$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{A} \longrightarrow \hat{A} \text{ s.a.} \\ \mathcal{B} \longrightarrow \hat{B} \text{ s.a.}\end{array}\right\} \boxed{[\hat{A},\hat{B}] = i\hat{K}} \qquad (\hat{K} \text{ s.a.; Sonderfall } \hat{K} = \hat{0})$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\Delta a \cdot \Delta b \geq \frac{|\langle\psi, \hat{K}\psi\rangle|}{2}}$$

Beachte: $\Delta a \equiv (\Delta a)_\psi$, $\Delta b \equiv (\Delta b)_\psi$; $\langle\psi, \hat{K}\psi\rangle = \langle\hat{K}\rangle \equiv \langle\hat{K}\rangle_\psi$, falls $\mathcal{K} \rightarrow \hat{K}$.

Beweis: 1) Ausgangspunkt: Schwarzsche Ungleichung

$$\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle \geq |\langle u,v\rangle|^2 \quad , \forall u,v \in \mathcal{R}$$

Beachte: $=$, falls $u = \alpha v$ ("parallel").

$$\widehat{\delta A} := \hat{A} - \langle\hat{A}\rangle\hat{1} \quad , \quad \widehat{\delta B} := \hat{B} - \langle\hat{B}\rangle\hat{1} \quad ; \quad \widehat{\delta A}, \widehat{\delta B} \text{ s.a.}, \ [\widehat{\delta A}, \widehat{\delta B}] = i\hat{K}$$

2) Wahl: $u = \widehat{\delta A}\psi$, $v = \widehat{\delta B}\psi$

$$\langle\widehat{\delta A}\psi, \widehat{\delta A}\psi\rangle\langle\widehat{\delta B}\psi, \widehat{\delta B}\psi\rangle \geq |\langle\widehat{\delta A}\psi, \widehat{\delta B}\psi\rangle|^2$$

$$\underbrace{\langle\psi, (\widehat{\delta A})^2\psi\rangle}_{(\Delta a)^2}\underbrace{\langle\psi, (\widehat{\delta B})^2\psi\rangle}_{(\Delta b)^2} \geq |\langle\psi, \widehat{\delta A}\,\widehat{\delta B}\psi\rangle|^2$$

$$\Delta a \cdot \Delta b \geq |\langle \psi, \widehat{\delta A}\, \widehat{\delta B}\, \psi \rangle|$$

3) $$\widehat{\delta A}\,\widehat{\delta B} = \tfrac{1}{2}\underbrace{(\widehat{\delta A}\,\widehat{\delta B} + \widehat{\delta B}\,\widehat{\delta A})}_{=:\hat{D}\ \text{s.a.}} + \tfrac{1}{2}\underbrace{(\widehat{\delta A}\,\widehat{\delta B} - \widehat{\delta B}\,\widehat{\delta A})}_{i\hat{K}\quad (\hat{K}\ \text{s.a.})}$$

$$\Delta a \cdot \Delta b \geq \tfrac{1}{2}\,|\underbrace{\langle \psi, \hat{D}\psi\rangle}_{\substack{\text{reell, da}\\ \hat{D}\ \text{s.a.}}} + i\,\underbrace{\langle \psi, \hat{K}\psi\rangle}_{\substack{\text{reell, da}\\ \hat{K}\ \text{s.a.}}}| = \tfrac{1}{2}\underbrace{\sqrt{\underbrace{\langle \psi, \hat{D}\psi\rangle^2}_{\geq 0} + \langle \psi, \hat{K}\psi\rangle^2}}_{\geq |\langle \psi, \hat{K}\psi\rangle|}$$

$$\Delta a \cdot \Delta b \geq \frac{|\langle \psi, \hat{K}\psi\rangle|}{2}$$

▲ Was ist eingegangen?
1. GG + 2. GG + 3. GG

Beachte: Bedingungen, daß "=" gilt:

1) $\widehat{\delta A}\psi$, $\widehat{\delta B}\psi$ "parallel" (proportional)

2) $\langle \psi, \hat{D}\psi\rangle = \langle \psi, (\widehat{\delta A}\,\widehat{\delta B} + \widehat{\delta B}\,\widehat{\delta A})\psi\rangle = 0$

1)+2) liefern "Klasse" von $\psi \in \mathcal{H}$, für welche in HB "=" gilt. ●

$$\boxed{[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{K} \quad \Longrightarrow \quad \Delta a \cdot \Delta b \geq \frac{|\langle \psi, \hat{K}\psi \rangle|}{2}}$$

Bemerkung:
$\hat{K}$ ist selbstadjungiert!

1) $\hat{K} = \hat{O}$: $\hat{A}, \hat{B}$ "vertauschbar" ($\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ "verträglich")

$$\Delta a \cdot \Delta b \geq 0$$

$\Delta a \geq 0$, falls $\sigma_d(\hat{A}) \neq \{\}$; $\Delta a > 0$, falls $\sigma_d(\hat{A}) = \{\}$

analog Δb

Beispiele: I) $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$

$$[\hat{x}, \hat{y}] = \hat{O} \Longrightarrow \underbrace{\Delta x}_{>0} \cdot \underbrace{\Delta y}_{>0} \geq 0, \text{ da } \sigma(\hat{x}) = \sigma(\hat{y}) = \mathbb{R}$$

II) $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$

$$[\hat{\vec{\ell}}^2, \hat{\ell}_z] = \hat{O} \Longrightarrow \underbrace{\Delta \vec{\ell}^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\Delta \ell_z}_{\geq 0} \geq 0, \text{ da } \sigma(\hat{\vec{\ell}}^2) = \{\ell(\ell+1)\hbar^2, \ \ell = 0, 1, 2, \ldots\}$$

$$\sigma(\hat{\ell}_z) = \{m_\ell \hbar, \ m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

Bemerkung: $\exists$ vollständiges System gemeinsamer auf 1 normierter EV von $\hat{\vec{\ell}}^2$ und $\hat{\ell}_z$, d.h. ein vollständiges ONS in $L^2(\mathbb{R}^3)$, für welches $\Delta\vec{\ell}^2$ und $\Delta\ell_z$ beide null sind. ●

2) $\hat{K} = K\hat{1}$, $K \in \mathbb{R}$, $K \neq 0$: $\hat{A}, \hat{B}$ erfüllen "kanonische Vertauschungs=beziehung" ($\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sind "kanonisch konjugiert" und damit "nicht verträglich")

$$\boxed{\Delta a \cdot \Delta b \geq \frac{|K|}{2} > 0}$$

feste untere Schranke!

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$: "Wie Hund und Katz'!"

$\Rightarrow$ $\Delta a > 0$, $\Delta b > 0$, d.h. ohne das EWP zu lösen, weiß man, daß $\sigma_d(\hat{A}) = \sigma_d(\hat{B}) = \{\}$ gilt!

$\Delta a \downarrow 0 \Rightarrow \Delta b \uparrow +\infty$

$\Delta b \downarrow 0 \Rightarrow \Delta a \uparrow +\infty$

Beispiel: $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$

"RATEWEG": Unbestimmtheitsprinzip!

$$\boxed{[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar\hat{1} \implies \underbrace{\Delta x}_{>0} \cdot \underbrace{\Delta p}_{>0} \geq \frac{\hbar}{2}}$$

INTERPRETATION!

Bedingung für "=": s. HB3', HB3''

3) $\hat{K} \neq \hat{0}\,,\ \hat{K} \not\propto \hat{1}$: $\hat{A}, \hat{B}$ "nicht vertauschbar" ($\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ "nicht verträglich")

$$\Delta a \cdot \Delta b \geq \underbrace{\frac{|\langle \psi, \hat{K}\psi \rangle|}{2}}_{\geq 0}$$

Δa: >0 oder ≥ 0; Δb: >0 oder ≥ 0 (s. Punkt 1))

Falls $\hat{K}$ Observable $\mathcal{K}$ repräsentiert: $\langle \psi, \hat{K}\psi \rangle = \langle \hat{K} \rangle$

Beispiele: I) $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2}\hat{x}^2$

$$[\hat{x}, \hat{H}] = i\frac{\hbar}{m}\hat{p} \implies \underbrace{\Delta x}_{>0} \cdot \underbrace{\Delta E}_{\geq 0} \geq \underbrace{\frac{\hbar |\langle \hat{p} \rangle|}{2m}}_{\geq 0}$$

Ergänzung zum Beispiel $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$:

Minimum-Unschärfen-Produkt ZF $\equiv$ "MinimumWP"

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{\hbar}{2} \iff \psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi}\,\delta_0(t)}} \exp\left[-\frac{(x-x_0(t))^2}{4\delta_0^2(t)} + \frac{i}{\hbar} p_0(t)x + i\gamma(t)\right]$$

$\delta_0, \gamma, x_0, p_0$ reell(wertig)

Bemerkungen: 1) Wie erhält man $\psi(x,t)$?

$$\left.\begin{array}{l} \text{a)}\ \widehat{\delta x}\,\psi = \alpha\,\widehat{\delta p}\,\psi \\ \text{b)}\ \langle \psi, (\widehat{\delta x}\,\widehat{\delta p} + \widehat{\delta p}\,\widehat{\delta x})\psi \rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Dgl. für } \psi \in L^2(\mathbb{R})$$

2) $\psi(x,t)$ aus Oszillatorbeispiel gehörte zu dieser "Klasse":

$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}} \exp\left[-\frac{\alpha^2(x-a\cos\omega_0 t)^2}{2}\right] \exp\left[-i\left(\frac{\omega_0 t}{2} + \alpha^2 a x \sin\omega_0 t - \frac{\alpha^2 a^2}{4}\sin 2\omega_0 t\right)\right]$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}$$

3) $\psi(x,t) = u_0(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_0(t-t_0)}$, $\quad u_0(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}}\, e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$

(stationärer Zustand) $\quad E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$

gehört zu dieser "Klasse".

4) $\underline{\psi(x,t) = u_n(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t-t_0)}}$, $u_n(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{2^n n! \sqrt{\pi}}}\, e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} H_n(\alpha x)$

(stationärer Zustand)

$$E_n = (n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega_0$$

gehört für $n \geq 1$ <u>nicht</u> zu dieser "Klasse". Es gilt (zeige dies selbst durch Berechnen von Δx, Δp !):

$$\Delta x \cdot \Delta p = (2n+1)\frac{\hbar}{2} > \frac{\hbar}{2} \quad \text{für } n \geq 1 \qquad \left(= \frac{\hbar}{2} \text{ für } n=0;\right.$$

s. voriger Punkt 3)

z.B.: a) $\psi \equiv \psi_t = e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t-t_0)} u_n \quad , \qquad \hat{H} u_n = E_n u_n$:

$$\Rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}(2n+1)} > 0 \quad , \quad \Delta E = 0 \quad , \quad \langle \hat{p} \rangle = 0$$

$$\underbrace{\Delta x}_{>0} \cdot \underbrace{\Delta E}_{0} \geq \underbrace{\frac{\hbar |\langle \hat{p} \rangle|}{2m}}_{0}$$

Bemerkung: gemeinsame EV von $\hat{x}$, $\hat{H}$ $\nexists$

b) ψ nicht EV von $\hat{H}$: $\Delta x > 0$, $\Delta E > 0$

$$\underbrace{\Delta x}_{>0} \cdot \underbrace{\Delta E}_{>0} \geq \underbrace{\frac{\hbar |\langle \hat{p} \rangle|}{2m}}_{\geq 0 \text{ (je nach } \psi)}$$

II) $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$

$$[\hat{\ell}_x, \hat{\ell}_y] = i\hbar \hat{\ell}_z \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{\Delta \ell_x}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\Delta \ell_y}_{\geq 0} \geq \underbrace{\frac{\hbar |\langle \hat{\ell}_z \rangle|}{2}}_{\geq 0}$$

da $\sigma(\hat{\ell}_x) = \sigma(\hat{\ell}_y) = \{0, \pm\hbar, \pm 2\hbar, \dots\}$

z.B. a) $\psi \equiv \psi_t(\vec{r}) = e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t-t_0)}\, u_{n\ell m_\ell}(\vec{r})$ mit $\ell > 0$,

Wobei $\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} - \frac{e^2}{\hat{r}}$ (H-Atom nichtrelativistisch)

Zur Erinnerung: $\hat{H} u_{n\ell m_\ell}(\vec{r}) = E_n u_{n\ell m_\ell}(\vec{r})$

$\hat{\vec{\ell}}^2 u_{n\ell m_\ell}(\vec{r}) = \ell(\ell+1)\hbar^2 u_{n\ell m_\ell}(\vec{r})$ $\qquad n = 1,2,3,\dots$

$\ell = 0,1,\dots,n-1$

$\hat{\ell}_z u_{n\ell m_\ell}(\vec{r}) = m_\ell \hbar\, u_{n\ell m_\ell}(\vec{r})$ $\qquad m_\ell = -\ell, -\ell+1, \dots, +\ell$

$$u_{n\ell m_\ell}(\vec{r}) = R_{n\ell}(r)\, \underbrace{Y_{\ell m_\ell}(\vartheta,\varphi)}_{\substack{\text{winkelabhängig für } \ell>0 \\ \text{Konstante } \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\right) \text{ für } \ell = m_\ell = 0}}$$

$\ell > 0$!

Für obiges ψ:

$$\Delta\ell_x > 0\,,\quad \Delta\ell_y > 0\,,\quad \langle\hat{\ell}_z\rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } m_\ell = 0 \\ \neq 0 & \text{für } m_\ell \neq 0 \end{cases} \quad = m_\ell \hbar$$

$$\underbrace{\Delta\ell_x}_{>0} \cdot \underbrace{\Delta\ell_y}_{>0} \geq \underbrace{\frac{\hbar\,|\langle\hat{\ell}_z\rangle|}{2}}_{\geq 0} = m_\ell \frac{\hbar^2}{2}$$

b) $\psi \equiv \psi_t(\vec{r}) = e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t-t_0)}\, u_{n00}(\vec{r}) = \psi_t(r, \cancel{\vartheta}, \cancel{\varphi})$ (n kann 1 oder 2 oder 3 oder 4 … sein!)

$$\Longrightarrow \quad \hat{\ell}_x \psi = 0 = 0\cdot\psi \,, \quad \hat{\ell}_y \psi = 0\cdot\psi \,, \quad \hat{\ell}_z \psi = 0\cdot\psi$$

Bemerkung: $\exists$ abzählbar unendlich viele gemeinsame EV von $\hat{\ell}_x, \hat{\ell}_y$, obwohl $[\hat{\ell}_x, \hat{\ell}_y] \neq \hat{0}$, nämlich $\{u_{n00},\ n = 1, 2, 3, \dots\}$. Es gibt aber kein vollständiges System gemeinsamer EV in $L^2(\mathbb{R}^3)$!

$$\underbrace{\Delta\ell_x}_{0} \cdot \underbrace{\Delta\ell_y}_{0} \geq \underbrace{\frac{\hbar\,|\langle\hat{\ell}_z\rangle|}{2}}_{0}$$

Beachte:

$$\langle\hat{\ell}_z\rangle = \langle\psi, \underbrace{\hat{\ell}_z\psi}_{0}\rangle = 0 \,!$$

Bemerkung: Obwohl es möglich ist, daß $\Delta\ell_x$, $\Delta\ell_y$ beide null sind, nennt man $\mathcal{L}_x$, $\mathcal{L}_y$ "nicht verträglich";

Grund?