1) Konservative Systeme

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

$$K(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$$

Hamiltonsche (kanonische) BG

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{p(t)}{m} \\ \frac{dp(t)}{dt} &= K(x(t)) \end{aligned}}$$

AB: $x(t_0), p(t_0)$

$\Downarrow$

Lösung $x(t), p(t)$ für $t > t_0$

$$H(\hat{x},\hat{p}) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

$$K(\hat{x}) = -\frac{dV(\hat{x})}{d\hat{x}}$$

Ehrenfestsche Gln.

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\langle\hat{x}\rangle_t}{dt} &= \frac{\langle\hat{p}\rangle_t}{m} \\ \frac{d\langle\hat{p}\rangle_t}{dt} &= \langle K(\hat{x})\rangle_t \end{aligned}}$$

----- RATEWEG!

$\overset{\text{i.a}}{\neq} K(\langle\hat{x}\rangle_t)$!

Gestatten i.a. nicht die Berechnung von $\langle\hat{x}\rangle_t$, $\langle\hat{p}\rangle_t$ für $t > t_0$ bei gegebenem $\langle\hat{x}\rangle_{t_0}$, $\langle\hat{p}\rangle_{t_0}$! (s. Beispiel.)

Ausnahme: Falls K lineare Fkt. (Polynom vom Grade $n \leq 1$), d.h. falls V Polynom vom Grade $n \leq 2$, gilt

$$\langle K(\hat{x})\rangle_t = K(\langle\hat{x}\rangle_t)$$

2) Allgemein (auch für nichtkonservative Systeme) gilt:

Hamiltonsche (kanonische) BG

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial H(x,p)}{\partial p}\bigg|_{\substack{x=x(t)\\ p=p(t)}} \qquad \frac{dp(t)}{dt} = -\frac{\partial H(x,p)}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=x(t)\\ p=p(t)}}}$$

AB: $x(t_0),\ p(t_0)$

$$\Downarrow$$

Lösung $x(t),\ p(t)$ für $t>t_0$

Ehrenfestsche Gln. *)

$$\boxed{\frac{d\langle\hat{x}\rangle_t}{dt} = \left\langle \frac{\partial H(\hat{x},\hat{p})}{\partial \hat{p}} \right\rangle_t \qquad \frac{d\langle\hat{p}\rangle_t}{dt} = -\left\langle \frac{\partial H(\hat{x},\hat{p})}{\partial \hat{x}} \right\rangle_t}$$

$$\frac{d\langle\hat{x}\rangle_t}{dt} \overset{\text{i.a.}}{\neq} \frac{\partial H(x,p)}{\partial p}\bigg|_{\substack{x=\langle\hat{x}\rangle_t\\ p=\langle\hat{p}\rangle_t}} \qquad \frac{d\langle\hat{p}\rangle_t}{dt} \overset{\text{i.a.}}{\neq} -\frac{\partial H(x,p)}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=\langle\hat{x}\rangle_t\\ p=\langle\hat{p}\rangle_t}}$$

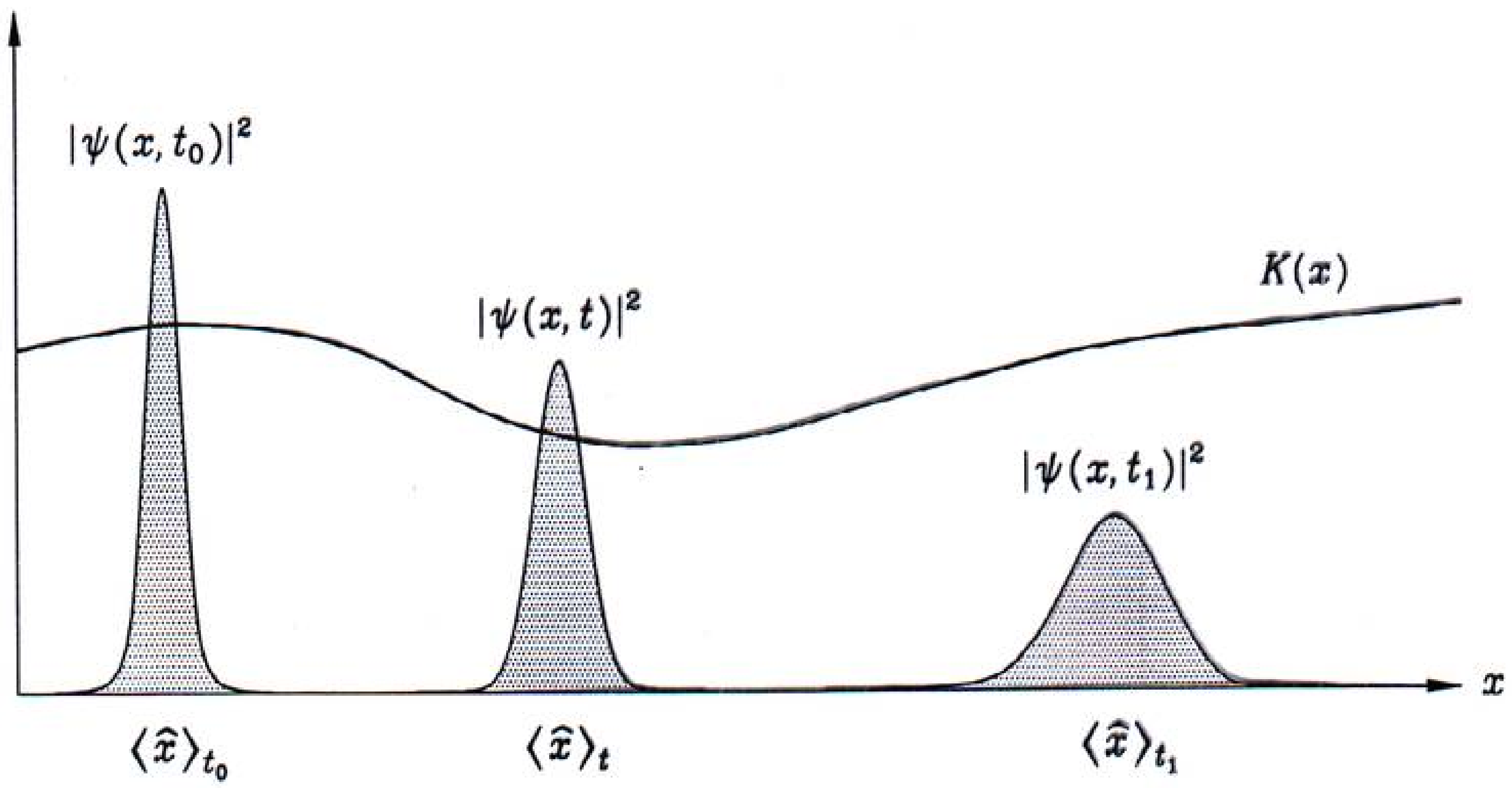
Gestatten i.a. nicht die Berechnung von $\langle\hat{x}\rangle_t,\ \langle\hat{p}\rangle_t$ für $t>t_0$ bei gegebenem $\langle\hat{x}\rangle_{t_0},\ \langle\hat{p}\rangle_{t_0}$!

Ausnahme: Falls H Polynom vom Grade $n\leq 2$ in beiden Variablen, gilt

$$\left\langle \frac{\partial H(\hat{x},\hat{p})}{\partial \hat{p}} \right\rangle_t = \frac{\partial H(x,p)}{\partial p}\bigg|_{\substack{x=\langle\hat{x}\rangle_t\\ p=\langle\hat{p}\rangle_t}}$$

$$\left\langle \frac{\partial H(\hat{x},\hat{p})}{\partial \hat{x}} \right\rangle_t = \frac{\partial H(x,p)}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=\langle\hat{x}\rangle_t\\ p=\langle\hat{p}\rangle_t}}$$

*) Beachte: Mögliche Funktionen $H(\hat{x},\hat{p})$!


$|\psi(x,t_0)|^2$
$|\psi(x,t)|^2$
$K(x)$
$|\psi(x,t_1)|^2$
x
$\langle\hat{x}\rangle_{t_0}$
$\langle\hat{x}\rangle_t$
$\langle\hat{x}\rangle_{t_1}$