5. Grundgesetz: **„Dynamik" (Schrödingergleichung)**

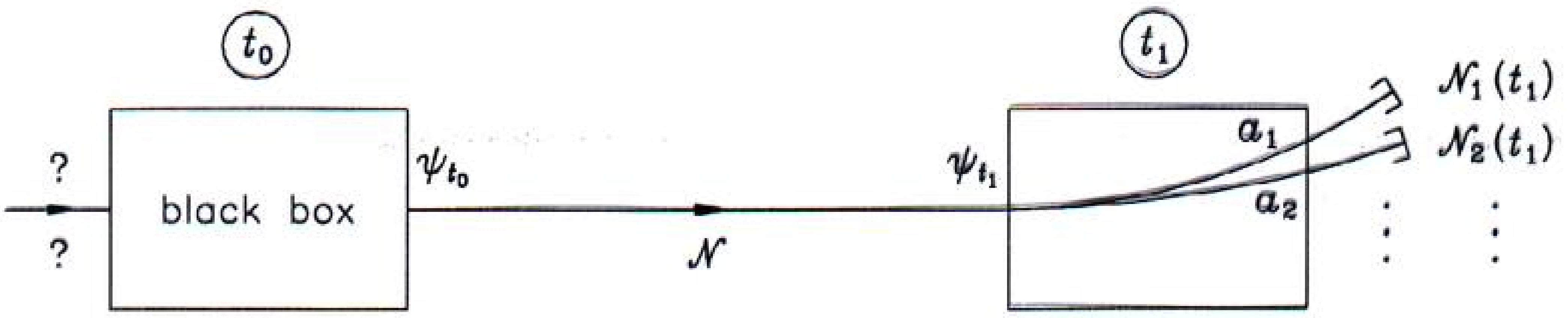
ψ_{t_0} sei der Zustandsvektor einer reinen Gesamtheit zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0, gesucht ist der Zustandsvektor ψ_t für $t > t_0$ unter der Annahme, daß im Zeitintervall (t_0, t) keine Umpräparationen durchgeführt werden.

Der Zustandsvektor ψ_t wird für $t > t_0$ durch Lösen der *zeitabhängigen Schrödingergleichung*

$$\boxed{\hat{H}\psi_t = i\hbar \frac{d\psi_t}{dt}} \tag{4.242}$$

mit der Anfangsbedingung ψ_{t_0} erhalten. Dabei stellt $\hat{H}$ den Hamiltonoperator (Operator zur Gesamtenergie $\mathfrak{H}$) für die betrachtete Systemart dar.

Experiment 1 :

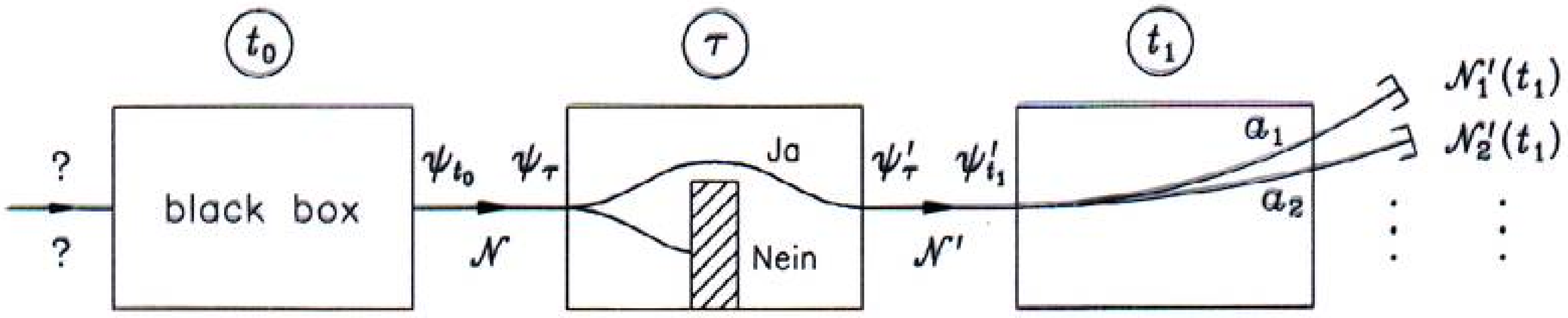


Vollständige Präparation
($\mathcal{N}$ aus "Vorversuch")

Messung von $\mathfrak{A}$
Vollständige Filterung

Aufgabe 41

Experiment 2:



vollständige Präparation

($\mathcal{N}$ aus "Vorversuch")

Umpräparation bzgl. $\mathcal{L}$

$\mathcal{L}$: Meßwert aus $\tau(\hat{B}) \subset \sigma(\hat{B})$?

Messung von $\mathcal{O}$

vollständige Filterung

Aufgabe 41

Lösen der zeitabhängigen SG

$$\boxed{\hat{H}\psi_t = i\hbar \frac{d\psi_t}{dt} \quad , \quad AB: \psi_{t_0}}$$

Entwicklung von ψ_t nach EV von $\hat{H}$: VS: $\hat{H}(\cancel{t})$

Lösung des EWP von $\hat{H}$ (Lösung der zeitunabhängigen SG $\hat{H}u = Eu$):

$$\hat{H}u_{nr} = E_n u_{nr} \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0 \; , \; r = 1,2,\ldots,g_n$$

(Nur zur Vereinfachung der Schreibweise Annahme $\sigma(\hat{H}) = \sigma_d(\hat{H})$!)

$$\langle u_{n'r'}, u_{n''r''} \rangle = \delta_{n'n''}\,\delta_{r'r''}$$ Orthonormalität

$$f = \sum_{nr} \langle u_{nr}, f \rangle u_{nr} \quad , \quad \forall f \in \mathcal{H}$$ Entwicklungssatz

Ansatz für ψ_t:

$$\psi_t = \sum_{nr} \underbrace{\langle u_{nr}, \psi_t \rangle}_{c_{nr}(t) \text{ zu bestimmen}} u_{nr}$$

$$\hat{H}\psi_t = \sum_{nr} c_{nr}(t) \underbrace{\hat{H}u_{nr}}_{E_n u_{nr}} = \sum_{nr} E_n c_{nr}(t) u_{nr}$$

$$i\hbar \frac{d\psi_t}{dt} = \sum_{nr} i\hbar \frac{dc_{nr}(t)}{dt} u_{nr}$$

=

$$\sum_{nr} \Big[\underbrace{i\hbar \frac{dc_{nr}(t)}{dt} - E_n c_{nr}(t)}_{\text{muß 0 sein } \forall n,r \; !} \Big] u_{nr} = 0$$ u_{nr} linear unabhängig!

Dgl. für $c_{nr}(t) = \langle u_{nr}, \psi_t \rangle$, n, r fest:

$$\boxed{\begin{aligned} i\hbar \frac{dc_{nr}(t)}{dt} &= E_n c_{nr}(t) \\ \text{AB: } c_{nr}(t_0) &= \langle u_{nr}, \psi_{t_0} \rangle \end{aligned}} \Longrightarrow$$

$$c_{nr}(t) = c_{nr}(t_0)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t-t_0)}$$

$$= \langle u_{nr}, \psi_{t_0} \rangle\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t-t_0)}$$

$$\boxed{\psi_t = \sum_{nr} \langle u_{nr}, \psi_{t_0} \rangle\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t-t_0)}\, u_{nr}}$$

Allgemein:

$$\psi_t = \sum_{\substack{n,r: \\ E_n \in \sigma_d(H)}} \langle u_{nr}, \psi_{t_0} \rangle\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t-t_0)}\, u_{nr}$$

$$+ \int_{E \in \sigma_k(H)} dE \sum_{\alpha} \langle u_{E\alpha}, \psi_{t_0} \rangle\, e^{-\frac{i}{\hbar}E(t-t_0)}\, u_{E\alpha}$$

Praktische Nützlichkeit?

Wa, bei einer Messung der Energie zum Zeitpunkt $t \geq t_0$ den Meßwert E_n zu finden

$$W_n(t) = \sum_{r=1}^{g_n} |\langle u_{nr}, \psi_t \rangle|^2 = \sum_{r=1}^{g_n} |c_{nr}(t)|^2$$

$$= \sum_{r=1}^{g_n} |c_{nr}(t_0)|^2 = W_n(t_0)$$ bei beliebiger AB!

Energie Erhaltungsgröße s. später