H. Homogene Funktionen

1. Homogene Funktionen in einer Variablen

$f(x)$ heißt homogen, wenn für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(\lambda x) = g(\lambda) f(x)$$

zum Beispiel ist $f(x) = x^2$ eine homogene Funktion

Konsequenz:
ist $f(x_0)$ für ein beliebiges x_0 bekannt und ist $g(\lambda)$ bekannt, dann ist $f(x)$ für alle x bekannt

es gilt (ohne Beweis):

$$g(\lambda) = \lambda^p$$

p heißt Grad der Homogenität

2. Homogene Funktionen in mehreren Variablen

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ heißt homogen, wenn für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n) = g(\lambda) f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

zum Beispiel ist $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ eine homogene Funktion

es gilt (ohne Beweis):

$$g(\lambda) = \lambda^p$$

Konsequenzen:

(i) sei $f(x_1, x_2)$ eine homogene Funktion und sei $\lambda = 1/x_2$, dann gilt

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) = f\left(\frac{x_1}{x_2}, 1\right) = \left(\frac{1}{x_2}\right)^p f(x_1, x_2)$$

somit ist $f(x_1/x_2, 1) = F(z)$ eine Funktion in einer Variablen mit

$$f(x_1, x_2) = x_2^p F\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

(ii) analog gilt:

$$f(x_1, x_2) = x_1^p \tilde{F}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

3. Verallgemeinerte homogene Funktionen

sei $f(x_1, x_2)$ eine Funktion von zwei Variablen (o.B.d.A.), dann heißt $f(x_1, x_2)$ verallgemeinerte homogene Funktion, wenn für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$f\left(\lambda^a x_1, \lambda^b x_2\right) = \lambda f(x_1, x_2)$$

wobei a und b beliebig sind

es handelt sich (ohne Beweis) um den höchsten Grad der Verallgemeinerung, da die Relation

$$f\left(\lambda^a x_1, \lambda^b x_2\right) = \lambda^p f(x_1, x_2)$$

bereits in obiger Relation enthalten ist