

Lösungsskizzen, 3. Tutorium, SS 2016

T9. FREIES TEILCHEN**a). System**

Die Hamiltonfunktion beschreibt daher ein freies Teilchen in einer Dimension.

b). Phasenraum

$$\Gamma = \mathbb{R}^2$$

c). Trajektorie Phasenraum

$E = \text{const}$ entspricht $p = \text{const}$, d. h. es ergeben sich Geraden parallel zur x -Achse.

$$\frac{dp}{dt} = 0 \rightarrow p(t) = p_0 = \text{const}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m} = \frac{p_0}{m} \rightarrow x(t) = x_0 + \frac{p_0}{m}t$$

T10. HARMONISCHER OSZILLATOR**a). System**

Die Hamiltonfunktion beschreibt einen harmonischer Oszillator.

b). Phasenraum

$$\Gamma = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

c). Kurven im Phasenraum

Die Kurven im Phasenraum sind Ellipsen

d). Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -m\omega^2 x \end{aligned}$$

Mithilfe der Randbedingungen $x(0) = x_0$ und $p(0) = p_0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(\omega t) + \frac{p_0}{m\omega} \sin(\omega t) \\ p(t) &= p_0 \cos(\omega t) - m\omega x_0 \sin(\omega t) \end{aligned}$$

T11. TONKS GAS

a). Phasenraum Γ

$$\Gamma = \{(p^N, q^N) \mid 0 \leq q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_{N-1} \leq q_N \leq L, p_i \in \mathbb{R}\} \quad (1)$$

b). Volumen des Konfigurationsraumes

$$V(\Pi) = \int_{0 \leq q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_{N-1} \leq q_N \leq L} dq^N = \frac{L^N}{N!}$$

c). Skizze des Konfigurationsraumes für $N = 2$

Dazu siehe Abb. 1.

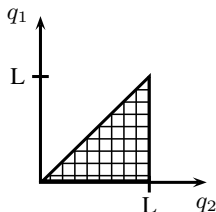


Abbildung 1. Konfigurationsraum Π für $N = 2$

d). Trajektorie im Konfigurationsraum

Es wird folgende Konfiguration gewählt:

$$\begin{aligned} q_1(0) &= L/2 & p_1(0) &= -p/2 \\ q_2(0) &= L/2 & p_2(0) &= p \end{aligned} \quad (2)$$

Mit diesen Anfangswerten ergibt sich folgende Trajektorie Abb. 2. Bei t_1 stößt Teilchen 2 mit der Wand. Ein Stoß

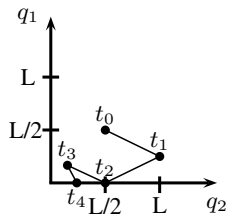


Abbildung 2. Konfigurationsraum Trajektorie

mit der Wand führt dazu, dass sich der Impuls der Teilchen umkehrt. Bei t_2 kollidiert Teilchen 1 mit der linken Wand. Stoßen beide Teilchen miteinander tauschen sie ihre Impulse, da wir gleich schwere Teilchen angenommen haben. Dies ist zum Zeitpunkt t_3 der Fall. Zur Zeit t_4 kollidiert Teilchen 1 wieder mit der linken Wand.

e). Trajektorie Phasenraum

Hierzu betrachten wir aber nur den Unterraum welcher von p_1 und p_2 aufgespannt wird. Es folgt die Trajektorie Abb. 3.

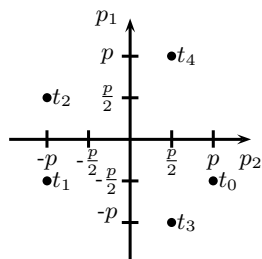


Abbildung 3. Trajektorie im Phasenraum