Lösungsskizzen, 2. Tutorium, SS 2016

T5. POISSONVERTEILUNG

a). als Grenzwert der Binominalverteilung

Ausgehend von der gegebenen Binominalverteilung,

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k q^{(n-k)} \tag{1}$$

kann umgeformt werden,

$$\binom{n}{k} p^k q^{(n-k)} = \frac{\overbrace{(n-k+1)\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n}^{\text{genau k Terme}}}{k!} \frac{n^k p^k}{n^k} \frac{(1-p)^n}{(1-p)^k}. \tag{2}$$

Eine weitere Umgruppierung führt auf,

$$\frac{n-k+1}{n} \frac{n-k+2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-1}{n} \cdot 1 \cdot \frac{p^k n^k}{k!} \frac{(1-p)^n}{(1-p)^k} =: \alpha \frac{p^k n^k}{k!} \frac{(1-p)^n}{(1-p)^k} \tag{3}$$

Falls maximal ein Grenzwert α divergiert, bzw. gegen 0 konvergiert, kann der Grenzwert des obigen Ausdrucks aus dem Produkt der Grenzwerte erhalten werden,

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{p\to 0} \alpha = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \overbrace{\frac{k-1}{n}}^{\to 0}\right) \cdot \left(1 - \frac{k-2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot 1 = 1 \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{p\to 0} \frac{p^k n^k}{k!} = \frac{\lambda^k}{k!} \qquad \text{wobei die Grösse } pn = const \tag{5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{p\to 0} (1-p)^n = e^{-1\cdot\lambda} \tag{6}$$

$$\lim_{p\to 0} (1-p)^k = 1. \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

Man erhält also

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{p\to 0} P(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad \text{die Poissonverteilung} \tag{9}$$

b). Normierung

$$\sum_{k=0}^{\infty} P^{Poisson}(\lambda, k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = 1. \tag{10}$$

c). Erwartungswert

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k P^{Poisson}(\lambda, k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda \tag{11}$$

d). Varianz

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \lambda^2 + \lambda \tag{12}$$

$$Var[X] = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \tag{13}$$

T6. SYSTEMBESTIMMUNG

a). $S_a(E, V, N) = k_B N ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{E}{N}\right)^{3/2}\right]$

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S_a}{\partial E}\right)_{V,N} = \frac{3}{2} N k_B \frac{1}{E} \quad \Rightarrow E = \frac{3}{2} N k_B T \tag{14}$$

$$\frac{P}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{E,N} = \frac{k_B N}{V} \quad \Rightarrow PV = N k_B T \tag{15}$$

Das System ist daher ein 1-atomiges ideales Gas in 3 Dimensionen.

b). $S_b(E, V, N) = k_B N ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{E}{N}\right)\right]$

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S_a}{\partial E}\right)_{V,N} = \frac{k_B N}{E} \quad \Rightarrow E = N k_B T \tag{16}$$

$$\frac{P}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{E,N} = \frac{k_B N}{V} \quad \Rightarrow PV = N k_B T \tag{17}$$

Das System ist daher ein 1-atomiges ideales Gas in 2 Dimensionen.

T7. GRUNDGLEICHUNG DER THEROMODYNAMIK

(Integrabilitätsbedingung)

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P. \tag{18}$$

a). $PV = N k_B T$ und $E = bT^2$

Einsetzen in Gl.18, führt zu einer wahren Aussage, somit ist die Grundgleichung der TD erfüllt.

$$0 = T \frac{N k_B}{V} - P = 0 \tag{19}$$

b). $PV = Nk_BT$ **und** $E = bT + V$

Einsetzen in Gl.18, führt zu einem Widerspruch.

$$1 = T\frac{Nk_B}{V} - P = 0 \tag{20}$$

c). $PV = Nk_BT + aT^2/V$ **und** $E = bT$

Einsetzen in Gl.18, führt zu einem Widerspruch.

$$0 = T\left(\frac{Nk_B}{V} + \frac{2aT}{V^2}\right) - \frac{Nk_BT}{V} - \frac{aT^2}{V^2} = \frac{aT^2}{V^2} \tag{21}$$

d). $PV = Nk_BT + aT^2/V$ **und** $E = bT - aT^2/V$

Einsetzen in Gl.18, führt zu einer wahren Aussage, somit ist die Grundgleichung der TD erfüllt.

$$\frac{aT^2}{V^2} = T\left(\frac{Nk_B}{V} + \frac{2aT}{V^2}\right) - \frac{Nk_BT}{V} - \frac{aT^2}{V^2} = \frac{aT^2}{V^2} \tag{22}$$

T8. BERECHUNG DER ZUSTANDSGLEICHUNGEN:

a). kalorische Zustandsgleichung

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V = \frac{1}{T} = cV^{1/4}3/4E^{-1/4} \qquad\qquad E(T,V) = (c3/4)^4VT^4$$

b). thermische Zustandsgleichung

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_S = \frac{p}{T} = c\underbrace{E}_{(c3/4)^4VT^4}{}^{3/4}\frac{1}{4}V^{-3/4} \qquad\qquad p(T,V) = c^4\frac{3^3}{4^4}T^4$$