Gerhard Kahl & Florian Libisch

STATISTISCHE PHYSIK II (UE – 136.050)

5. Tutoriumstermin (1.6.2015)

T10. Dehnt man eine Feder über eine gewisse Länge, so "reißt" sie ab (Elastizitätsgrenze). Man kann diesen Vorgang in einem gewissen Sinn als Phasenübergang betrachten.

Für kleine Auslenkungen (elastischer Bereich) ist die freie Energie A der Feder durch

$$\frac{A}{M} = \frac{1}{2}kx^2$$

gegeben; k ist die Federkonstante und $x = L/M$, wobei L die Länge und M die Masse der Feder sind.

Die für das System entsprechend adaptierte Grundgleichung der Thermodynamik lautet

$$dA = -SdT + fdL + \mu dM$$

wobei die Spannung definiert ist durch

$$f = \left(\frac{\partial A}{\partial L}\right)_{T,M}.$$

Oberhalb der Elastizitätsgrenze sei die freie Energie durch

$$\frac{A}{M} = \frac{1}{2}h(x - x_0)^2 + c;$$

gegeben.

Die Größen h, k, x_0 und c sind von x *unabhängig* aber von T *abhängig.* Weiters seien $k > h$, sowie c und x_0 positiv für alle T.

(a) Berechnen Sie die Zustandsgleichungen

$$f = f(T, x)$$

für beide Dehnungsbereiche;

(b) berechnen Sie für beide Dehnungsbereiche das chemische Potential

$$\mu = (\partial A/\partial M)_{T,L}\,;$$

(c) zeigen Sie, daß

$$\mu = \frac{A}{M} - fx;$$

(d) geben Sie jene Kraft bei der die Feder bei vorgegebener Temperatur "reißt";

(e) geben Sie Längenveränderung in der Ausdehnung der Feder beim "Reißen" oder, alternativ, die Differenz in den entsprechenden x-Werten an.

T11. Die van der Waals Gleichung in der Nähe des kritischen Punktes lautet

$$\pi \sim 4\tau - 6\tau\omega + 9\tau\omega^2 - \frac{3}{2}\omega^3; \tag{1}$$

in dieser Gleichung sind die thermodynamischen Variablen T, P, und V, durch die entsprechenden reduzierten, dimensionlosen Größen τ, π, und ω mit

$$\tau = \frac{T - T_\mathrm{c}}{T_\mathrm{c}} \qquad \pi = \frac{P - P_\mathrm{c}}{P_\mathrm{c}} \qquad \omega = \frac{V - V_\mathrm{c}}{V_\mathrm{c}}$$

gegeben. τ, π, und ω sind typischerweise 10^{-4} (oder kleiner).

Beantworten Sie folgende Fragen:

(a) wie verhält sich die Differenz in den Koexistenzvolumnia, $|\omega_\mathrm{fl} - \omega_\mathrm{g}|$ unterhalb der kritischen Temperatur (also für $\tau < 0$) bei Annäherung an den kritischen Punkt, also bei $\tau \to 0^-$;

(b) wie verhält sich die isotherme Kompressibilität, κ_T,

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \sim \left(\frac{\partial \omega}{\partial \pi}\right)_\tau$$

im Grenzwert $\tau \to 0^-$;

(c) stellen Sie einen Zusammenhang zwischen Druck π und Volumen ω entlang der kritischen Isotherme (also für $\tau = 0$) her.

(d) In allen drei Fällen [(a) – (c)] ergeben sich für die jeweiligen Größen Potenzgesetze; vergleichen Sie die entsprechenden Gesetze und Exponenten mit jenen Gesetzen und Exponenten, die in der Vorlesung für das Ising-Modell in der Molekularfeldnäherung hergeleitet wurden. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Hinweise:

(a) Anstelle der Koexistenzvolumina, ω_fl und ω_g, deren explizite Berechnung im Rahmen einer Maxwell-Konstruktion [etwa durch Integration der Zustandsgleichung (1)] erfolgen müßte, reich es hier (ausnahmsweise), die Temperaturabhängigkeit der Differenz in den Volumina ω_1 und ω_2 zu betrachten: diese Volumina entsprechen dem Minimum und dem Maximum der Isotherme $\pi = \pi(\omega, \tau = \mathrm{const.})$.

(b) Es empfiehlt sich, die partielle Ableitung $(\partial\omega/\partial\pi)_\tau$über eine implizite Differentiation der Zustandsgleichung (1) zu berechnen.

Zu kreuzen: 10 abc, 10de, 11a, 11b, 11cd