Zustandsräume qm Systemklassen

1 spinloses Teilchen in 1 Raumdimension

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}} dx\, |f(x)|^2 < +\infty \right\}$$

mit

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} dx\, f^*(x)\, g(x)$$

$$\|\psi_t\|^2 = \int_{\mathbb{R}} dx\, |\psi_t(x)|^2 = 1$$

Später: Interpretation von $|\psi_t(x)|^2 dx$?

1 spinloses Teilchen im 3 Raumdimensionen

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}^3) = \left\{ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}^3} d^3r\, |f(\vec{r})|^2 < +\infty \right\}$$

mit

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^3} d^3r\, f^*(\vec{r})\, g(\vec{r})$$

$$\|\psi_t\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r\, |\psi_t(\vec{r})|^2 = 1$$

Später: Interpretation von $|\psi_t(\vec{r})|^2 d^3r$?

1 Spin-½-Teilchen in 3 Raumdimensionen

$$\mathcal{H} = \underbrace{L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R})}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \otimes \mathbb{C}^2 = L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$$

$$= \left\{ f = \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix} ; \; f_+, f_- : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \, |f_\pm(\vec{r})|^2 < +\infty \right\}$$

mit $$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \left[f_+^*(\vec{r}) g_+(\vec{r}) + f_-^*(\vec{r}) g_-(\vec{r}) \right]$$

$$f_\pm(\vec{r}) \equiv f(\vec{r}, \pm\tfrac{1}{2}) \qquad \pm\tfrac{1}{2} \leftrightarrow \pm\tfrac{1}{2}\hbar$$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\sigma=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \, f^*(\vec{r}, \sigma) \, g(\vec{r}, \sigma)$$

$$\|\psi_t\|^2 = \sum_{\sigma=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \, |\psi_t(\vec{r}, \sigma)|^2 = 1$$

Später: Interpretation von $|\psi_t(\vec{r}, \sigma)|^2 d^3r$?

1 Spin-s-Teilchen in 3 Raumdimensionen

$s = \frac{1}{2}$ oder 1 oder $\frac{3}{2}$ oder ...

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^{2s+1} = L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^{2s+1})$$

analog wie oben aber $\sigma = -s, -s+1, \dots, +s$, also z.B.

$$f(\vec{r}, \sigma) \quad , \quad \sigma = -s, -s+1, \dots, +s$$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\sigma=-s}^{+s} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \, f^*(\vec{r}, \sigma)\, g(\vec{r}, \sigma) \quad \text{usf.}$$

N nichtidentische spinlose Teilchen in 3 Raumdimensionen

("Spin-0-Teilchen")

$$\mathcal{H} = \underbrace{L^2(\mathbb{R}^3) \otimes L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \dots \otimes L^2(\mathbb{R}^3)}_{N \text{ "Faktoren"}} = L^2(\mathbb{R}^{3N})$$

$$= \left\{ f : \mathbb{R}^{3N} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}^3} d^3r_1 \int_{\mathbb{R}^3} d^3r_2 \dots \int_{\mathbb{R}^3} d^3r_N \, |f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)|^2 < +\infty \right\}$$

mit

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^3} d^3r_1 \int_{\mathbb{R}^3} d^3r_2 \dots \int_{\mathbb{R}^3} d^3r_N \, f^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)\, g(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$$

$$\|\psi_t\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r_1 \int_{\mathbb{R}^3} d^3r_2 \ldots \int_{\mathbb{R}^3} d^3r_N \, |\psi_t(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N)|^2 = 1$$

Später: Interpretation von $|\psi_t(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N)|^2 d^3r_1 \, d^3r_2 \ldots d^3r_N$?

N identische Spinlose Teilchen in 3 Raumdimensionen (Boseteilchen [Bosonen] mit Spin $s=0$)

$$\boxed{\mathcal{H} = L^2_{sym}(\mathbb{R}^{3N}) = \{ f \in L^2(\mathbb{R}^{3N}) \mid f(\vec{r}_{i_1}, \vec{r}_{i_2}, \ldots, \vec{r}_{i_N}) = f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N) \}}$$

"Symmetrisierungsprinzip" (POSTULAT)

$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & N \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_N \end{pmatrix}$ beliebige Permutation der Indices $1, 2, \ldots, N$

Später : Interpretation von $|\psi_t(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N)|^2 d^3r_1 \, d^3r_2 \ldots d^3r_N$?

N nichtidentische Teilchen mit Spins s_a $(a = 1, 2, \ldots, N)$ in 3 Raumdimensionen

Analog wie bei nichtidentischen spinlosen Teilchen, aber $f(\vec{r}_1, \sigma_1, \vec{r}_2, \sigma_2, \ldots, \vec{r}_N, \sigma_N)$ mit $\sigma_1 = -s_1, -s_1+1, \ldots, +s_1, \ldots, \sigma_N = -s_N, -s_N+1, \ldots, +s_N$, also

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^{3N}) \otimes \mathbb{C}^{2s_1+1} \otimes \mathbb{C}^{2s_2+1} \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}^{2s_N+1}$$

$$\langle f, g \rangle := \sum_{\sigma_1} \ldots \sum_{\sigma_N} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r_1 \ldots \int_{\mathbb{R}^3} d^3r_N \; f^*(\vec{r}_1, \sigma_1, \ldots, \vec{r}_N, \sigma_N) \, g(\vec{r}_1, \sigma_1, \ldots, \vec{r}_N, \sigma_N)$$

$$\|\psi_t\|^2 = \sum_{\sigma_1} \dots \sum_{\sigma_N} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r_1 \dots \int_{\mathbb{R}^3} d^3r_N \, |\psi_t(\vec{r}_1, \sigma_1, \dots, \vec{r}_N, \sigma_N)|^2 = 1$$

Später: Interpretation von

$|\psi_t(\vec{r}_1, \sigma_1, \dots, \vec{r}_N, \sigma_N)|^2 d^3r_1 \dots d^3r_N$?

N identische Teilchen mit "ganzzahligem" Spin $\overset{\overset{s}{\equiv}}{s_1} = s_2 = \dots = s_N = 1$ oder 2 oder $3 \dots$

in 3 Raumdimensionen (Boseteilchen [Bosonen] mit Spin $s = 1$ oder 2 oder $3 \dots$)

$$\boxed{\mathcal{H} = \{ f \in L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \underbrace{\mathbb{C}^{2s+1} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^{2s+1}}_{N \text{ "Faktoren"}} \mid f(\vec{r}_{i_1}, \sigma_{i_1}, \dots, \vec{r}_{i_N}, \sigma_{i_N}) = f(\vec{r}_1, \sigma_1, \dots, \vec{r}_N, \sigma_N) \}}$$

"Symmetrisierungs-prinzip" (POSTULAT)

$p = \begin{pmatrix} 1 & \dots & N \\ i_1 & \dots & i_N \end{pmatrix}$ beliebige Permutation der Indices $1, 2, \dots N$

N identische Teilchen mit "halbzahligem" Spin $\overset{\overset{s}{\equiv}}{s_1} = s_2 = \dots = s_N = \frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{2} \dots$

in 3 Raumdimensionen (Fermiteilchen [Fermionen] mit Spin $s = \frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{2} \dots$)

"Antisym. Prinzip" (POSTULAT)

$$\boxed{\mathcal{H} = \{ f \in L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^{2s+1} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^{2s+1} \mid f(\vec{r}_{i_1}, \sigma_{i_1}, \dots, \vec{r}_{i_N}, \sigma_{i_N}) = \eta_p f(\vec{r}_1, \sigma_1, \dots, \vec{r}_N, \sigma_N) \}}$$

$\eta_p \dots$ "Parität" der Permutation p, d.h. $\eta_p = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$ falls Permutation $\begin{matrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{matrix}$

Später: Interpretation von $|\psi_t(\vec{r}_1, \sigma_1, \dots, \vec{r}_N, \sigma_N)|^2 d^3r_1 \dots d^3r_N$ für Bose- bzw. Fermiteilchen ?