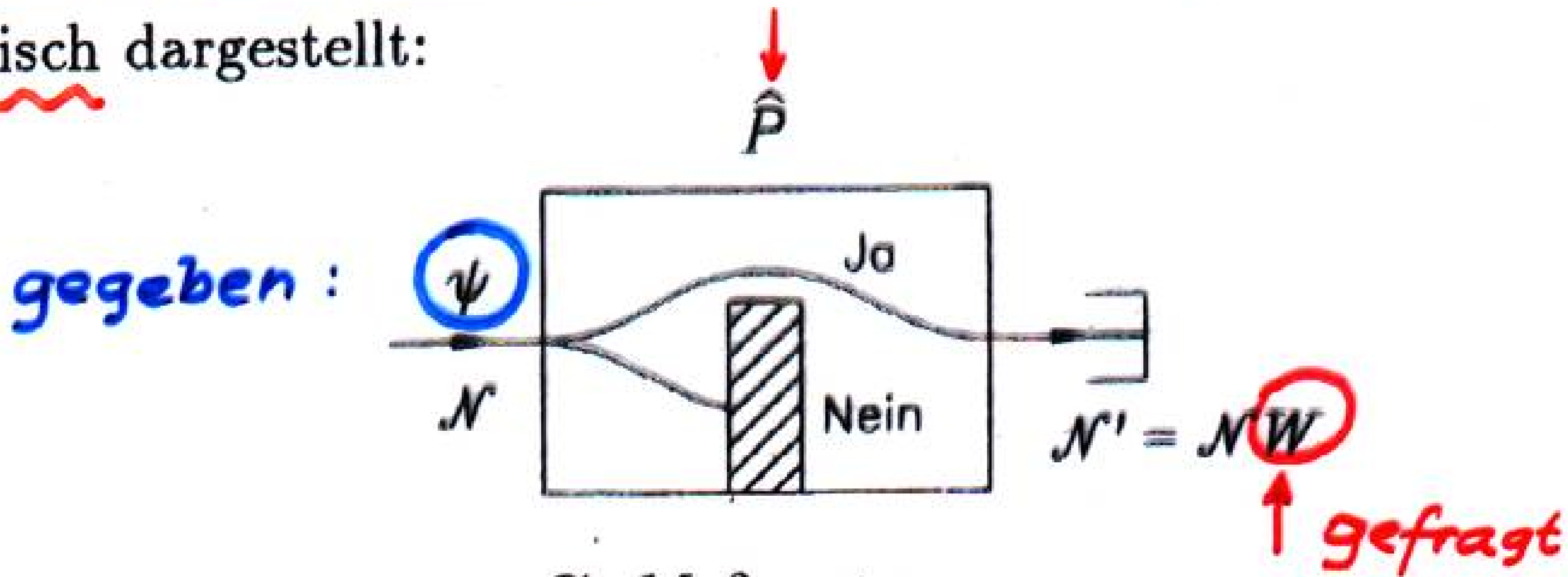
3. Grundgesetz: **Messung einer Observablen $\mathfrak{A}$**
(determinative Messung, nichtreproduzierbare Messung)
(t „fest“)

ψ sei der Zustandsvektor einer reinen Gesamtheit zu einem bestimmten Zeitpunkt, gefragt ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man bei einer Messung der Observablen $\mathfrak{A}$ zum betreffenden Zeitpunkt einen Meßwert aus einer gegebenen Teilmenge $\tau(\hat{A})$ des Meßwertspektrums von $\mathfrak{A}$ findet.

Symbolisch dargestellt:



$\mathfrak{A}$: Meßwert aus
$\tau(\hat{A}) \subseteq \sigma(\hat{A})$?

Messung = Filterung + Selektion + *Zählung*

(a): Dem Meßapparat wird der Projektionsoperator

$$\hat{P} = \sum_{n:a_n\in\tau(\hat{A})} \hat{P}_n + \int_{a\in\tau(\hat{A})} d\hat{P}(a) \tag{4.216}$$

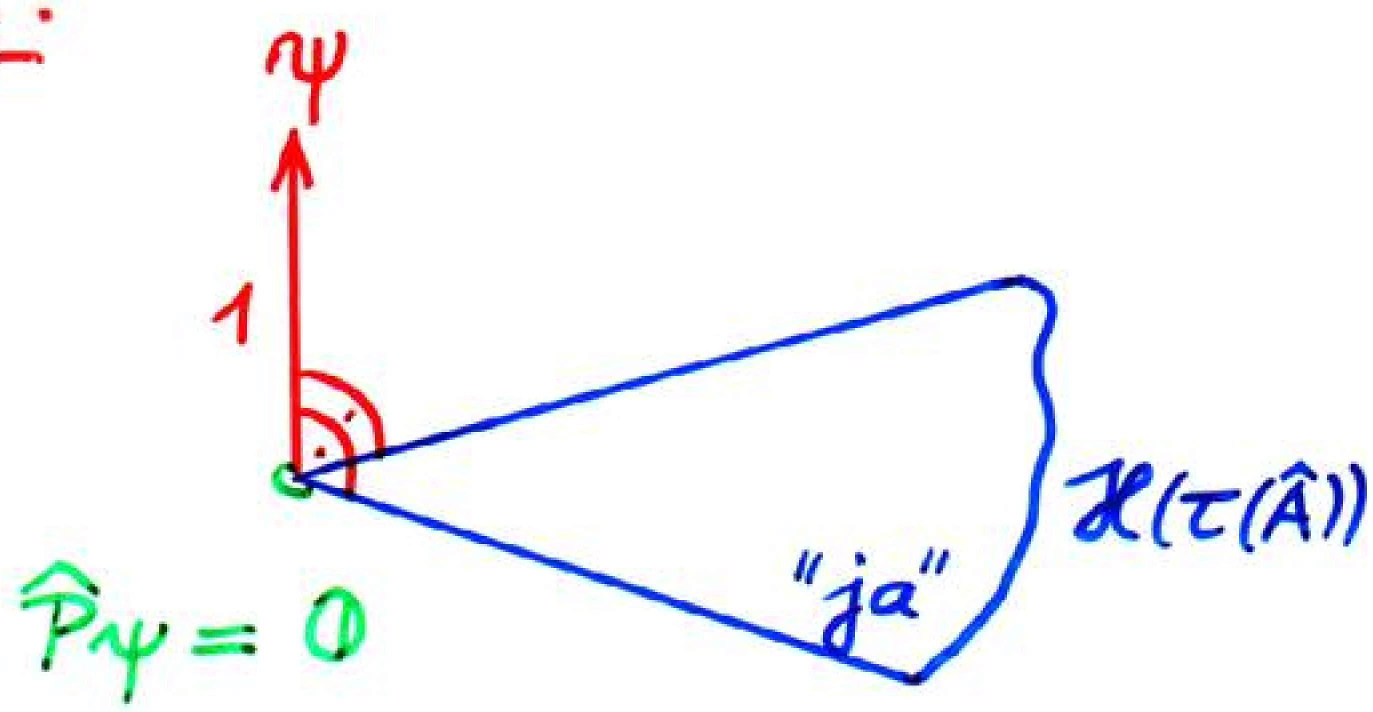
zugeordnet.

(b): Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt

$$W = \|\hat{P}\psi\|^2 . \tag{4.217}$$

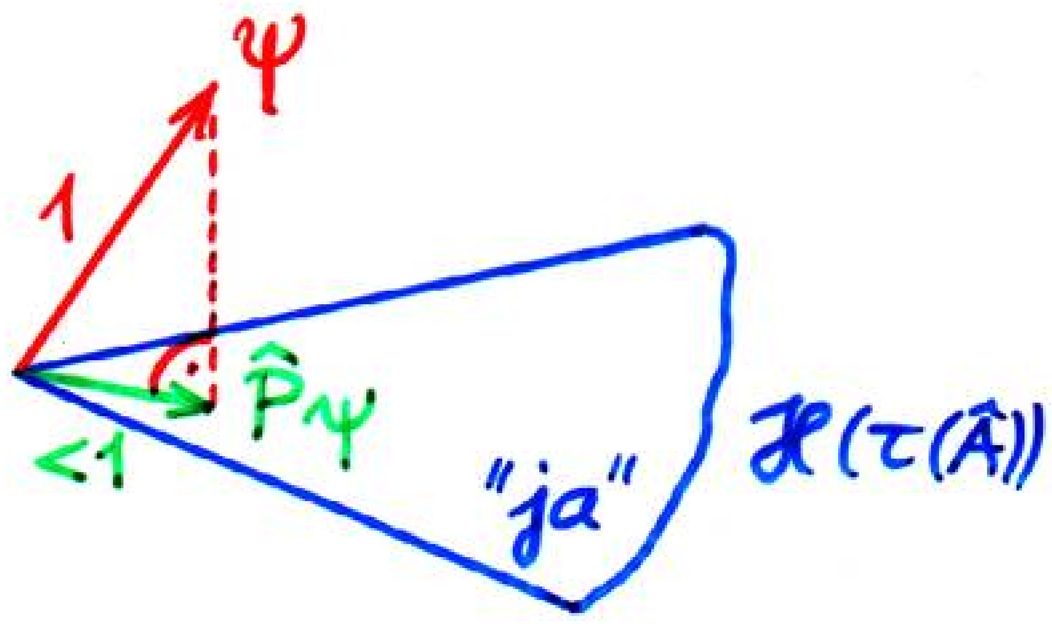
Ann.: $\tau(\hat{A}) \subset \sigma(\hat{A}) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{H}(\tau(\hat{A})) \subset \mathcal{H}$

Fall a:



$W = \|\hat{P}\psi\|^2 = 0$

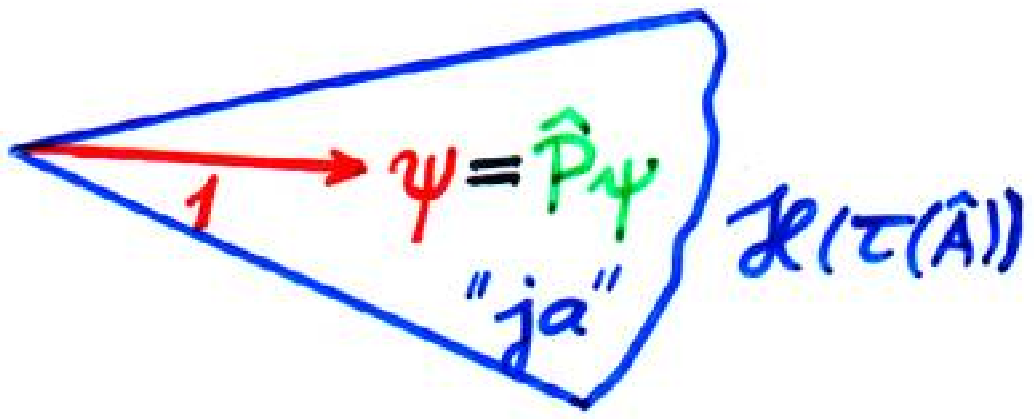
Fall b:



$W = \|\hat{P}\psi\|^2 < 1$

$(\neq 0)$

Fall c:



$W = \|\hat{P}\psi\|^2 = \|\psi\|^2 = 1$

Bemerkungen zum 3. GG:

1) $\psi \longrightarrow e^{i\gamma}\psi$

$$\|\hat{P}\psi\|^2 \longrightarrow \|\hat{P}\, e^{i\gamma}\psi\|^2 = \|e^{i\gamma}\,\hat{P}\psi\|^2 = \|\hat{P}\psi\|^2$$

2) $\|\hat{P}\psi\|^2 = \langle \hat{P}\psi, \hat{P}\psi \rangle = \langle \psi, \hat{P}^2\psi \rangle = \langle \psi, \hat{P}\psi \rangle$

3) Falls $\sigma_d(\hat{A}) = \{\,\}$: $\cancel{\sum}$; falls $\sigma_k(\hat{A}) = \{\,\}$: $\cancel{\int}$

4) Sonderfall:

$$\sigma(\hat{A}) = \{a_1, a_2, \dots\} \cup \sigma_k(\hat{A})$$

$$\tau(\hat{A}) = \{a_n\} \quad n \text{ fest}$$

$$\hat{P} = \hat{P}_n = \sum_{r=1}^{g_n} \langle u_{nr}, \cdot \rangle u_{nr}$$

$$W = W_n = \|\hat{P}_n\psi\|^2$$

$$\hat{P}_n\psi = \sum_{r=1}^{g_n} \langle u_{nr}, \psi \rangle u_{nr}$$

$$W_n = \sum_{r=1}^{g_n} |\langle u_{nr}, \psi \rangle|^2$$

Falls $g_n = 1$ (a_n nicht entartet):

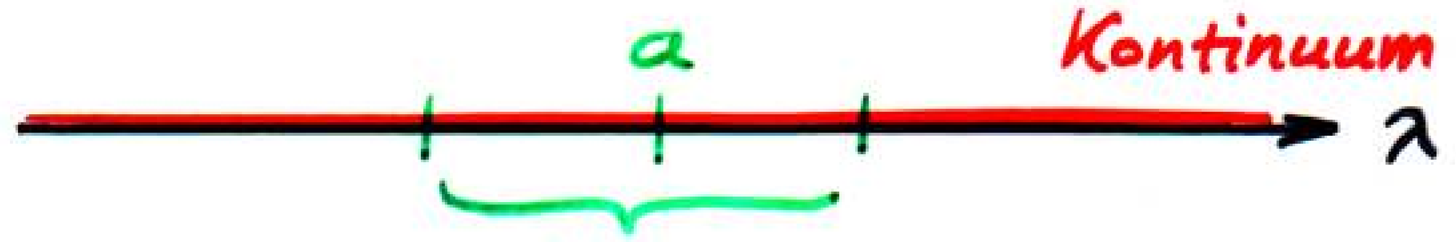
$$W_n = |\langle u_{n}, \psi \rangle|^2$$

RATEWEG: harm. Osz. Energie!

5) Sonderfall:

$$\sigma(\hat{A}) = \sigma_d(\hat{A}) \cup \sigma_k(\hat{A})$$

$$\tau(\hat{A}) = \left(a - \tfrac{\Delta a}{2}, a + \tfrac{\Delta a}{2}\right) \subset \sigma_k(\hat{A})$$



Δa um a

$$\hat{P} = \int_{a-\frac{\Delta a}{2}}^{a+\frac{\Delta a}{2}} d\hat{P}(a') = \int_{a-\frac{\Delta a}{2}}^{a+\frac{\Delta a}{2}} da' \sum_{\alpha'=1}^{g(a')} \langle u_{a'\alpha'}, \cdot \rangle u_{a'\alpha'} = \hat{P}_{\Delta a}(a)$$

$\hat{P}\psi \qquad \psi \qquad \psi$

$$W = \underline{W_{\Delta a}(a)} = \|\hat{P}\psi\|^2 = \|\hat{P}_{\Delta a}(a)\psi\|^2$$

$$= \int_{a-\frac{\Delta a}{2}}^{a+\frac{\Delta a}{2}} da' \underbrace{\sum_{\alpha'=1}^{g(a')} |\langle u_{a'\alpha'}, \psi \rangle|^2}_{\substack{\text{Wahrscheinlichkeitsdichte} \\ W(a')}}$$

Falls $g(a') = 1, \ \forall a' \in \left(a - \frac{\Delta a}{2}, a + \frac{\Delta a}{2}\right)$:

$$W_{\Delta a}(a) = \int_{a-\frac{\Delta a}{2}}^{a+\frac{\Delta a}{2}} da' \underbrace{|\langle u_{a'}, \psi \rangle|^2}_{W(a')}$$

RATEWEG: $W(x') = |\langle u_{x'}, \psi \rangle|^2 = |\psi(x')|^2$

$$W(p') = |\langle u_{p'}, \psi \rangle|^2 = |\tilde{\psi}(p')|^2$$

9) 3.GG Verallgemeinerung von "BORN"

6) Messung eines Observablensatzes

$\{\mathcal{U}, \mathcal{L}, \mathcal{Z}, \ldots\}$ s. spätere Verallgemeinerung des 3. GG

7) Sonderfall:

$\tau(\hat{A}) = \sigma(\hat{A})$

$$\hat{P} = \sum_{n:\, a_n \in \sigma_d(\hat{A})} \hat{P}_n + \int_{a \in \sigma_k(\hat{A})} d\hat{P}(a) = 1$$

$$\hat{P}\psi = \psi$$

$$\underline{W =} \|\hat{P}\psi\|^2 = \|\psi\|^2 = \underline{1} \quad \checkmark$$

zu 7) Falls 1. GG

$$\text{statt} \quad \begin{array}{l} \psi \in \mathcal{H} \\ \|\psi\| = 1 \\ e^{i\gamma}\psi \mathrel{\hat{=}} \psi \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \psi \in \mathcal{H} \\ \\ \alpha\psi \mathrel{\hat{=}} \psi \end{array}$$

dann 3. GG

$$\text{statt} \quad W = \|\hat{P}\psi\|^2 \longrightarrow W = \frac{\|\hat{P}\psi\|^2}{\|\psi\|^2}$$

Beachte: Für $\overline{\psi} = \frac{\psi}{\|\psi\|}$ gilt $\|\overline{\psi}\| = 1$

$$\psi = \|\psi\|\,\overline{\psi}$$

$$W = \frac{\|\hat{P}\psi\|^2}{\|\psi\|^2} = \|\hat{P}\overline{\psi}\|^2 \quad .$$

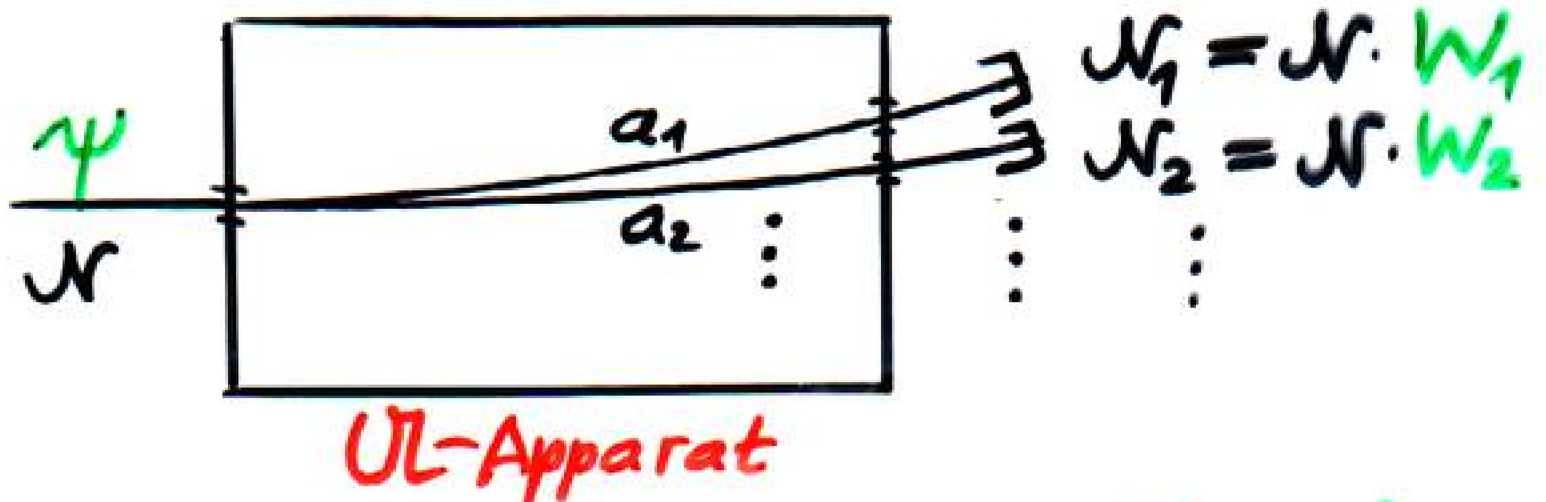
8) Was meint man mit "Messung zum Zeitpunkt t" ?

9) Hatten wir schon ...

10) Sonderfall:

$$\sigma(\hat{A}) = \{a_1, a_2, \dots\}$$

· Messung als vollständige Filterung + Zählung



$$\mathcal{N}_n = \mathcal{N} \cdot W_n = \mathcal{N} \cdot \| \hat{P}_n \psi \|^2$$

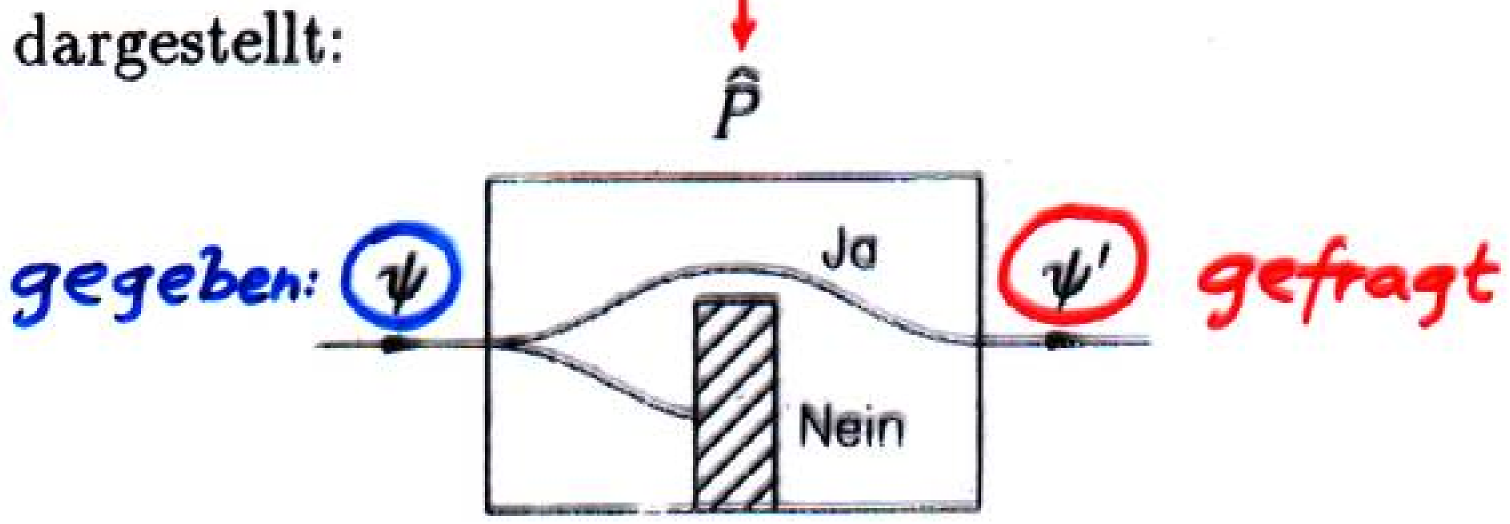
$$\bar{A} = \frac{\sum_n a_n \mathcal{N}_n}{\mathcal{N}} = \sum_n a_n W_n$$

$\overline{\Delta a^2}$ usf.

4. Grundgesetz: **Umpräparation bezüglich einer Observablen $\mathfrak{A}$**
(präparative Messung, reproduzierbare Messung)
(t „fest")

ψ sei der Zustandsvektor einer reinen Gesamtheit zu einem bestimmten Zeitpunkt, gefragt ist der Zustandsvektor jener neuen reinen Gesamtheit, welche man durch eine Umpräparation zum betreffenden Zeitpunkt erhält, bei der man Systeme mit einem Meßwert aus einer gegebenen Teilmenge $\tau(\hat{A})$ des Meßwertspektrums von $\mathfrak{A}$ auswählt.

Symbolisch dargestellt:



$\mathfrak{A}$: Meßwert aus
$\tau(\hat{A}) \subseteq \sigma(\hat{A})$?

Umpräparation = Filterung + Selektion

(a): Dem Präparationsapparat wird der Projektionsoperator

$$\hat{P} = \sum_{n: a_n \in \tau(\hat{A})} \hat{P}_n + \int_{a \in \tau(\hat{A})} d\hat{P}(a) \tag{4.235}$$

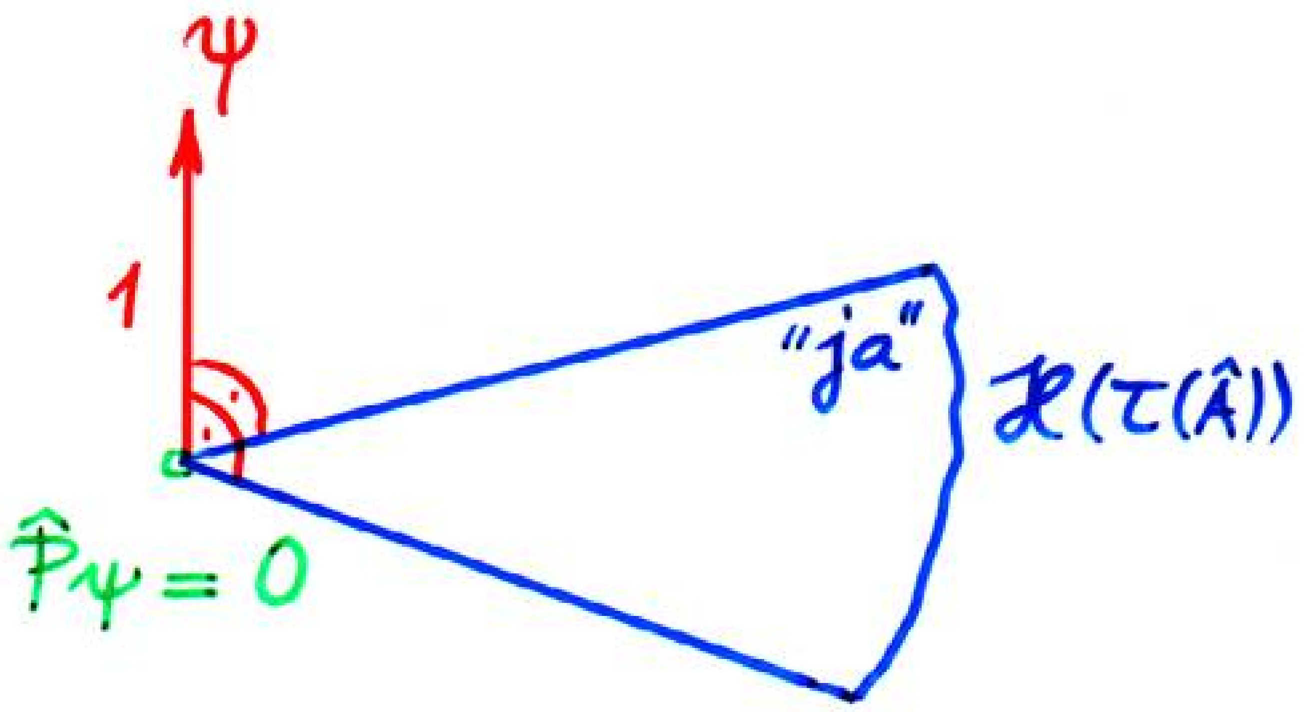
zugeordnet.

(b): Eine neue Gesamtheit wird nur unter der Voraussetzung $\hat{P}\psi \neq \emptyset$ erzeugt. Für den gesuchten Zustandsvektor gilt

$$\psi' = \frac{\hat{P}\psi}{\|\hat{P}\psi\|} . \tag{4.236}$$

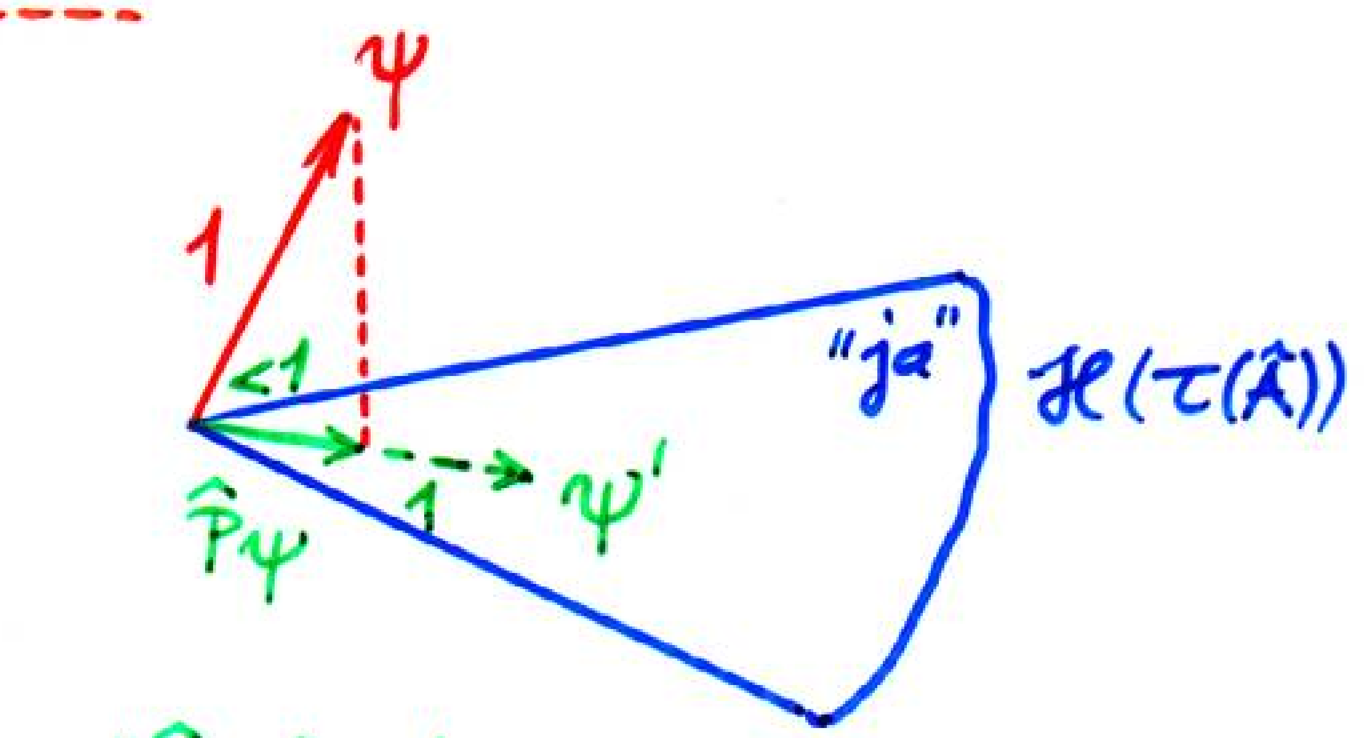
Ann.: $\tau(\hat{A}) \subset \sigma(\hat{A}) \implies \mathcal{H}(\tau(\hat{A})) \subset \mathcal{H}$

Fall a:



kein System passiert die Apparatur ("Endstation")

Fall b:

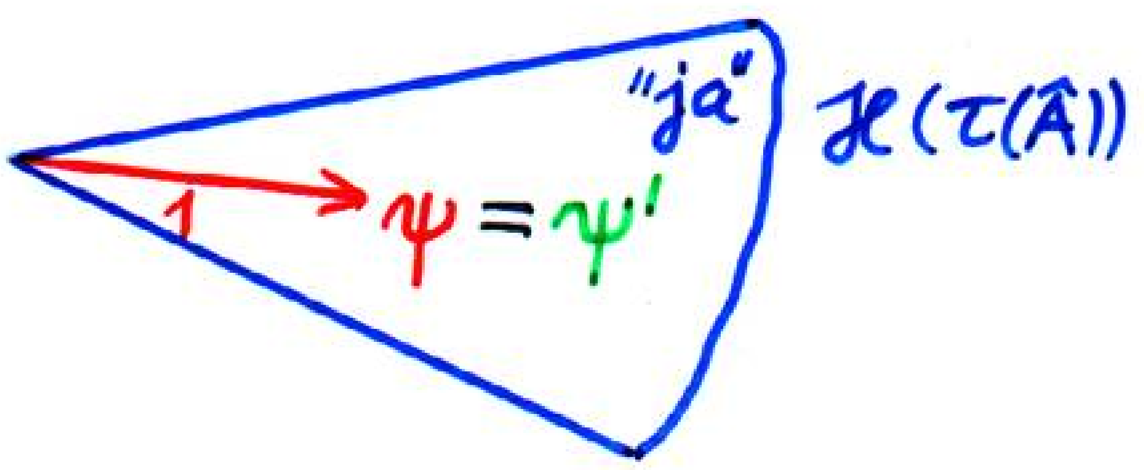


$$\psi' = \frac{\hat{P}\psi}{\|\hat{P}\psi\|}$$

$\|\hat{P}\psi\| < 1$

$\|\psi'\| = 1 \quad (1.\,GG)$

Fall c:



$\psi' = \psi$

keine ("echte") Umpräparation

Bemerkungen zum 4. GG:

1) Umpräparation: historisch "Zustandsreduktion", "Reduktion der Wellenpakete". Mißinterpretationen!

2) VS $\hat{P}\psi \neq 0$ für $\exists$ neuer Gesamtheit bereits besprochen. Falls $\hat{P}\psi \neq 0$ besteht die neue Gesamtheit nach dem 3. GG aus $\mathcal{N}' = \mathcal{N}\,\|\hat{P}\psi\|^2$ Systemen, wenn die ursprüngliche Gesamtheit aus $\mathcal{N}$ Systemen bestand.

3) Bereits besprochen ($\|\psi'\| = 1$).

4) t "fest"?

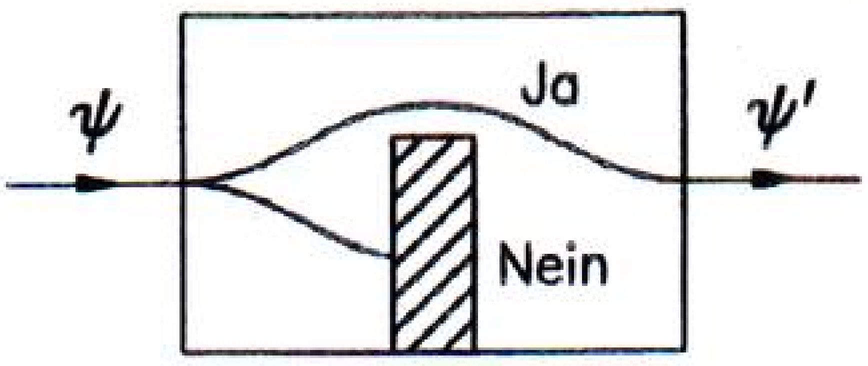
5) Falls $\tau(\hat{A}) = \sigma(\hat{A})$: $\hat{P} = 1 \Rightarrow \psi' = \psi$ und $\mathcal{N}' = \mathcal{N}$
("Nein" nicht möglich, "neue" Gesamtheit = "alte" Gesamtheit.)

6) Umpräparation bzgl. eines Observablensatzes $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots\}$? Später Verallgemeinerung des 4. GG.

7) Sonderfall:

$\hat{A}$ besitze einen diskreten nicht entarteten EW a_n (n fest, $g_n = 1$) und es sei $\tau(\hat{A}) = \{a_n\}$

$$\hat{P} = \hat{P}_n = \langle u_n, \cdot \rangle u_n$$



$\mathfrak{A}$: Meßwert a_n?
($g_n = 1$)

VS: $\hat{P}\psi \neq 0$ bedeutet dann $\langle u_n, \psi \rangle u_n \neq 0$, d.h.

$\langle u_n, \psi \rangle \neq 0$

Dann gilt

$$\psi' = \frac{\hat{P}\psi}{\|\hat{P}\psi\|} = \frac{\langle u_n, \psi \rangle}{|\langle u_n, \psi \rangle|} u_n = e^{i\vartheta} u_n \mathrel{\hat{=}} u_n \quad !$$

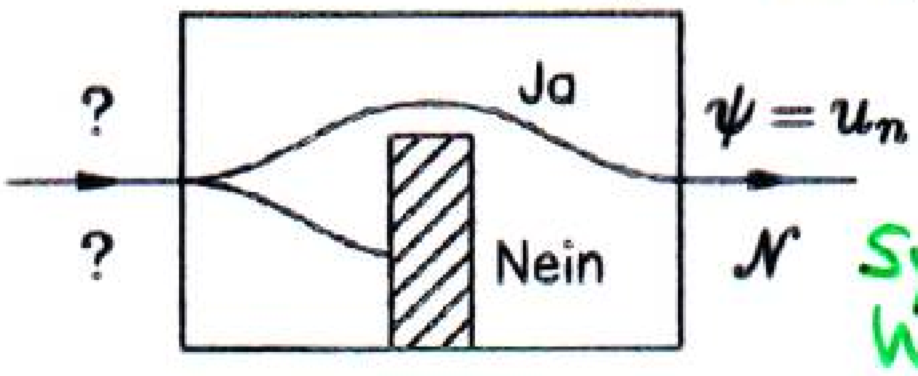
(1. GG!)

unabhängig von ψ ("verlorenes Gedächtnis")

Somit:

Spezialfall einer vollständigen Präparation:

$$\hat{P} = \hat{P}_n = \langle u_n, \cdot \rangle u_n$$



Systeme "besitzen" den Wert a_n bzgl. $\mathfrak{A}$ (Zuschreibung)

$\mathfrak{A}$: Meßwert a_n?
($g_n = 1$)

Ob $N \neq 0$ durch "Vorversuch" klären.

"Observablensatz" $\{\mathfrak{A}\}$ vollständig bzgl. a_n

Begriff des vollständigen Observablensatzes "an sich".

$\{\mathfrak{A}\}$ vollständig "an sich", falls $\sigma(\hat{A}) = \sigma_d(\hat{A})$ und alle EW von $\hat{A}$ nicht entartet. (Ist nur bei $f=1$ möglich.)