

# 1. Fermigase

## 1.1 Fermi-Verteilung

## 1.2 Verhalten nahe $T=0$ , Fermi-Druck

## 1.3 Endliche Temperaturen

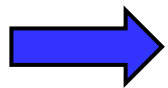
# 1.1 Fermi-Verteilung

Ein-Teilchen Hamiltonoperator:

$$\hat{H}_{\text{ein-Teilchen}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \rightarrow \epsilon_i = \frac{\hbar^2 k_i^2}{2m} = \epsilon_{\vec{k}}$$

## Pauli-Verbot:

Es darf nie mehr als ein Fermion den gleichen Einteilchenzustand annehmen (unter Berücksichtigung des Spins)



Besetzungszahl der Einteilchenzustände:

$$n_i = 0, 1$$

$$Z_{GK}(T, V, \mu) = \prod_i \left( \sum_{n_i=0}^1 \langle n_i | e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)n_i} | n_i \rangle \right)$$

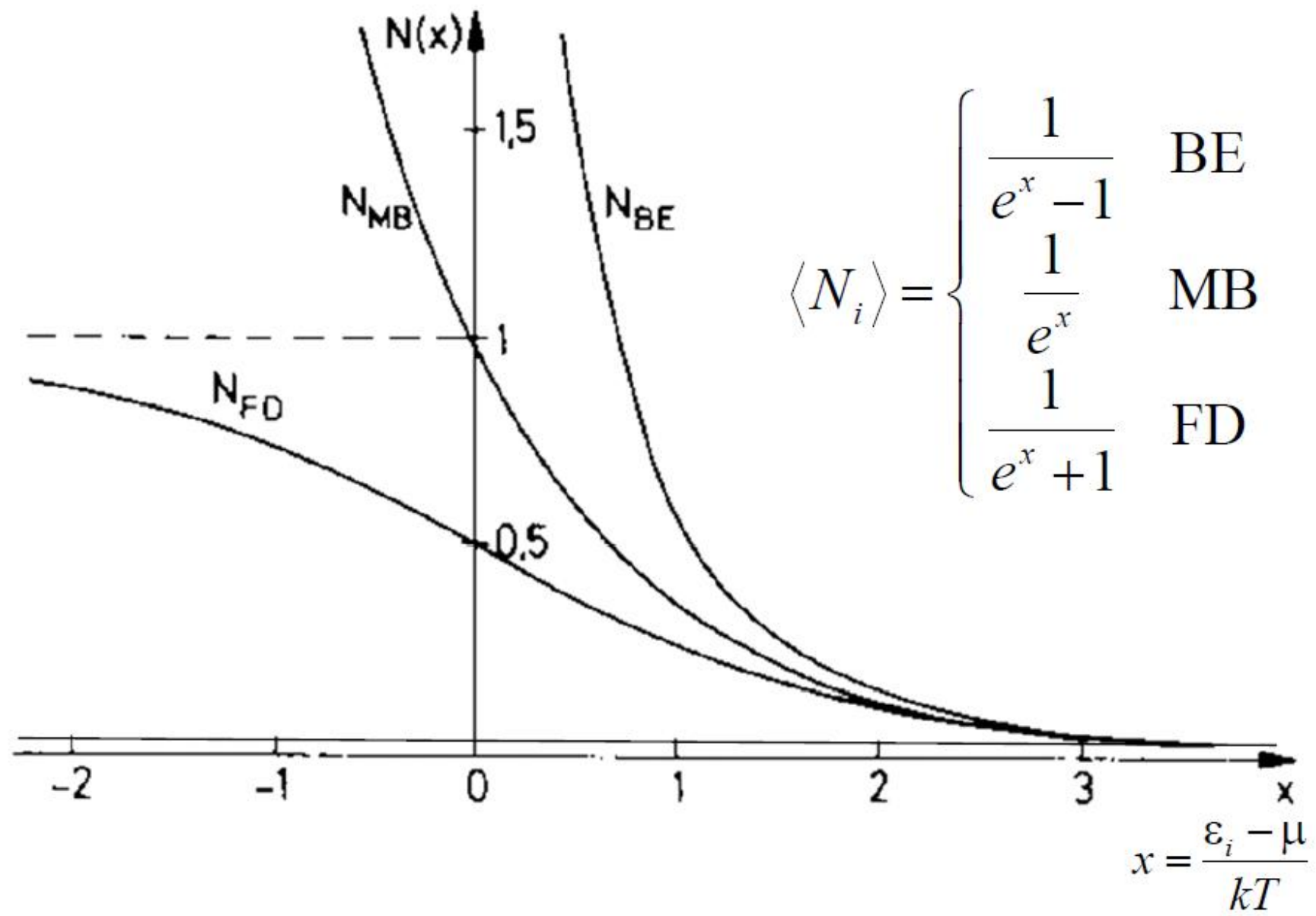
$$J(T, V, \mu) = -kT \ln Z_{GK} = -kT \sum_i \ln [1 + \exp(-\beta(\varepsilon_i - \mu))]$$

$$\langle N \rangle = -\partial_{\mu} J(T, V, \mu)$$

$$= \sum_i \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1} = \sum_i \langle N_i \rangle$$

## Fermi-Dirac Verteilungsfunktion:

Die mittlere Zahl der Teilchen im Zustand  $\varepsilon_i$  bei Temperatur  $T$  und chemischem Potential  $\mu$



## Ableitung der Zustandsgleichung für ideales Fermi-Gas:

$$J(T, V, \mu) = -kT \ln Z_{GK} = -kT \sum_i \ln [1 + \exp(-\beta(\varepsilon_i - \mu))]$$

Mit:  $\varepsilon_i = \frac{\hbar^2 k_i^2}{2m}$

Kasten mit Volumen  $V$  (periodische Randbedingungen)  $\Rightarrow$

$$k_x V^{1/3} = 2\pi n_x, \quad k_y V^{1/3} = 2\pi n_y, \quad k_z V^{1/3} = 2\pi n_z$$

5

$$\Rightarrow J(T, V, \mu) = k_B T \sum_{n_x, n_y, n_z} \ln \left\{ 1 + e^{-\beta \left( \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu \right)} \right\}$$

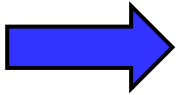
Für große  $V$ :

$$\sum_{n_x, n_y, n_z} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int dk_x dk_y dk_z$$

Rotationssymmetrie des Hamiltonoperators  $\Rightarrow \int d^3 k \rightarrow 4 \pi \int k^2 dk$

Änderung der Integrationsvariablen  $k \rightarrow \epsilon$ :

$$d\epsilon = \frac{\hbar^2}{m} k dk ; k = \sqrt{\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}} \Rightarrow k^2 dk = \frac{1}{2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon} d\epsilon$$



$$\sum_{k, \sigma} \rightarrow \int_0^{\infty} D(\epsilon) d\epsilon \quad \text{mit} \quad D(\epsilon) = (2s + 1) \frac{V}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon}$$

Berücksichtigt Spin

**Zustandsdichte des idealen Gases:**  
Zahl der Einteilchenzustände im  
Intervall  $[\epsilon, \epsilon + d\epsilon]$

$$D(\epsilon) = 2 \frac{V}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon}$$

Spin 1/2 Fermionen,  
z.B.: Elektronen

$$J(T, V, \mu) = -kT 2 \frac{V}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty d\epsilon \sqrt{\epsilon} \ln [1 + e^{-\beta(\epsilon - \mu)}]$$

$$J(T, V, \mu) = -2 \frac{V}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{2}{3} \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{3/2}}{\exp(\beta(\epsilon - \mu)) + 1}$$

Partielle Integration

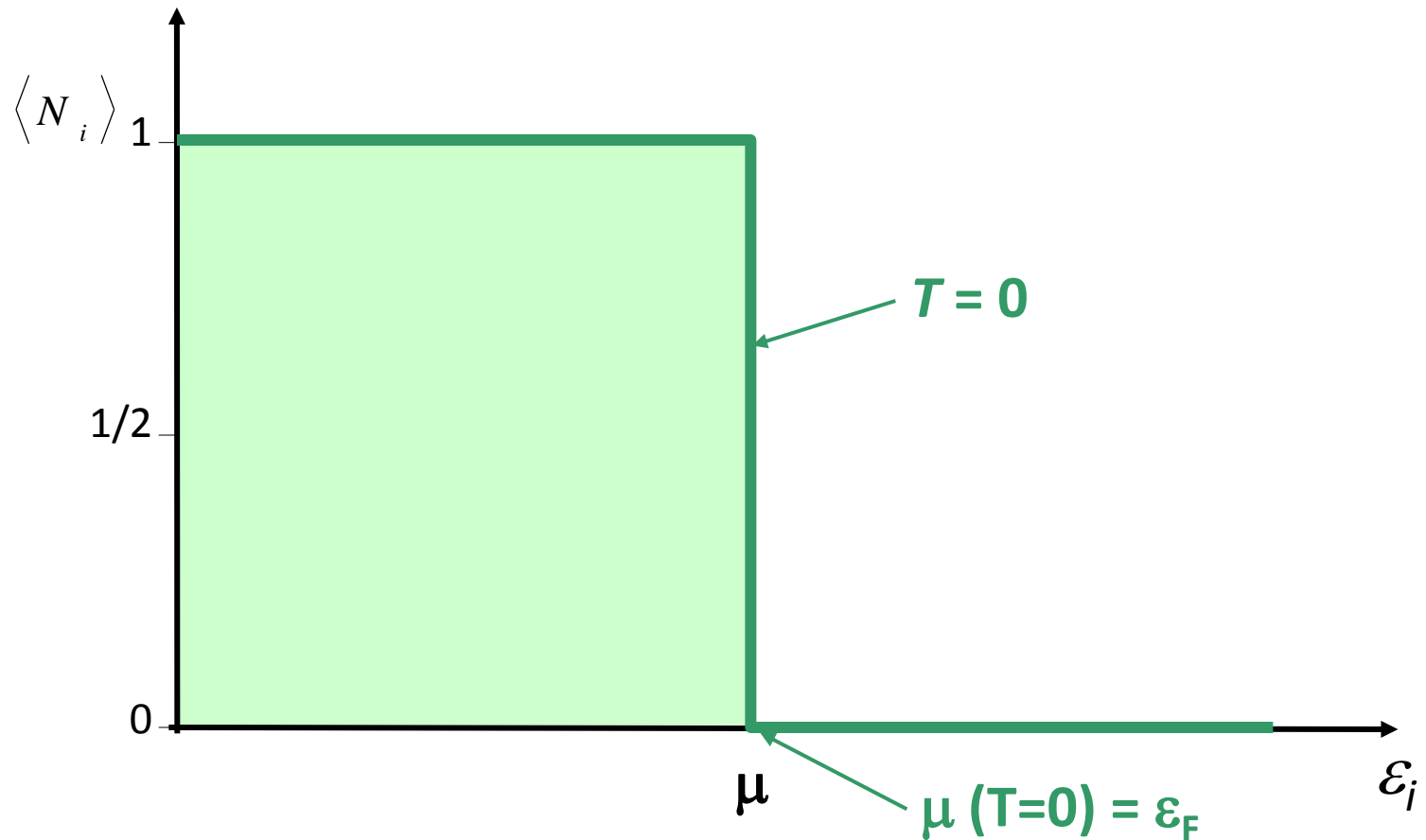
$$\langle N \rangle = -\partial_\mu J(T, V, \mu) = 2 \frac{V}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{1/2}}{\exp(\beta(\epsilon - \mu)) + 1}$$

$$\langle H \rangle = E = \int d\epsilon \epsilon \langle N(\epsilon) \rangle = 2 \frac{V}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{3/2}}{\exp(\beta(\epsilon - \mu)) + 1}$$

⇒ Zustandsgleichung:

$$pV = \frac{2}{3} E$$

## 1.2 Verhalten nahe T=0, Fermidruck:



1)  $T \rightarrow 0$ :

$$\bullet \quad \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1} \rightarrow \Theta(\mu - \epsilon_i)$$



- alle Zustände einfach besetzt für  $\varepsilon_i < \mu(T = 0, N)$   
unbesetzt für  $\varepsilon_i > \mu(T = 0, N)$
- $\mu(T = 0, N) \equiv \varepsilon_F$  („Fermienergie“)
- direkte Konsequenz des **Pauliprinzips**: alle Einteilchenzustände bis zur Energie  $\varepsilon_F$  sind einfach besetzt
- $\Rightarrow \mu(T = 0, N)$  **positiv**

Vergleiche ideales klassisches Gas:  $\mu$  **negativ**

Relation zwischen Fermienergie (Fermi-Wellenzahl)  
und Teilchendichte:

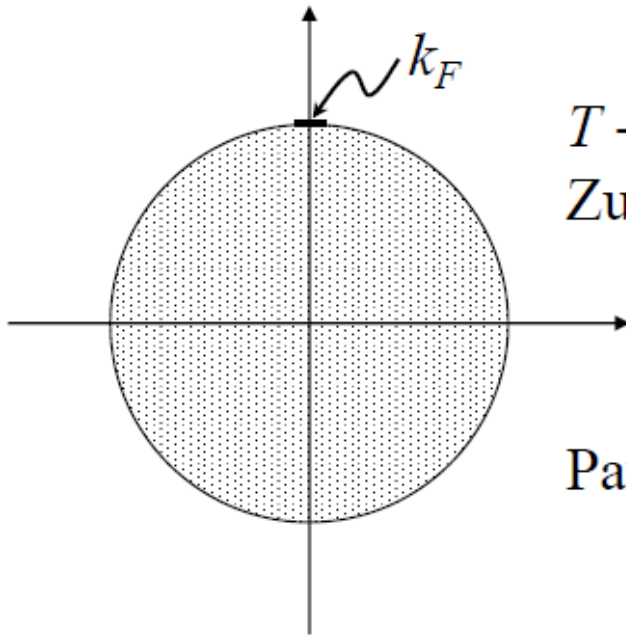
$$T \rightarrow 0: \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} \rightarrow \Theta(\mu - \varepsilon) = \Theta(\varepsilon_F - \varepsilon)$$

$$\frac{\langle N \rangle}{V} = \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\mu d\varepsilon \varepsilon^{1/2} = \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{2}{3} \mu^{3/2}$$

$$\mu(T=0) = \left( 6\pi^2 \left( \frac{\hbar^2}{2m} \right)^{3/2} \langle n \rangle \right)^{2/3} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( 6\pi^2 \langle n \rangle \right)^{2/3}$$

$$\mu(T=0) = \varepsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \Rightarrow k_F = \left( 6\pi^2 \langle n \rangle \right)^{1/3}$$

Darstellung durch Kugel im Impulsraum:



$T \rightarrow 0$ : alle Zustände  $k \leq k_F$  sind besetzt,  
Zustände höherer Energie sind unbesetzt

Pauliprinzip verknüpft Dichte und Fermi-Energie

- keine Kondensation in Zustand  $p = 0$  aufgrund des Pauliverbots

Bemerkung: Korrektur für Spinentartung  $g_s$ :

$$\frac{\langle N \rangle}{V} = \frac{g_s}{6\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \mu^{3/2}$$

$$\mu(T=0) = \left( \frac{6\pi^2}{g_s} \left( \frac{\hbar^2}{2m} \right)^{3/2} \langle n \rangle \right)^{2/3} = \frac{\hbar^2}{2m} \underbrace{\left( \frac{6\pi^2}{g_s} \langle n \rangle \right)^{2/3}}_{k_F^2} = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$$

Energiedichte der Fermikugel:

$$\frac{E}{V} = \frac{\langle H \rangle}{V} = \frac{g_s}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\mu d\varepsilon \varepsilon^{3/2} = \frac{g_s}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{2}{5} \mu^{5/2}$$

$$E = \frac{3}{5} \langle N \rangle \varepsilon_F \quad \Rightarrow \quad pV = \frac{2}{3} E = \frac{2}{5} \langle N \rangle \varepsilon_F$$

$$p(T=0) = \frac{2 \langle N \rangle}{5 V} \varepsilon_F = \frac{2 \langle N \rangle}{5 V} \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{6\pi^2 \langle N \rangle}{g_s V} \right)^{2/3} \propto V^{-5/3}$$

$\langle N \rangle$  festgehalten

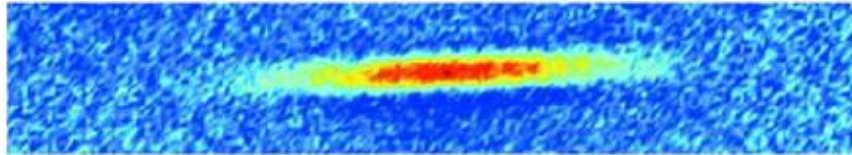
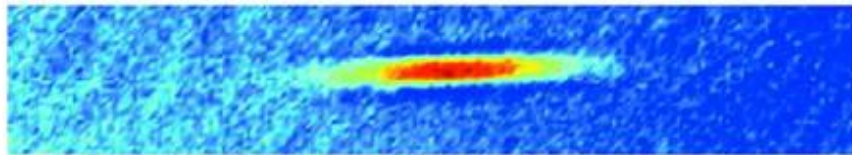
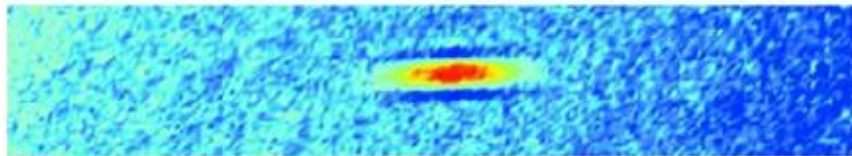
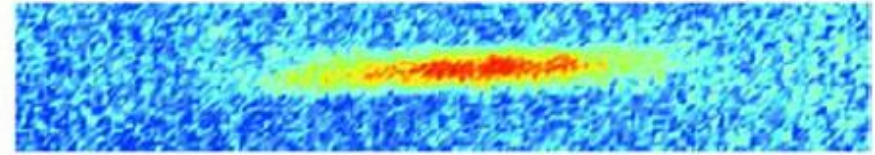
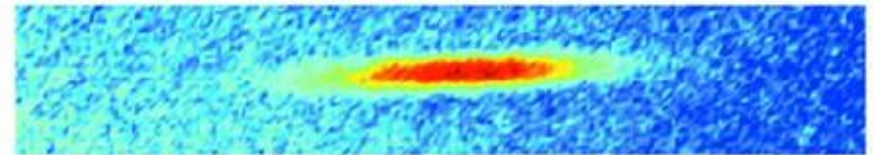
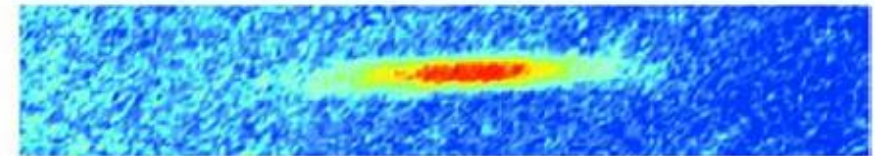
$$V = \frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow p = \frac{2 \hbar^2}{5 2m} \left( \frac{6\pi^2}{g_s} \right) \left( \frac{3 \langle N \rangle}{4\pi R^3} \right)^{5/3}$$

$$= \frac{3}{20\pi^{1/3}} \frac{\hbar^2}{m} \left( \frac{9}{2g_s} \right)^{2/3} \frac{\langle N \rangle^{5/3}}{R^5}$$

harmonisches Fallenpotential:  $F = KR = m\omega^2 R$

$$\text{Fallendruck: } p = \frac{F}{A} = \frac{m\omega^2 R}{4\pi R^2} = \frac{m\omega^2}{4\pi} \frac{1}{R}$$

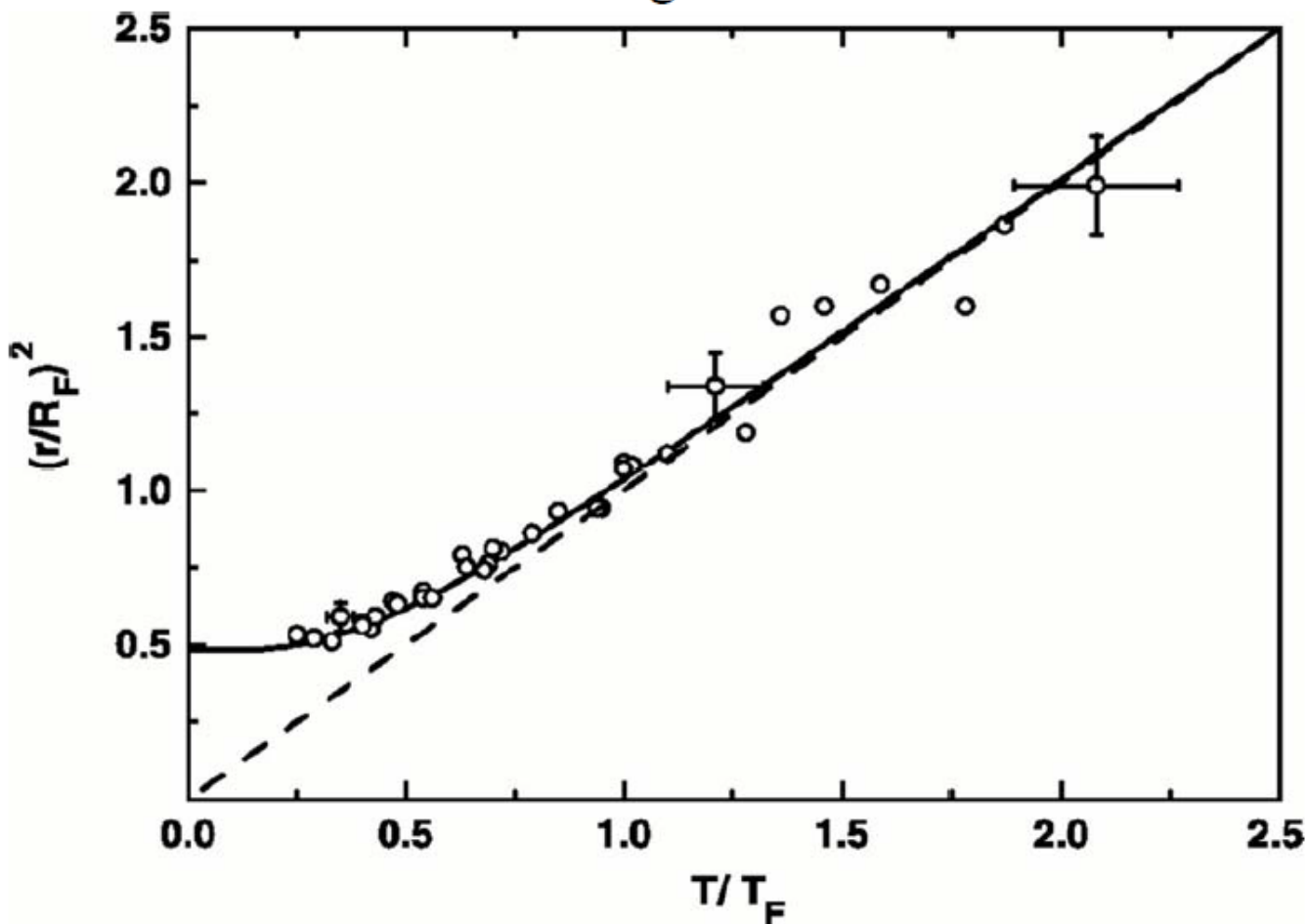
$$\text{gleichsetzen liefert: } R = \sqrt[4]{\frac{3 \hbar^2 \langle N \rangle}{5 m^2 \omega^2} \left( \frac{9\pi \langle N \rangle}{2g_s} \right)^{2/3}}$$

Entartungsdruck des Fermigas für  $T \rightarrow 0$ : ${}^7\text{Li}$  $T = 810 \text{ nK}$  $T = 510 \text{ nK}$  $T = 240 \text{ nK}$  ${}^6\text{Li}$  $T/T_F = 1.0$  $T/T_F = 0.56$  $T/T_F = 0.25$ 

**Bose- ( ${}^7\text{Li}$ ;  $T_c = 540 \text{ nK}$ ) und Fermi- ( ${}^6\text{Li}$ ) Gas: Bose-Gas kontrahiert, Fermi-Gas verändert aufgrund des Entartungsdrucks Form bei  $T < T_F$  nicht elliptische Form des Gemischs aufgrund des Fallenpotentials**

Quelle: Science 2001

Entartungsdruck  $\rightarrow$  Volumen des Fermigas kann nicht beliebig klein werden



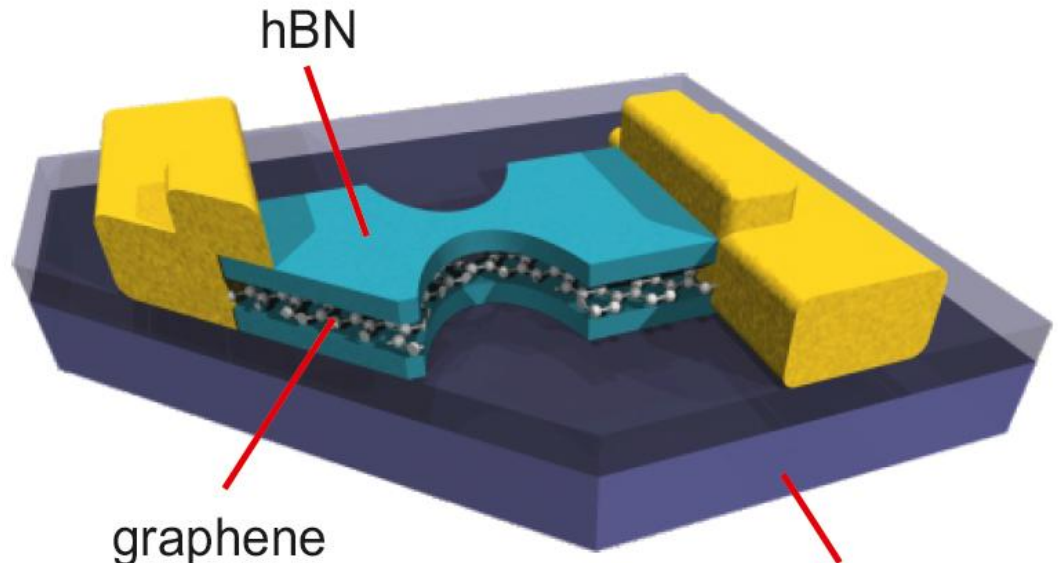
relative Oberfläche eines idealen Fermi-Gases:  
 durchgezogene Linie  $\rightarrow$  Vorhersage für ideales Fermi-Gas;  
 unterbrochene Linie  $\rightarrow$  klass. Theorie; Kreise  $\rightarrow$  Experiment

# Graphene: Monoatomare Kohlenstoffschicht

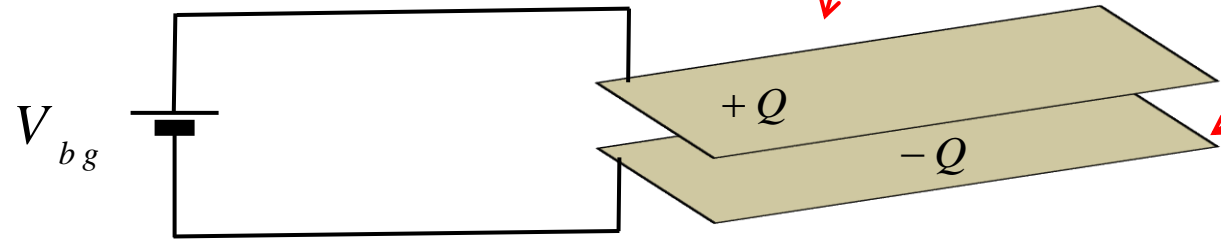
“Zweidimensionales” Material

Kontrolle der Fermi-Energie über Spannung am back gate

Bandstruktur:  
Lineare Dispersion  $E \sim \hbar v_F k$



Plattenkondensator:



$$Q = eN = C V_{bg}$$



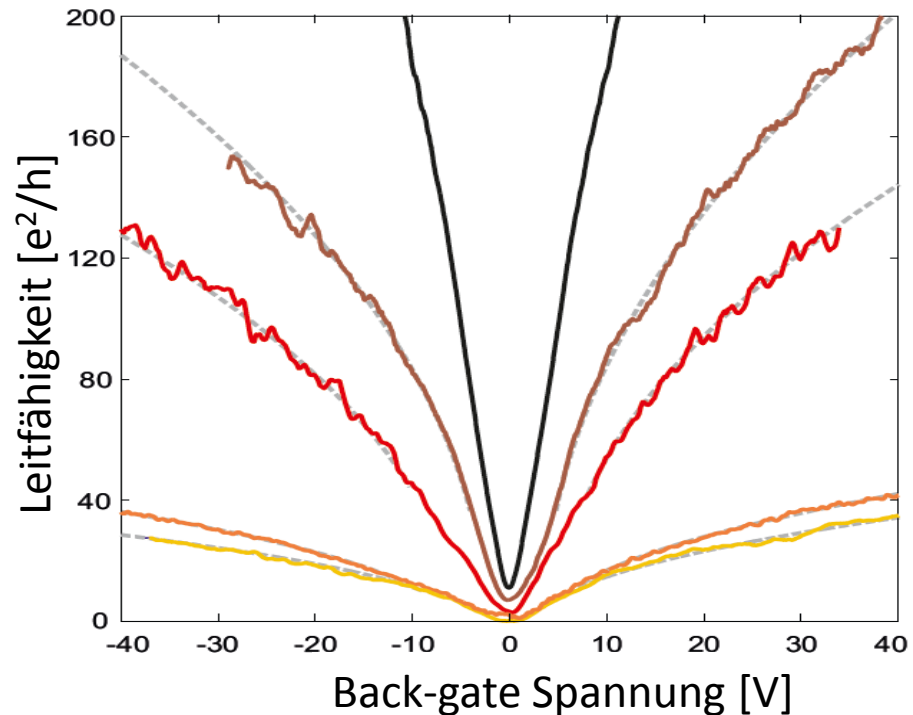
$$J(T, V, \mu) = k_B T \sum_{n_x, n_y} \ln \left\{ 1 + e^{-\beta \left( \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu \right)} \right\}$$

$$= k_B T \frac{A}{(2\pi)^2} \int 2\pi k dk \ln \left\{ 1 + e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} \right\}$$

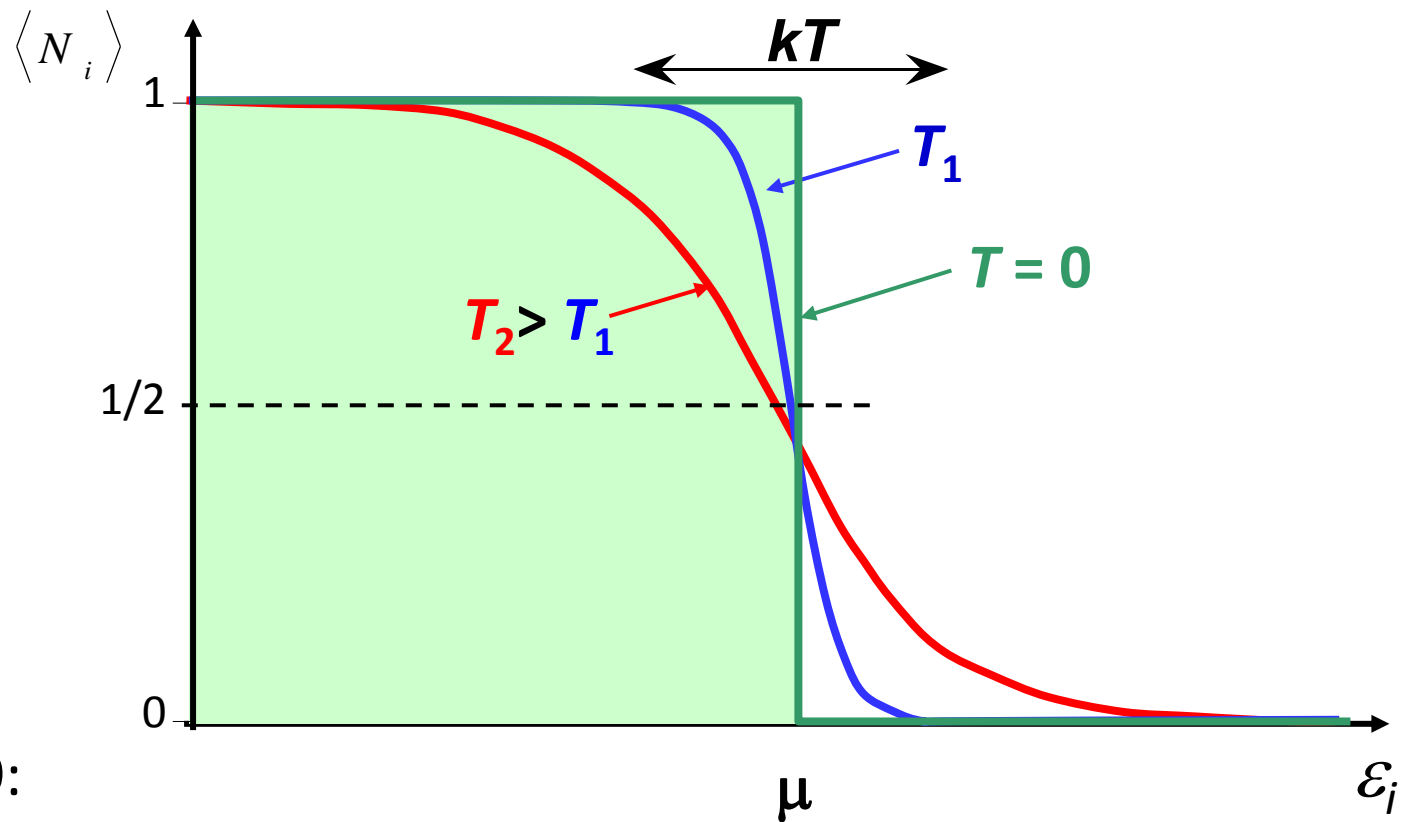
$$\langle N \rangle = -\partial_\mu J(T \rightarrow 0, V, \mu) = 2 \frac{A}{2\pi} \frac{1}{\hbar v_F} \int_0^{E_F} d\varepsilon \cdot \varepsilon = \frac{A}{2\pi} \frac{1}{\hbar v_F} E_F^2$$

$$\frac{1}{e} \frac{C}{A} V_{bg} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\hbar v_F} E_F^2$$

$$E_F \propto \sqrt{V_{bg}} \quad \Rightarrow$$



# 1.3 Endliche Temperaturen:



2)  $T > 0$ :

- $\mu(T, N) = \varepsilon_i$  mit  $\langle N_i \rangle = 1/2$
- $\langle N_i \rangle$  fällt innerhalb von  $kT$  von  $\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1} \approx 1$  auf  $\approx 0$  ab

Elektronengas in Festkörpern: typ. Werte für  
Austrittsarbeit, Fermienergie: 5 - 10 eV

$$kT = 1 \text{ eV} \triangleq 11600 \text{ K} \quad \Rightarrow \quad \frac{kT}{\varepsilon_F} \ll 1$$

$\Rightarrow$  thermodynamische Eigenschaften des Elektronengases  
durch Näherung für tiefe Temperaturen bestimmt

$$pV = \frac{2}{3} E = \frac{g_s V}{6\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}$$

Sommerfeld Entwicklung:

$$\int_0^\infty g(\varepsilon) \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} d\varepsilon \approx \int_0^\mu g(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 g'(\mu) + O\left((kT)^4\right)$$

$$\Rightarrow pV = \frac{g_s V}{6\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \left[ \frac{2}{5} \mu^{5/2} + \frac{\pi^2}{4} (kT)^2 \mu^{1/2} \right] + O(T^4)$$

Berechnung von  $\mu$ :

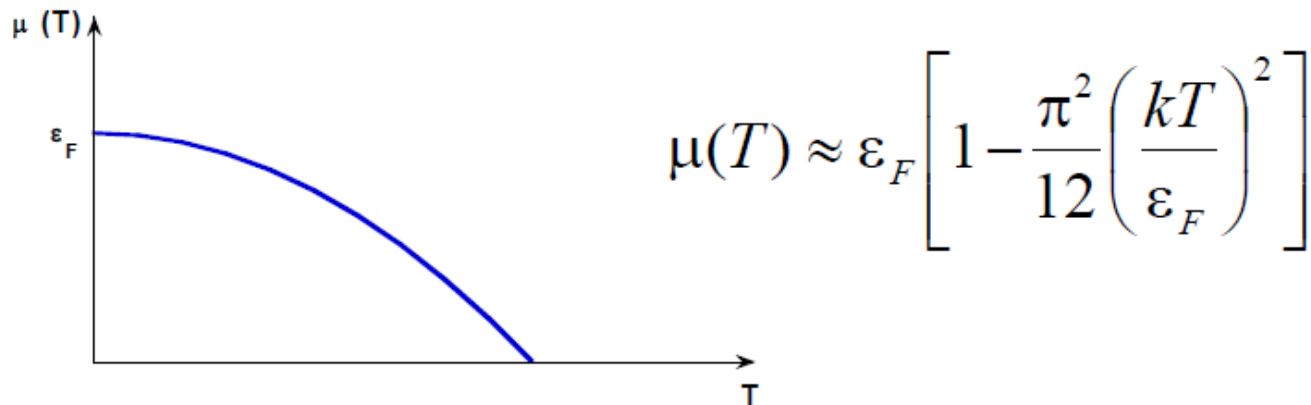
$$\langle N \rangle = \partial_\mu (pV) = \frac{g_s V}{6\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \mu^{3/2} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} \left( \frac{kT}{\mu} \right)^2 \right]$$

Auflösung nach  $\mu$  bis zur Ordnung  $(kT/\mu)^2$ :

$$\mu(T) = \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{6\pi^2 \langle n \rangle}{g_s} \right)^{2/3}}_{\varepsilon_F} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} \left( \frac{kT}{\mu} \right)^2 \right]^{-2/3}$$

$\mu(T) \approx \mu(0) = \varepsilon_F$

$$\mu(T) \approx \varepsilon_F \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} \left( \frac{kT}{\varepsilon_F} \right)^2 \right]^{-2/3} \approx \varepsilon_F \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\varepsilon_F} \right)^2 \right]$$



$$\Rightarrow pV = \frac{2}{5} \langle N \rangle \varepsilon_F \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\varepsilon_F} \right)^2 + O\left( \frac{kT}{\varepsilon_F} \right)^4 \right]$$

$$S = \frac{1}{T} (E + pV - \mu \langle N \rangle) = \frac{1}{T} \left( \frac{5}{2} pV - \mu \langle N \rangle \right)$$

$$S = \frac{1}{T} \langle N \rangle \varepsilon_F \left\{ \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\varepsilon_F} \right)^2 \right] - \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\varepsilon_F} \right)^2 \right] \right\} = \langle N \rangle k \left( \frac{\pi^2 kT}{2 \varepsilon_F} \right)$$

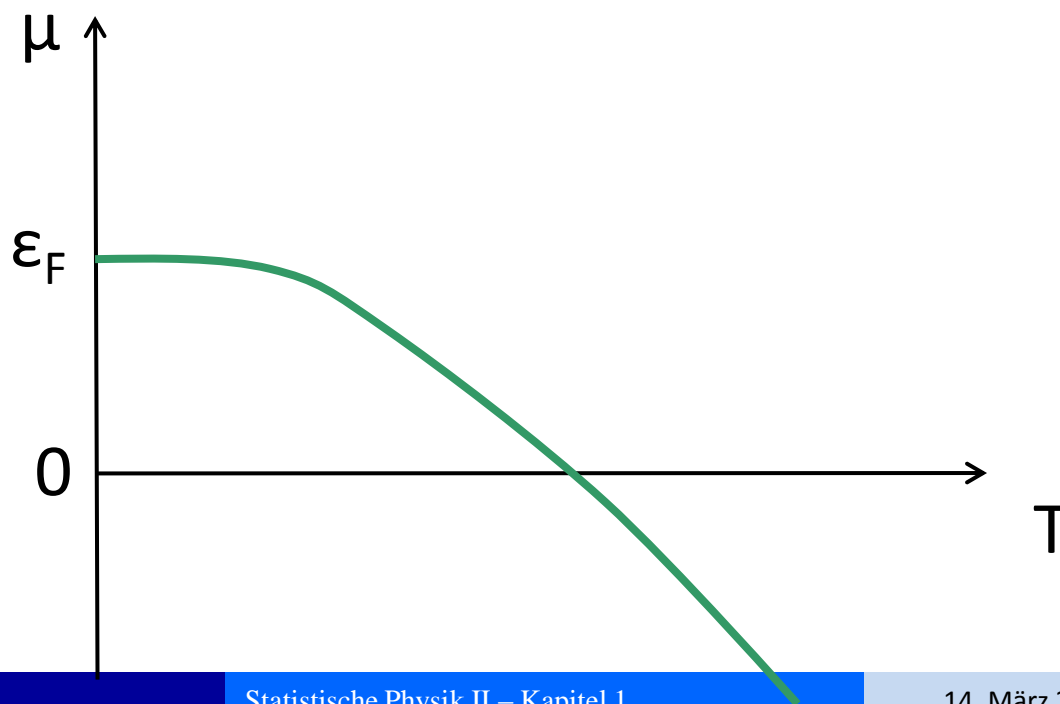
$$C_V = T \partial_T S = T \langle N \rangle k \left( \frac{\pi^2 k}{2 \varepsilon_F} \right) = S$$

2)  $T \rightarrow \infty$ :

- $\langle N_i \rangle \propto e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}$

- $\mu \rightarrow \mu_{\text{klassisch}} = -kT \ln \left[ \frac{V}{\langle N \rangle} \frac{1}{\lambda_T^3} \right] = -kT \ln \left[ \frac{1}{n} \frac{1}{\lambda_T^3} \right] \rightarrow -\infty$

Quantenstatistischer Wert für Fermionen und Bosonen konvergiert zum klassischen Wert für das ideale Gas



zur Wärmekapazität:

Abschätzung für  $C_V \propto T$ :

Dicke der Übergangsschicht  $\propto kT$

$$\Rightarrow E = E(T = 0) + \frac{3}{2} kT \cdot N \cdot \frac{kT}{\epsilon_F} \cdot \alpha$$

Konstante

Energie/Teilchen lt.  
Gleichverteilungssatz

Anteil der Teilchen in  
Übergangsbereich

Teilchen im System

$$\Rightarrow C_V(e^-) = \partial_T E \propto T$$

$T \rightarrow 0$ :

Wärmekapazität der Festkörper:

$$\Rightarrow C_V = AT^3 + BT \leftarrow \text{Elektronen}$$

$\swarrow$  Phononen (Debye)  $\propto T^3$

Bestimmung der Konstanten durch Experiment:  $\frac{C_V}{T} = AT^2 + B$

