Gemeinsames EWP zweier s.a. Operatoren

(Allgemein, d.h. $\mathcal{H}$ nicht spezifiziert!)

EWP: $\hat{A}u = \lambda u$, $\hat{B}u = \mu u$ $\quad u \neq 0$, ~~$u \in \mathcal{D}_{\hat{A}} \cap \mathcal{D}_{\hat{B}} \subseteq \mathcal{H}$~~

λ, μ EW-Parameter

"Notwehr" wie bei $\hat{A}$ alleine ...

Satz:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} \text{ s.a.} \\ \hat{B} \text{ s.a.} \\ [\hat{A},\hat{B}] = \hat{0} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \exists \text{ "VONS" gemeinsamer EV von } \hat{A}, \hat{B}$$

Beweis s. Skriptum
Weg! Beispiele!

Lösung des gemeinsamen EWP vertauschbarer s.a. Operatoren für den Fall $\sigma(\hat{A}) = \sigma_d(\hat{A}) = \{a_1, a_2, \ldots\}$, $\sigma(\hat{B}) = \sigma_d(\hat{B}) = \{b_1, b_2, \ldots\}$ angeschrieben:

$$\hat{A}u_{nm\alpha} = a_n u_{nm\alpha}$$
$$\hat{B}u_{nm\alpha} = b_m u_{nm\alpha} \quad , \quad \alpha = 1,2,\ldots,g_{nm} \geq 1$$
$$(n,m) \in \mathbb{I}(\hat{A},\hat{B})$$

Beachte: Dabei kann $\mathbb{I}(\hat{A},\hat{B}) = \{(1,1),(1,2),\ldots,(2,1),(2,2),\ldots\}$
oder $\mathbb{I}(\hat{A},\hat{B}) \subset \{(1,1),(1,2),\ldots,(2,1),(2,2),\ldots\}$ sein!

↑!! Beispiele! Veranschaulichung!

EV $\{u_{nm\alpha}\,,\ (n,m) \in \mathbb{I}(\hat{A},\hat{B})\,,\ \alpha = 1,2,\dots,g_{nm}\}$

VONS in $\mathcal{H}$, d.h.

$$\boxed{\begin{gathered}\langle u_{n'm'\alpha'}\,, u_{n''m''\alpha''}\rangle = \delta_{n'n''}\,\delta_{m'm''}\,\delta_{\alpha'\alpha''} \\ f = \sum_{(n,m)\in\mathbb{I}(\hat{A},\hat{B})} \sum_{\alpha=1}^{g_{nm}} \langle u_{nm\alpha}, f\rangle\, u_{nm\alpha}\,, \quad \forall f \in \mathcal{H}\end{gathered}}$$

Projektor in Teilraum $\mathcal{H}(a_n, b_m)$, $(n,m) \in \mathbb{I}(\hat{A},\hat{B})$ fest, aufgespannt von den Vektoren $\{u_{nm\alpha}\,, \alpha = 1,2,\dots,g_{nm}\}$:

$$\hat{P}_{nm} = \sum_{\alpha=1}^{g_{nm}} \langle u_{nm\alpha}\,, \cdot\,\rangle\, u_{nm\alpha} \longleftarrow \mathcal{R}_{nm}$$

Interpretation!

Orthogonalität und Vollständigkeit der Projektoren $\hat{P}_{nm}$:

$$\boxed{\begin{gathered}\hat{P}_{n'm'}\hat{P}_{n''m''} = \hat{0}\,, \quad \text{falls } (n',m') \neq (n'',m'') \\ \sum_{(n,m)\in\mathbb{I}(\hat{A},\hat{B})} \hat{P}_{nm} = \hat{1}\end{gathered}}$$

Wie hängt dies mit der "Zerlegung" von $\mathcal{H}$ bzgl. $\hat{A}$ allein bzw. bzgl. $\hat{B}$ allein zusammen?

$\hat{A}$: $\mathcal{H}(a_n) \ldots$ Projektor $\hat{Q}_n$

$$\hat{Q}_{n'}\hat{Q}_{n''} = \hat{0} \text{ , falls } n' \neq n''$$

$$\sum_{n:\,a_n \in \sigma(\hat{A})} \hat{Q}_n = \hat{1} \quad , \quad \hat{A} = \sum_{n:\,a_n \in \sigma(\hat{A})} a_n \hat{Q}_n$$

$\hat{B}$: $\mathcal{H}(b_m) \ldots$ Projektor $\hat{R}_m$

$$\hat{R}_{m'}\hat{R}_{m''} = \hat{0} \text{ , falls } m' \neq m''$$

$$\sum_{m:\,b_m \in \sigma(\hat{B})} \hat{R}_m = \hat{1} \quad , \quad \hat{B} = \sum_{m:\,b_m \in \sigma(\hat{B})} b_m \hat{R}_m$$

$$\hat{Q}_n = \sum_{m:\,(n,m) \in \mathbb{I}(\hat{A},\hat{B})} \hat{P}_{nm} \quad , \quad \hat{R}_m = \sum_{n:\,(n,m) \in \mathbb{I}(\hat{A},\hat{B})} \hat{P}_{nm}$$

früheres Beispiel!

$$\hat{A} = \sum_{(n,m) \in \mathbb{I}(\hat{A},\hat{B})} a_n \hat{P}_{nm} \quad , \quad \hat{B} = \sum_{(n,m) \in \mathbb{I}(\hat{A},\hat{B})} b_m \hat{P}_{nm}$$

Bemerkungen zum Satz: Falls

$[\hat{A},\hat{B}] = i\hat{K}$, $\hat{K} \neq \hat{O}$

$\nexists$ "VONS" gemeinsamer EV von $\hat{A},\hat{B}$.

Aber speziell:

a) im Falle $\hat{K} = K\hat{1}$, $K \in \mathbb{R}$, $K \neq 0$:

es gibt keinen einzigen gemeinsamen EV von $\hat{A},\hat{B}$; +)

b) im Falle $\hat{K} \neq K\hat{1}$, $\hat{K} \neq \hat{O}$:

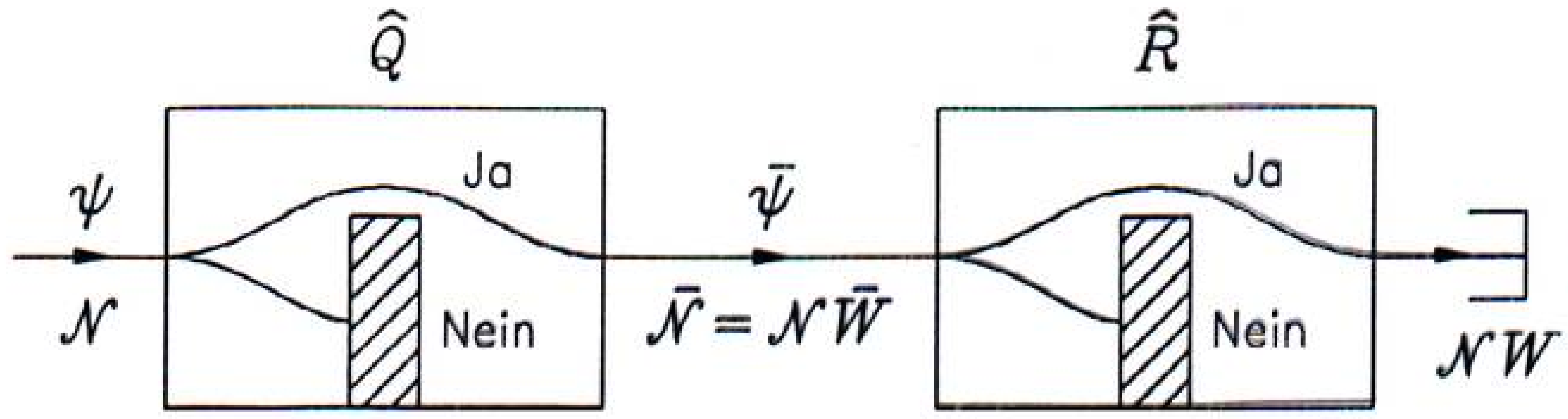
es kann endlich viele oder sogar unendlich viele gemeinsame EV von $\hat{A},\hat{B}$ geben, diese bilden aber kein vollständiges System! ++)

+) Beispiel: $\hat{x}, \hat{p}$ in $L^2(\mathbb{R})$

++) Beispiel: $\hat{\ell}_x, \hat{\ell}_y$ in $L^2(\mathbb{R}^3)$ besitzen unendlich viele (linear unabhängige) gemeinsame EV zum EW-Paar $(0, \emptyset)$;
s. später (bei HB-Beziehungen)

Zunächst noch <u>nicht</u> $[\hat{A},\hat{B}]=\hat{0}$ angenommen!

Fall 1: Umpräparation bzgl. $\mathfrak{A}$, unmittelbar darauf Messung von $\mathfrak{B}$



W = ?
(Wahrscheinlichkeit für "Ja, ja")

$\mathfrak{A}$: Meßwert aus $\tau(\hat{A})\subseteq\sigma(\hat{A})$?

$\mathfrak{B}$: Meßwert aus $\tau(\hat{B})\subseteq\sigma(\hat{B})$?

3.GG: $\quad \overline{W}=\|\hat{Q}\psi\|^2 \quad , \quad W=\overline{W}\,\underbrace{\|\hat{R}\overline{\psi}\|^2}$

bedingte Wahrscheinlichkeit für "ja" beim 2. Schritt, unter der Hypothese, daß die Antwort beim 1. Schritt "ja" war

4.GG: $\quad \overline{\psi}=\dfrac{\hat{Q}\psi}{\|\hat{Q}\psi\|}$

zusammen:

$$W=\|\hat{Q}\psi\|^2\left\|\frac{\hat{R}\hat{Q}\psi}{\|\hat{Q}\psi\|}\right\|^2$$

$$\underline{\underline{W=\|\hat{R}\hat{Q}\psi\|^2}}$$

Bei umgekehrter Reihenfolge der Apparate (zuerst $\mathfrak{B}$, dann $\mathfrak{A}$):

$$W=\|\hat{Q}\hat{R}\psi\|^2$$

$\Rightarrow$ Es kommt dann und nur dann*) nicht auf die Reihenfolge der Apparate an, falls

$$\hat{R}\hat{Q}=\hat{Q}\hat{R}$$

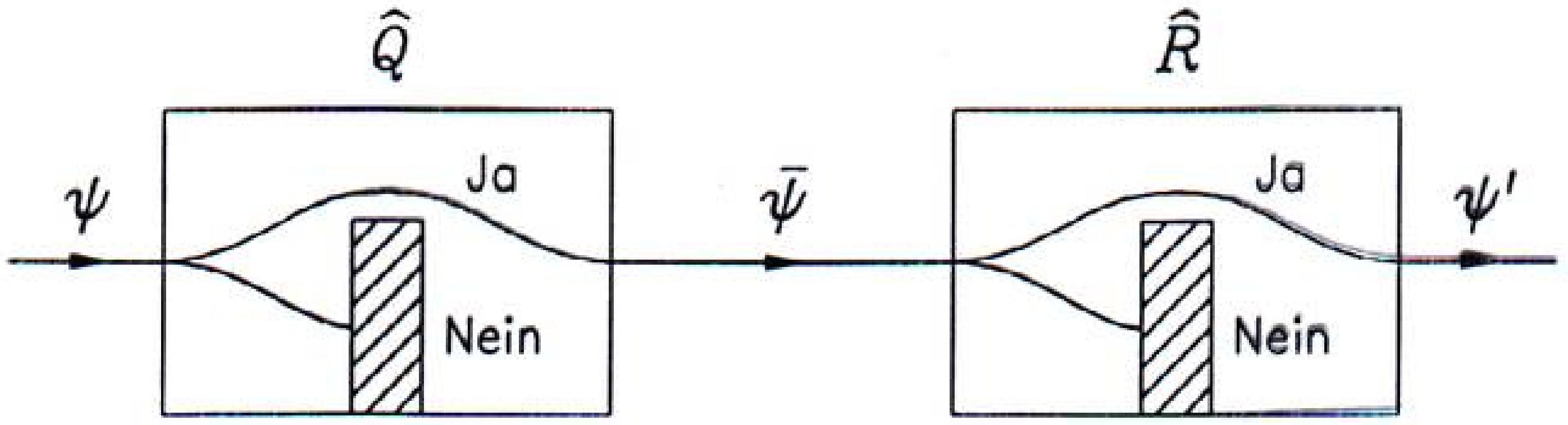
gilt.

*) bei beliebigem ψ

Aufgabe 50:

Zeige: Gilt $\hat{Q}\hat{R} = \hat{R}\hat{Q}$, d.h. $[\hat{Q},\hat{R}] = \hat{0}$, so ist $\hat{P} := \hat{Q}\hat{R} = \hat{R}\hat{Q}$ Projektionsoperator!

Fall 2: Umpräparation bzgl. $\mathfrak{A}$, unmittelbar darauf Umpräparation bzgl. $\mathfrak{B}$



$\mathfrak{A}$: Meßwert aus $\tau(\hat{A}) \subseteq \sigma(\hat{A})$?

$\mathfrak{B}$: Meßwert aus $\tau(\hat{B}) \subseteq \sigma(\hat{B})$?

$\psi' = ?$ (ψ' ZV der Gesamtheit von Systemen mit "Ja, ja")

4.GG: $\bar{\psi} = \dfrac{\hat{Q}\psi}{\|\hat{Q}\psi\|}$

4.GG: $\psi' = \dfrac{\hat{R}\bar{\psi}}{\|\hat{R}\bar{\psi}\|}$

Zusammen: Wegen $\hat{R}\bar{\psi} \propto \hat{R}\hat{Q}\psi$

$$\psi' = \frac{\hat{R}\hat{Q}\psi}{\|\hat{R}\hat{Q}\psi\|} \qquad (\text{VS: } \hat{R}\hat{Q}\psi \neq 0)$$

Bei umgekehrter Reihenfolge der Apparate (zuerst $\mathfrak{B}$, dann $\mathfrak{A}$):

$$\psi' = \frac{\hat{Q}\hat{R}\psi}{\|\hat{Q}\hat{R}\psi\|}$$

$\Rightarrow$ Es kommt dann und nur dann*) nicht auf die Reihenfolge der Apparate an, falls

$$\hat{R}\hat{Q} = \hat{Q}\hat{R}$$

gilt.

*) bei beliebigem ψ

Definition: Die Observablen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ heißen verträglich, wenn es bei beliebigen Fragen bzgl. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ nicht auf die Reihenfolge der Apparate ($\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{B}, \mathfrak{A}$) ankommt, d.h. wenn W bzw. ψ' bei beliebiger Wahl der Teilmengen $\tau(\hat{A}), \tau(\hat{B})$ nicht von der Reihenfolge der beiden Apparate abhängen, was zutrifft, wenn $[\hat{Q}, \hat{R}] = \hat{0} \;, \forall \tau(\hat{A}), \tau(\hat{B})$ gilt.

Beachte: $\hat{Q} = \hat{Q}(\tau(\hat{A}))$, $\hat{R} = \hat{R}(\tau(\hat{B}))$.

Satz: $[\hat{Q}, \hat{R}] = \hat{0} \;, \forall \tau(\hat{A}), \tau(\hat{B}) \Longleftrightarrow [\hat{A}, \hat{B}] = \hat{0}$

Beweis! (s. V07', V07'')

Bemerkungen:

1) Im Fall $[\hat{A}, \hat{B}] = iK\hat{1}$, $K \neq 0$, gilt $[\hat{Q}, \hat{R}] \neq \hat{0} \;, \forall \tau(\hat{A}), \tau(\hat{B})$, die Nichtverträglichkeit ist "total".

2) Im Fall $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{K}$, $\hat{K} \neq K\hat{1}$, $\hat{K} \neq \hat{0}$, kann es vorkommen, daß es für eine spezielle Wahl von $\tau(\hat{A}), \tau(\hat{B})$ nicht auf die Reihenfolge ankommt. Beispiel!
Die Nichtverträglichkeit ist dann nicht "total".

$$\boxed{[\hat{Q},\hat{R}] = \hat{0}\,,\ \forall\,\tau(\hat{A}),\tau(\hat{B}) \iff [\hat{A},\hat{B}] = \hat{0}}$$

$$\hat{Q} \equiv \hat{Q}(\tau(\hat{A})) = \sum_{n:\,a_n\in\tau(\hat{A})} \hat{Q}_n \quad , \quad \hat{R} \equiv \hat{R}(\tau(\hat{B})) = \sum_{m:\,b_m\in\tau(\hat{B})} \hat{R}_m$$

1) $\Longrightarrow$:

$$[\hat{Q},\hat{R}] = \hat{0}\,,\ \forall\,\tau(\hat{A}),\tau(\hat{B}) \iff [\hat{Q}_n,\hat{R}_m] = \hat{0}\ ,\ \forall\, n,m \quad \begin{pmatrix} n=1,2,\dots \\ m=1,2,\dots \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &\hat{A} = \sum_{n=1} a_n \hat{Q}_n \\ &\hat{B} = \sum_{m=1} b_m \hat{R}_m \\ &[\hat{Q}_n,\hat{R}_m] = \hat{0}\ ,\ \forall\, n,m \quad \begin{pmatrix} n=1,2,\dots \\ m=1,2,\dots \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow [\hat{A},\hat{B}] = \hat{0} \ \checkmark$$

2) $\Leftarrow$:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{0} \implies \exists\ \hat{P}_{nm}\ , (n,m) \in \mathbb{I}(\hat{A},\hat{B}) \equiv \mathbb{I}\ , \text{ sodaß}$$

$$\hat{Q}_n = \sum_{m' : (n,m') \in \mathbb{I}} \hat{P}_{nm'} \quad , \quad \hat{R}_m = \sum_{n' : (n',m) \in \mathbb{I}} \hat{P}_{n'm}$$

$$\Rightarrow [\hat{Q}_n, \hat{R}_m] = \hat{0} \ , \ \forall n,m \quad (n = 1,2,\ldots \ , \ m = 1,2,\ldots) \ , \text{ da}$$

$$\hat{Q}_n \hat{R}_m = \begin{cases} \hat{P}_{nm} & \text{falls } (n,m) \in \mathbb{I} \\ \hat{0} & \text{falls } (n,m) \notin \mathbb{I} \end{cases}$$

$$\hat{R}_m \hat{Q}_n = \begin{cases} \hat{P}_{nm} & \text{falls } (n,m) \in \mathbb{I} \\ \hat{0} & \text{falls } (n,m) \notin \mathbb{I} \end{cases}$$

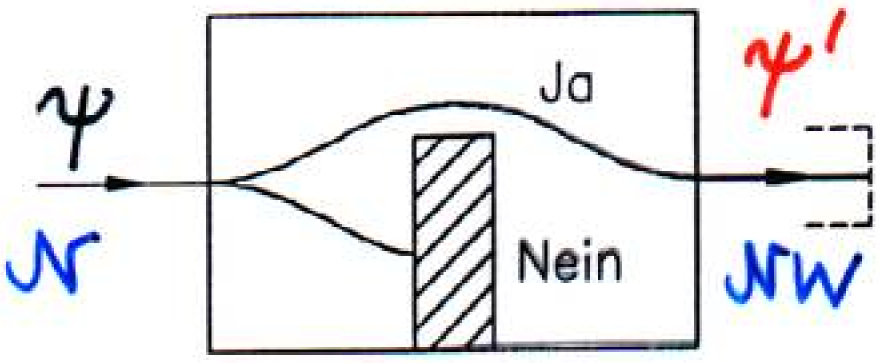
Schließlich:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{Q} = \displaystyle\sum_{n : a_n \in \tau(\hat{A})} \hat{Q}_n \quad , \quad \hat{R} = \sum_{m : b_m \in \tau(\hat{B})} \hat{R}_m \\ [\hat{Q}_n, \hat{R}_m] = \hat{0} \ , \ \forall n,m \quad (n = 1,2,\ldots, m = 1,2,\ldots) \end{array}\right\} \implies [\hat{Q}, \hat{R}] = \hat{0} \quad \forall \tau(\hat{A}), \tau(\hat{B})$$

Ann.: $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ verträglich

Dann $\exists$ ein Meßapparat bzw. Umpräparierapparat für den Observablensatz $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$!

$$\hat{P} = \hat{R}\hat{Q} = \hat{Q}\hat{R}$$



Fall 1: mit Zählung: Meßapparat: W

Fall 2: ohne Zählung: Umpräparierapp.: ψ'

$\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$: Meßwertpaar (a_ℓ, b_j) mit

$a_\ell \in \tau(\hat{A}) \subseteq \sigma(\hat{A})$

$b_j \in \tau(\hat{B}) \subseteq \sigma(\hat{B})$?

$$\hat{R}\hat{Q}\psi = \hat{Q}\hat{R}\psi = \hat{P}\psi$$

Fall 1: $W = \|\hat{P}\psi\|^2$ Fall 2: $\psi' = \dfrac{\hat{P}\psi}{\|\hat{P}\psi\|}$

Formeln formal wie bei 3. GG bzw. 4. GG, aber mit $\hat{P} = \hat{Q}\hat{R} = \hat{R}\hat{Q}$.

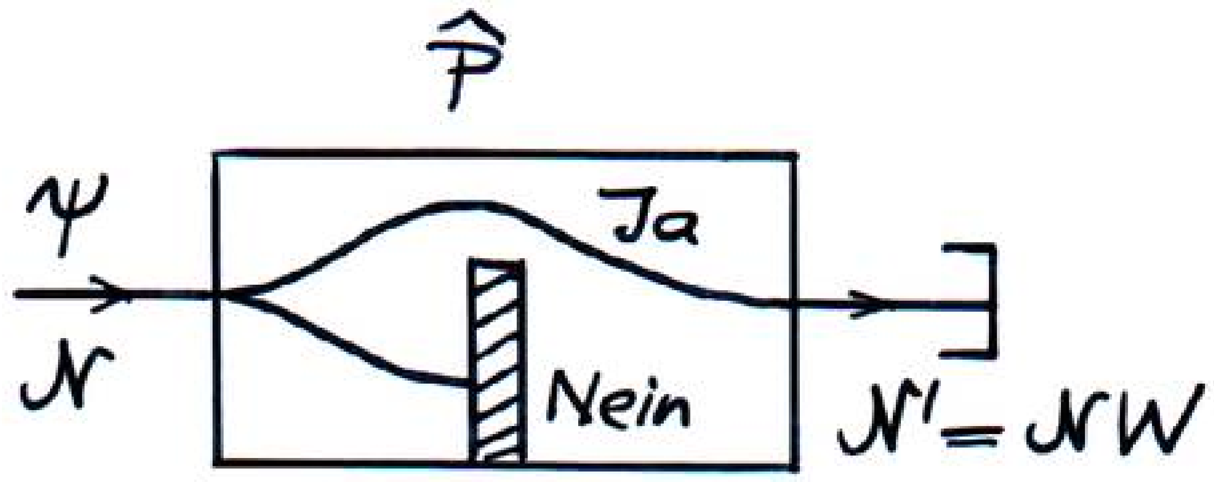
Frage: Was ist, wenn keiner der EW $a_\ell \in \tau(\hat{A})$ mit irgendeinem der EW $b_j \in \tau(\hat{B})$ "zusammen vorkommen kann", d. h. wenn für alle so gebildeten Paare (a_ℓ, b_j) $(\ell, j) \notin \mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B})$ gilt?

Dann ist $\hat{P} = \underset{\hat{R}\hat{Q}}{\overset{\shortparallel}{\hat{Q}\hat{R}}} = \hat{O}$ und $W = 0$ bzw. neue Gesamtheit $\nexists$. (Man hat eine "dumme" Frage bzgl. $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ gestellt.)

Lassen wir von vornherein "dumme" Fragen bzgl. $\{\mathcal{A},\mathcal{B}\}$ weg...

Verallgemeinerung des 3. GG auf die Messung eines Satzes $\{\mathcal{A},\mathcal{B}\}$ verträglicher Observablen

(t "fest")



$\{\mathcal{A},\mathcal{B}\}$: Meßwertpaar (a_n, b_m) mit $(n,m) \in \mathfrak{i}(\hat{A},\hat{B}) \subseteq \mathbb{I}(\hat{A},\hat{B})$?

(a)
$$\hat{P} = \sum_{(n,m)\in \mathfrak{i}(\hat{A},\hat{B})} \hat{P}_{nm}$$

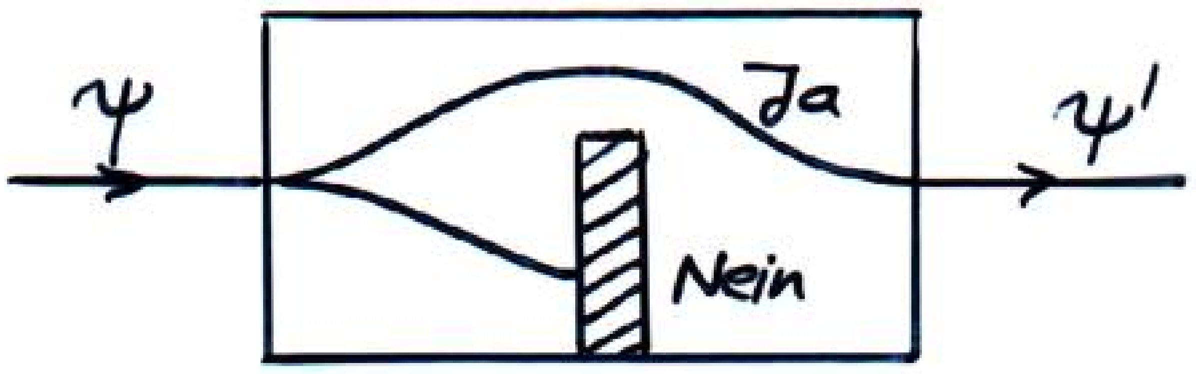
(b)
$$W = \|\hat{P}\psi\|^2$$

Bemerkungen dazu später.

Verallgemeinerung des 4. GG auf die Umpräparation bzgl. eines Satzes $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ verträglicher Observablen

(t "fest")

$\hat{P}$



$\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$: Meßwertpaar

(a_n, b_m) mit

$(n,m) \in \mathfrak{i}(\hat{A}, \hat{B}) \subseteq \mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B})$?

(a) $$\hat{P} = \sum_{(n,m) \in \mathfrak{i}(\hat{A}, \hat{B})} \hat{P}_{nm}$$

(b) $$\psi' = \frac{\hat{P}\psi}{\|\hat{P}\psi\|} \qquad (\text{VS.: } \hat{P}\psi \neq 0)$$

Beachte: $\hat{P} \neq \hat{O}$ ist gewährleistet, da wir "dumme" Fragen weggelassen haben (und natürlich $\mathfrak{i}(\hat{A}, \hat{B}) \neq \{\}$ sein soll).

Bemerkungen zur Verallgemeinerung des 3. und 4. GG!