfaches Transformationsverhalten aufweisen, nämlich

$$E_\mu{}^A(z) = \frac{\partial x'^n}{\partial \theta^\mu}(z) E'_n{}^A(z'(z)) + \frac{\partial \theta'^\nu}{\partial \theta^\mu}(z) E'_\nu{}^A(z'(z)) \,, \tag{5.25}$$

bedingt durch die partiellen Ableitungen der Übergangsfunktionen nach den antikommutierenden Variablen,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x'^n}{\partial \theta^\mu}(z) = \xi_\mu{}^n(x) + \theta_\mu g^n(x) \quad \text{und} \\ &\frac{\partial \theta'^\nu}{\partial \theta^\mu}(z) = \xi_\mu{}^\nu(x) + \theta_\mu \eta^\nu(x) \,. \end{aligned}$$

Für die Entwicklung der Transformationen nach den antikommutierenden Variablen werden die Komponentenfelder der Vielbeine standardmäßig durch

$$E_N{}^A(x,\theta) = e_N{}^A(x) + \theta^\lambda \, e_{\lambda,N}{}^A(x) + \frac{1}{2}\theta^\lambda\theta_\lambda \, e_{3,N}{}^A(x)$$

bezeichnet.

Bei den Transformationen der θ^0-Komponentenfelder[1] von $E_\mu{}^A$,

$$E_\mu{}^A\big|_{\theta=0} = \xi_\mu{}^n E'_n{}^A\big|_{\theta=0} + \xi_\mu{}^\nu E'_\nu{}^A\big|_{\theta=0} \,, \tag{5.25a}$$

beachte man, daß die gestrichenen Größen wie $E'_n{}^a|_{\theta=0}$ an der Stelle (x,θ) auszuwerten sind:

$$\begin{aligned} &E'_n{}^a(x'(x,\theta),\theta'(x,\theta))\big|_{\theta=0} = \\ &\qquad e'_n{}^a(x'(x)) + \xi^\lambda(x) \, e'_{\lambda,n}{}^a(x'(x)) + \frac{1}{2}\xi^\lambda(x)\xi_\lambda(x) \, e'_{3,n}{}^a(x'(x)) \,. \end{aligned}$$

[1] Damit sind die $(\theta^\mu)^0$-Terme gemeint, ebenso bei den $\theta^1 \equiv \theta^\mu$ und $\theta^2 \equiv \frac{1}{2}\theta^\lambda\theta_\lambda$ -Termen.

Somit lauten die Transformationsgleichungen für die θ^0-Komponentenfelder – die gestrichenen Felder sind an der Stelle $x'(x)$ zu nehmen –

$$\begin{aligned}\underline{\underline{e_\mu{}^a}} = \xi_\mu{}^n \left(e'_n{}^a + \xi^\lambda\, e'_{\lambda,n}{}^a + \frac{1}{2}\xi^\lambda \xi_\lambda\, e'_{3,n}{}^a \right) \\ + \xi_\mu{}^\nu \left(\underline{\underline{e'_\nu{}^a}} + \xi^\lambda\, e'_{\lambda,\nu}{}^a + \frac{1}{2}\xi^\lambda \xi_\lambda\, e'_{3,\nu}{}^a \right)\end{aligned} \tag{5.26a}$$

und

$$\begin{aligned}\underline{\underline{e_\mu{}^\alpha}} = \xi_\mu{}^n \left(e'_n{}^\alpha + \xi^\lambda\, e'_{\lambda,n}{}^\alpha + \frac{1}{2}\xi^\lambda \xi_\lambda\, e'_{3,n}{}^\alpha \right) \\ + \xi_\mu{}^\nu \left(\underline{\underline{e'_\nu{}^\alpha}} + \xi^\lambda\, e'_{\lambda,\nu}{}^\alpha + \frac{1}{2}\xi^\lambda \xi_\lambda\, e'_{3,\nu}{}^\alpha \right) .\end{aligned} \tag{5.26b}$$

Daran sieht man, daß die Parameter $\xi_\mu{}^n$ und $\xi_\mu{}^\nu$ zum Wechsel in eine Karte mit

$$E_\mu{}^a| = e_\mu{}^a = 0 \quad \text{und} \tag{5.27a}$$
$$E_\mu{}^\alpha| = e_\mu{}^\alpha = \delta_\mu{}^\alpha \tag{5.27b}$$

verwendet werden können. Will man diese Eichung aufrecht halten, so sind bei weiteren Kartenwechseln die Parameter $\xi_\mu{}^n$ und $\xi_\mu{}^\nu$ nicht mehr frei wählbar.

Für die θ^1-Komponenten des Supervielbeines $E_\mu{}^A$ erhält man die Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial E_\mu{}^A}{\partial \theta^\lambda}\right|_{\theta=0} = \epsilon_{\lambda\mu} g^n \left. E'_n{}^A \right|_{\theta=0} - \xi_\mu{}^n \left.\frac{\partial E'_n{}^A}{\partial \theta^\lambda}\right|_{\theta=0} \\ + \epsilon_{\lambda\mu}\eta^\nu \left. E'_\nu{}^A \right|_{\theta=0} + \xi_\mu{}^\nu \left.\frac{\partial E'_\nu{}^A}{\partial \theta^\lambda}\right|_{\theta=0} .\end{aligned} \tag{5.25b}$$

Unter Beachtung, daß die gestrichenen Größen zum Auswerten an der Stelle $\theta = 0$ wiederum entwickelt werden müssen,

$$\begin{aligned}&\left.\frac{\partial E'_n{}^a(x'(x,\theta),\theta'(x,\theta))}{\partial \theta^\lambda}\right|_{\theta=0} = \\ &\xi_\lambda{}^m(x)\left(\left.\frac{\partial e'_n{}^a}{\partial x'^m}\right|_{x'(x)} + \xi^\lambda(x) \left.\frac{\partial e'_{\lambda,n}{}^a}{\partial x'^m}\right|_{x'(x)} + \frac{1}{2}\xi^\lambda(x)\xi_\lambda(x) \left.\frac{\partial e'_{3,n}{}^a}{\partial x'^m}\right|_{x'(x)} \right) \\ &\qquad + \xi_\lambda{}^\mu(x)\Big(e'_{\mu,n}{}^a(x'(x)) + \xi_\mu(x)\, e'_{3,n}{}^a(x'(x)) \Big) ,\end{aligned}$$

findet man schließlich die Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{e_{\lambda,\mu}{}^{a}}} = \epsilon_{\lambda\mu} g^{n} &\left(e'_{n}{}^{a} + \xi^{\rho}\, e'_{\rho,n}{}^{a} + \frac{1}{2}\xi^{\rho}\xi_{\rho}\, e'_{3,n}{}^{a} \right) \\
&- \xi_{\mu}{}^{n}\xi_{\lambda}{}^{m} \left(\frac{\partial e'_{n}{}^{a}}{\partial x'^{m}} + \xi^{\rho}\, \frac{\partial e'_{\rho,n}{}^{a}}{\partial x'^{m}} + \frac{1}{2}\xi^{\rho}\xi_{\rho}\, \frac{\partial e'_{3,n}{}^{a}}{\partial x'^{m}} \right) \\
&\qquad - \xi_{\mu}{}^{n}\xi_{\lambda}{}^{\rho} \left(e'_{\rho,n}{}^{a} + \xi_{\rho}\, e'_{3,n}{}^{a} \right) \\
&+ \epsilon_{\lambda\mu}\eta^{\nu} \left(e'_{\nu}{}^{a} + \xi^{\rho}\, \underline{\underline{e'_{\rho,\nu}{}^{a}}} + \frac{1}{2}\xi^{\rho}\xi_{\rho}\, e'_{3,\nu}{}^{a} \right) \\
&+ \xi_{\mu}{}^{\nu}\xi_{\lambda}{}^{m} \left(\frac{\partial e'_{\nu}{}^{a}}{\partial x'^{m}} + \xi^{\rho}\, \underline{\underline{\frac{\partial e'_{\rho,\nu}{}^{a}}{\partial x'^{m}}}} + \frac{1}{2}\xi^{\rho}\xi_{\rho}\, \frac{\partial e'_{3,\nu}{}^{a}}{\partial x'^{m}} \right) \\
&\qquad + \xi_{\mu}{}^{\nu}\xi_{\lambda}{}^{\rho} \left(\underline{\underline{e'_{\rho,\nu}{}^{a}}} + \xi_{\rho}\, e'_{3,\nu}{}^{a} \right)
\end{aligned} \tag{5.28a}$$

und

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{e_{\lambda,\mu}{}^{\alpha}}} = \epsilon_{\lambda\mu} g^{n} &\left(e'_{n}{}^{\alpha} + \xi^{\rho}\, e'_{\rho,n}{}^{\alpha} + \frac{1}{2}\xi^{\rho}\xi_{\rho}\, e'_{3,n}{}^{\alpha} \right) \\
&- \xi_{\mu}{}^{n}\xi_{\lambda}{}^{m} \left(\frac{\partial e'_{n}{}^{\alpha}}{\partial x'^{m}} + \xi^{\rho}\, \frac{\partial e'_{\rho,n}{}^{\alpha}}{\partial x'^{m}} + \frac{1}{2}\xi^{\rho}\xi_{\rho}\, \frac{\partial e'_{3,n}{}^{\alpha}}{\partial x'^{m}} \right) \\
&\qquad - \xi_{\mu}{}^{n}\xi_{\lambda}{}^{\rho} \left(e'_{\rho,n}{}^{\alpha} + \xi_{\rho}\, e'_{3,n}{}^{\alpha} \right) \\
&+ \epsilon_{\lambda\mu}\eta^{\nu} \left(e'_{\nu}{}^{\alpha} + \xi^{\rho}\, \underline{\underline{e'_{\rho,\nu}{}^{\alpha}}} + \frac{1}{2}\xi^{\rho}\xi_{\rho}\, e'_{3,\nu}{}^{\alpha} \right) \\
&+ \xi_{\mu}{}^{\nu}\xi_{\lambda}{}^{m} \left(\frac{\partial e'_{\nu}{}^{\alpha}}{\partial x'^{m}} + \xi^{\rho}\, \underline{\underline{\frac{\partial e'_{\rho,\nu}{}^{\alpha}}{\partial x'^{m}}}} + \frac{1}{2}\xi^{\rho}\xi_{\rho}\, \frac{\partial e'_{3,\nu}{}^{\alpha}}{\partial x'^{m}} \right) \\
&\qquad + \xi_{\mu}{}^{\nu}\xi_{\lambda}{}^{\rho} \left(\underline{\underline{e'_{\rho,\nu}{}^{\alpha}}} + \xi_{\rho}\, e'_{3,\nu}{}^{\alpha} \right) .
\end{aligned} \tag{5.28b}$$

Daraus folgt, daß man die Transformationsparameter $g^{n}(x)$ und $\eta^{\nu}(x)$ verwenden kann, um

$$\partial_{[\lambda} E_{\mu]}{}^{a}| = e_{[\lambda,\mu]}{}^{a} = 0 \quad \text{und} \tag{5.29a}$$

$$\partial_{[\lambda} E_{\mu]}{}^{\alpha}| = e_{[\lambda,\mu]}{}^{\alpha} = 0 \tag{5.29b}$$

zu setzen. Damit sind die zuvor unabhängigen Parameter $g^{n}(x)$ und $\eta^{\nu}(x)$ für weitere Kartenwechsel ebenfalls nicht mehr verfügbar.

Behelfs einer lokalen Superlorentztransformation

$$\Omega'_{\mu}(z) = \Omega_{\mu}(z) - \partial_{\mu} L(z) \tag{5.30}$$

eicht man die Superkonnexion. Sind die Entwicklungen von $\Omega_{\mu}(z)$ und $L(z)$ durch

$$\begin{aligned}
\Omega_{\mu}(z) &= \omega_{\mu}(x) + \theta^{\lambda}\omega_{\lambda,\mu}(x) + \frac{1}{2}\theta^{\lambda}\theta_{\lambda}\omega_{3,\mu}(x) \quad \text{und} \\
L(z) &= l(x) + \theta^{\lambda} l_{\lambda}(x) + \frac{1}{2}\theta^{\lambda}\theta_{\lambda} l_{3}(x)
\end{aligned}$$

gegeben, dann lauten die Transformationen der Komponentenfelder

$$\omega'_{\mu}(x) = \omega_{\mu}(x) - l_{\mu}(x)\,, \tag{5.31a}$$
$$\omega'_{\lambda,\mu}(x) = \omega_{\lambda,\mu}(x) - \epsilon_{\lambda\mu} l_3(x) \quad \text{und} \tag{5.31b}$$
$$\omega'_{3,\mu}(x) = \omega_{3,\mu}(x)\,. \tag{5.31c}$$

Man kann also mit Hilfe der Parameter l_μ und l_3 der Superlorentztransformation die Komponentenfelder der Superkonnexion auf die Werte

$$\Omega_\mu| = \omega_\mu = 0 \quad \text{und} \tag{5.32a}$$
$$\partial_{[\lambda}\Omega_{\mu]}| = \omega_{[\lambda,\mu]} = 0 \tag{5.32b}$$

eichen.

Mittels der durchgeführten Eichungen hat man die anfangs 20 Freiheitsgrade (FG) umfassende Eichinvarianz durch Fixieren der Parameter der Superkoordinatentransformationen, ${\xi_\lambda}^m(x)$ (4 FG), ${\xi_\lambda}^\mu(x)$ (4 FG), $g^m(x)$ (2 FG) und $\eta^\mu(x)$ (2 FG), sowie der lokalen Superlorentztransformationen, $l_\lambda(x)$ (2 FG) und $l_3(x)$ (1 FG), auf 5 Freiheitsgrade reduziert, welche durch die verbleibenden Parameter $x'^m(x)$ (2 FG), $\xi^\mu(x)$ (2 FG) und $l(x)$ (1 FG) beschrieben werden. Die Parameter $x'^m(x)$ entsprechen Koordinatentransformationen im x-Raum, $\xi^\mu(x)$ entsprechen lokalen Supersymmetrietransformationen und $l(x)$ entspricht der lokalen Lorentztransformation.

Die zuerst große Zahl der unabhängigen Komponentenfelder im Supervielbein ${E_M}^A$, in der Superkonnexion Ω_M und im Superfeld S ist damit drastisch reduziert. Die abhängigen Komponentenfelder werden im nächsten Abschnitt unter Zuhilfenahme der kinematischen Zwangsbedingungen (5.10), (5.12) und deren Konsequenzen für die Supertorsion, (5.15), (5.17) und (5.20), und die Superkrümmung, (5.18), (5.21) und (5.22), berechnet. Die gewählten Eichungen seien nochmals im Überblick angeschrieben:

${E_\mu}^a\| = 0$	(5.27a)	$\partial_{[\nu} {E_{\mu]}}^a\| = 0$	(5.29a)
${E_\mu}^\alpha\| = {\delta_\mu}^\alpha$	(5.27b)	$\partial_{[\nu} {E_{\mu]}}^\alpha\| = 0$	(5.29b)
$\Omega_\mu\| = 0$	(5.32a)	$\partial_{[\nu}\Omega_{\mu]}\| = 0$	(5.32b)

5.5 Komponentenfelder

Für folgende Komponentenfelder des Supervielbeines und der Superkonnexion wird eine eigene Bezeichnung eingeführt:

$${E_m}^a| =: {e_m}^a\,, \tag{5.33}$$
$${E_m}^\alpha| =: \frac{1}{2}{\chi_m}^\alpha \quad \text{und} \tag{5.34}$$
$$\Omega_m| =: \omega_m\,. \tag{5.35}$$

Das Feld $e_m{}^a(x)$ heißt Vielbein, $\chi_m{}^\alpha(x)$ heißt Rarita-Schwinger-Feld und $\omega_m(x)$ heißt Konnexion.

Auch die Komponenten des Superfeldes S erhalten mit

$$S| =: A \quad \text{und} \tag{5.36}$$

$$\partial_\mu S| =: \psi_\mu \tag{5.37}$$

eine eigene Bezeichnung.

Entwickelt man die Superfelder in den unten angegebenen Gleichungen nach den θ-Variablen, setzt die gewählten Eichungen ein und vergleicht die Koeffizienten, so erhält man Lösungen für die Komponentenfelder.

Die Komponentenfelder des inversen Supervielbeines (siehe S. 22), erhält man aus

$$E_M{}^\alpha E_\alpha{}^N + E_M{}^a E_a{}^N = \delta_M{}^N \,. \tag{5.38}$$

Die Komponentenfelder von Supervielbein und Superkonnexion und das Komponentenfeld ψ_μ des Superfeldes S erhält man mittels der Definitionsgleichungen der Torsion (4.38),

$$T_{NM}{}^a = \partial_N E_M{}^a - E_N{}^b \Omega_M \epsilon_b{}^a - (-1)^{NM}(N \leftrightarrow M) \quad \text{und} \tag{5.39a}$$

$$T_{NM}{}^\alpha = \partial_N E_M{}^\alpha - (-1)^M E_N{}^\beta \Omega_M \frac{1}{2}(\gamma_5)_\beta{}^\alpha - (-1)^{NM}(N \leftrightarrow M)\,, \tag{5.39b}$$

unter Berücksichtigung der Gleichungen (5.15), (5.17) und (5.20), die mit Hilfe des Supervielbeines in der Form

$$T_{NM}{}^a = (-1)^{N(M+1)} E_M{}^\gamma E_N{}^\beta \, 2i(\gamma^a)_{\beta\gamma} \quad \text{und} \tag{5.40a}$$

$$\begin{aligned} T_{NM}{}^\alpha = {} & E_N{}^b E_M{}^c \,(-\frac{i}{4})\epsilon_{bc}(\gamma_5)^{\alpha\beta}\, \mathcal{D}_\beta S \\ & + \left(E_N{}^c E_M{}^\beta - (-1)^{NM} E_M{}^c E_N{}^\beta\right) \frac{1}{4}(\gamma_c)_\beta{}^\alpha S \end{aligned} \tag{5.40b}$$

geschrieben werden.

Aus den Definitionsgleichungen der Krümmung (siehe S. 33),

$$F_{ab} = 2E_b{}^N E_a{}^M \, \partial_{[M}\Omega_{N]}\,, \tag{5.41}$$

unter Berücksichtigung von (5.22),

$$F_{ab} = \frac{i}{4}\epsilon_{ab}\mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}^\alpha S - \frac{1}{4}\epsilon_{ab} A\,, \tag{5.22}$$

erhält man schließlich das Komponentenfeld $\frac{1}{2}\partial_\lambda \partial^\lambda S|$.

5.5.1 Die θ^0-Terme des inversen Supervielbeines

Aus den θ^0-Termen von (5.38),

$$(E_M{}^\alpha E_\alpha{}^N + E_M{}^a E_a{}^N)| = \delta_M{}^N ,$$

erhält man die θ^0-Komponenten des inversen Supervielbeines:

$$E_\alpha{}^\mu| = \delta_\alpha{}^\mu \tag{5.42a}$$

$$E_\alpha{}^m| = 0 \tag{5.42b}$$

$$E_a{}^\mu| = -\frac{1}{2} e_a{}^n \chi_n{}^\alpha \delta_\alpha{}^\mu \tag{5.42c}$$

$$E_a{}^m| = e_a{}^m \tag{5.42d}$$

Dabei ist $\delta_\alpha{}^\mu$ durch

$$\delta_\nu{}^\alpha \delta_\alpha{}^\mu = \delta_\nu{}^\mu \tag{5.43}$$

definiert, und $e_b{}^m$ bezeichnet das inverse Vielbein,

$$e_b{}^m e_m{}^a = \delta_b{}^a . \tag{5.44}$$

5.5.2 Die θ^0-Terme der Supertorsion

Aus den θ^0-Termen von (5.39a),

$$T_{NM}{}^a| = \partial_N E_M{}^a| - E_N{}^b|\,\Omega_M|\epsilon_b{}^a - (-1)^{NM}(N \leftrightarrow M) ,$$

sowie (5.39b),

$$T_{NM}{}^\alpha| = \partial_N E_M{}^\alpha| - (-1)^M E_N{}^\beta|\,\Omega_M|\,\frac{1}{2}(\gamma_5)_\beta{}^\alpha - (-1)^{NM}(N \leftrightarrow M) ,$$

(5.40a),

$$T_{NM}{}^a| = (-1)^{N(M+1)} E_M{}^\gamma|\,E_N{}^\beta|\,2i(\gamma^a)_{\beta\gamma} ,$$

und (5.40b),

$$\begin{aligned} T_{NM}{}^\alpha| = {} & E_N{}^b|\,E_M{}^c|\,(-\frac{i}{4})\epsilon_{bc}(\gamma_5)^{\alpha\beta}\,\mathcal{D}_\beta S| \\ & + \left(E_N{}^c|\,E_M{}^\beta| - (-1)^{NM} E_M{}^c|\,E_N{}^\beta|\right)\,\frac{1}{4}(\gamma_c)_\beta{}^\alpha S| , \end{aligned}$$

lassen sich die θ^1-Terme $\partial_\nu E_M{}^A|$ des Supervielbeines, der θ^0-Term $\Omega_m| = \omega_m$ der Konnexion und der θ^1-Term $\partial_\nu S| = \psi_\nu$ des Superfeldes S bestimmen. Die Berechnung ist einfach und die Ergebnisse lauten:

$T_{\nu\mu}{}^\alpha|$:

$$\Longrightarrow\ \partial_{(\nu} E_{\mu)}{}^\alpha| = 0 \tag{5.45a}$$

$T_{\nu\mu}{}^a|$:

$$\Longrightarrow \partial_\nu E_\mu{}^a| = i\delta_\mu{}^\gamma \delta_\nu{}^\beta (\gamma^a)_{\beta\gamma} \tag{5.45b}$$

$T_{\nu m}{}^\alpha|$:

$$\Longrightarrow \partial_\nu E_m{}^\alpha| = \frac{1}{2}\delta_\nu{}^\beta (\gamma_5)_\beta{}^\alpha \omega_m - \frac{1}{4}\delta_\nu{}^\beta (\gamma^a)_\beta{}^\alpha e_{am} A \tag{5.45c}$$

$T_{\nu m}{}^a|$:

$$\Longrightarrow \partial_\nu E_m{}^a| = i\,\delta_\nu{}^\beta (\gamma^a)_\beta{}^\gamma \chi_{m\gamma} \tag{5.45d}$$

$T_{nm}{}^a|\,\epsilon_a{}^c e_c{}^m$:

$$\Longrightarrow \omega_n = -\epsilon^{cb} e_b{}^l e_c{}^m (\partial_m e_l{}^a) e_{an} + \frac{i}{2}\chi_n{}^\beta (\gamma_5\gamma^a)_\beta{}^\alpha e_a{}^m \chi_{m\alpha} \tag{5.45e}$$

Mit Hilfe der Anholonomiekoeffizienten im x-Raum,

$$c_{cb}{}^a = -2 e_b{}^l e_c{}^m \partial_{[m} e_{l]}{}^a,$$

lautet Gleichung (5.45e):

$$\omega_n = \frac{1}{2}\epsilon^{cb} c_{cb}{}^a e_{an} + \frac{i}{2}\chi_n{}^\beta (\gamma_5\gamma^a)_\beta{}^\alpha e_a{}^m \chi_{m\alpha}\,.$$

$T_{bc}{}^\alpha (\gamma_5)_{\alpha\nu} \epsilon^{cb}$:

$$\Longrightarrow \psi_\nu = -2i\,\delta_\nu{}^\alpha (\gamma_5)_\alpha{}^\beta \epsilon^{cb} e_b{}^m e_c{}^n \hat{\mathfrak{D}}_n \chi_{m\beta} - \frac{i}{2}\delta_\nu{}^\alpha (\gamma^a)_\alpha{}^\beta e_a{}^m \chi_{m\beta} A \tag{5.45f}$$

Das Symbol $\hat{\mathfrak{D}}_n$ bezeichnet dabei die kovariante Ableitung im x-Raum,

$$\hat{\mathfrak{D}}_n \chi_{m\alpha} := \partial_n \chi_{m\alpha} - \frac{1}{2}\omega_n (\gamma_5)_\alpha{}^\beta \chi_{m\beta}\,, \tag{5.46}$$

deren Konnexionsmatrix $\omega_n(\gamma_5)_\alpha{}^\beta$ durch die Lösung (5.45e) gegeben ist.

5.5.3 Die θ^1-Terme des inversen Supervielbeines

Aus den θ^1-Komponenten von (5.38),

$$\partial_\nu (E_M{}^\alpha E_\alpha{}^N + E_M{}^a E_a{}^N)| = 0\,,$$

erhält man die θ^1-Komponenten des inversen Supervielbeines:

$$\partial_\nu E_b{}^m| = -\frac{i}{2}\, e_b{}^n \delta_\nu{}^\alpha (\gamma^c)_\alpha{}^\beta \chi_{n\beta}\, e_c{}^m \tag{5.47a}$$

$$\begin{aligned}\partial_\nu E_b{}^\lambda| = {} & \frac{i}{4}\, e_b{}^m\, \delta_\nu{}^\alpha (\gamma^c)_\alpha{}^\beta \chi_{m\beta}\, e_c{}^n \chi_n{}^\gamma \delta_\gamma{}^\lambda \\ & - \frac{1}{2}\, \delta_\nu{}^\alpha (\gamma_5)_\alpha{}^\beta \delta_\beta{}^\lambda\, e_b{}^m \omega_m + \frac{1}{4}\, \delta_\nu{}^\alpha (\gamma_b)_\alpha{}^\beta \delta_\beta{}^\lambda A\end{aligned} \tag{5.47b}$$

$$\partial_\nu E_\beta{}^m| = -i\, \delta_\nu{}^\alpha (\gamma^c)_{\alpha\beta} e_c{}^m \tag{5.47c}$$

$$\partial_\nu E_\beta{}^\lambda| = \frac{i}{2}\, \delta_\nu{}^\alpha (\gamma^c)_{\alpha\beta}\, e_c{}^m \chi_m{}^\gamma \delta_\gamma{}^\lambda \tag{5.47d}$$

5.5.4 Ergebnisse des `Mathematica`-Programmes `Dill`

Die Auswertung der θ^1- und θ^2-Terme der Gleichungen (5.39a), (5.39b), (5.40a) und (5.40b) erwies sich als ziemlich aufwendig, weshalb ich diese Rechnung teilweise mit Hilfe des `Mathematica`-Programmes `Dill` [L] durchführte. `Dill` ist ein Programm zur Manipulation von Komponentenfeldern der vierdimensionalen Supersymmetrietheorie im flachen Superraum, was auch Änderungen am Programm erforderlich machte, die im Anhang A beschrieben werden.

`Dill` benötigt für jedes Komponentenfeld ein eigenes Symbol. Die für die Vielbeine verwendeten Symbole lauten:

$$\begin{aligned}E_m{}^a &= e_m{}^a + \theta^\mu\, e_{\mu,m}{}^a + \frac{1}{2}\theta^\nu\theta_\nu\, e_{3,m}{}^a \\ E_m{}^\alpha &= \frac{1}{2}\chi_m{}^\alpha + \theta^\mu\, \chi_{\mu,m}{}^\alpha + \frac{1}{2}\theta^\nu\theta_\nu\, \chi_{3,m}{}^\alpha \\ E_\mu{}^a &= \theta^\nu\, \kappa_{\nu,\mu}{}^a + \frac{1}{2}\theta^\kappa\theta_\kappa\, \kappa_{3,\mu}{}^a \\ E_\mu{}^\alpha &= \delta_\mu{}^\alpha + \theta^\nu\, \lambda_{\nu,\mu}{}^\alpha + \frac{1}{2}\theta^\kappa\theta_\kappa\, \lambda_{3,\mu}{}^\alpha\end{aligned}$$

Die Entwicklungen der inversen Supervielbeine, die Tilde führt auch zu leichterer Lesbarkeit, sind:

$$\begin{aligned}\tilde{E}_a{}^m &= \tilde{e}_a{}^m + \theta^\mu\, \tilde{e}_{\mu,a}{}^m + \frac{1}{2}\theta^\nu\theta_\nu\, \tilde{e}_{3,a}{}^m \\ \tilde{E}_a{}^\mu &= \tilde{\kappa}_a{}^\mu + \theta^\nu\, \tilde{\kappa}_{\nu,a}{}^\mu + \frac{1}{2}\theta^\kappa\theta_\kappa\, \tilde{\kappa}_{3,a}{}^\mu \\ \tilde{E}_\alpha{}^m &= \tilde{\chi}_\alpha{}^m + \theta^\mu\, \tilde{\chi}_{\mu,\alpha}{}^m + \frac{1}{2}\theta^\nu\theta_\nu\, \tilde{\chi}_{3,\alpha}{}^m \\ \tilde{E}_\alpha{}^\mu &= \tilde{\lambda}_\alpha{}^\mu + \theta^\nu\, \tilde{\lambda}_{\nu,\alpha}{}^\mu + \frac{1}{2}\theta^\kappa\theta_\kappa\, \tilde{\lambda}_{3,\alpha}{}^\mu\end{aligned}$$

Für die Superkonnexion wird

$$\begin{aligned}\Omega_m &= \omega_m + \theta^\mu\, \omega_{\mu,m} + \frac{1}{2}\theta^\nu\theta_\nu\, \omega_{3,m} \quad \text{und} \\ \Omega_\mu &= \theta^\nu\, \phi_{\nu,\mu} + \frac{1}{2}\theta^\kappa\theta_\kappa\, \phi_{3,\mu}\end{aligned}$$

geschrieben, und das Superfeld S lautet schließlich in der entwickelten Form

$$S = A + \theta^\mu \, \psi_\mu + \frac{1}{2}\theta^\nu \theta_\nu \, s_3 \, .$$

Als Eingabe erhält `Dill` eine der Gleichungen (5.39a) und (5.39b), die symbolisch mit „$T_{NM}{}^A$ *linke Seite*" bezeichnet werden, oder eine der Gleichungen (5.40a) und (5.40b), die mit „$T_{NM}{}^A$ *rechte Seite*" bezeichnet werden. Danach setzt `Dill` die oben angeschriebenen Entwicklungen der Superfelder ein, multipliziert die Terme aus und liefert ein nach θ-Variablen entwickeltes Superfeld zurück. Das Programm erzeugt zwar neben der `Mathematica`-Ausgabe auch eine TEX-Ausgabe, diese mußte aber manuell nachbearbeitet werden. Die Ergebnisse der Computerberechnungen lauten:

Eingabe $T_{\nu\mu}{}^a$ *linke Seite*:

$$\partial_\mu \left(E_\nu{}^a\right) + \partial_\nu \left(E_\mu{}^a\right) - E_\mu{}^b \Omega_\nu \epsilon_b{}^a - E_\nu{}^b \Omega_\mu \epsilon_b{}^a$$

Ausgabe:

$$\begin{aligned} &\kappa_{\mu,\nu}{}^a + \kappa_{\nu,\mu}{}^a - \theta^\kappa \epsilon_{\mu\kappa} \kappa_{3,\nu}{}^a - \theta^\kappa \epsilon_{\nu\kappa} \kappa_{3,\mu}{}^a \\ &\qquad - \theta^\kappa \theta^\lambda \phi_{\kappa,\mu} \eta_{bc} \epsilon^{ab} \kappa_{\lambda,\nu}{}^c - \theta^\kappa \theta^\lambda \phi_{\kappa,\nu} \eta_{bc} \epsilon^{ab} \kappa_{\lambda,\mu}{}^c \end{aligned} \tag{5.48a}$$

Eingabe $T_{\nu\mu}{}^a$ *rechte Seite*:

$$2i \, E_\mu{}^\gamma E_\nu{}^\beta \left(\gamma^a\right)_\beta{}^\delta \epsilon_{\delta\gamma}$$

Ausgabe:

$$\begin{aligned} &2i \left(\gamma^a\right)_\alpha{}^\beta \epsilon_{\beta\gamma} \delta_\mu{}^\gamma \delta_\nu{}^\alpha + 2i \, \theta^\kappa \left(\gamma^a\right)_\alpha{}^\beta \epsilon_{\beta\gamma} \delta_\mu{}^\gamma \lambda_{\kappa,\nu}{}^\alpha + 2i \, \theta^\kappa \left(\gamma^a\right)_\alpha{}^\beta \epsilon_{\beta\gamma} \delta_\nu{}^\alpha \lambda_{\kappa,\mu}{}^\gamma \\ &\qquad - i \, \theta^\kappa \theta^\lambda \epsilon_{\kappa\lambda} \left(\gamma^a\right)_\alpha{}^\beta \epsilon_{\beta\gamma} \delta_\mu{}^\gamma \lambda_{3,\nu}{}^\alpha - i \, \theta^\kappa \theta^\lambda \epsilon_{\kappa\lambda} \left(\gamma^a\right)_\alpha{}^\beta \epsilon_{\beta\gamma} \delta_\nu{}^\alpha \lambda_{3,\mu}{}^\gamma \end{aligned} \tag{5.48b}$$

Eingabe $T_{n\mu}{}^a$ *linke Seite*:

$$-\partial_\mu \left(E_n{}^a\right) + \partial_n \left(E_\mu{}^a\right) - E_n{}^b \Omega_\mu \epsilon_b{}^a + E_\mu{}^b \Omega_n \epsilon_b{}^a$$

Ausgabe:

$$\begin{aligned} &\theta^\nu \partial_n (\kappa_{\nu,\mu}{}^a) + \theta^\nu \epsilon_{\mu\nu} e_{3,n}{}^a - \theta^\nu \omega_n \eta_{bc} \epsilon^{ab} \kappa_{\nu,\mu}{}^c + \theta^\nu \phi_{\nu,\mu} \eta_{bc} \epsilon^{ab} e_n{}^c \\ &\quad - \frac{1}{2}\theta^\nu \theta^\kappa \epsilon_{\nu\kappa} \partial_n (\kappa_{3,\mu}{}^a) + \theta^\nu \theta^\kappa \omega_{\nu,n} \eta_{bc} \epsilon^{ab} \kappa_{\kappa,\mu}{}^c + \theta^\nu \theta^\kappa \phi_{\nu,\mu} \eta_{bc} \epsilon^{ab} e_{\kappa,n}{}^c \\ &\qquad + \frac{1}{2}\theta^\nu \theta^\kappa \omega_n \epsilon_{\nu\kappa} \eta_{bc} \epsilon^{ab} \kappa_{3,\mu}{}^c - \frac{1}{2}\theta^\nu \theta^\kappa \phi_{3,\mu} \epsilon_{\nu\kappa} \eta_{bc} \epsilon^{ab} e_n{}^c - e_{\mu,n}{}^a \end{aligned} \tag{5.48c}$$

Eingabe $T_{n\mu}{}^a$ *rechte Seite*:

$$2i \, E_\mu{}^\gamma E_n{}^\beta \left(\gamma^a\right)_\beta{}^\delta \epsilon_{\delta\gamma}$$

Ausgabe:

$$\begin{aligned}
&i(\gamma^a)_\alpha{}^\beta\epsilon_{\beta\gamma}\chi_n{}^\alpha\delta_\mu{}^\gamma - i\theta^\nu(\gamma^a)_\alpha{}^\beta\epsilon_{\beta\gamma}\chi_n{}^\alpha\lambda_{\nu,\mu}{}^\gamma \\
&\qquad + 2i\theta^\nu(\gamma^a)_\alpha{}^\beta\epsilon_{\beta\gamma}\chi_{\nu,n}{}^\alpha\delta_\mu{}^\gamma + 2i\theta^\nu\theta^\kappa(\gamma^a)_\alpha{}^\beta\epsilon_{\beta\gamma}\chi_{\nu,n}{}^\alpha\lambda_{\kappa,\mu}{}^\gamma \\
&\qquad - \frac{i}{2}\theta^\nu\theta^\kappa\epsilon_{\nu\kappa}(\gamma^a)_\alpha{}^\beta\epsilon_{\beta\gamma}\chi_n{}^\alpha\lambda_{3,\mu}{}^\gamma - i\theta^\nu\theta^\kappa\epsilon_{\nu\kappa}(\gamma^a)_\alpha{}^\beta\epsilon_{\beta\gamma}\chi_{3,n}{}^\alpha\delta_\mu{}^\gamma
\end{aligned} \tag{5.48d}$$

Eingabe $T_{\nu\mu}{}^\alpha$ *linke Seite*:

$$\partial_\mu\left(E_\nu{}^\alpha\right) + \partial_\nu\left(E_\mu{}^\alpha\right) + E_\mu{}^\beta\Omega_\nu\frac{1}{2}(\gamma_5)_\beta{}^\alpha + E_\nu{}^\beta\Omega_\mu\frac{1}{2}(\gamma_5)_\beta{}^\alpha$$

Ausgabe:

$$\begin{aligned}
&+\lambda_{\mu,\nu}{}^\alpha + \lambda_{\nu,\mu}{}^\alpha - \theta^\kappa\epsilon_{\mu\kappa}\lambda_{3,\nu}{}^\alpha - \theta^\kappa\epsilon_{\nu\kappa}\lambda_{3,\mu}{}^\alpha \\
&\qquad + \frac{1}{2}\theta^\kappa\phi_{\kappa,\mu}(\gamma_5)_\beta{}^\alpha\delta_\nu{}^\beta + \frac{1}{2}\theta^\kappa\phi_{\kappa,\nu}(\gamma_5)_\beta{}^\alpha\delta_\mu{}^\beta \\
&\qquad + \frac{1}{2}\theta^\kappa\theta^\lambda\phi_{\kappa,\mu}(\gamma_5)_\beta{}^\alpha\lambda_{\lambda,\nu}{}^\beta + \frac{1}{2}\theta^\kappa\theta^\lambda\phi_{\kappa,\nu}(\gamma_5)_\beta{}^\alpha\lambda_{\lambda,\mu}{}^\beta \\
&\qquad - \frac{1}{4}\theta^\kappa\theta^\lambda\phi_{3,\mu}\epsilon_{\kappa\lambda}(\gamma_5)_\beta{}^\alpha\delta_\nu{}^\beta - \frac{1}{4}\theta^\kappa\theta^\lambda\phi_{3,\nu}\epsilon_{\kappa\lambda}(\gamma_5)_\beta{}^\alpha\delta_\mu{}^\beta
\end{aligned} \tag{5.48e}$$

Eingabe $T_{\nu\mu}{}^\alpha$ *rechte Seite*:

$$\frac{1}{4}\left(E_\mu{}^c E_\nu{}^\beta + E_\nu{}^c E_\mu{}^\beta\right)\eta_{cd}(\gamma^d)_\beta{}^\alpha S - \frac{i}{4}E_\nu{}^b E_\mu{}^c\epsilon_{bc}\epsilon^{\alpha\gamma}(\gamma_5)_\gamma{}^\beta\mathcal{D}_\beta S$$

Ausgabe:

$$\begin{aligned}
&A\frac{1}{4}\theta^\kappa\eta_{ab}(\gamma^a)_\beta{}^\alpha\delta_\mu{}^\beta\kappa_{\kappa,\nu}{}^b + A\frac{1}{4}\theta^\kappa\eta_{ab}(\gamma^a)_\beta{}^\alpha\delta_\nu{}^\beta\kappa_{\kappa,\mu}{}^b \\
&\qquad + A\frac{1}{4}\theta^\kappa\theta^\lambda\eta_{ab}(\gamma^a)_\beta{}^\alpha\kappa_{\kappa,\mu}{}^b\lambda_{\lambda,\nu}{}^\beta + A\frac{1}{4}\theta^\kappa\theta^\lambda\eta_{ab}(\gamma^a)_\beta{}^\alpha\kappa_{\kappa,\nu}{}^b\lambda_{\lambda,\mu}{}^\beta \\
&\qquad - \frac{1}{4}\theta^\kappa\theta^\lambda\eta_{ab}(\gamma^a)_\beta{}^\alpha\psi_\kappa\delta_\mu{}^\beta\kappa_{\lambda,\nu}{}^b - \frac{1}{4}\theta^\kappa\theta^\lambda\eta_{ab}(\gamma^a)_\beta{}^\alpha\psi_\kappa\delta_\nu{}^\beta\kappa_{\lambda,\mu}{}^b \\
&\qquad - A\frac{1}{8}\theta^\kappa\theta^\lambda\epsilon_{\kappa\lambda}\eta_{ab}(\gamma^a)_\beta{}^\alpha\delta_\mu{}^\beta\kappa_{3,\nu}{}^b - A\frac{1}{8}\theta^\kappa\theta^\lambda\epsilon_{\kappa\lambda}\eta_{ab}(\gamma^a)_\beta{}^\alpha\delta_\nu{}^\beta\kappa_{3,\mu}{}^b \\
&\qquad - \frac{i}{4}\theta^\kappa\theta^\lambda\eta_{ab}\eta_{cd}(\gamma_5)_\beta{}^\gamma\epsilon^{\alpha\beta}\tilde{\lambda}_\gamma{}^\rho\epsilon^{ac}\psi_\rho\kappa_{\kappa,\mu}{}^b\kappa_{\lambda,\nu}{}^d \\
&\qquad - \frac{i}{4}\partial_m\left(A\right)\theta^\kappa\theta^\lambda\eta_{ab}\eta_{cd}(\gamma_5)_\beta{}^\gamma\epsilon^{\alpha\beta}\tilde{\chi}_\gamma{}^m\epsilon^{ac}\kappa_{\kappa,\mu}{}^b\kappa_{\lambda,\nu}{}^d
\end{aligned} \tag{5.48f}$$

Eingabe $T_{nm}{}^a$ *linke Seite*:

$$-\partial_m\left(E_n{}^a\right) + \partial_n\left(E_m{}^a\right) + E_m{}^b\Omega_n\epsilon_b{}^a - E_n{}^b\Omega_m\epsilon_b{}^a$$

Ausgabe:

$$\begin{aligned}
&-\partial_m\left(e_n{}^a\right)+\partial_n\left(e_m{}^a\right)+\omega_m\eta_{bc}\epsilon^{ab}e_n{}^c-\omega_n\eta_{bc}\epsilon^{ab}e_m{}^c\\
&\quad-\theta^\mu\partial_m\left(e_{\mu,n}{}^a\right)+\theta^\mu\partial_n\left(e_{\mu,m}{}^a\right)+\theta^\mu\omega_m\eta_{bc}\epsilon^{ab}e_{\mu,n}{}^c-\theta^\mu\omega_n\eta_{bc}\epsilon^{ab}e_{\mu,m}{}^c\\
&\quad+\theta^\mu\omega_{\mu,m}\eta_{bc}\epsilon^{ab}e_n{}^c-\theta^\mu\omega_{\mu,n}\eta_{bc}\epsilon^{ab}e_m{}^c\\
&\quad+\frac{1}{2}\theta^\mu\theta^\nu\epsilon_{\mu\nu}\partial_m\left(e_{3,n}{}^a\right)-\frac{1}{2}\theta^\mu\theta^\nu\epsilon_{\mu\nu}\partial_n\left(e_{3,m}{}^a\right)\\
&\quad-\theta^\mu\theta^\nu\omega_{\mu,m}\eta_{bc}\epsilon^{ab}e_{\nu,n}{}^c+\theta^\mu\theta^\nu\omega_{\mu,n}\eta_{bc}\epsilon^{ab}e_{\nu,m}{}^c\\
&\quad-\frac{1}{2}\theta^\mu\theta^\nu\omega_m\epsilon_{\mu\nu}\eta_{bc}\epsilon^{ab}e_{3,n}{}^c+\frac{1}{2}\theta^\mu\theta^\nu\omega_n\epsilon_{\mu\nu}\eta_{bc}\epsilon^{ab}e_{3,m}{}^c\\
&\quad-\frac{1}{2}\theta^\mu\theta^\nu\omega_{3,m}\epsilon_{\mu\nu}\eta_{bc}\epsilon^{ab}e_n{}^c+\frac{1}{2}\theta^\mu\theta^\nu\omega_{3,n}\epsilon_{\mu\nu}\eta_{bc}\epsilon^{ab}e_m{}^c
\end{aligned}\tag{5.48g}$$

Eingabe $T_{nm}{}^a$ *rechte Seite*:

$$2iE_m{}^\gamma E_n{}^\beta(\gamma^a)_\beta{}^\delta\epsilon_{\delta\gamma}$$

Ausgabe:

$$\begin{aligned}
&\frac{i}{2}(\gamma^a)_\alpha{}^\beta\epsilon_{\beta\gamma}\chi_m{}^\gamma\chi_n{}^\alpha-i\theta^\mu(\gamma^a)_\alpha{}^\beta\epsilon_{\beta\gamma}\chi_m{}^\gamma\chi_{\mu,n}{}^\alpha+i\theta^\mu(\gamma^a)_\alpha{}^\beta\epsilon_{\beta\gamma}\chi_n{}^\alpha\chi_{\mu,m}{}^\gamma\\
&\quad+2i\theta^\mu\theta^\nu(\gamma^a)_\alpha{}^\beta\epsilon_{\beta\gamma}\chi_{\mu,m}{}^\gamma\chi_{\nu,n}{}^\alpha\\
&\quad-\frac{i}{2}\theta^\mu\theta^\nu\epsilon_{\mu\nu}(\gamma^a)_\alpha{}^\beta\epsilon_{\beta\gamma}\chi_m{}^\gamma\chi_{3,n}{}^\alpha+\frac{i}{2}\theta^\mu\theta^\nu\epsilon_{\mu\nu}(\gamma^a)_\alpha{}^\beta\epsilon_{\beta\gamma}\chi_n{}^\alpha\chi_{3,m}{}^\gamma
\end{aligned}\tag{5.48h}$$

Eingabe $T_{n\mu}{}^\alpha$ *linke Seite*:

$$-\partial_\mu\left(E_n{}^\alpha\right)+\partial_n\left(E_\mu{}^\alpha\right)+E_\mu{}^\beta\Omega_n\frac{1}{2}(\gamma_5)_\beta{}^\alpha+E_n{}^\beta\Omega_\mu\frac{1}{2}(\gamma_5)_\beta{}^\alpha$$

Ausgabe:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\omega_n(\gamma_5)_\beta{}^\alpha\delta_\mu{}^\beta-\chi_{\mu,n}{}^\alpha+\theta^\nu\partial_n\left(\lambda_{\nu,\mu}{}^\alpha\right)+\theta^\nu\epsilon_{\mu\nu}\chi_{3,n}{}^\alpha\\
&\quad+\frac{1}{2}\theta^\nu\omega_n(\gamma_5)_\beta{}^\alpha\lambda_{\nu,\mu}{}^\beta+\frac{1}{2}\theta^\nu\omega_{\nu,n}(\gamma_5)_\beta{}^\alpha\delta_\mu{}^\beta-\frac{1}{4}\theta^\nu\phi_{\nu,\mu}(\gamma_5)_\beta{}^\alpha\chi_n{}^\beta\\
&\quad-\frac{1}{2}\theta^\nu\theta^\kappa\epsilon_{\nu\kappa}\partial_n\left(\lambda_{3,\mu}{}^\alpha\right)-\frac{1}{2}\theta^\nu\theta^\kappa\omega_{\nu,n}(\gamma_5)_\beta{}^\alpha\lambda_{\kappa,\mu}{}^\beta-\frac{1}{2}\theta^\nu\theta^\kappa\phi_{\nu,\mu}(\gamma_5)_\beta{}^\alpha\chi_{\kappa,n}{}^\beta\\
&-\frac{1}{4}\theta^\nu\theta^\kappa\omega_n\epsilon_{\nu\kappa}(\gamma_5)_\beta{}^\alpha\lambda_{3,\mu}{}^\beta-\frac{1}{4}\theta^\nu\theta^\kappa\omega_{3,n}\epsilon_{\nu\kappa}(\gamma_5)_\beta{}^\alpha\delta_\mu{}^\beta+\frac{1}{8}\theta^\nu\theta^\kappa\phi_{3,\mu}\epsilon_{\nu\kappa}(\gamma_5)_\beta{}^\alpha\chi_n{}^\beta
\end{aligned}\tag{5.48i}$$

Eingabe $T_{n\mu}{}^\alpha$ *rechte Seite*:

$$\frac{1}{4}\left(E_n{}^cE_\mu{}^\beta-E_\mu{}^cE_n{}^\beta\right)\eta_{cd}(\gamma^d)_\beta{}^\alpha S-\frac{i}{4}E_n{}^bE_\mu{}^c\epsilon_{bc}\epsilon^{\alpha\gamma}(\gamma_5)_\gamma{}^\beta\mathcal{D}_\beta S$$

Ausgabe:

$$
\begin{aligned}
&A\frac{1}{4}\eta_{ab}(\gamma^a)_\beta{}^\alpha\delta_\mu{}^\beta e_n{}^b - A\frac{1}{8}\theta^\nu\eta_{ab}(\gamma^a)_\beta{}^\alpha\chi_n{}^\beta\kappa_{\nu,\mu}{}^b + A\frac{1}{4}\theta^\nu\eta_{ab}(\gamma^a)_\beta{}^\alpha\delta_\mu{}^\beta e_{\nu,n}{}^b\\
&+ A\frac{1}{4}\theta^\nu\eta_{ab}(\gamma^a)_\beta{}^\alpha e_n{}^b\lambda_{\nu,\mu}{}^\beta + \frac{1}{4}\theta^\nu\eta_{ab}(\gamma^a)_\beta{}^\alpha\psi_\nu\delta_\mu{}^\beta e_n{}^b\\
&- \frac{i}{4}\theta^\nu\eta_{ab}\eta_{cd}(\gamma_5)_\beta{}^\gamma\epsilon^{\alpha\beta}\tilde{\lambda}_\gamma{}^\kappa\epsilon^{ac}\psi_\kappa e_n{}^b\kappa_{\nu,\mu}{}^d\\
&- \frac{i}{4}\partial_m(A)\theta^\nu\eta_{ab}\eta_{cd}(\gamma_5)_\beta{}^\gamma\epsilon^{\alpha\beta}\tilde{\chi}_\gamma{}^m\epsilon^{ac}e_n{}^b\kappa_{\nu,\mu}{}^d\\
&+ A\frac{1}{4}\theta^\nu\theta^\kappa\eta_{ab}(\gamma^a)_\beta{}^\alpha\chi_{\nu,n}{}^\beta\kappa_{\kappa,\mu}{}^b - A\frac{1}{4}\theta^\nu\theta^\kappa\eta_{ab}(\gamma^a)_\beta{}^\alpha e_{\nu,n}{}^b\lambda_{\kappa,\mu}{}^\beta\\
&+ \frac{1}{8}\theta^\nu\theta^\kappa\eta_{ab}(\gamma^a)_\beta{}^\alpha\psi_\nu\chi_n{}^\beta\kappa_{\kappa,\mu}{}^b - \frac{1}{4}\theta^\nu\theta^\kappa\eta_{ab}(\gamma^a)_\beta{}^\alpha\psi_\nu\delta_\mu{}^\beta e_{\kappa,n}{}^b\\
&- \frac{1}{4}\theta^\nu\theta^\kappa\eta_{ab}(\gamma^a)_\beta{}^\alpha\psi_\nu e_n{}^b\lambda_{\kappa,\mu}{}^\beta - A\frac{1}{16}\theta^\nu\theta^\kappa\epsilon_{\nu\kappa}\eta_{ab}(\gamma^a)_\beta{}^\alpha\chi_n{}^\beta\kappa_{3,\mu}{}^b\\
&- A\frac{1}{8}\theta^\nu\theta^\kappa\epsilon_{\nu\kappa}\eta_{ab}(\gamma^a)_\beta{}^\alpha\delta_\mu{}^\beta e_{3,n}{}^b - A\frac{1}{8}\theta^\nu\theta^\kappa\epsilon_{\nu\kappa}\eta_{ab}(\gamma^a)_\beta{}^\alpha e_n{}^b\lambda_{3,\mu}{}^\beta\\
&- \frac{1}{8}\theta^\nu\theta^\kappa\epsilon_{\nu\kappa}\eta_{ab}(\gamma^a)_\beta{}^\alpha s_3\delta_\mu{}^\beta e_n{}^b - \frac{i}{4}\theta^\nu\theta^\kappa\eta_{ab}\eta_{cd}(\gamma_5)_\beta{}^\gamma\epsilon^{\alpha\beta}\tilde{\chi}_\gamma{}^m\epsilon^{ac}\partial_m(\psi_\nu)e_n{}^b\kappa_{\kappa,\mu}{}^d\\
&- \frac{i}{4}\theta^\nu\theta^\kappa\eta_{ab}\eta_{cd}(\gamma_5)_\beta{}^\gamma\epsilon^{\alpha\beta}\tilde{\lambda}_\gamma{}^\lambda\epsilon^{ac}\psi_\lambda e_{\nu,n}{}^b\kappa_{\kappa,\mu}{}^d\\
&+ \frac{i}{4}\theta^\nu\theta^\kappa\eta_{ab}\eta_{cd}(\gamma_5)_\beta{}^\gamma\epsilon^{\alpha\beta}\tilde{\lambda}_{\nu,\gamma}{}^\lambda\epsilon^{ac}\psi_\lambda e_n{}^b\kappa_{\kappa,\mu}{}^d\\
&- \frac{i}{4}\partial_m(A)\theta^\nu\theta^\kappa\eta_{ab}\eta_{cd}(\gamma_5)_\beta{}^\gamma\epsilon^{\alpha\beta}\tilde{\chi}_\gamma{}^m\epsilon^{ac}e_{\nu,n}{}^b\kappa_{\kappa,\mu}{}^d\\
&+ \frac{i}{4}\partial_m(A)\theta^\nu\theta^\kappa\eta_{ab}\eta_{cd}(\gamma_5)_\beta{}^\gamma\epsilon^{\alpha\beta}\tilde{\chi}_{\nu,\gamma}{}^m\epsilon^{ac}e_n{}^b\kappa_{\kappa,\mu}{}^d\\
&- \frac{i}{8}\theta^\nu\theta^\kappa\epsilon_{\nu\kappa}\eta_{ab}\eta_{cd}(\gamma_5)_\beta{}^\gamma\epsilon^{\alpha\beta}\tilde{\lambda}_\gamma{}^\lambda\epsilon^{ac}\psi_\lambda e_n{}^b\kappa_{3,\mu}{}^d\\
&+ \frac{i}{4}\theta^\nu\theta^\kappa\epsilon_{\nu\lambda}\eta_{ab}\eta_{cd}(\gamma_5)_\beta{}^\gamma\epsilon^{\alpha\beta}\tilde{\lambda}_\gamma{}^\lambda\epsilon^{ac}s_3 e_n{}^b\kappa_{\kappa,\mu}{}^d\\
&- \frac{i}{8}\partial_m(A)\theta^\nu\theta^\kappa\epsilon_{\nu\kappa}\eta_{ab}\eta_{cd}(\gamma_5)_\beta{}^\gamma\epsilon^{\alpha\beta}\tilde{\chi}_\gamma{}^m\epsilon^{ac}e_n{}^b\kappa_{3,\mu}{}^d
\end{aligned}
\tag{5.48j}
$$

Diese langen und nicht vereinfachten Terme sind die Grundlage für die händisch durchgeführten Berechnungen der nächsten Abschnitte.

5.5.5 Die θ^1-Terme der Supertorsion

Im Folgenden bedeuten Ausdrücke wie $\partial_\lambda T_{\nu\mu}{}^a|\,\epsilon^{\mu\lambda}$, daß man das oben angegebene Ergebnis der Computerberechnung für „$T_{\nu\mu}{}^a$ *linke Seite*“ gleich dem Ergebnis für „$T_{\nu\mu}{}^a$ *rechte Seite*“ setzt und danach die partielle Ableitung ∂_λ, die Projektion $|_{\theta=0}$ und die Kontraktion mit $\epsilon^{\mu\lambda}$ durchführt. Besonders wichtig ist die Reihenfolge in der man die Gleichungen des vorigen Abschnittes auswertet. Diese, die durchzuführenden Rechnungen und die Ergebnisse lauten:

$\partial_\lambda T_{\nu\mu}{}^a|\,\epsilon^{\mu\lambda}$, `Dill`-Ausgaben (5.48a) und (5.48b):

$$\Longrightarrow\ \frac{1}{2}\partial_\lambda\partial^\lambda E_\nu{}^a| = 0 \tag{5.49a}$$

$\partial_\lambda T_{n\mu}{}^a|\,\epsilon^{\mu\lambda}$, `Dill`-Ausgaben (5.48c) und (5.48d):

$$\Longrightarrow\ \frac{1}{2}\partial_\lambda\partial^\lambda E_n{}^a| = \frac{i}{2}e_n{}^a A \tag{5.49b}$$

$\partial_\lambda T_{n\mu}{}^a|\,\epsilon_a{}^b e_b{}^n$, `Dill`-Ausgaben (5.48c) und (5.48d):

$$\Longrightarrow\ \partial_\lambda\Omega_\mu| = -\frac{i}{2}\,\delta_\mu{}^\alpha\delta_\lambda{}^\beta(\gamma_5)_{\beta\alpha}A \tag{5.49c}$$

$\partial_\lambda T_{\nu\mu}{}^\alpha|\,\epsilon^{\mu\lambda}$, `Dill`-Ausgaben (5.48e) und (5.48f):

$$\Longrightarrow\ \frac{1}{2}\partial_\lambda\partial^\lambda E_\nu{}^\alpha = -\frac{i}{4}\delta_\nu{}^\alpha A \tag{5.49d}$$

$\partial_\lambda T_{nm}{}^a|\,\epsilon_a{}^b e_b{}^m$, `Dill`-Ausgaben (5.48g) und (5.48h):

Die Berechnung dieser Gleichung ist etwas aufwendiger als die vorigen Rechnungen. Eine direkte Rechnung liefert den Ausdruck

$$\begin{aligned}\partial_\lambda\Omega_n| = -\frac{i}{4}\,\delta_\lambda{}^\beta(\gamma_5)_\beta{}^\alpha\chi_{n\alpha}\,A - \frac{i}{4}\,e_n{}^c\epsilon_c{}^d e_d{}^m\,\delta_\lambda{}^\alpha\chi_{m\alpha}\,A \\ + i\,\delta_\lambda{}^\beta(\gamma^a\gamma_5)_\beta{}^\alpha e_a{}^m\,\left(\hat{\mathfrak{D}}_n\chi_{m\alpha} - \hat{\mathfrak{D}}_m\chi_{n\alpha}\right)\,,\end{aligned}$$

wobei die kovariante Ableitung im x-Raum, $\hat{\mathfrak{D}}_m$, durch (5.46) gegeben ist. Die beiden Terme mit dem Hilfsfeld A können zusammengefaßt werden, und mit Hilfe von ψ_ν (siehe (5.45f)) erhält man das Ergebnis

$$\Longrightarrow\ \partial_\lambda\Omega_n| = -\frac{i}{2}\,\delta_\lambda{}^\beta(\gamma_5)_\beta{}^\alpha\chi_{n\alpha}\,A - \frac{1}{2}\,\delta_\lambda{}^\beta(\gamma_5\gamma^a)_\beta{}^\alpha\delta_\alpha{}^\nu\psi_\nu\,e_{an}\,. \tag{5.49e}$$

$\partial_\lambda T_{n\mu}{}^\alpha|\,\epsilon^{\lambda\nu}$, `Dill`-Ausgaben (5.48i) und (5.48j):

$$\Longrightarrow\ \frac{1}{2}\partial_\lambda\partial^\lambda E_n{}^\alpha| = -\frac{3i}{8}\chi_n{}^\alpha A - \frac{1}{4}(\gamma^a)^{\alpha\beta}\delta_\beta{}^\nu\psi_\nu\,e_{an} \tag{5.49f}$$

5.5.6 Die θ^2-Terme der Supertorsion

$\frac{1}{2}\partial_\lambda\partial^\lambda T_{nm}{}^a|\,\epsilon_a{}^b e_b{}^n$, `Dill`-Ausgaben (5.48g) und (5.48h):

Eine direkte und längere Rechnung führt zur Gleichung

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_\lambda\partial^\lambda\Omega_m| = \frac{i}{2}e_m{}^a\epsilon_a{}^b e_b{}^n\partial_n A \\ + \frac{i}{4}\psi^\nu\delta_\nu{}^\beta(\gamma_5\gamma^a\gamma^b)_\beta{}^\alpha\,e_{am}e_b{}^n\,\chi_{n\alpha} - \frac{i}{2}\psi^\nu\delta_\nu{}^\beta(\gamma_5)_\beta{}^\alpha\chi_{m\alpha}\,,\end{aligned}$$

welche sich mit Hilfe der Beziehung $\gamma^a\gamma^b = \eta^{ab}1 - \epsilon^{ab}\gamma_5$ (siehe S. 6) umschreiben läßt zum Ergebnis

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\partial_\lambda\partial^\lambda\Omega_m| = \frac{i}{2}e_m{}^a\epsilon_a{}^b e_b{}^n\partial_n A - \frac{i}{4}\psi^\nu\delta_\nu{}^\beta(\gamma_5\gamma^b\gamma^a)_\beta{}^\alpha\, e_{am}e_b{}^n\,\chi_{n\alpha}\,. \tag{5.50a}$$

$\frac{1}{2}\partial_\lambda\partial^\lambda T_{n\mu}{}^a|\,\epsilon_a{}^b e_b{}^n$, `Dill`-Ausgaben (5.48c) und (5.48d):

Aus der letzten Gleichung für die Supertorsion, die mit Hilfe des Computerprogrammes `Dill` berechnet wurde, erhält man schließlich

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\partial_\lambda\partial^\lambda\Omega_\mu| = 0\,. \tag{5.50b}$$

5.5.7 Der θ^0-Term der Superkrümmung

Für das noch ausstehende Komponentenfeld $\frac{1}{2}\,\partial_\lambda\partial^\lambda S|$ sind die θ-unabhängigen Terme von (5.41) und (5.22),

$$\begin{aligned} F_{ab}| &= 2\,E_b{}^N|\,E_a{}^M|\,(\partial_{[M}\Omega_{N]})| \quad \text{und} \\ F_{ab}| &= \frac{i}{4}\epsilon_{ab}\mathcal{D}_\alpha\mathcal{D}^\alpha S| - \frac{1}{4}\epsilon_{ab}A\,, \end{aligned}$$

auszuwerten. Dies ist leicht händisch und ohne Hilfe des Computers möglich. Die angegebene Kontraktion führt direkt zum Ergebnis.

$F_{ab}|\,\epsilon^{ba}$:

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \frac{1}{2}\,\partial_\lambda\partial^\lambda S| = 2i\,\epsilon^{ab}e_a{}^m e_b{}^n\,\partial_m\omega_n - \frac{i}{2}\,\chi_n{}^\beta(\gamma^a)_\beta{}^\alpha\delta_\alpha{}^\nu\psi_\nu\,e_a{}^n \\ - \frac{1}{4}\,\epsilon^{ab}e_a{}^m e_b{}^n\,\chi_m{}^\beta(\gamma_5)_\beta{}^\alpha\chi_{n\alpha}\,A - \frac{i}{2}\,A^2 \end{aligned} \tag{5.51}$$

5.5.8 Zusammenfassung der Lösungen

Durch die an die Supertorsion gestellten Zwangsbedingungen (5.10), (5.12) und deren Konsequenzen (5.15), (5.17), (5.20) sowie (5.18), (5.21) und (5.22), die sich aus den Bianchi-Identitäten (5.14) ergaben, und durch die gewählten Eichungen des Supervielbeines, (5.27a), (5.27b), (5.29a) und (5.29b), sowie der Superkonnexion, (5.32a) und (5.32b), hat sich die Anzahl der unabhängigen Felder auf drei reduziert. Alle anderen Größen sind somit vom Vierbein $e_m{}^a$, vom Rarita-Schwinger-Feld $\frac{1}{2}\chi_m{}^\alpha$ und vom Hilfsfeld A abhängig.

Damit die Formeln der Ergebnisse kürzer werden führt man die Abkürzungen

$$\begin{aligned} (\gamma^a)_\lambda{}^\alpha &:= \delta_\lambda{}^\beta(\gamma^a)_\beta{}^\alpha\,, \\ (\gamma^a)_{\lambda\kappa} &:= \delta_\kappa{}^\alpha\delta_\lambda{}^\beta(\gamma^a)_{\beta\alpha}\,, \\ (\gamma^m)_\beta{}^\alpha &:= (\gamma^a)_\beta{}^\alpha e_a{}^m\,, \\ \psi_\alpha &:= \delta_\alpha{}^\kappa\psi_\kappa \end{aligned} \tag{5.52a}$$

und

$$\epsilon^{mn} := \epsilon^{ab} e_b{}^n e_a{}^m \tag{5.52b}$$

ein.

Für das Supervielbein $E_M{}^A$ erhält man die Entwicklung

$$E_m{}^a = e_m{}^a + i\theta^\lambda (\gamma^a)_\lambda{}^\gamma \chi_{m\gamma} + \frac{i}{4}\theta^\lambda\theta_\lambda e_n{}^a A\,, \tag{5.53a}$$

$$\begin{aligned} E_m{}^\alpha = \frac{1}{2}\chi_m{}^\alpha + \frac{1}{2}\theta^\lambda(\gamma_5)_\lambda{}^\alpha\omega_m - \frac{1}{4}\theta^\lambda(\gamma_m)_\lambda{}^\alpha A \\ - \frac{3i}{16}\theta^\lambda\theta_\lambda\chi_m{}^\alpha A - \frac{1}{8}\theta^\lambda\theta_\lambda(\gamma_m)^{\alpha\beta}\psi_\beta\,, \end{aligned} \tag{5.53b}$$

$$E_\mu{}^a = i\theta^\lambda(\gamma^a)_{\lambda\mu}\,, \quad \text{und} \tag{5.53c}$$

$$E_\mu{}^\alpha = \delta_\mu{}^\alpha - \frac{i}{8}\theta^\lambda\theta_\lambda\delta_\mu{}^\alpha A\,. \tag{5.53d}$$

Die Superfeldentwicklung der Superkonnexion Ω_M lautet

$$\begin{aligned} \Omega_m = \omega_m - \frac{i}{2}\theta^\lambda(\gamma_5)_\lambda{}^\alpha\chi_{m\alpha}\, A - \frac{1}{2}\theta^\lambda(\gamma_5\gamma_m)_\lambda{}^\alpha\psi_\alpha \\ + \frac{i}{4}\theta^\lambda\theta_\lambda\epsilon_m{}^n\partial_n A - \frac{i}{8}\theta^\lambda\theta_\lambda\psi^\nu(\gamma_5\gamma^n\gamma_m)_\nu{}^\alpha\chi_{n\alpha}\,, \quad \text{und} \end{aligned} \tag{5.54a}$$

$$\Omega_\mu = -\frac{i}{2}\theta^\lambda(\gamma_5)_{\lambda\mu}A\,, \tag{5.54b}$$

wobei ω_m die Konnexion im x-Raum bezeichnet,

$$\omega_m = -\epsilon^{nl}(\partial_n e_l{}^a)e_{am} + \frac{i}{2}\chi_m{}^\beta(\gamma_5\gamma^n)_\beta{}^\alpha\chi_{n\alpha}\,, \tag{5.55}$$

und die Größe ψ_ν durch

$$\psi_\nu = -2i\,(\gamma_5)_\nu{}^\beta\epsilon^{mn}\hat{\mathfrak{D}}_m\chi_{n\beta} - \frac{i}{2}(\gamma^n)_\nu{}^\beta\chi_{n\beta}A \tag{5.56}$$

gegeben ist. $\hat{\mathfrak{D}}_n$ ist dabei die kovariante Ableitung des x-Raumes; für das Rarita-Schwinger-Feld lautet sie:

$$\hat{\mathfrak{D}}_m\chi_{n\alpha} = \partial_m\chi_{n\alpha} - \frac{1}{2}\,\omega_m(\gamma_5)_\alpha{}^\beta\chi_{n\beta}\,. \tag{5.57}$$

Unter Verwendung von (5.55) erhält für man die Torsionskomponenten im x-Raum (siehe Abschnitt 4.4),

$$t_{mn}{}^a = \partial_m e_n{}^a - \partial_n e_m{}^a + \left(\omega_m e_n{}^b - \omega_n e_m{}^b\right)\epsilon_b{}^a\,,$$

die Formel

$$t_{mn}{}^a = \frac{i}{2}\chi_m{}^\alpha(\gamma^a)_\alpha{}^\beta\chi_{n\beta}\,. \tag{5.58}$$

Die Komponenten der Supertorsion findet man aus (5.15), (5.17) und (5.20), jene der Superkrümmung aus (5.18), (5.21) und (5.22) durch Einsetzen der Entwicklung für S, gegeben durch

$$\begin{aligned} S = A + \theta^\lambda\psi_\lambda + i\theta^\lambda\theta_\lambda\epsilon^{mn}\partial_m\omega_n - \frac{i}{4}\theta^\lambda\theta_\lambda\chi_n{}^\beta(\gamma^n)_\beta{}^\alpha\psi_\alpha \\ - \frac{1}{8}\theta^\lambda\theta_\lambda\epsilon^{mn}\chi_m{}^\beta(\gamma_5)_\beta{}^\alpha\chi_{n\alpha}\,A - \frac{i}{4}\theta^\lambda\theta_\lambda A^2\,. \end{aligned} \tag{5.59}$$

Diese Lösungen unterscheiden sich in einigen Punkten von den Ergebnissen in [H]. Im zweiten Term von (5.55) ist die imaginäre Einheit i erforderlich, damit die x-Raum Konnexion $(\omega_n)^* = \omega_n$ reell wird, und in (5.56) ist ebenfalls im zweiten Term ein i notwendig, dieses Mal aber damit die Größe $(\psi_\nu)^* = -\psi_\nu$ imaginär wird. Weiters sind in den ersten beiden und im letzten der θ^2-Terme von (5.59) ebenfalls je ein i erforderlich, und im dritten θ^2-Term dieser Gleichung darf kein i stehen, dies macht das Superfeld $S^* = S$ reell. Neben diesen Realitätsbedingungen sind noch Abweichungen im letzten Term von (5.53b) festzustellen, dessen numerischer Faktor in [H]-(3.5) auf $\frac{1}{4}$ lautet, sowie in Gleichung (5.54a), in welcher, außer daß das Superfeld A einige Male versehentlich als Index geschrieben wurde, der θ^1-Term $-\frac{1}{2}\theta^\lambda(\gamma_5\gamma_m)_\lambda{}^\alpha\psi_\alpha$ fehlt, und der θ^2-Term $\frac{i}{4}\theta^\lambda\theta_\lambda\omega_m A$ zuviel ist. Überdies unterscheiden sich die beiden letzten Terme in [H]-(3.6) vom letzten, hier angegebenen Term.

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß die Superkoordinaten- und Superlorentztransformationen noch nicht vollständig eichfixiert sind, vielmehr bewirkt die vorhandene Resteichfreiheit ein Mischen der Felder $e_m{}^a$, $\frac{1}{2}\chi_m{}^a$ und A. Mehr dazu im nächsten Abschnitt.

5.6 Resteichfreiheit

Die Superkoordinaten- und Superlorentztransformationen sind infolge der Fixierung der Komponentenfelder (5.27a), (5.27b), (5.29a) und (5.29b) des Supervielbeines sowie der Komponentenfelder (5.32a) und (5.32b) der Superkonnexion stark eingeschränkt. Deshalb ist es notwendig Superkoordinaten- und Superlorentztransformationen gleichzeitig durchzuführen. Nur durch simultane Ausführung beider Transformationen kann man die Eichung aufrecht erhalten.

Die Transformationen von Vielbein und Konnexion unter infinitesimalen Superkoordinaten- und Superlorentztransformationen lauten

$$\delta E_M{}^A = \Xi^N\partial_N E_M{}^A + (\partial_M\Xi^N)E_N{}^A + E_M{}^B L\Lambda_B{}^A \tag{5.60}$$

und

$$\delta\Omega_M = \Xi^N \partial_N \Omega_M + (\partial_M \Xi^N)\Omega_N - \partial_M L\,, \tag{5.61}$$

mit den vorerst unbestimmten Transformationsfeldern Ξ^M und L. Aus den Gleichungen $\delta E_\mu{}^a| = 0$, $\delta E_\mu{}^\alpha| = 0$, $\delta\Omega_\mu| = 0$, $\epsilon^{\lambda\mu}(\partial_\lambda \delta E_\mu{}^a)| = 0$, $\epsilon^{\lambda\mu}(\partial_\lambda \delta E_\mu{}^\alpha)| = 0$ und $\epsilon^{\lambda\mu}(\partial_\lambda \delta\Omega_\mu)| = 0$, die ja die Erhaltung der Eichung bei kombinierten Superkoordinaten- und Superlorentztransformationen ausdrücken, bestimmt man die abhängigen Komponentenfelder der Transformationsfelder Ξ^m, Ξ^μ und L. Dazu werden die θ^0-Komponenten von Ξ und L gemäß

$$\xi^m := \Xi^m|\,, \tag{5.62}$$
$$\zeta^\mu := \Xi^\mu| \quad \text{und} \tag{5.63}$$
$$l := L| \tag{5.64}$$

benannt. Zum Multiplizieren der Superfelder wurde wieder das `Mathematica`-Programm `Dill`, siehe Anhang A und [L], beansprucht. Die Berechnungen des Programmes finden sich im folgenden Abschnitt.

5.6.1 Rechnungen mit `Dill`

Eingabe $\delta E_\mu{}^a$:

$$\partial_\mu(\Xi^n)E_n{}^a + \partial_\mu(\Xi^\nu)E_\nu{}^a + \Xi^n\partial_n(E_\mu{}^a) + \Xi^\nu\partial_\nu(E_\mu{}^a) + E_\mu{}^b L\epsilon_b{}^a$$

Ausgabe:

$$\begin{aligned}
\xi_{\mu,}{}^m e_m{}^a + \xi^\nu\kappa_{\nu,\mu}{}^a + \theta^\nu\xi^m\partial_m\left(\kappa_{\nu,\mu}{}^a\right) - \theta^\nu\xi_{\mu,}{}^m e_{\nu,m}{}^a + \theta^\nu\xi_{\mu,}{}^\kappa\kappa_{\nu,\kappa}{}^a + \theta^\nu\xi_{\nu,}{}^\kappa\kappa_{\kappa,\mu}{}^a \\
- \theta^\nu\epsilon_{\mu\nu}\xi_{3,}{}^m e_m{}^a - \theta^\nu\epsilon_{\nu\kappa}\xi^\kappa\kappa_{3,\mu}{}^a - \theta^\nu\eta_{bc}l\epsilon^{ab}\kappa_{\nu,\mu}{}^c \\
- \theta^\nu\theta^\kappa\xi_{\nu,}{}^m\partial_m\left(\kappa_{\kappa,\mu}{}^a\right) - \theta^\nu\theta^\kappa\epsilon_{\mu\nu}\xi_{3,}{}^m e_{\kappa,m}{}^a \\
+ \theta^\nu\theta^\kappa\epsilon_{\mu\nu}\xi_{3,}{}^\lambda\kappa_{\kappa,\lambda}{}^a - \frac{1}{2}\theta^\nu\theta^\kappa\epsilon_{\nu\kappa}\xi^m\partial_m\left(\kappa_{3,\mu}{}^a\right) \\
- \frac{1}{2}\theta^\nu\theta^\kappa\epsilon_{\nu\kappa}\xi_{\mu,}{}^m e_{3,m}{}^a - \frac{1}{2}\theta^\nu\theta^\kappa\epsilon_{\nu\kappa}\xi_{\mu,}{}^\lambda\kappa_{3,\lambda}{}^a \\
- \frac{1}{2}\theta^\nu\theta^\kappa\epsilon_{\nu\kappa}\xi_{3,}{}^\lambda\kappa_{\lambda,\mu}{}^a - \theta^\nu\theta^\kappa\epsilon_{\nu\lambda}\xi_{\kappa,}{}^\lambda\kappa_{3,\mu}{}^a \\
+ \theta^\nu\theta^\kappa\eta_{bc}l_\nu\epsilon^{ab}\kappa_{\kappa,\mu}{}^c + \frac{1}{2}\theta^\nu\theta^\kappa\epsilon_{\nu\kappa}\eta_{bc}l\epsilon^{ab}\kappa_{3,\mu}{}^c
\end{aligned} \tag{5.65a}$$

Eingabe $\delta E_\mu{}^\alpha$:

$$\partial_\mu(\Xi^n)E_n{}^\alpha + \partial_\mu(\Xi^\nu)E_\nu{}^\alpha + \Xi^n\partial_n(E_\mu{}^\alpha) + \Xi^\nu\partial_\nu(E_\mu{}^\alpha) + E_\mu{}^\beta L\frac{1}{2}(\gamma_5)_\beta{}^\alpha$$

Ausgabe:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\xi_{\mu,}{}^{m}\chi_{m}{}^{\alpha}+\xi^{\nu}\lambda_{\nu,\mu}{}^{\alpha}+\xi_{\mu,}{}^{\nu}\delta_{\nu}{}^{\alpha}+\frac{1}{2}(\gamma_5)_{\beta}{}^{\alpha}l\delta_{\mu}{}^{\beta}\\
&\quad+\theta^{\nu}\xi^{m}\partial_m\left(\lambda_{\nu,\mu}{}^{\alpha}\right)-\theta^{\nu}\xi_{\mu,}{}^{m}\chi_{\nu,m}{}^{\alpha}+\theta^{\nu}\xi_{\mu,}{}^{\kappa}\lambda_{\nu,\kappa}{}^{\alpha}+\theta^{\nu}\xi_{\nu,}{}^{\kappa}\lambda_{\kappa,\mu}{}^{\alpha}\\
&\quad-\frac{1}{2}\theta^{\nu}\epsilon_{\mu\nu}\xi_{3,}{}^{m}\chi_{m}{}^{\alpha}-\theta^{\nu}\epsilon_{\mu\nu}\xi_{3,}{}^{\kappa}\delta_{\kappa}{}^{\alpha}-\theta^{\nu}\epsilon_{\nu\kappa}\xi^{\kappa}\lambda_{3,\mu}{}^{\alpha}\\
&\quad+\frac{1}{2}\theta^{\nu}(\gamma_5)_{\beta}{}^{\alpha}l\lambda_{\nu,\mu}{}^{\beta}+\frac{1}{2}\theta^{\nu}(\gamma_5)_{\beta}{}^{\alpha}l_{\nu}\delta_{\mu}{}^{\beta}\\
&\quad-\theta^{\nu}\theta^{\kappa}\xi_{\nu,}{}^{m}\partial_m\left(\lambda_{\kappa,\mu}{}^{\alpha}\right)-\theta^{\nu}\theta^{\kappa}\epsilon_{\mu\nu}\xi_{3,}{}^{m}\chi_{\kappa,m}{}^{\alpha}\\
&\quad+\theta^{\nu}\theta^{\kappa}\epsilon_{\mu\nu}\xi_{3,}{}^{\lambda}\lambda_{\kappa,\lambda}{}^{\alpha}-\frac{1}{2}\theta^{\nu}\theta^{\kappa}\epsilon_{\nu\kappa}\xi^{m}\partial_m\left(\lambda_{3,\mu}{}^{\alpha}\right)\\
&\quad-\frac{1}{2}\theta^{\nu}\theta^{\kappa}\epsilon_{\nu\kappa}\xi_{\mu,}{}^{m}\chi_{3,m}{}^{\alpha}-\frac{1}{2}\theta^{\nu}\theta^{\kappa}\epsilon_{\nu\kappa}\xi_{\mu,}{}^{\lambda}\lambda_{3,\lambda}{}^{\alpha}\\
&\quad-\frac{1}{2}\theta^{\nu}\theta^{\kappa}\epsilon_{\nu\kappa}\xi_{3,}{}^{\lambda}\lambda_{\lambda,\mu}{}^{\alpha}-\theta^{\nu}\theta^{\kappa}\epsilon_{\nu\lambda}\xi_{\kappa,}{}^{\lambda}\lambda_{3,\mu}{}^{\alpha}\\
&\quad-\frac{1}{2}\theta^{\nu}\theta^{\kappa}(\gamma_5)_{\beta}{}^{\alpha}l_{\nu}\lambda_{\kappa,\mu}{}^{\beta}-\frac{1}{4}\theta^{\nu}\theta^{\kappa}\epsilon_{\nu\kappa}(\gamma_5)_{\beta}{}^{\alpha}l\lambda_{3,\mu}{}^{\beta}\\
&\quad-\frac{1}{4}\theta^{\nu}\theta^{\kappa}\epsilon_{\nu\kappa}(\gamma_5)_{\beta}{}^{\alpha}l_3\delta_{\mu}{}^{\beta}
\end{aligned}\tag{5.65b}$$

Eingabe $\delta\Omega_\mu$:

$$-\partial_\mu L+\partial_\mu\left(\Xi^n\right)\Omega_n+\partial_\mu\left(\Xi^\nu\right)\Omega_\nu+\Xi^n\partial_n\left(\Omega_\mu\right)+\Xi^\nu\partial_\nu\left(\Omega_\mu\right)$$

Ausgabe:

$$\begin{aligned}
&-l_\mu+\omega_m\xi_{\mu,}{}^{m}+\phi_{\nu,\mu}\xi^{\nu}+\theta^{\nu}\omega_{\nu,m}\xi_{\mu,}{}^{m}\\
&\quad+\theta^{\nu}\phi_{\kappa,\mu}\xi_{\nu,}{}^{\kappa}+\theta^{\nu}\phi_{\nu,\kappa}\xi_{\mu,}{}^{\kappa}+\theta^{\nu}\partial_m\left(\phi_{\nu,\mu}\right)\xi^{m}\\
&\quad+\theta^{\nu}\epsilon_{\mu\nu}l_3-\theta^{\nu}\omega_m\epsilon_{\mu\nu}\xi_{3,}{}^{m}+\theta^{\nu}\phi_{3,\mu}\epsilon_{\nu\kappa}\xi^{\kappa}\\
&\quad+\theta^{\nu}\theta^{\kappa}\partial_m\left(\phi_{\nu,\mu}\right)\xi_{\kappa,}{}^{m}+\theta^{\nu}\theta^{\kappa}\omega_{\nu,m}\epsilon_{\mu\kappa}\xi_{3,}{}^{m}-\frac{1}{2}\theta^{\nu}\theta^{\kappa}\omega_{3,m}\epsilon_{\nu\kappa}\xi_{\mu,}{}^{m}\\
&\quad-\frac{1}{2}\theta^{\nu}\theta^{\kappa}\phi_{\lambda,\mu}\epsilon_{\nu\kappa}\xi_{3,}{}^{\lambda}-\theta^{\nu}\theta^{\kappa}\phi_{\nu,\lambda}\epsilon_{\mu\kappa}\xi_{3,}{}^{\lambda}-\frac{1}{2}\theta^{\nu}\theta^{\kappa}\phi_{3,\lambda}\epsilon_{\nu\kappa}\xi_{\mu,}{}^{\lambda}\\
&\quad-\theta^{\nu}\theta^{\kappa}\phi_{3,\mu}\epsilon_{\nu\lambda}\xi_{\kappa,}{}^{\lambda}-\frac{1}{2}\theta^{\nu}\theta^{\kappa}\partial_m\left(\phi_{3,\mu}\right)\epsilon_{\nu\kappa}\xi^{m}
\end{aligned}\tag{5.65c}$$

Eingabe $\delta E_m{}^a$:

$$\partial_m\left(\Xi^n\right)E_n{}^a+\partial_m\left(\Xi^\nu\right)E_\nu{}^a+\Xi^n\partial_n\left(E_m{}^a\right)+\Xi^\nu\partial_\nu\left(E_m{}^a\right)+E_m{}^bL\epsilon_b{}^a$$

Ausgabe:

$$\begin{aligned}
&\partial_m\left(\xi^n\right) e_n{}^a+\xi^n \partial_n\left(e_m{}^a\right)+\xi^\mu e_{\mu, m}{}^a-\eta_{bc} l \epsilon^{ab} e_m{}^c \\
&\quad+\theta^\mu \partial_m\left(\xi^n\right) e_{\mu, n}{}^a+\theta^\mu \partial_m\left(\xi_{\mu,}{}^n\right) e_n{}^a-\theta^\mu \partial_m\left(\xi^\nu\right) \kappa_{\mu, \nu}{}^a \\
&\quad+\theta^\mu \xi^n \partial_n\left(e_{\mu, m}{}^a\right)+\theta^\mu \xi_{\mu,}{}^n \partial_n\left(e_m{}^a\right)+\theta^\mu \xi_{\mu,}{}^\nu e_{\nu, m}{}^a \\
&\quad-\theta^\mu \epsilon_{\mu\nu} \xi^\nu e_{3, m}{}^a-\theta^\mu \eta_{bc} l \epsilon^{ab} e_{\mu, m}{}^c-\theta^\mu \eta_{bc} l_\mu \epsilon^{ab} e_m{}^c \\
&\quad-\theta^\mu \theta^\nu \partial_m\left(\xi_{\mu,}{}^n\right) e_{\nu, n}{}^a+\theta^\mu \theta^\nu \partial_m\left(\xi_{\mu,}{}^\kappa\right) \kappa_{\nu, \kappa}{}^a \\
&\quad-\theta^\mu \theta^\nu \xi_{\mu,}{}^n \partial_n\left(e_{\nu, m}{}^a\right)-\theta^\mu \theta^\nu \epsilon_{\mu\kappa} \xi_{\nu,}{}^\kappa e_{3, m}{}^a \\
&\quad-\frac{1}{2} \theta^\mu \theta^\nu \epsilon_{\mu\nu} \partial_m\left(\xi^n\right) e_{3, n}{}^a-\frac{1}{2} \theta^\mu \theta^\nu \epsilon_{\mu\nu} \partial_m\left(\xi_{3,}{}^n\right) e_n{}^a \\
&\quad-\frac{1}{2} \theta^\mu \theta^\nu \epsilon_{\mu\nu} \partial_m\left(\xi^\kappa\right) \kappa_{3, \kappa}{}^a-\frac{1}{2} \theta^\mu \theta^\nu \epsilon_{\mu\nu} \xi^n \partial_n\left(e_{3, m}{}^a\right) \\
&\quad-\frac{1}{2} \theta^\mu \theta^\nu \epsilon_{\mu\nu} \xi_{3,}{}^n \partial_n\left(e_m{}^a\right)-\frac{1}{2} \theta^\mu \theta^\nu \epsilon_{\mu\nu} \xi_{3,}{}^\kappa e_{\kappa, m}{}^a \\
&\quad+\theta^\mu \theta^\nu \eta_{bc} l_\mu \epsilon^{ab} e_{\nu, m}{}^c+\frac{1}{2} \theta^\mu \theta^\nu \epsilon_{\mu\nu} \eta_{bc} l \epsilon^{ab} e_{3, m}{}^c+\frac{1}{2} \theta^\mu \theta^\nu \epsilon_{\mu\nu} \eta_{bc} l_3 \epsilon^{ab} e_m{}^c
\end{aligned} \tag{5.65d}$$

Eingabe $\delta E_m{}^\alpha$:

$$\partial_m\left(\Xi^n\right) E_n{}^\alpha+\partial_m\left(\Xi^\nu\right) E_\nu{}^\alpha+\Xi^n \partial_n\left(E_m{}^\alpha\right)+\Xi^\nu \partial_\nu\left(E_m{}^\alpha\right)+E_m{}^\beta L \frac{1}{2}\left(\gamma_5\right)_\beta{}^\alpha$$

Ausgabe:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \partial_m\left(\xi^n\right) \chi_n{}^\alpha+\partial_m\left(\xi^\mu\right) \delta_\mu{}^\alpha+\frac{1}{2} \xi^n \partial_n\left(\chi_m{}^\alpha\right)+\xi^\mu \chi_{\mu, m}{}^\alpha+\frac{1}{4}\left(\gamma_5\right)_\beta{}^\alpha l \chi_m{}^\beta \\
&\quad+\theta^\mu \partial_m\left(\xi^n\right) \chi_{\mu, n}{}^\alpha+\frac{1}{2} \theta^\mu \partial_m\left(\xi_{\mu,}{}^n\right) \chi_n{}^\alpha-\theta^\mu \partial_m\left(\xi^\nu\right) \lambda_{\mu, \nu}{}^\alpha+\theta^\mu \partial_m\left(\xi_{\mu,}{}^\nu\right) \delta_\nu{}^\alpha \\
&\quad+\theta^\mu \xi^n \partial_n\left(\chi_{\mu, m}{}^\alpha\right)+\frac{1}{2} \theta^\mu \xi_{\mu,}{}^n \partial_n\left(\chi_m{}^\alpha\right)+\theta^\mu \xi_{\mu,}{}^\nu \chi_{\nu, m}{}^\alpha \\
&\quad-\theta^\mu \epsilon_{\mu\nu} \xi^\nu \chi_{3, m}{}^\alpha+\frac{1}{2} \theta^\mu\left(\gamma_5\right)_\beta{}^\alpha l \chi_{\mu, m}{}^\beta+\frac{1}{4} \theta^\mu\left(\gamma_5\right)_\beta{}^\alpha l_\mu \chi_m{}^\beta \\
&\quad-\theta^\mu \theta^\nu \partial_m\left(\xi_{\mu,}{}^n\right) \chi_{\nu, n}{}^\alpha+\theta^\mu \theta^\nu \partial_m\left(\xi_{\mu,}{}^\kappa\right) \lambda_{\nu, \kappa}{}^\alpha-\theta^\mu \theta^\nu \xi_{\mu,}{}^n \partial_n\left(\chi_{\nu, m}{}^\alpha\right) \\
&\quad-\theta^\mu \theta^\nu \epsilon_{\mu\kappa} \xi_{\nu,}{}^\kappa \chi_{3, m}{}^\alpha-\frac{1}{2} \theta^\mu \theta^\nu \epsilon_{\mu\nu} \partial_m\left(\xi^n\right) \chi_{3, n}{}^\alpha-\frac{1}{4} \theta^\mu \theta^\nu \epsilon_{\mu\nu} \partial_m\left(\xi_{3,}{}^n\right) \chi_n{}^\alpha \\
&\quad-\frac{1}{2} \theta^\mu \theta^\nu \epsilon_{\mu\nu} \partial_m\left(\xi^\kappa\right) \lambda_{3, \kappa}{}^\alpha-\frac{1}{2} \theta^\mu \theta^\nu \epsilon_{\mu\nu} \partial_m\left(\xi_{3,}{}^\kappa\right) \delta_\kappa{}^\alpha-\frac{1}{2} \theta^\mu \theta^\nu \epsilon_{\mu\nu} \xi^n \partial_n\left(\chi_{3, m}{}^\alpha\right) \\
&\quad-\frac{1}{4} \theta^\mu \theta^\nu \epsilon_{\mu\nu} \xi_{3,}{}^n \partial_n\left(\chi_m{}^\alpha\right)-\frac{1}{2} \theta^\mu \theta^\nu \epsilon_{\mu\nu} \xi_{3,}{}^\kappa \chi_{\kappa, m}{}^\alpha-\frac{1}{2} \theta^\mu \theta^\nu\left(\gamma_5\right)_\beta{}^\alpha l_\mu \chi_{\nu, m}{}^\beta \\
&\quad-\frac{1}{4} \theta^\mu \theta^\nu \epsilon_{\mu\nu}\left(\gamma_5\right)_\beta{}^\alpha l \chi_{3, m}{}^\beta-\frac{1}{8} \theta^\mu \theta^\nu \epsilon_{\mu\nu}\left(\gamma_5\right)_\beta{}^\alpha l_3 \chi_m{}^\beta
\end{aligned} \tag{5.65e}$$

5.6.2 Komponentenfelder der Supertransformationen

Die Computerberechnungen des vorigen Abschnittes mußten weiter ausgewertet werden, was auf direktem Weg geschah. Die zu betrachtenden Terme und die Ergebnisse sind nun folgend aufgelistet.

Aus $\delta E_\mu{}^a| = 0$, `Dill`-Ausgabe (5.65a),

$$\Longrightarrow \quad \partial_\lambda \Xi^m| = i\, \delta_\mu{}^\alpha (\gamma^a)_\alpha{}^\beta \delta_\beta{}^\nu \zeta_\nu\, e_a{}^m \,. \tag{5.66a}$$

Aus $\delta E_\mu{}^\alpha| = 0$, `Dill`-Ausgabe (5.65b),

$$\Longrightarrow \quad \partial_\lambda \Xi^\mu| = -\frac{i}{2}\, \delta_\lambda{}^\alpha (\gamma^a)_\alpha{}^\beta \delta_\beta{}^\nu \zeta_\nu\, e_a{}^m \chi_m{}^\gamma \delta_\gamma{}^\mu - \frac{1}{2}\, \delta_\lambda{}^\alpha (\gamma_5)_\alpha{}^\beta \delta_\beta{}^\mu\, l \,. \tag{5.66b}$$

Aus $\delta\Omega_\mu| = 0$, `Dill`-Ausgabe (5.65c),

$$\Longrightarrow \quad \partial_\lambda L| = i\, \delta_\lambda{}^\alpha (\gamma^a)_\alpha{}^\beta \delta_\beta{}^\nu \zeta_\nu\, e_a{}^m \omega_m + \frac{i}{2}\, \delta_\lambda{}^\alpha (\gamma_5)_\alpha{}^\beta \delta_\beta{}^\nu \zeta_\nu\, A \,. \tag{5.66c}$$

Aus $\epsilon^{\lambda\mu}(\partial_\lambda \delta E_\mu{}^a)| = 0$, `Dill`-Ausgabe (5.65a),

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\partial_\lambda \partial^\lambda \Xi^m| = \frac{1}{2}\, \zeta^\mu \delta_\mu{}^\alpha (\gamma^a\gamma^b)_\alpha{}^\beta e_a{}^n \chi_{n\beta}\, e_b{}^m \,. \tag{5.66d}$$

Aus $\epsilon^{\lambda\mu}(\partial_\lambda \delta E_\mu{}^\alpha)| = 0$, `Dill`-Ausgabe (5.65b),

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\partial_\lambda \partial^\lambda \Xi^\mu| = &-\frac{i}{2}\, \epsilon^{\mu\nu} \delta_\nu{}^\alpha (\gamma_5\gamma^a)_\alpha{}^\beta \delta_\beta{}^\kappa \zeta_\kappa\, e_a{}^m \omega_m \\ &- \frac{1}{4}\, \zeta^\nu \delta_\nu{}^\alpha (\gamma^a\gamma^b)_\alpha{}^\beta e_a{}^n \chi_{n\beta}\, e_b{}^m \chi_m{}^\gamma \delta_\gamma{}^\mu \,. \end{aligned} \tag{5.66e}$$

Aus $\epsilon^{\lambda\mu}(\partial_\lambda \delta\Omega_\mu)| = 0$, `Dill`-Ausgabe (5.65c),

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\partial_\lambda \partial^\lambda L| = &-\frac{1}{4}\, \zeta^\nu \delta_\nu{}^\alpha (\gamma_5\gamma^a)_\alpha{}^\beta e_a{}^m \chi_{m\beta}\, A + \frac{i}{2}\, \zeta^\nu \delta_\nu{}^\alpha (\gamma_5)_\alpha{}^\beta \delta_\beta{}^\kappa \psi_\kappa \\ &+ \frac{1}{2}\, \zeta^\nu \delta_\nu{}^\alpha (\gamma^a\gamma^b)_\alpha{}^\beta e_a{}^n \chi_{n\beta}\, e_b{}^m \omega_m \,. \end{aligned} \tag{5.66f}$$

5.6.3 Eichtransformationen der physikalischen Felder

Die Transformationen des Vielbeines $e_m{}^a$ und des Rarita-Schwinger Feldes $\chi_m{}^\alpha$ erhält man aus den θ-unabhängigen Termen der Ausgaben (5.65d) und (5.65e). Die Transformation des Hilfsfeldes A resultiert aus der Transformation für das Superfeld S.

Die Variation $\delta e_m{}^a$ des Vielbeines ist per Definition durch

$$\delta e_m{}^a = \delta E_m{}^a| \tag{5.67}$$

gegeben. Somit ergibt sich mit Ausgabe (5.65d)

$$\begin{aligned} \delta e_m{}^a = \xi^n\, &\partial_n e_m{}^a + (\partial_m \xi^n)\, e_n{}^a \\ &+ i\, \zeta^\mu \delta_\mu{}^\alpha (\gamma^a)_\alpha{}^\beta \chi_{m\beta} \\ &+ e_m{}^b\, l \epsilon_b{}^a \,. \end{aligned} \tag{5.68}$$

Mittels der Ausgabe (5.65e) erhält man auf gleiche Weise die Transformation $\delta(\frac{1}{2}\chi_m{}^\alpha) = \delta E_m{}^\alpha|$ des Rarita-Schwinger-Feldes,

$$\begin{aligned}\delta(\frac{1}{2}\chi_m{}^\alpha) = \xi^n\,\partial_n(\frac{1}{2}\chi_m{}^\alpha) + (\partial_m\xi^n)\,\frac{1}{2}\chi_n{}^\alpha \\ + \epsilon^{\alpha\beta}\,\hat{\mathfrak{D}}_m(\delta_\beta{}^\mu\zeta_\mu) - \frac{1}{4}\zeta^\mu\delta_\mu{}^\beta(\gamma^a)_\beta{}^\alpha\,e_{am}A \\ + \frac{1}{2}\chi_n{}^\beta\,l\frac{1}{2}(\gamma_5)_\beta{}^\alpha\,,\end{aligned} \tag{5.69}$$

wobei die kovariante Ableitung im x-Raum durch

$$\hat{\mathfrak{D}}_m(\delta_\beta{}^\mu\zeta_\mu) = \partial_m(\delta_\beta{}^\mu\zeta_\mu) - \frac{1}{2}\,\omega_m\,(\gamma_5)_\beta{}^\gamma(\delta_\gamma{}^\mu\zeta_\mu) \tag{5.70}$$

gegeben ist.

Schließlich findet man die Transformation $\delta A = \delta S|$ aus der Transformation

$$\delta S| = \Xi^n|\,\partial_n S| + \Xi^\nu|\,(\partial_\nu S)|$$

des Superfeldes S, womit folgt:

$$\delta A = \xi^n\partial_n A + \zeta^\nu\,\psi_\nu\,. \tag{5.71}$$

5.6.4 Zusammenfassung der Eichtransformationen

Die Entwicklungen der Supertransformationsparameter sind mit Benützung der Abkürzungen (5.52a) und (5.52b)

$$\Xi^m = \xi^m + i\,\theta^\lambda(\gamma^m)_\lambda{}^\beta\zeta_\beta + \frac{1}{4}\theta^\lambda\theta_\lambda\,\zeta^\mu(\gamma^n\gamma^m)_\mu{}^\beta\chi_{n\beta}\,, \tag{5.72a}$$

$$\begin{aligned}\Xi^\mu = \zeta^\mu - \frac{i}{2}\theta^\lambda(\gamma^m)_\lambda{}^\beta\zeta_\beta\,\chi_m{}^\mu - \frac{1}{2}\theta^\lambda(\gamma_5)_\lambda{}^\mu\,l \\ - \frac{i}{4}\theta^\lambda\theta_\lambda\,(\gamma_5\gamma^m)_\mu{}^\beta\zeta_\beta\,\omega_m - \frac{1}{8}\theta^\lambda\theta_\lambda\,\zeta^\nu(\gamma^n\gamma^m)_\nu{}^\beta\chi_{n\beta}\,\chi_m{}^\mu\,,\end{aligned} \tag{5.72b}$$

und

$$\begin{aligned}L = l + i\,\theta^\lambda(\gamma^m)_\lambda{}^\beta\zeta_\beta\,\omega_m + \frac{i}{2}\theta^\lambda\,(\gamma_5)_\lambda{}^\beta\zeta_\beta\,A - \frac{1}{8}\theta^\lambda\theta_\lambda\,\zeta^\nu(\gamma_5\gamma^m)_\nu{}^\beta\chi_{m\beta}\,A \\ + \frac{i}{4}\theta^\lambda\theta_\lambda\,\zeta^\nu(\gamma_5)_\nu{}^\beta\psi_\beta + \frac{1}{4}\theta^\lambda\theta_\lambda\,\zeta^\nu(\gamma^n\gamma^m)_\nu{}^\beta\chi_{n\beta}\,\omega_m\,.\end{aligned} \tag{5.72c}$$

Die unabhängigen Eichparameter entsprechen den üblichen Koordinatentransformationen im x-Raum, beschrieben durch ξ^n –

$$\delta e_m{}^a = \xi^n\,\partial_n e_m{}^a + (\partial_m\xi^n)\,e_n{}^a\,, \tag{5.73a}$$

$$\delta\chi_m{}^\alpha = \xi^n\,\partial_n\chi_m{}^\alpha + (\partial_m\xi^n)\,\chi_n{}^\alpha\,, \quad \text{und} \tag{5.73b}$$

$$\delta A = \xi^n\partial_n A\,, \tag{5.73c}$$

den lokalen Lorentztransformationen –

$$\delta e_m{}^a = e_m{}^b\, l \epsilon_b{}^a\,, \tag{5.74a}$$

$$\delta \chi_m{}^\alpha = \chi_n{}^\beta\, l \frac{1}{2} (\gamma_5)_\beta{}^\alpha\,, \quad \text{und} \tag{5.74b}$$

$$\delta A = 0\,, \tag{5.74c}$$

im zweidimensionalen x-Raum parametrisiert durch das Feld l, und den lokalen Supersymmetrietransformationen mit dem Parameter ζ^ν –

$$\delta e_m{}^a = i\, \zeta^\nu (\gamma^a)_\nu{}^\beta \chi_{m\beta}\,, \tag{5.75a}$$

$$\delta \chi_m{}^\alpha = 2\hat{\mathfrak{D}}_m \zeta^\alpha - \frac{1}{2}\, \zeta^\nu (\gamma_m)_\nu{}^\alpha A\,, \quad \text{und} \tag{5.75b}$$

$$\delta A = \zeta^\nu \psi_\nu\,. \tag{5.75c}$$

Die kovariante Ableitung des Transformationsfeldes ζ^α ist dabei durch

$$\hat{\mathfrak{D}}_m \zeta^\alpha = \partial_m \zeta^\alpha - \frac{1}{2}\, \omega_m (\gamma_5)^{\alpha\beta} \zeta_\beta \tag{5.76}$$

gegeben.

Beim Vergleich mit [H] sind ein paar Druckfehler zu beachten. In den Gleichungen [H]-(3.12) ist in der ersten Gleichung ∂_m durch ∂_M zu ersetzen, der letzte Term der zweiten Gleichung hat $-\partial_M L$ zu heißen, und in der zweiten Gleichung der Gleichungen [H]-(3.13) ist χ_5 durch γ_5 zu ersetzen. Daneben sind auch Unterschiede zu [H] vorhanden. In (5.72c) ist im Term $-\frac{1}{8}\theta^\lambda\theta_\lambda\, \zeta^\nu (\gamma_5\gamma^m)_\nu{}^\beta \chi_{m\beta}\, A$ bei [H] anstatt $\frac{1}{8}$ der Faktor $\frac{1}{16}$ zu finden, und der zweite Term der Supersymmetrietransformation des Rarita-Schwinger-Feldes, (5.75b), unterscheidet sich um ein Minuszeichen.

Kapitel 6

Zusammenfassung

In der vorliegenden Abhandlung wurde die grundlegende Arbeit von [H] in jedem Schritt nachvollzogen. Die dazu notwendigen Begriffsbildungen wurden großteils in den einführenden Kapiteln vorweggenommen und vielfach unabhängig vom speziellen Modell und der Dimension formuliert. In Kapitel 5 sind die wesentlichen Rechenschritte dokumentiert.

Infolge der Rechnungen stellten sich auch Abweichungen zu [H] heraus. Neben offensichtlichen Druckfehlern wurden fehlende oder überflüssige, imaginäre Einheiten, Unterschiede um die Faktoren $\frac{1}{2}$ und 2 sowie ein Unterschied im Vorzeichen festgestellt. Die Nummern der korrigierten Gleichungen sind der folgenden Tabelle zu entnehmen.

Druckfehler		Imaginäre Einheiten		Faktoren u. Vorzeichen	
Howe	Korrektur	Howe	Korrektur	Howe	Korrektur
(2.18)	(5.21)	(2.19)	(5.22)	(3.5)	(5.53b)
(3.6)	(5.54a)	(3.7)	(5.55)	(3.13)	(5.72c)
(3.12)	(5.60), (5.61)	(3.8)	(5.56)	(3.14)	(5.75b)
(3.13)	(5.72b)	(3.10)	(5.59)		

Schließlich wurden auch Differenzen zwischen den Gleichungen [H]-(3.6) und (5.54a) festgestellt. Bei Howe fehlt der Term

$$-\frac{1}{2}\theta^{\lambda}(\gamma_5\gamma_m)_{\lambda}{}^{\alpha}\psi_{\alpha}\,,$$

welcher in [We] angeführt ist, meine Rechnungen reproduzierten nicht den Term

$$\frac{i}{4}\theta^{\lambda}\theta_{\lambda}\omega_m A\,,$$

der sowohl in [H] als auch in [We] vorhanden ist, und der Term

$$-\frac{i}{8}\theta^{\lambda}\theta_{\lambda}\psi^{\nu}(\gamma_5\gamma^{n}\gamma_m)_{\nu}{}^{\alpha}\chi_{n\alpha}$$

meiner Gleichung stimmt eher mit [We] als mit [H] überein.

Alle anderen Lösungen stimmen mit Howe überein und wurden in den Abschnitten 5.3.7, 5.5.8 und 5.6.4 zusammengefaßt. Die Abschnitte „4. Super Weyl transformations“ und „5. The spinning string“ von [H] wurden nicht nachgerechnet, da sie für die Verallgemeinerung der Supergravitation zu nicht-Einsteinscher Gravitation mit dynamischer Torsion [KV1, KV2, K1, K2, K3, KW1, KW2] nicht so interessant erschienen.

Die konsistente Notation, die bereits gut ausformulierte Supermathematik und die korrigierten Resultate dieser Arbeit sollten für weitere Entwicklungen hilfreich sein, insbesondere für die bereits angesprochene in Richtung Supergravitation mit dynamischer Torsion.

Anhang A

Änderungen an Dill

Dill [L] ist ein Mathematica-Programm zur Manipulation indizierter Größen, welche bei Berechnungen in der vierdimensionalen Supersymmetrie auftreten, weshalb für die in dieser Arbeit durchgeführten Rechnungen ein paar Änderungen am Programm notwendig waren. In den Dateien canon.mat und work.mat wurden die neuen Indextypen ein, gein, lor und glor eingeführt, und in work.mat wurde die Funktion workSilent definiert, um unerwünschte TEX-Ausgaben zu unterbinden. Da die Ausdrücke in den Termen alphabetisch geordnet werden und sonst keine Möglichkeit besteht, die Ergebnisse lesbarer zu gestalten, wurde in den Dateien der.mat, gparity.mat und sym.mat das Symbol für die θ-Variable auf aatheta geändert. Weiters wurde in der Datei der.mat ein Fehler in der Definition der Funktion ddisrule behoben, und in den Dateien metricman.mat und updown.mat wurden die Regeln für das Hinauf- und Herunterziehen von Spinorindizes an die hier verwendete Konvention (2.20) angepaßt. Die beschriebenen Änderungen sind im folgenden Absatz im Detail angeführt.

```
diff -rc dill/src/canon.mat howe/dill/src/canon.mat
*** dill/src/canon.mat  Sun Nov  6 20:13:36 1994
--- howe/dill/src/canon.mat Tue Mar 19 16:37:19 1996
***************
*** 27,32 ****
--- 27,39 ----
    is the argument out. It prints out the intermediate results if
    all was an argument in the outopen."

+ canonSilent::usage = "canonSilent[ exs_, funlist_, oddlist_ ]
+   puts a full form term exs into the canonical order. funlist and
+   oddlist are lists of all and fields with odd Grassman parity
+   respectively. Before using it outopen has to be called; its output
+   is the argument out. It prints out the intermediate results if
+   all was an argument in the outopen."
+
  canon[ exs_, out_, funlist_:funlist, oddlist_:oddlist ] :=
    Module[{exps = exs, permexps},

***************
```

```
*** 35,51 ****
        writework[ out[[1]], " permfac: ", permexps ];

  (* include symmetries to permexps *)
        permexps = Flatten[ symall[ #, lor ]& /@ permexps, 1 ];
!       permexps = Flatten[ symall[ #, gras ]& /@ permexps, 1 ];
!       permexps = Flatten[ symall[ #, grasd ]& /@ permexps, 1 ];
        writework[ out[[1]], " permsym: ", permexps];

  (* index reshuffle and chose the canonical *)
        permexps = shuffle[ #, lor[b] ]& /@ permexps // Union;
!       permexps = shuffle[ #, gras[b] ]& /@ permexps // Union;
!       permexps = shuffle[ #, grasd[b] ]& /@ permexps // Union;
        writework[ out[[1]], " shuffle: ", permexps];
!       exps = firstbyind[permexps, Join[lor[], gras[], grasd[]] ][[1]];
        writework[ out[[1]], " firstbyind: ", exps] ;

        Return[ exps ] ]
--- 42,82 ----
        writework[ out[[1]], " permfac: ", permexps ];

  (* include symmetries to permexps *)
+       permexps = Flatten[ symall[ #, ein ]& /@ permexps, 1 ];
+       permexps = Flatten[ symall[ #, gein ]& /@ permexps, 1 ];
        permexps = Flatten[ symall[ #, lor ]& /@ permexps, 1 ];
!       permexps = Flatten[ symall[ #, glor ]& /@ permexps, 1 ];
        writework[ out[[1]], " permsym: ", permexps];

  (* index reshuffle and chose the canonical *)
+       permexps = shuffle[ #, ein[b] ]& /@ permexps // Union;
+       permexps = shuffle[ #, gein[b] ]& /@ permexps // Union;
        permexps = shuffle[ #, lor[b] ]& /@ permexps // Union;
!       permexps = shuffle[ #, glor[b] ]& /@ permexps // Union;
        writework[ out[[1]], " shuffle: ", permexps];
!       exps = firstbyind[permexps, Join[ein[], gein[], lor[], glor[]] ][[1]];
        writework[ out[[1]], " firstbyind: ", exps] ;
+
+       Return[ exps ] ]
+
+ canonSilent[ exs_, funlist_, oddlist_ ] :=
+   Module[{exps = exs, permexps},
+
+ (* generate all the permutations of exps[[2]] *)
+       permexps = permfac[ exps, oddlist ];
+
+ (* include symmetries to permexps *)
+       permexps = Flatten[ symall[ #, ein ]& /@ permexps, 1 ];
+       permexps = Flatten[ symall[ #, gein ]& /@ permexps, 1 ];
+       permexps = Flatten[ symall[ #, lor ]& /@ permexps, 1 ];
+       permexps = Flatten[ symall[ #, glor ]& /@ permexps, 1 ];
+
+ (* index reshuffle and chose the canonical *)
+       permexps = shuffle[ #, ein[b] ]& /@ permexps // Union;
+       permexps = shuffle[ #, gein[b] ]& /@ permexps // Union;
+       permexps = shuffle[ #, lor[b] ]& /@ permexps // Union;
+       permexps = shuffle[ #, glor[b] ]& /@ permexps // Union;
+
```

```
+       exps = firstbyind[permexps, Join[ein[], gein[], lor[], glor[]] ][[1]];

        Return[ exps ] ]
diff -rc dill/src/der.mat howe/dill/src/der.mat
*** dill/src/der.mat    Fri Nov  4 01:14:38 1994
--- howe/dill/src/der.mat   Sat Mar 16 20:01:30 1996
***************
*** 17,23 ****



! ddisrule[ oddlist ] :=
    { (*d[ z_, expr1_ + expr2_ ] :> d[ z, expr1 ] + d[ z, expr2 ],*)
      d[ z_, expr1_ * expr2_ ] :> d[ z, expr1 ] * expr2 +
    ( 1 - 2 gpar[z] gpar[expr1, oddlist] ) expr1 * d[ z, expr2 ],
--- 17,23 ----



! ddisrule[ oddlist_ ] :=
    { (*d[ z_, expr1_ + expr2_ ] :> d[ z, expr1 ] + d[ z, expr2 ],*)
      d[ z_, expr1_ * expr2_ ] :> d[ z, expr1 ] * expr2 +
    ( 1 - 2 gpar[z] gpar[expr1, oddlist] ) expr1 * d[ z, expr2 ],
***************
*** 28,41 ****

  dzerorule :=
    { d[ z1_, d[ z2_, expr ] ] :> d[ z2, d[ z1, expr ] ] /;
!   ( head[z1] === theta || head[z1] === thetab ) && head[z2] === x,
      d[ x[_], expr_ ] :> 0 /; !MemberQ[ deplist[x], headd[expr] ],
!     d[ theta[_], expr_ ] :> 0 /; headd[expr] =!= theta,
      d[ thetab[_], expr_ ] :> 0 /; headd[expr] =!= thetab }


  dgrule :=
!   { d[ theta[{ alpha_, u }], theta[{ beta_, u }] ] :>
                   kdelta[{ alpha, d }, { beta, u }],
      d[ thetab[{ alphad_, u }], thetab[{ betad_, u }] ] :>
                   kdelta[{ alphad, d }, { betad, u }] }
--- 28,41 ----

  dzerorule :=
    { d[ z1_, d[ z2_, expr ] ] :> d[ z2, d[ z1, expr ] ] /;
!   ( head[z1] === aatheta || head[z1] === thetab ) && head[z2] === x,
      d[ x[_], expr_ ] :> 0 /; !MemberQ[ deplist[x], headd[expr] ],
!     d[ aatheta[_], expr_ ] :> 0 /; headd[expr] =!= aatheta,
      d[ thetab[_], expr_ ] :> 0 /; headd[expr] =!= thetab }


  dgrule :=
!   { d[ aatheta[{ alpha_, u }], aatheta[{ beta_, u }] ] :>
                   kdelta[{ alpha, d }, { beta, u }],
      d[ thetab[{ alphad_, u }], thetab[{ betad_, u }] ] :>
                   kdelta[{ alphad, d }, { betad, u }] }
diff -rc dill/src/gparity.mat howe/dill/src/gparity.mat
*** dill/src/gparity.mat    Sat Nov  5 22:50:46 1994
--- howe/dill/src/gparity.mat   Sat Mar 16 19:45:27 1996
```

```
***************
*** 18,28 ****
--- 18,32 ----



+ gpar[aatheta[_], ___] = 1
+
  gpar[theta[_], ___] = 1

  gpar[thetab[_], ___] = 1

  gpar[x[_], ___] = 0
+
+ gpar[ d[aatheta[___], expr_], oddlist_ ] := Mod[ gpar[expr, oddlist] + 1, 2]

  gpar[ d[theta[___], expr_], oddlist_ ] := Mod[ gpar[expr, oddlist] + 1, 2]

diff -rc dill/src/metricman.mat howe/dill/src/metricman.mat
*** dill/src/metricman.mat  Sat Nov  5 20:38:09 1994
--- howe/dill/src/metricman.mat Fri Mar 29 17:59:44 1996
***************
*** 44,50 ****
        Select[ metup, # =!= {dum[[1]], u}& ][[1]],
        Select[ metdown, # =!= {dum[[1]], d}& ][[1]] ] ];

!       If[ Position[metup, dum[[1]]] == Position[metdown, dum[[1]]],
    add = Prepend[ add, symtype[ind[ch], ind][[1, 1, 1]] ] ];

        up = Complement[ up, {metup} ];
--- 44,51 ----
        Select[ metup, # =!= {dum[[1]], u}& ][[1]],
        Select[ metdown, # =!= {dum[[1]], d}& ][[1]] ] ];

! (* changed dum[[1]]] == Position[metdown, dum[[1]]] *)
!      If[ Position[metup, dum[[1]]] != Position[metdown, dum[[1]]],
    add = Prepend[ add, symtype[ind[ch], ind][[1, 1, 1]] ] ];

        up = Complement[ up, {metup} ];
diff -rc dill/src/sym.mat howe/dill/src/sym.mat
*** dill/src/sym.mat    Sun Nov  6 01:49:58 1994
--- howe/dill/src/sym.mat   Sat Mar 16 20:06:56 1996
***************
*** 95,102 ****
    rest[{ {1}, # }& /@  Permutations[ Flatten [ Position[dargh[ex], x], 1] ]],
    rest[{ {Signature[#]}, # }& /@
        Permutations[ Join[
!               Flatten [ Position[dargh[ex], theta], 1 ],
!               Flatten [ Position[dargh[ex], theta], 1 ] ] ] ]]


  shiftsym[ symtype_, n_ ] :=
--- 95,102 ----
    rest[{ {1}, # }& /@  Permutations[ Flatten [ Position[dargh[ex], x], 1] ]],
    rest[{ {Signature[#]}, # }& /@
        Permutations[ Join[
!               Flatten [ Position[dargh[ex], aatheta], 1 ],
```

```
!              Flatten [ Position[dargh[ex], aatheta], 1 ] ] ] ]]


  shiftsym[ symtype_, n_ ] :=
diff -rc dill/src/updown.mat howe/dill/src/updown.mat
*** dill/src/updown.mat Sun Nov 13 19:18:56 1994
--- howe/dill/src/updown.mat    Fri Mar 29 18:00:33 1996
***************
*** 56,62 ****
        MapThread[
    If[ Head[ extmp[[1]] ] === d && Position[extmp, {#2, u}][[1, -2]] == 1,
          ind[ch][{#1, u}, {#2, u}],
!         ind[ch][{#1, d}, {#2, d}] ]&,
    {old, new}] ];
      Return[ extmp ] ]

--- 56,63 ----
        MapThread[
    If[ Head[ extmp[[1]] ] === d && Position[extmp, {#2, u}][[1, -2]] == 1,
          ind[ch][{#1, u}, {#2, u}],
! (* changed ind[ch][{#1, d}, {#2, d}] *)
!         ind[ch][{#2, d}, {#1, d}] ]&,
    {old, new}] ];
      Return[ extmp ] ]

diff -rc dill/src/work.mat howe/dill/src/work.mat
*** dill/src/work.mat   Mon Dec 19 00:18:56 1994
--- howe/dill/src/work.mat  Tue Mar 19 16:37:43 1996
***************
*** 30,35 ****
--- 30,42 ----
    as specified by outdes. funlist and oddlist are lists of all
    functions and functions with odd Grassman parity respectively."

+ workSilent::usage= "workSilent[ bexs_, funlist_List, oddlist_List ]
+   is an example of a noninteractive use of the package. It
+   takes expression bexs, performs certain manipulations and
+   prints results as specified by outdes. funlist and oddlist
+   are lists of all functions and functions with odd Grassman
+   parity respectively."
+
  work[ bexs_, outdes_:{some, "stdout", tex, tog},
        funlist_List:funlist, oddlist_List:oddlist ] :=
    Module[{ out, oex = bexs, exs = bexs },
***************
*** 42,65 ****
    writework[ out[[1]], "initdis:", {oex} ];
      exs = oex2lists[ oex ];
    writework[ out[[1]], "oex2lists:", exs ];
!     exs = raise[ #, {gras, grasd, lor}, raiselist ]& /@ exs;
    writework[ out[[1]], "up:", exs];
      exs = dman[ exs ];
    writework[ out[[1]], "dman:", exs ];
!     exs = metricman[ #, {lor, gras, grasd} ]& /@ exs;
    writework[ out[[1]], "metricman:", exs ];
!     exs = deltaman[ #, {lor, gras, grasd} ]& /@ exs;
    writework[ out[[2]], "deltaman:", exs ];
```

```
      exs = lists2fulls[exs, funlist, oddlist];
!   writework[ out[[1]], "list2full:", exs];
!     exs = toodd[ #, gras, oddlist ]& /@ exs;
!     exs = toodd[ #, grasd, oddlist ]& /@ exs;
      exs = zero[exs];      (* if needed *)
    writework[ out[[2]], "zero:", exs ];
!     exs = ssigma[ exs, funlist, oddlist ];
    writework[ out[[2]],  "ssig:", exs ];
!
      exs = canon[#, out, funlist, oddlist]& /@ exs;
    writework[ out[[2]], "canon:", exs];
      exs = zero[exs];
--- 49,72 ----
    writework[ out[[1]], "initdis:", {oex} ];
      exs = oex2lists[ oex ];
    writework[ out[[1]], "oex2lists:", exs ];
!     exs = raise[ #, {gein, ein, glor, lor}, raiselist ]& /@ exs;
    writework[ out[[1]], "up:", exs];
      exs = dman[ exs ];
    writework[ out[[1]], "dman:", exs ];
!     exs = metricman[ #, {gein, ein, glor, lor} ]& /@ exs;
    writework[ out[[1]], "metricman:", exs ];
!     exs = deltaman[ #, {gein, ein, glor, lor} ]& /@ exs;
    writework[ out[[2]], "deltaman:", exs ];

      exs = lists2fulls[exs, funlist, oddlist];
!   writework[ out[[1]], "lists2fulls:", exs];
!     exs = toodd[ #, gein, oddlist ]& /@ exs;
!     exs = toodd[ #, glor, oddlist ]& /@ exs;
      exs = zero[exs];      (* if needed *)
    writework[ out[[2]], "zero:", exs ];
! (*    exs = ssigma[ exs, funlist, oddlist ];
    writework[ out[[2]],  "ssig:", exs ];
! *)
      exs = canon[#, out, funlist, oddlist]& /@ exs;
    writework[ out[[2]], "canon:", exs];
      exs = zero[exs];
***************
*** 67,70 ****
--- 74,100 ----
      oex = fulls2oex[ exs ];
    writework[ out[[3]],  "end:", {oex} ];
      outclose[ outdes ];
+     Return[ oex ] ]
+
+ workSilent[ bexs_, funlist_List, oddlist_List ] :=
+   Module[{ oex = bexs, exs = bexs },
+
+     oex = wbfields[ oex ];
+     oex = initdis[ oex, oddlist ];
+     exs = oex2lists[ oex ];
+     exs = raise[ #, {gein, ein, glor, lor}, raiselist ]& /@ exs;
+     exs = dman[ exs ];
+     exs = metricman[ #, {gein, ein, glor, lor} ]& /@ exs;
+     exs = deltaman[ #, {gein, ein, glor, lor} ]& /@ exs;
+
```

```
+     exs = lists2fulls[exs, funlist, oddlist];
+     exs = toodd[ #, gein, oddlist ]& /@ exs;
+     exs = toodd[ #, glor, oddlist ]& /@ exs;
+     exs = zero[exs];      (* if needed *)
+ (*    exs = ssigma[ exs, funlist, oddlist ];
+   writework[ out[[2]],  "ssig:", exs ];
+ *)
+     exs = canonSilent[#, funlist, oddlist]& /@ exs;
+     exs = zero[exs];
+     oex = fulls2oex[ exs ];
      Return[ oex ] ]
```

Literaturverzeichnis

[B] Nicolas Bourbaki. *Elements of Mathematics:* Algebra I, Chapters 1–3. – Springer Verlag, Berlin, 2nd printing 1989.

[Be] F. A. Berezin. *The Method of Second Quantization.* – Academic Press, New York and London, 1966.

[BMB] Yvonne Choquet-Bruhat and Cécile DeWitt-Morette with Margaret Dillard-Bleick. *Analysis, Manifolds and Physics.* – North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, revised edition 1982.

[BK] Ioseph L. Buchbinder and Sergei M. Kuzenko. *Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity* or A Walk Through Superspace. – IOP Publishing Ltd, Bristol, 1995.

[CG] Florin Constantinescu / Hans F. de Groote. *Geometrische und algebraische Methoden der Physik: Supermannigfaltigkeiten und Virasoro-Algebren.* – B. G. Teubner, Stuttgart, 1994.

[CGHS] Curtis G. Callan Jr., Steven B. Giddings, Jeffrey A. Harvey, Andrew Strominger. *Evanescent black holes.* – Physical Review D45: 1005–1009, 1992; E-print archive: `hep-th/9111056`.

[DW] Bryce DeWitt. *Supermanifolds.* – Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[DZ] S. Deser and B. Zumino. *Consistent Supergravity.* – Physics Letters 62B: 335–337, 1976.

[F] Peter G. O. Freund. *Introduction to Supersymmetry.* – Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[FN] Daniel Z. Freedman and P. van Niewenhuizen. *Properties of supergravity theory.* – Physical Review D14: 912–916, 1976.

[FNF] Daniel Z. Freedman and P. van Niewenhuizen, S. Ferrara. *Progress toward a theory of supergravity.* – Physical Review D13: 3214–3218, 1976.

[GH] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of Algebraic Geometry.* – Pure & Applied Mathematics, Interscience Series of Texts, Monographs & Tracts, John Wiley & Sons, New York, 1994.

[GS] M. Göckeler & T. Schücker. *Differential geometry, gauge theories and gravity.* – Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[GSW] Michael B. Green, John H. Schwarz, Edward Witten. *Superstring Theory:* 1, Introduction. – Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[H] P. S. Howe. *Super Weyl transformations in two dimensions.* – Journal of Physics A12: 393–402, 1979.

[HR] S. W. Hawking & M. Roček. *Superspace & Supergravity:* Proceedings of the Nuffield Workshop. – Cambridge University Press, Cambridge, June 16–July 12, 1980.

[K1] M. O. Katanaev. *Complete Integrability of Two-Dimensional Gravity with Dynamical Torsion.* – Journal of Mathematical Physics 31: 882, 1990.

[K2] M. O. Katanaev. *Conformal Invariance, Extremals, and Geodesics in Two-Dimensional Gravity with Torsion.* – Journal of Mathematical Physics 32: 2483–2496, 1991.

[K3] M. O. Katanaev. *All Universal Coverings of Two-Dimensional Gravity with Torsion.* – Journal of Mathematical Physics 34: 700–736, 1993.

[KKL1] M. O. Katanaev, W. Kummer, H. Liebl. *Geometric Interpretation and Classification of Global Solutions in Generalized Dilaton Gravity.* – Physical Review D53: 5609–5618, 1996; E-print archive: `gr-qc/9511009`.

[KKL2] M. O. Katanaev, W. Kummer, H. Liebl. *On the Completeness of the Black Hole Singularity in 2-D Dilaton Theories.* – E-print archive: `gr-qc/9602040`.

[KS1] Thomas Klösch, Thomas Strobl. *Classical and Quantum Gravity in (1+1)-Dimensions. Part 1: A Unifying Approach.* – Classical Quantum Gravity 13: 965–984, 1996; E-print archive: `gr-qc/9508020`.

[KS2] Thomas Klösch, Thomas Strobl. *Classical and Quantum Gravity in (1+1)-Dimensions. Part 2: The Universal Coverings.* – E-print archive: `gr-qc/9511081`.

[KV1] M. O. Katanaev, I. V. Volovich. *String Model with Dynamical Geometry and Torsion.* – Physics Letters B175: 413–416, 1986.

[KV2] M. O. Katanaev, I. V. Volovich. *Two-Dimensional Gravity with Dynamical Torsion and Strings.* – Annals of Physics 197: 1, 1990.

[KW1] W. Kummer, P. Widerin. *Noneinsteinian Gravity in D=2: Symmetry and Current Algebra.* – Modern Physics Letters A9: 1407–1414, 1994.

[KW2] W. Kummer, P. Widerin. *Conserved Quasilocal Quantities and General Covariant Theories in Two-Dimensions.* – Physical Review D52: 6965–6975, 1995; E-print archive: `gr-qc/9502031`.

[L] Vladan Lučić. `Dill`: An Algorithm and a Symbolic Software Package for Doing Classical Supersymmetry Calculations. – E-print archive: `hep-th/9412298`.

[LVA] H. Liebl, D. V. Vasilevich, S. Alexandrov. *Hawking Radiation and Masses in Generalized Dilation Theories.* – E-print archive: `gr-qc/9605044`.

[R] Marcel Riesz. *Clifford Numbers and Spinors:* with Riesz's private lectures to E. Folke Bolinder and a historical review by Pertti Lounesto. – Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.

[SS1] Peter Schaller, Thomas Strobl. *Poisson Structure Induced (Topological) Field Theories.* – Modern Physics Letters A9: 3129–3136, 1994; E-print archive: `hep-th/9405110`.

[SS2] Peter Schaller, Thomas Strobl. *A Brief Introduction to Poisson Sigma Models:* Talk given at the 34th Internationale Universitätswochen für Kern- und Teilchenphysik: Low-Dimensional Models in Statistical Physics and Quantum Field Theory. – Schladming, Austria, 4–11 March 1995; E-print archive: `hep-th/9507020`.

[SU1] Roman U. Sexl und Helmuth K. Urbantke. *Relativität, Gruppen, Teilchen.* – Springer-Verlag, Wien, New York, 3., neubearbeitete Auflage 1992.

[SU2] Roman U. Sexl / Helmuth K. Urbantke. *Gravitation und Kosmologie:* Eine Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie. – Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford, 4., überarbeitete Auflage 1995.

[V] Cumrun Vafa. *Evidence for F-Theory.* – Nuclear Physics B469: 403–418, 1996; E-print archive: `hep-th/9602022`.

[W] E. Witten. *String Theory Dynamics in Various Dimensions.* – Nuclear Physics B443: 85–126, 1995; E-print archive: `hep-th/9503124`.

[WB] Julius Wess and Jonathan Bagger. *Supersymmetry and Supergravity.* – Princeton Series in Physics, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1983.

[We] Peter West. *Introduction to Supersymmetry and Supergravity.* – World Scientific, Singapore, extended second edition, 1990.

[WFN] B. de Wit, P. Fayet, P. van Nieuwenhuizen. *Supersymmetry and Supergravity '84:* Proceedings of the Trieste Spring School. – World Scientific Publishing, Singapore, 4–14 April, 1984.

[WZ] J. Wess, B. Zumino. *Supergauge Transformations in Four Dimensions.* – Nuclear Physics B70: 39–50, 1974.

Stichwortverzeichnis