1. Plenum - Statistische Physik II - 16.03.2015

1. Leiten Sie eine Reihenentwicklung für Integrale der Form

$$I(T) = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) f_-(\varepsilon)$$

ab. Hierbei ist $f_-(\varepsilon)$ die Fermi-Dirac Verteilungsfunktion.

Die Ableitung der Fermifunktion

$$f'_-(\varepsilon) = \frac{\beta e^{\beta(\varepsilon-\mu)}}{(1+e^{\beta(\varepsilon-\mu)})^2}$$

ist nur in einem kleinen Bereich um die Fermi-Kante merklich von null verschieden. Daher integrieren wir $I(T)$ partiell

$$I(T) = G(\varepsilon) f_-(\varepsilon)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon G(\varepsilon) f'_-(\varepsilon)$$

wobei G die Stammfunktion von g sei,

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} d\varepsilon g(\varepsilon).$$

Wir fordern $g(\varepsilon \to -\infty) = 0$, $g(\varepsilon \to \infty) < \varepsilon^n$ mit n endlich, und $g(\varepsilon)$ regulär um μ. Damit verschwindet der Randterm in der partiellen Integration. Wir können nun $G(\varepsilon)$ im Punkt μ Taylor-entwickeln,

$$G(\varepsilon) = G(\mu) + \sum_n (\varepsilon-\mu)^n \frac{1}{n!} \partial_\varepsilon^{n-1} g(\varepsilon)\bigg|_{\varepsilon=\mu}$$

und erhalten eine Reihenentwicklung

$$I(T) = -G(\mu) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon f'_-(\varepsilon) + \sum_n \frac{1}{n!} \partial_\varepsilon^{n-1} g(\varepsilon)\bigg|_{\varepsilon=\mu} \int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon-\mu)^n f'_-(\varepsilon).$$

Das erste Integral ist gleich -1. Einsetzen und umformen der Integrale in der Reihe liefert mit $\xi = \beta(\varepsilon-\mu)$

$$I(T) = G(\mu) + \sum_n \frac{1}{n!} \partial_\varepsilon^{n-1} g(\varepsilon)\bigg|_{\varepsilon=\mu} \beta^n \int_{-\infty}^{\infty} \xi^n \frac{e^\xi}{(e^\xi+1)^2}.$$

Da $f'(\varepsilon)$ eine gerade Funktion um μ ist, verschwinden alle Terme mit ungeradem n in obiger Reihenentwicklung. Für gerade n läßt sich das Integral auf die Riemann-Zetafunktion zurückführen, die tabelliert vorliegt. Man erhält die Sommerfeld-Entwicklung

$$I(T) = \int_{-\infty}^{\mu} d\varepsilon g(\varepsilon) + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 g'(\mu) + \frac{7\pi^2}{360}(k_B T)^4 g'''(\mu) + \dots$$

2. Betrachten Sie ein ideales Fermigas bei endlicher Temperatur. Berechnen Sie das Tieftemperaturverhalten des chemischen Potentiales und der Energie mit Hilfe der Sommerfeld-Entwicklung in Ordnung $(k_B T)^2/E_F^2$.

   Die Teilchenzahl ist gegeben durch

$$N(T) = \int d\varepsilon D(\varepsilon) f_-(\varepsilon), \quad D = (2s+1)\frac{V}{4\pi^2}(\frac{2m}{\hbar^2})^{\frac{3}{2}} = d_0\sqrt{\varepsilon}$$

   mit der Zustandsdichte D. Wir setzen in die Sommerfeld-Entwicklung ein und erhalten

$$N(T) \approx \int_{-\infty}^{\mu} d\varepsilon d_0 \sqrt{(\varepsilon)} + d_0 \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 \frac{1}{2\sqrt{\mu}} = d_0 \frac{2}{3}\mu^{\frac{3}{2}} \left[1 + \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{k_B T}{E_F}\right)^2\right]$$

   wobei im $O(T^2)$ Term μ durch E_F ersetzt wurde. Für $T = 0$ ergibt sich damit

$$N(T=0) = d_0 \frac{2}{3} E_F^{\frac{3}{2}}$$

   Gehen wir nun von zB einem Elektronengas im Festkörper aus, so ist die Teilchenzahl N erhalten, und wir können $N(T=0)$ und $N(T)$ gleichsetzen

$$N(T=0) = d_0 \frac{2}{3} E_F^{\frac{3}{2}} = N(T) = d_0 \frac{2}{3}\mu^{\frac{3}{2}} \left[1 + \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{k_B T}{E_F}\right)^2\right]$$

$$E_F = \mu \left[1 + \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{k_B T}{E_F}\right)^2\right]^{\frac{2}{3}} \quad \rightarrow \quad \mu = E_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{k_B T}{E_F}\right)^2\right]$$

   Analog verwenden wir für die Energie

$$E(T) = \int d\varepsilon D(\varepsilon) \varepsilon f_-(\varepsilon).$$

   Wir setzen wieder in die Sommerfeld-Entwicklung ein und erhalten

$$E(T) \approx \int_{-\infty}^{\mu} d\varepsilon d_0 \varepsilon \sqrt{(\varepsilon)} + d_0 \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 \frac{3}{2}\sqrt{\mu} = d_0 \frac{2}{5}\mu^{\frac{5}{2}} \left[1 + \frac{5}{2}\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{k_B T}{E_F}\right)^2\right]$$

   wobei wieder im $O(T^2)$ Term μ durch E_F ersetzt wurde. Für $T = 0$ ergibt sich damit

$$E(T=0) = d_0 \frac{2}{5} E_F^{\frac{5}{2}} = \frac{3}{5} N E_F.$$

Wir sehen also dass die Energie des Fermi-Gases pro Teilchen im Schnitt 3/5 der Fermi-Energie sind. Bei endlichen Temperaturen

$$E(T) = E(T=0)\left[\left(\frac{\mu}{E_F}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{5\pi^2}{8}\left(\frac{k_BT}{E_F}\right)^2\right]$$

hier muß man nun die Temperaturabhängigkeit von μ berücksichtigen,

$$E(T) = E(T=0)\left[1 - \frac{5}{2}\cdot\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{k_BT}{E_F}\right)^2 + 3\frac{5}{2}\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{k_BT}{E_F}\right)^2\right] = E(T=0)\left[1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{k_BT}{E_F}\right)^2\right]$$

Die Wärmekapazität des Fermi-Gases $\partial_T E(T)$ ist damit weit kleiner, als klassisch erwartet (klassisch: Dulong-Petit, $c_V = 3/2 \cdot Nk_B$).