M. Mathematische Ergänzungen

M_1 Partielle Ableitungen von Funktionen in mehreren Variablen

Sei $f = f(x, y, z)$ eine (beliebig oft) differenzierbare Funktion in ihren unabhängigen Variablen x, y, und z, dann heißen

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y}$$

(erste) partielle Ableitungen von $f(x, y, z)$ nach dem jeweiligen Argument (wobei die jeweils anderen Argumente konstant gehalten werden)

analog kann man die zweiten partiellen Ableitungen von $f(x, y, z)$ beispielsweise folgendermaßen definieren

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \qquad \text{etc.}$$

unter der Voraussetzung der stetigen Differenzierbarkeit gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad \text{etc.}$$

für $f = f(x, y, z)$ ist das Differential erster Ordnung gegeben durch

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} dz$$

Differentiale höherer Ordnung ($d^2 f$, etc.) lassen sich analog mit Hilfe der höheren partiellen Ableitungen definieren

sind x, y, und z ihrerseits Funktionen einer weiteren Variablen u, also

$$x = x(u) \qquad y = y(u) \qquad z = z(u)$$

dann gilt

$$dx = \frac{dx}{du} du \qquad dy = \frac{dy}{du} du \qquad dz = \frac{dz}{du} du$$

somit erhält man für das Differential erster Ordnung von f

$$df = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \frac{dx}{du} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} \frac{dy}{du} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} \frac{dz}{du}\right] du$$

M_2 Partielle Ableitungen impliziter Funktionen

gilt, daß $f(x, y, z) = \mathrm{const.}$, dann sind die Variablen x, y, und z nunmehr voneinander abhängig

folgende wichtige Relationen können hergeleitet werden:

(i)

$$df = 0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} dz$$

sei nun $z = \mathrm{const.}$ (also $dz = 0$), dann gilt nach Division durch dx

$$0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{z}$$

somit gilt

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{z} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z}}$$

analog erhält man

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y}} \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z}}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y}}$$

(ii) es wird angenommen, daß die Funktion f nach jeder der drei Variablen eindeutig aufgelöst werden kann, also

$$x = x(y,z) \qquad y = y(x,z) \qquad z = z(x,y)$$

daher gilt

$$\begin{aligned} dx &= \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z dy + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y dz \\ dz &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy \end{aligned}$$

durch Elimination von dz folgt

$$dx = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x\right] dy + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx$$

Vergleich der Koeffizienten führt zu

- $$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = 1$$

  bzw.

  $$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = \frac{1}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y} \qquad \text{und entsprechend andere Relationen} \qquad (1)$$

- $$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$$

  und daher mit (1)

  $$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

M_3 Exakte und nicht exakte Differentiale

Differentiale, wie jene auf Folie 3 des Dokuments, sind konstruktionsgemäß exakt

ist hingegen ein Differential gegeben, also

$$d\omega = f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + f_{x_3} dx_3$$

so ist *a priori* nicht offensichtlich, daß es sich um ein exaktes Differential handelt; d.h., es ist nicht offensichtlich, ob es eine Funktion $f = f(x_1, x_2, x_3)$ gibt, sodaß

$$df = d\omega$$

ist dies der Fall, dann gilt offensichtlich

$$f_{x_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x_j \neq x_i} \qquad i, j = 1, 2, 3$$

mit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \qquad i, j = 1, 2, 3$$

für die Beantwortung der Frage, ob es bei gegebenem $d\omega$ eine derartige Funktion $f(x_1, x_2, x_3)$ gibt, lassen sich folgende notwendige Bedingungen angeben (die unter gewissen Zusatzforderungen) auch hinreichend sind (Integrabilitätsbedingungen):

$$\left(\frac{\partial f_{x_i}}{\partial x_j}\right)_{x_k \neq x_j} = \left(\frac{\partial f_{x_j}}{\partial x_i}\right)_{x_k \neq x_i} \qquad i, j, k = 1, 2, 3$$

gelten diese Bedingungen nicht, so heißt $d\omega$ nicht exaktes Differential