Gerhard Kahl & Florian Libisch

STATISTISCHE PHYSIK II (UE – 136.050)

4. Tutoriumstermin (18.5.2015)

T8. Gegeben sei eine (hypothetische) Substanz, für die folgende Zustandsgleichung in der Nähe des fest-flüssig Überganges berechnet wurde. Die freie Energie, $F(T, V, N)$, ist in einem limitierten Bereich von Temperatur T und Dichte $\rho = N/V$ für den flüssigen Zustand ('l') durch

$$\frac{F^{(\mathrm{l})}}{V} = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{T}\rho^2$$

und für den festen Zustand ('s') durch

$$\frac{F^{(\mathrm{s})}}{V} = \frac{1}{3}\frac{\beta}{T}\rho^3$$

gegeben. α und β sind konstant.

Berechnen Sie:

(a) die Dichte $\rho^{(\mathrm{l})}$ der Flüssigkeit bzw. die Dichte $\rho^{(\mathrm{s})}$ des Festkörpers bei Phasenkoexistenz, jeweils als Funktion der Temperatur;

(b) den Druck $P_o(T)$ bei diesem Übergang als Funktion der Temperatur;

(c) die Entropieänderung beim Erstarren;

(d) mit Hilfe der Clausius-Clapeyron Gleichung

$$\frac{dP_0(T)}{dT} = \frac{\Delta s}{\Delta v}$$

den Anstieg der Schmelzkurve dP_0/dT und daraus die Schmelzkurve $P_0 = P_0(T)$; in der obigen Gleichung stehen Δs und Δv für die Differenzen in den spezifischen Entropien und in den spezifischen Volumina (bezogen auf die jeweilige Teilchenzahl) der beiden koexistierenden Phasen.

T9. Im Rahmen der Molekularfeldnäherung für das Spin-1/2 Ising Modell erhält man im allgemeinen Fall (also unter Berücksichtigung des äußeren Feldes) für das thermodynamische Potential $G(T, H, N)$ folgenden impliziten Ausdruck

$$g(T, H) = \frac{G(T, H, N)}{N} = \frac{1}{2}Jzm^2 - k_\mathrm{B}T \ln\left[2\cosh\left[\beta(H + Jzm)\right]\right],$$

wobei die spezifische Magnetisierung $m = M/N$ durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$m = \tanh\left[\beta(H + Jzm)\right];$$

J und z sind die Kopplungsstärke sowie die Zahl der nächsten Nachbarn. Die kritische Temperatur (T_c) ist in diesem Modell durch

$$k_\mathrm{B} T_\mathrm{c} = Jz$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie mit Hilfe einer geeigneten Legendre-Transformation die freie Energie $F(T, M, N)$, bzw. $f(T, m) = F(T, M, N)/N$. Stellen Sie $f(T, m)$ so dar, daß die Abhängigkeit von H vollständig eliminiert ist.

(b) Leiten Sie für $f(T, m)$ einen Näherungsausdruck her, der für kleine m, also in der Nähe des kritischen Punktes gilt. Um die freie Energie interpretieren zu können (Teilpunkt (c)), müssen Sie dabei die Terme bis zur vierten Ordnung in m entwickeln.

(c) Skizzieren Sie $f(T, m)$ für $T_1 < T_\mathrm{c}$, für T_c und für $T_2 > T_\mathrm{c}$. Interpretieren und diskutieren Sie das Ergebnis in Hinblick auf die Stabilität der freien Energie und auf das (m, T)-Phasendiagramm des Systems.

Hinweis: verwenden Sie bei den Umwandlungen von $f(T, m)$, daß die spezifische Magnetisierung bei gegebener Temperatur und gegebenem Feld durch die oben erwähnte Gleichung

$$m = \tanh\left[\beta(H + Jzm)\right]$$

gegeben ist.

Weiters gilt für kleine x: $\ln(1 + x) \simeq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots$.

Beachten Sie, daß $\operatorname{atanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ und $\cosh^2 x = (1 - \tanh^2 x)^{-1}$.

Zu kreuzen: 8ab, 8cd, 9a, 9b, 9c