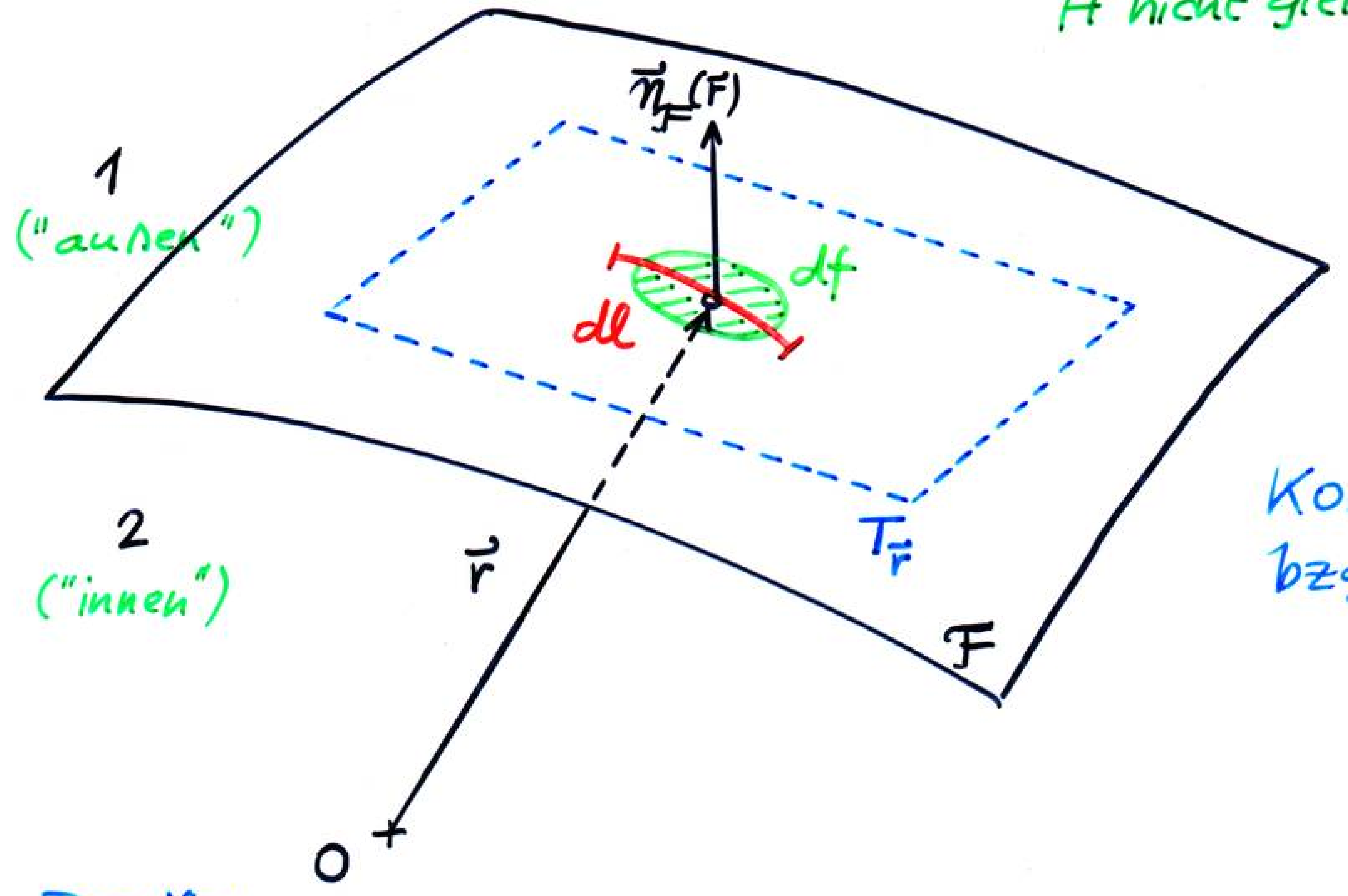
Begriff der Grenzfläche in der makrosk. El.-Dyn.!

Grenzbedingungen in der makroskopischen Elektrodynamik

(universell!)

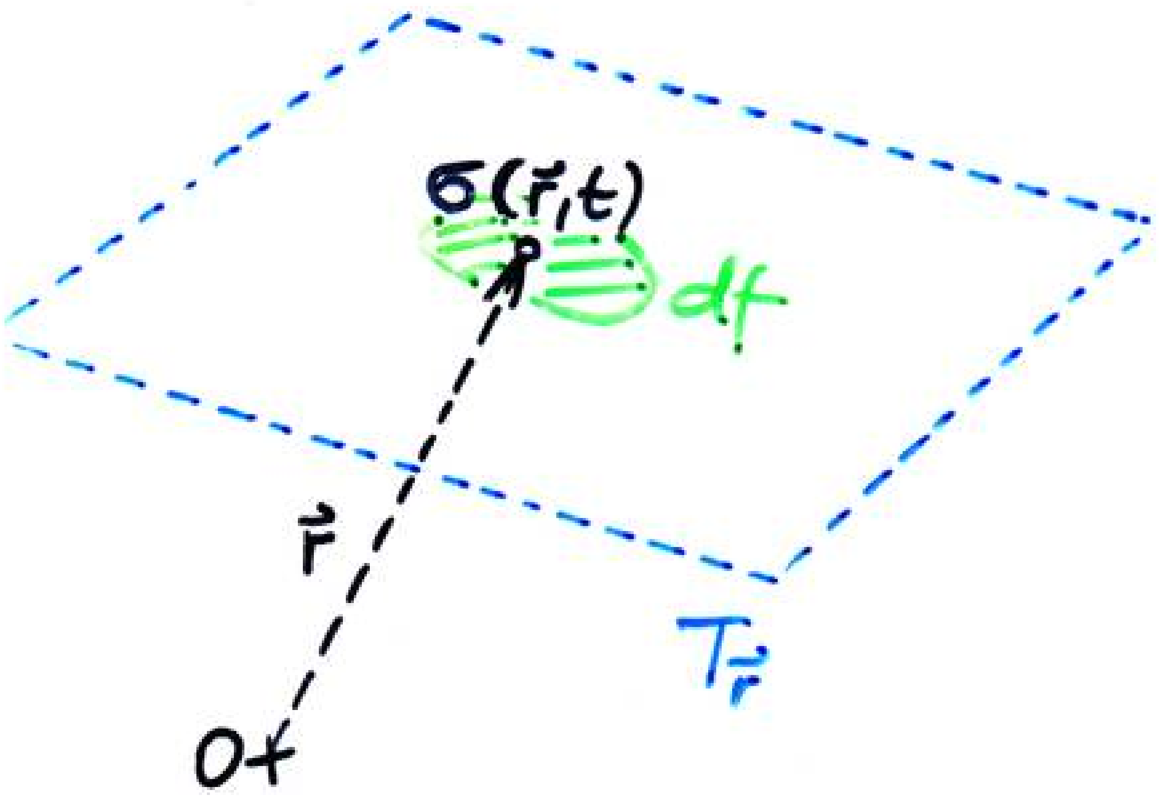
($\vec{M}$ nicht $\vec{0}$ gesetzt, d.h. $\vec{H}$ nicht gleich $\vec{B}$ gesetzt)



Konvention bzgl. $\vec{n}_{\mathcal{F}}$!

Begriffe:

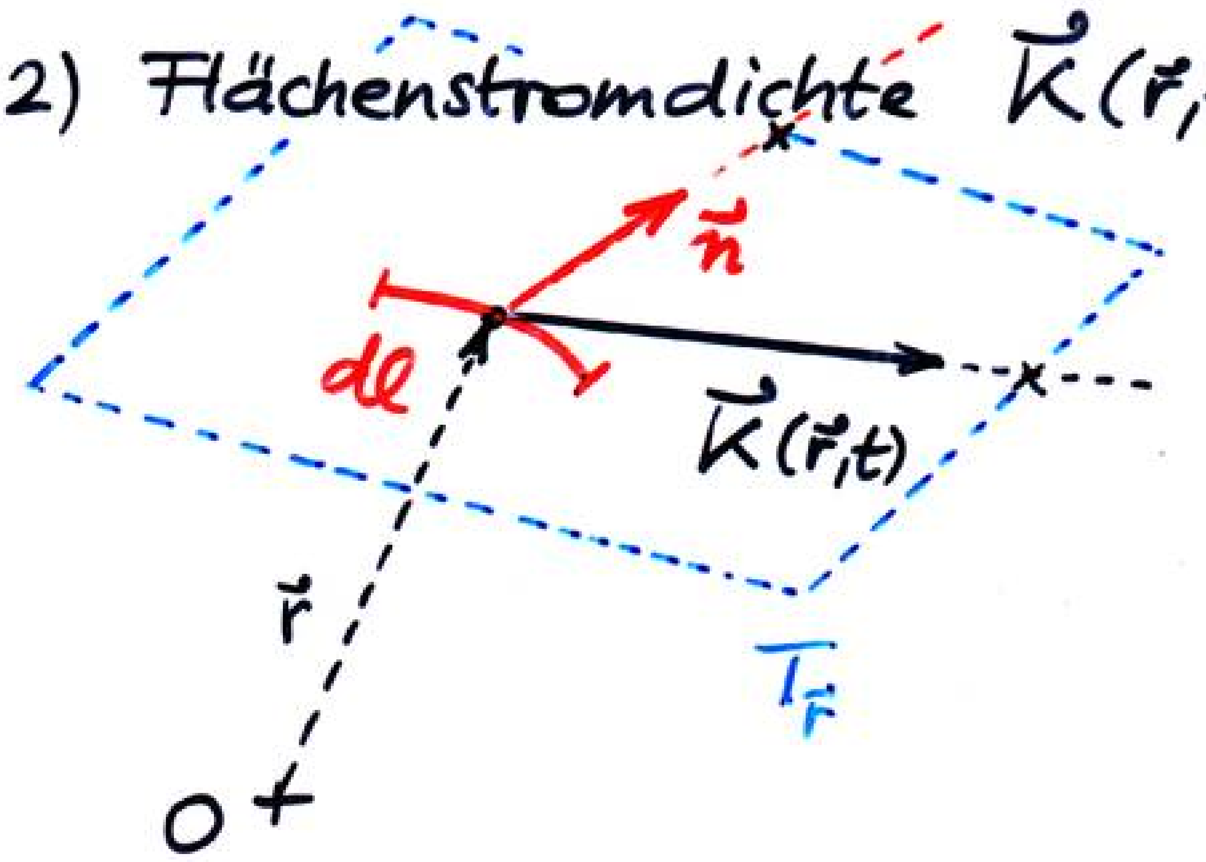
1) Flächenladungsdichte $\sigma(\vec{r},t)$, $\vec{r}\in\mathcal{F}$



Gesamtladung auf df in $\vec{r}\in\mathcal{F}$ zum Zeitpunkt t:

$\sigma(\vec{r},t)\,df$ $[\longleftrightarrow \rho(\vec{r},t)\,d^3r]$

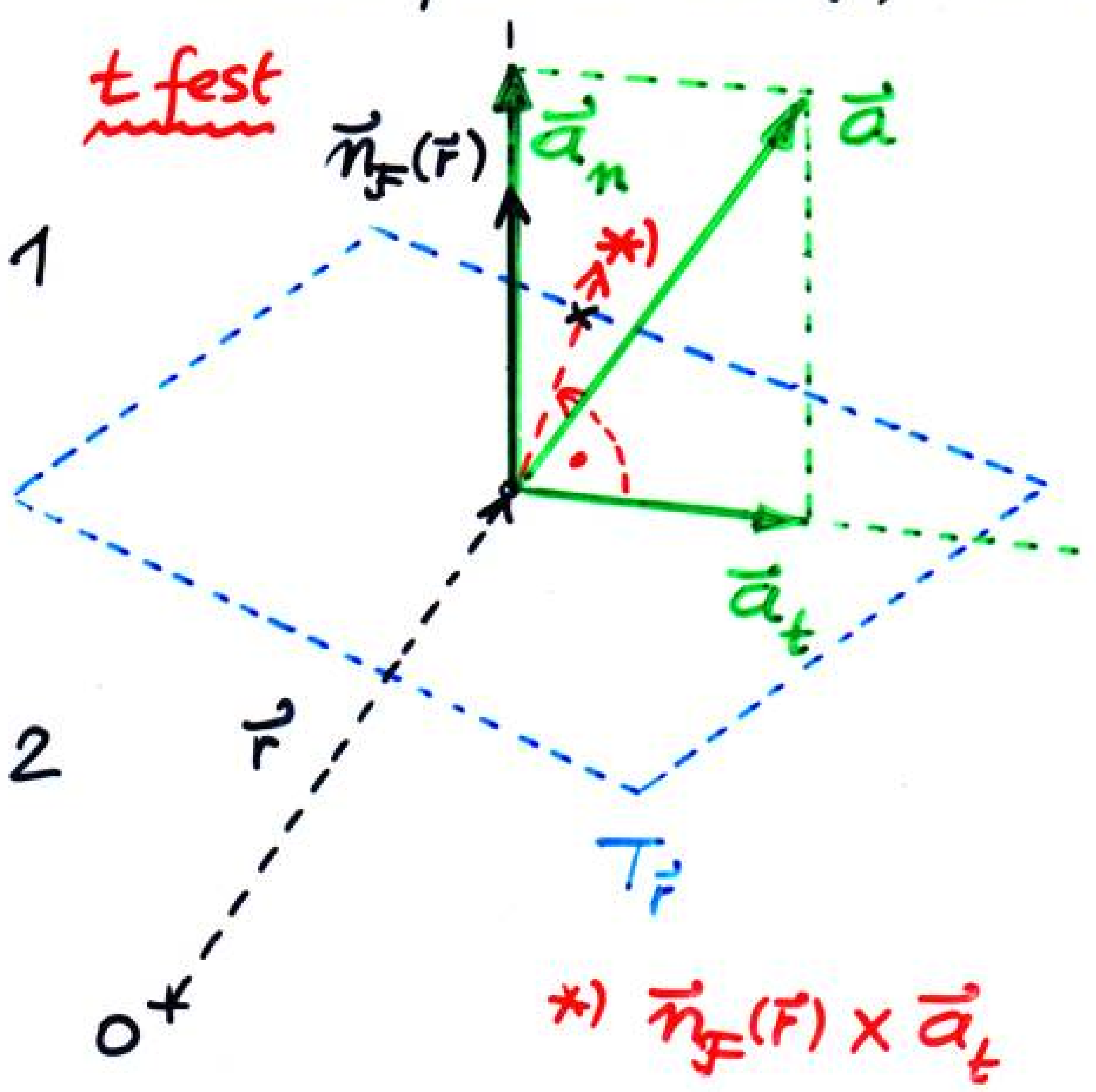
2) Flächenstromdichte $\vec{K}(\vec{r},t)$, $\vec{r}\in\mathcal{F}$ (Vektor in $T_{\vec{r}}$)



Gesamtladung, welche pro Zeiteinheit dl in $\vec{r}\in\mathcal{F}$ zum Zeitpunkt t netto durchsetzt (Orientierung!)

$\vec{K}(\vec{r},t)\cdot\vec{n}\,dl$ $[\longleftrightarrow \vec{j}(\vec{r},t)\cdot\vec{n}\,df]$

3) Tangential- und Normalkomponente eines Vektorfeldes $\vec{a}(\vec{r},t)$ in einem Punkt $\vec{r} \in \mathcal{F}$ ($\vec{a}(\vec{r},t)$ für Punkte im ganzen Raum definiert!)



*) $\vec{n}_{\mathcal{F}}(\vec{r}) \times \vec{a}_t$

$$\vec{a}_n(\vec{r},t) := \underbrace{\left(\vec{a}(\vec{r},t) \cdot \vec{n}_{\mathcal{F}}(\vec{r})\right)}_{=:a_n(\vec{r},t)} \vec{n}_{\mathcal{F}}(\vec{r})$$

$$\vec{a}_t(\vec{r},t) := \vec{a}(\vec{r},t) - \vec{a}_n(\vec{r},t)$$

$$\vec{r} \in \mathcal{F}$$

Indices 1,2, falls Stetigkeit nicht vorliegt oder erst zu untersuchen ist: z.B. $\vec{a}_{1,t}, \vec{a}_{2,t}$

FG (ohne externe Quellen)

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

im "Inneren" der Medien (i.a.) null

Hier nicht "in $\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ gesteckt".

Grenzbedingungen (ohne externe Quellen)

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{Div} \vec{D} &= 4\pi\sigma \\ \operatorname{Div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{Rot} \vec{E} &= \vec{0} \\ \operatorname{Rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c}\vec{K} \end{aligned}}$$

$\vec{r} \in \mathcal{F}, \forall t$

jeweils "außen" minus "innen"

$$\operatorname{Div} \vec{a}(\vec{r},t) := \vec{n}_{\mathcal{F}}(\vec{r}) \cdot \left[\vec{a}_1(\vec{r},t) - \vec{a}_2(\vec{r},t)\right] = a_{1,n}(\vec{r},t) - a_{2,n}(\vec{r},t)$$

$$\operatorname{Rot} \vec{a}(\vec{r},t) := \vec{n}_{\mathcal{F}}(\vec{r}) \times \left[\vec{a}_{1(t)}(\vec{r},t) - \vec{a}_{2(t)}(\vec{r},t)\right]$$ (gilt auch ohne Index t)

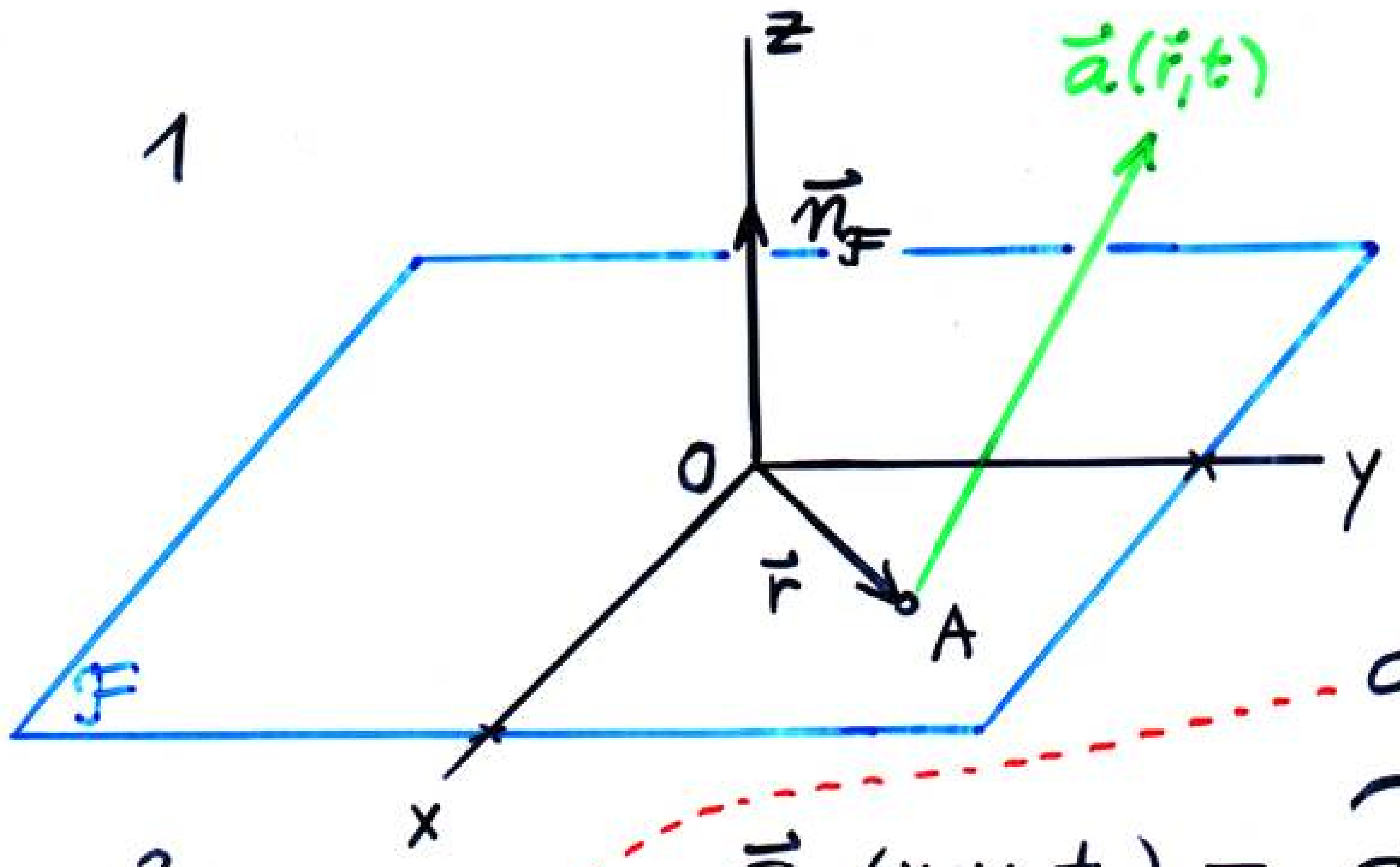
Ausführlich angeschrieben:

$$
\begin{array}{l|ll}
\mathrm{Div}\,\vec{D} = & D_{1,n}(\vec{r},t) - D_{2,n}(\vec{r},t) = 4\pi\,\sigma(\vec{r},t) & \\
\mathrm{Div}\,\vec{B} = & B_{1,n}(\vec{r},t) - B_{2,n}(\vec{r},t) = 0 & \vec{r}\in\mathcal{F},\ \forall t \\
\mathrm{Rot}\,\vec{E} = & \vec{n}_{\mathcal{F}}(\vec{r}) \times \left[\vec{E}_{1,t}(\vec{r},t) - \vec{E}_{2,t}(\vec{r},t)\right] = \vec{0} & \\
\mathrm{Rot}\,\vec{H} = & \vec{n}_{\mathcal{F}}(\vec{r}) \times \left[\vec{H}_{1,t}(\vec{r},t) - \vec{H}_{2,t}(\vec{r},t)\right] = \frac{4\pi}{c}\vec{K}(\vec{r},t) &
\end{array}
$$

bzw.

$$
\begin{array}{|ll}
D_{1,n}(\vec{r},t) - D_{2,n}(\vec{r},t) = 4\pi\,\sigma(\vec{r},t) & \\
B_{1,n}(\vec{r},t) - B_{2,n}(\vec{r},t) = 0 & \vec{r}\in\mathcal{F},\ \forall t \\
\vec{E}_{1,t}(\vec{r},t) - \vec{E}_{2,t}(\vec{r},t) = \vec{0} & \\
\vec{H}_{1,t}(\vec{r},t) - \vec{H}_{2,t}(\vec{r},t) = \frac{4\pi}{c}\vec{K}(\vec{r},t) \times \vec{n}_{\mathcal{F}}(\vec{r}) &
\end{array}
$$

BEWEIS für ebene Grenzflächen



$$\vec{n}_{\mathcal{F}} = (0,0,1) = \vec{e}_z$$

$$\vec{r}\in\mathcal{F}: \quad \vec{r} = (x,y,0)$$

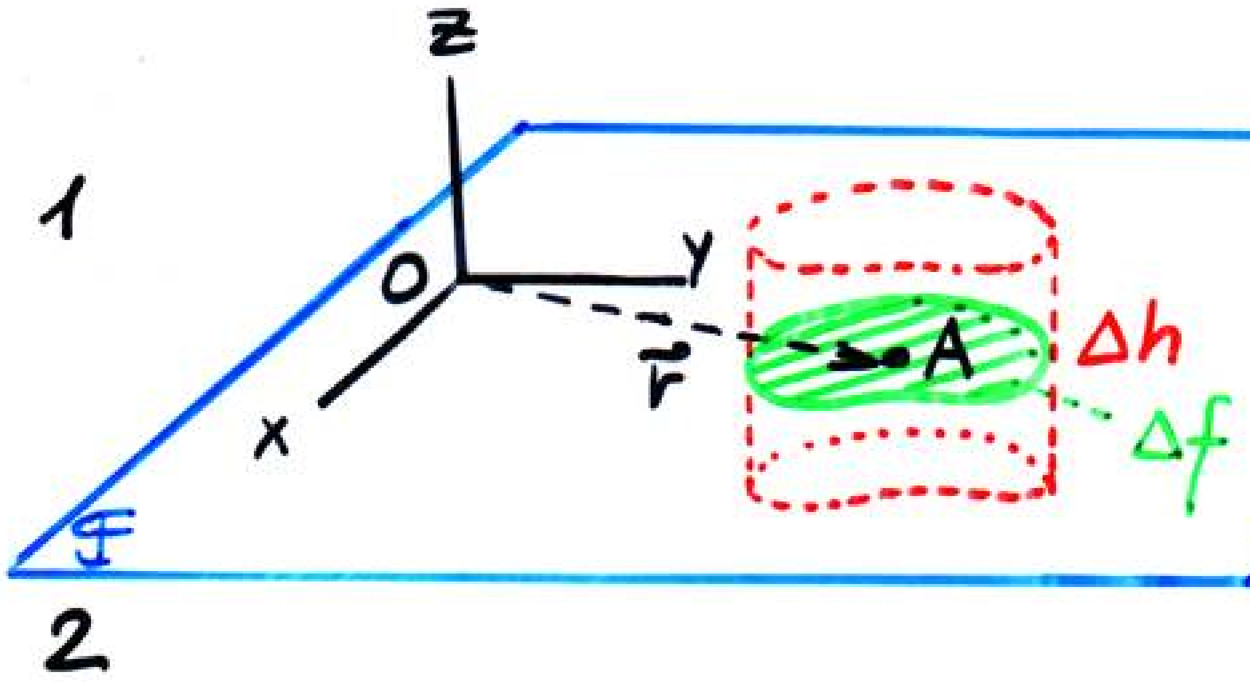
$$\vec{a}_n(x,y,t) = \overbrace{a_z(x,y,0,t)}^{a_n(x,y,t)}\,\vec{e}_z$$

$$\vec{a}_t(x,y,t) = a_x(x,y,0,t)\,\vec{e}_x + a_y(x,y,0,t)\,\vec{e}_y$$

nur für $\vec{r}\in\mathcal{F}$ definiert!

$\vec{a}(x,y,z,t)$ definiert!

Flächendichten formal als Volumsdichten geschrieben



$$\Delta V = \Delta f \cdot \Delta h$$

$$\rho(\vec{r},t) = \underbrace{\rho_0(\vec{r},t)} + \sigma(x,y,t)\,\delta(z)$$

Ann.: beschränkt für $z=0$ normalerweise $\rho_0(\vec{r},t)=0$

$$q(\Delta V,t) := \int_{\Delta V} \rho(\vec{r},t)\,d^3r = \int_{\Delta V} \rho_0(\vec{r},t)\,d^3r$$

$$+ \underbrace{\iint_{\Delta f} dx\,dy\;\sigma(x,y,t)}_{q(\Delta f,t)} \underbrace{\int_{-\frac{\Delta h}{2}}^{+\frac{\Delta h}{2}} dz\,\delta(z)}_{1}$$

Analog:

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \vec{j}_0(\vec{r},t) + \vec{K}(x,y,t)\,\delta(z)$$

$$\text{mit}\quad \vec{K}(x,y,t) = \vec{K}_t(x,y,t)$$

$$= K_x(x,y,t)\,\vec{e}_x + K_y(x,y,t)\,\vec{e}_y$$

Prototyp einer div-Gleichung mit Flächendichte

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = f(x,y,z,t)$$

$$= g(x,y,z,t) + h(x,y,t)\,\delta(z)$$

— beschränkt für $z=0$

$$\underbrace{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dz \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y}\right)}_{0} + \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\underbrace{\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dz\, \frac{\partial a_z}{\partial z}}_{a_z(x,y,\varepsilon,t) - a_z(x,y,-\varepsilon,t)}$$

$$= \underbrace{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dz\, g(x,y,z,t)}_{0} + h(x,y,t)\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\underbrace{\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dz\,\delta(z)}_{1}$$

"außen" minus "innen"

$$\operatorname{Div}\vec{a} = a_{1,z}(x,y,0,t) - a_{2,z}(x,y,0,t) = h(x,y,t)\,,$$

$\forall x,y,t$

Anwendung:

$\vec{a}$	f	g	h
$\vec{D}$	$4\pi\rho$	$4\pi\rho_0$	$4\pi\sigma$
$\vec{B}$	0	0	0

$$\operatorname{Div}\vec{D} = \boxed{D_{1,z}(x,y,0,t) - D_{2,z}(x,y,0,t) = 4\pi\,\sigma(x,y,t)}$$

$$\operatorname{Div}\vec{B} = \boxed{B_{1,z}(x,y,0,t) - B_{2,z}(x,y,0,t) = 0}$$

$\forall x,y,t$

Prototyp einer rot-Gleichung mit Flächenstromdichte

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y$$

$$+ \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

$$= \vec{k}(x,y,z,t) = \vec{\ell}(x,y,z,t) + \underbrace{\vec{m}(x,y,t)}_{m_x(x,y,t)\vec{e}_x + m_y(x,y,t)\vec{e}_y}\delta(z)$$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dz \ldots \Rightarrow$$

$$-a_{1,y}(x,y,0,t) + a_{2,y}(x,y,0,t) = m_x(x,y,t)$$

$$a_{1,x}(x,y,0,t) - a_{2,x}(x,y,0,t) = m_y(x,y,t)$$

$\forall x,y,t$

bzw.

$$\operatorname{Rot}\vec{a} = \vec{e}_z \times \overbrace{\left[\underbrace{\vec{a}_{1,t}(x,y,t)}_{a_{1,x}\vec{e}_x + a_{1,y}\vec{e}_y} - \underbrace{\vec{a}_{2,t}(x,y,t)}_{a_{2,x}\vec{e}_x + a_{2,y}\vec{e}_y}\right]}^{(a_{1,x}-a_{2,x})\vec{e}_x + (a_{1,y}-a_{2,y})\vec{e}_y} = \vec{m}(x,y,t)$$

da $\qquad \forall x,y,t$

$$(a_{1,x} - a_{2,x})\underbrace{(\vec{e}_z \times \vec{e}_x)}_{\vec{e}_y} + (a_{1,y} - a_{2,y})\underbrace{(\vec{e}_z \times \vec{e}_y)}_{-\vec{e}_x}$$

$$= m_x\vec{e}_x + m_y\vec{e}_y$$

Anwendung:

$\vec{a}$	$\vec{k}$	$\vec{l}$	$\vec{m}$
$\vec{E}$	$-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\vec{0}$
$\vec{H}$	$\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\frac{4\pi}{c}\vec{j}_0+\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\frac{4\pi}{c}\vec{K}$

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{Rot}\vec{E} &= \vec{e}_z \times [\vec{E}_{1,t}(x,y,t) - \vec{E}_{2,t}(x,y,t)] = \vec{0} \\ \operatorname{Rot}\vec{H} &= \vec{e}_z \times [\vec{H}_{1,t}(x,y,t) - \vec{H}_{2,t}(x,y,t)] = \frac{4\pi}{c}\vec{K}(x,y,t) \end{aligned}}$$

$\forall x,y,t$