Feld einer beliebig bewegten Punktladung

retardierte Potentiale (Index "ret" weggelassen)

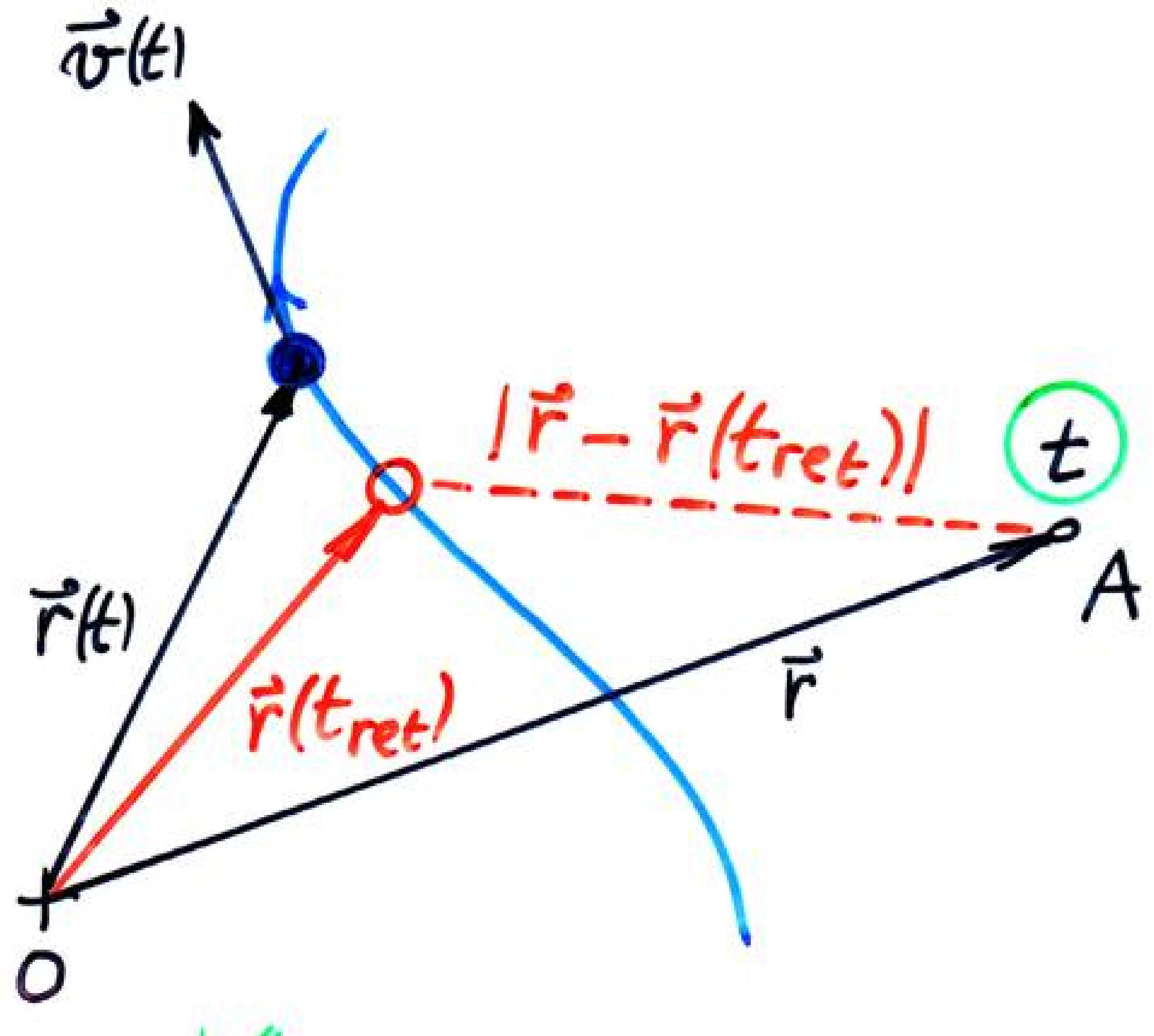
$$\boxed{\begin{aligned}\varphi(\vec{r},t) &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{\rho\left(\vec{r}', t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\ \vec{A}(\vec{r},t) &= \frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\end{aligned}}$$

mit

$$\boxed{\begin{aligned}\rho(\vec{r}',t') &= q\,\delta(\vec{r}'-\vec{r}(t')) \\ \vec{j}(\vec{r}',t') &= q\,\vec{v}(t')\,\delta(\vec{r}'-\vec{r}(t'))\end{aligned}}$$

Vorgegeben: q, $\vec{r}(t')$, $-\infty < t' < +\infty$, !

$\Rightarrow \rho(\vec{r}',t')$, $\vec{j}(\vec{r}',t')$ bekannt $(\vec{v}(t') = \dot{\vec{r}}(t'))$



$$t - t_{ret} = \frac{|\vec{r}-\vec{r}(t_{ret})|}{c}$$

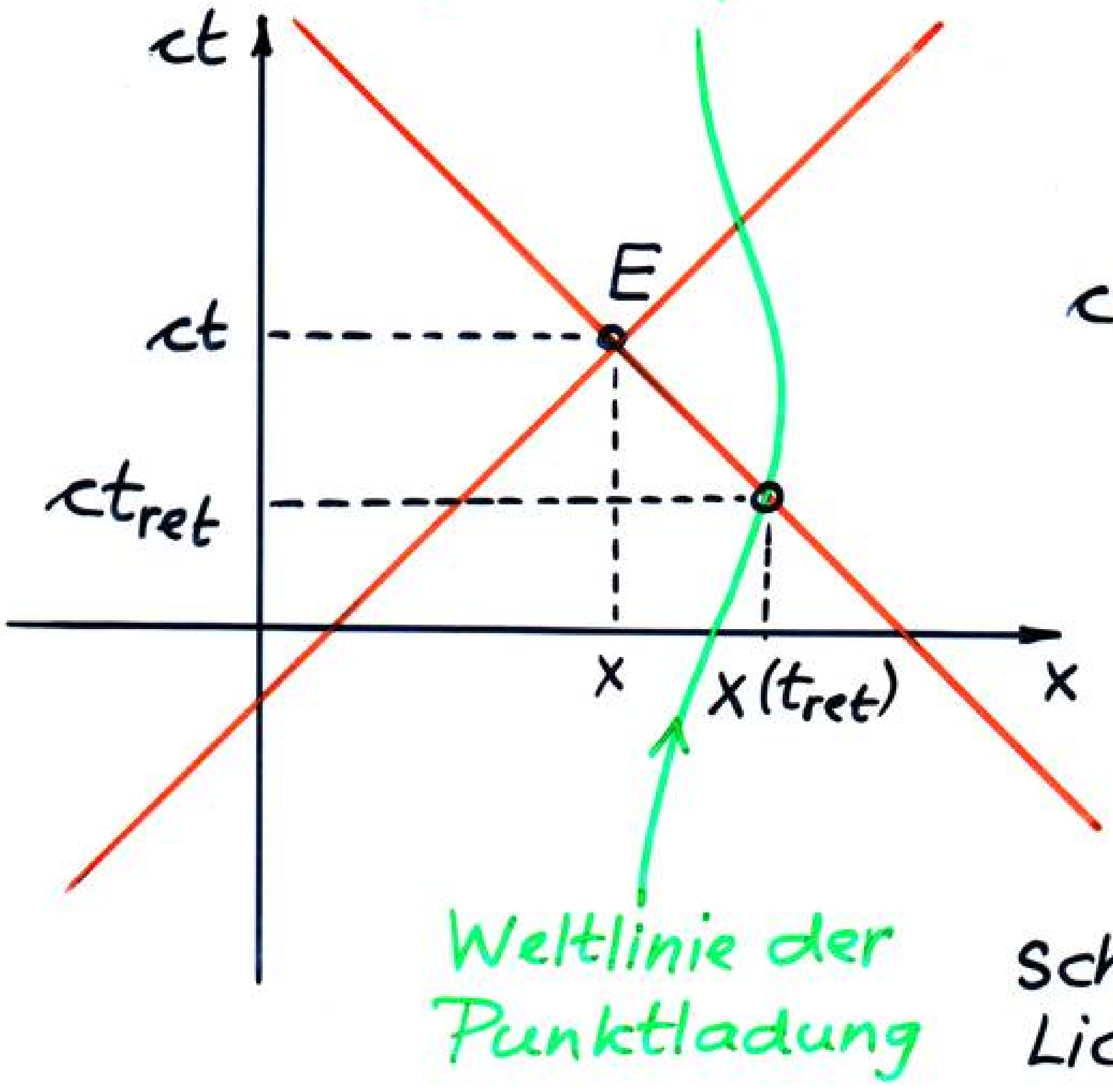
$$\boxed{t_{ret} = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}(t_{ret})|}{c}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{t_{ret} = t_{ret}(\vec{r},t)}$$
retardierte Zeit

Lösung eindeutig wegen $|\vec{v}(t')| < c$, $\forall t'$!

Minkowskidiagramm für eindimensionale Bewegung:



$$ct - ct_{ret} = |x - x(t_{ret})|$$

$$t_{ret} = t - \frac{|x - x(t_{ret})|}{c}$$

✓

Schneidet hinteren Lichtkegel von E nur einmal!

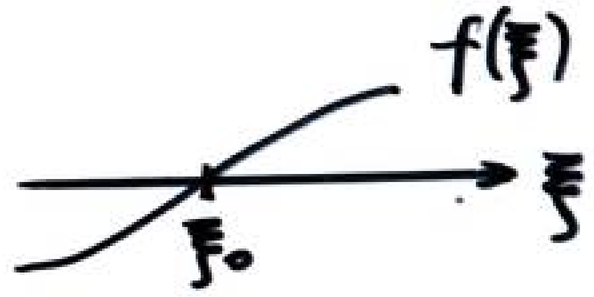
$\Rightarrow$ t_{ret} für gegebenes ct, x eindeutig bestimmt

$$\varphi(\vec r,t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{\rho\left(\vec r\,', t - \frac{|\vec r - \vec r\,'|}{c}\right)}{|\vec r - \vec r\,'|} = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'}\;\underbrace{\int_{\mathbb{R}} dt'}\;\underbrace{\rho(\vec r\,', t')}_{q\,\delta(\vec r\,' - \vec r(t'))}\;\underbrace{\frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\vec r - \vec r\,'|}{c}\right)}{|\vec r - \vec r\,'|}}_{G_{ret}(|\vec r - \vec r\,'|,\, t - t')}$$

$$= q \int_{\mathbb{R}} dt' \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\vec r - \vec r\,'|}{c}\right)}{|\vec r - \vec r\,'|} \, \delta(\vec r\,' - \vec r(t'))$$

$$\varphi(\vec r,t) = q \int_{\mathbb{R}} dt' \, \frac{\overbrace{\delta\left(t - t' - \frac{|\vec r - \vec r(t')|}{c}\right)}}{|\vec r - \vec r(t')|} \qquad =: f(\vec r, t; t')$$

$$\vec A(\vec r,t) = q \int_{\mathbb{R}} dt' \, \frac{\vec v(t')}{c} \, \frac{\overbrace{\delta\left(t - t' - \frac{|\vec r - \vec r(t')|}{c}\right)}}{|\vec r - \vec r(t')|} \qquad \vec j(\vec r\,', t') = \vec v(t')\,\rho(\vec r\,', t')$$



Formel:

$$\boxed{\delta(f(\xi)) = \frac{\delta(\xi - \xi_0)}{|f'(\xi_0)|}}$$

falls $f(\xi)$ nur eine einzige Nullstelle ξ_0 besitzt, und diese einfach ist: $f(\xi_0) = 0$, $f'(\xi_0) \neq 0$

Im Beispiel (nur φ angeschrieben):

$$\varphi(\vec r,t) = q \int_{\mathbb{R}} dt' \, \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\vec r - \vec r(t')|}{c}\right)}{|\vec r - \vec r(t')|}$$

$$f(\vec r, t; t') := t - t' - \frac{|\vec r - \vec r(t')|}{c}$$

für Integration fest

entspricht ξ

$\vec r, t$ fest: $\quad f(\vec r, t; t') = t - t' - \frac{|\vec r - \vec r(t')|}{c} = 0$

$\Longrightarrow$ einzige (und einfache) Nullstelle

$$t' = t_{ret}(\vec r, t)$$

s. unten!

entspricht ξ_0

$$g(\vec r; t') := \frac{\partial f(\vec r, t; t')}{\partial t'}$$

entspricht $f'(\xi)$

$$g(\vec r; t') = -1 - \frac{\partial}{\partial t'} \frac{|\vec r - \vec r(t')|}{c}$$

$$= -1 + \frac{\vec r - \vec r(t')}{|\vec r - \vec r(t')|} \cdot \frac{\vec v(t')}{c}$$

$$|g(\vec r; t')| = 1 - \frac{\vec r - \vec r(t)}{|\vec r - \vec r(t')|} \cdot \frac{\vec v(t')}{c} > 0 \quad (\text{also} \neq 0 \ \forall t')$$

entspricht $|f'(\xi)|$

$$\delta(f(\xi)) = \frac{\delta(\xi-\xi_0)}{|f'(\xi_0)|} \quad \text{entspricht}$$

$$\underbrace{\delta\left(t-t'-\frac{|\vec r-\vec r(t')|}{c}\right)}_{f(\vec r,t;t')} = \frac{\delta(t'-t_{ret}(\vec r,t))}{|g(\vec r;t_{ret}(\vec r,t))|}$$

$$= \frac{\delta(t'-t_{ret})}{1-\frac{\vec r-\vec r(t_{ret})}{|\vec r-\vec r(t_{ret})|}\cdot\frac{\vec v(t_{ret})}{c}}$$

mit $t_{ret} = t_{ret}(\vec r,t)$

$$\varphi(\vec r,t) = q\int_{\mathbb{R}} dt' \, \frac{\delta\left(t-t'-\frac{|\vec r-\vec r(t')|}{c}\right)}{|\vec r-\vec r(t')|}$$

$$= \frac{q}{1-\frac{\vec r-\vec r(t_{ret})}{|\vec r-\vec r(t_{ret})|}\cdot\frac{\vec v(t_{ret})}{c}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dt' \, \frac{\delta(t'-t_{ret})}{|\vec r-\vec r(t')|}}_{\frac{1}{|\vec r-\vec r(t_{ret})|}}$$

Liénard-Wiechert-Potentiale

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi(\vec r,t) &= \frac{q}{|\vec r-\vec r(t_{ret})|\left(1-\frac{\vec r-\vec r(t_{ret})}{|\vec r-\vec r(t_{ret})|}\cdot\frac{\vec v(t_{ret})}{c}\right)} \\ \vec A(\vec r,t) &= \frac{\vec v(t_{ret})}{c}\,\varphi(\vec r,t) \quad \text{mit} \quad t_{ret} = t_{ret}(\vec r,t) \end{aligned}}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\operatorname{grad}\varphi(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r},t)$$

z.B.: $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$

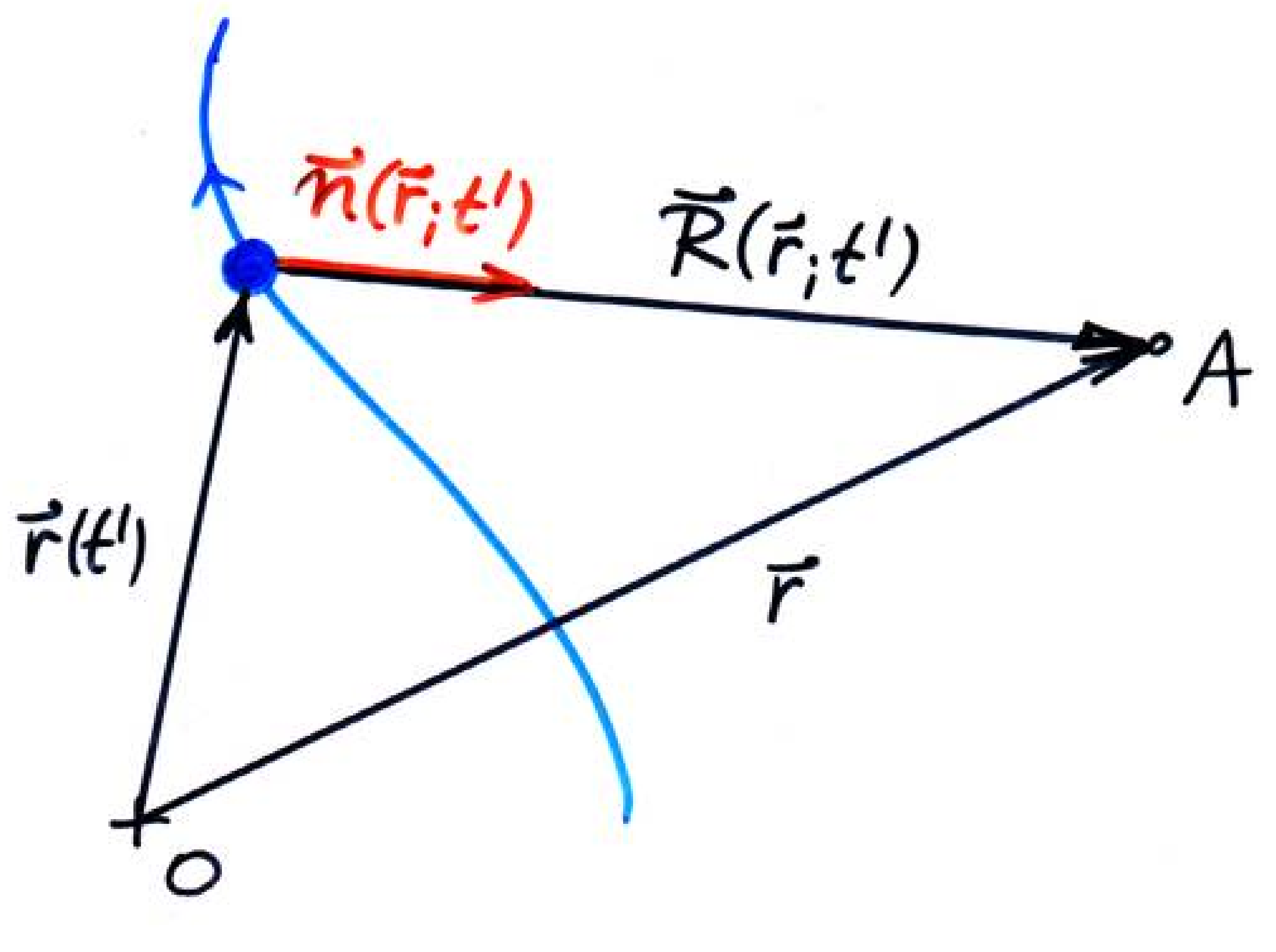
$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}(t_{ret})|\left(1-\frac{\vec{r}-\vec{r}(t_{ret})}{|\vec{r}-\vec{r}(t_{ret})|}\cdot\frac{\vec{v}(t_{ret})}{c}\right)}$$

$$t_{ret} = t_{ret}(\vec{r},t) \iff t_{ret} = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}(t_{ret})|}{c}$$

besser:

$$\varphi(\vec{r},t) = q\int_{\mathbb{R}} dt' \, \frac{\delta\left(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r}(t')|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}(t')|}$$

Abkürzungen:



$$\vec{R}(\vec{r};t') := \vec{r}-\vec{r}(t')$$

$$R(\vec{r};t') := |\vec{r}-\vec{r}(t')|$$

$$\vec{n}(\vec{r};t') := \frac{\vec{R}(\vec{r};t')}{R(\vec{r};t')}$$

$$\vec{\beta}(t') := \frac{\vec{v}(t')}{c}$$

$$\Rightarrow \quad f(\vec{r},t;t') = t-t' - \frac{|\vec{r}-\vec{r}(t')|}{c} = t-t' - \frac{R(\vec{r};t')}{c}$$

$$|g(\vec{r};t')| = 1 - \frac{\vec{r}-\vec{r}(t')}{|\vec{r}-\vec{r}(t')|} \cdot \frac{\vec{v}(t')}{c} = 1 - \vec{n}(\vec{r};t')\cdot\vec{\beta}(t')$$

Ferner:

$$F(\vec{r},t;t')\Big|_{t'=t_{ret}(\vec{r},t)} = F(\vec{r},t;t_{ret}(\vec{r},t))$$

$$= [F]_{ret} \quad \text{geschrieben}$$

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}(t_{ret})| \left(1 - \frac{\vec{r}-\vec{r}(t_{ret})}{|\vec{r}-\vec{r}(t_{ret})|} \cdot \frac{\vec{v}(t_{ret})}{c}\right)}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\vec{v}(t_{ret})}{c}\,\varphi(\vec{r},t) \qquad \text{mit} \quad t_{ret} = t_{ret}(\vec{r},t)$$

schreibt sich dann:

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi(\vec{r},t) &= \left[\frac{q}{R\,|g|}\right]_{ret} \\ \vec{A}(\vec{r},t) &= [\vec{\beta}]_{ret}\,\varphi(\vec{r},t) \end{aligned}}$$

$$[|g|]_{ret} = 1 - [\vec{n}]_{ret} \cdot [\vec{\beta}]_{ret}$$

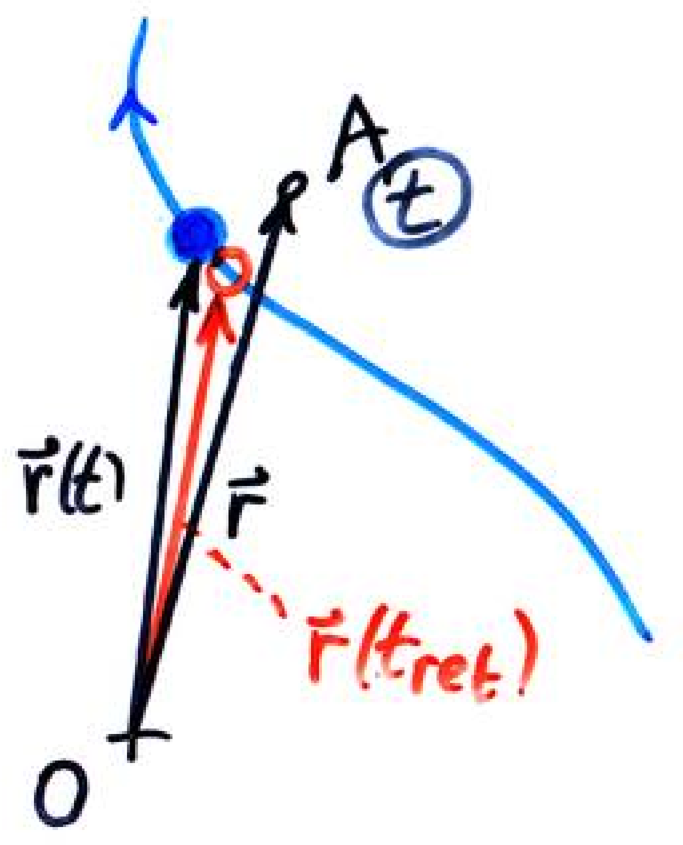
avancierte Lsg. s. verteilter Zettel!

Liénard–Wiechert–Feld

retard. Lsg.

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \underbrace{\left[\frac{q}{\gamma^2(v)\,|g|^3 R^2}\,(\vec{n}-\vec{\beta})\right]_{ret}}_{=:\,\vec{E}_v(\vec{r},t)} + \underbrace{\left[\frac{q}{c\,|g|^3 R}\left\{\vec{n}\times\left((\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}\right)\right\}\right]_{ret}}_{=:\,\vec{E}_b(\vec{r},t)}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = [\vec{n}]_{ret}\times\vec{E}(\vec{r},t) = \underbrace{[\vec{n}]_{ret}\times\vec{E}_v(\vec{r},t)}_{=:\,\vec{B}_v(\vec{r},t)} + \underbrace{[\vec{n}]_{ret}\times\vec{E}_b(\vec{r},t)}_{=:\,\vec{B}_b(\vec{r},t)}$$



$$\vec{r}\to\vec{r}(t) \;\Longrightarrow\; t_{ret}(\vec{r},t)\longrightarrow t\,,\quad \frac{1}{[R^2]_{ret}} \sim \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}(t)|^2}$$

$$\Longrightarrow\; |\vec{E}(\vec{r},t)|\,,\; |\vec{B}(\vec{r},t)| \text{ divergieren wie } \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}(t)|^2}$$

$$\Longrightarrow\quad q\left[\vec{E}(\vec{r}(t),t) + \frac{\vec{v}(t)}{c}\times\vec{B}(\vec{r}(t),t)\right] = \vec{\infty}$$

Selbstkraftproblem, falls retardierte Lsg. genommen wird!

Retardiertes bzw. avanciertes elm. Feld einer Punktladung q

$$\vec{E}_{\substack{\mathrm{ret}\\ \mathrm{av}}}(\vec{r},t) = \left[\frac{q}{\gamma^2(v)\,|g_{\substack{\mathrm{ret}\\ \mathrm{av}}}|^3 R^2}\,(\vec{n}\mp\vec{\beta})\right]_{\substack{\mathrm{ret}\\ \mathrm{av}}} + \left[\frac{q}{c\,|g_{\substack{\mathrm{ret}\\ \mathrm{av}}}|^3 R}\left\{\vec{n}\times\left((\vec{n}\mp\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}\right)\right\}\right]_{\substack{\mathrm{ret}\\ \mathrm{av}}}$$

$$\vec{B}_{\substack{\mathrm{ret}\\ \mathrm{av}}}(\vec{r},t) = \pm\,\vec{n}(\vec{r};t_{\substack{\mathrm{ret}\\ \mathrm{av}}})\times\vec{E}_{\substack{\mathrm{ret}\\ \mathrm{av}}}(\vec{r},t)$$

$$t - t' \mp \frac{R(\vec{r},t')}{c} = 0 \Leftrightarrow t' = t_{\substack{\mathrm{ret}\\ \mathrm{av}}}(\vec{r},t)$$

$$|g_{\substack{\mathrm{ret}\\ \mathrm{av}}}(\vec{r};t')| = 1 \mp \frac{\vec{R}(\vec{r},t')}{R(\vec{r},t')}\cdot\vec{\beta}(t')$$

$$\vec{\beta}(t') := \frac{\vec{v}(t')}{c}$$

Ruhende Punktladung

$$\vec{r}(t') = \vec{r}_0\ , \quad \vec{\beta}(t') = \vec{0}\ , \quad \dot{\vec{\beta}}(t') = \vec{0}\ , \quad \forall t' \Rightarrow$$

$\vec{R}(\vec{r};t') = \vec{r} - \vec{r}_0$

$|g(\vec{r};t')| = 1$

$\forall t'$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \left[\frac{q}{\gamma^2(v)|g|^3R^2}(\vec{n} - \underbrace{\vec{\beta}}_{=\vec{0}})\right]_{ret}$$

$$+ \cancel{\left[\frac{q}{c|g|^3R}\left\{\vec{n}\times\left((\vec{n}-\vec{\beta})\times\underbrace{\dot{\vec{\beta}}}_{=\vec{0}}\right)\right\}\right]_{ret}} \quad \vec{0}$$

$$= \vec{E}_v(\vec{r},\cancel{t}) = \frac{q\,(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3} = \vec{E}(\vec{r})$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \underbrace{[\vec{n}]_{ret}}_{\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}} \times \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{0}$$

elstat. Coulombfeld

Würde man auch aus avancierter Lsg. erhalten!

Gleichförmig geradlinig bewegte Punktladung

$$\vec{r}(t') = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t' \,,$$

$$\vec{\beta}(t') = \vec{\beta}_0 = \frac{\vec{v}_0}{c} \,, \quad \dot{\vec{\beta}}(t') = \vec{0} \,, \quad \forall t'$$

$$\underline{\vec{E}(\vec{r},t)} = \left[\frac{q}{\gamma^2(v)|g|^3 R^2}(\vec{n}-\vec{\beta})\right]_{ret}$$

$$+ \underbrace{\cancel{\left[\frac{q}{c|g|^3 R}\left\{\vec{n}\times\left((\vec{n}-\vec{\beta})\times \underset{\overset{\parallel}{\vec{0}}}{\dot{\vec{\beta}}}\right)\right\}\right]_{ret}}}_{\vec{0}}$$

$$\underline{= \vec{E}_v(\vec{r},t) = \left[\frac{q}{\gamma^2(v_0)|g|^3 R^2}\right]_{ret} \underbrace{\left([\vec{n}]_{ret} - \vec{\beta}_0\right)}_{\propto\, \vec{n}(\vec{r},t)}}$$

$$= \ldots \text{ s. Aufg. } 3$$

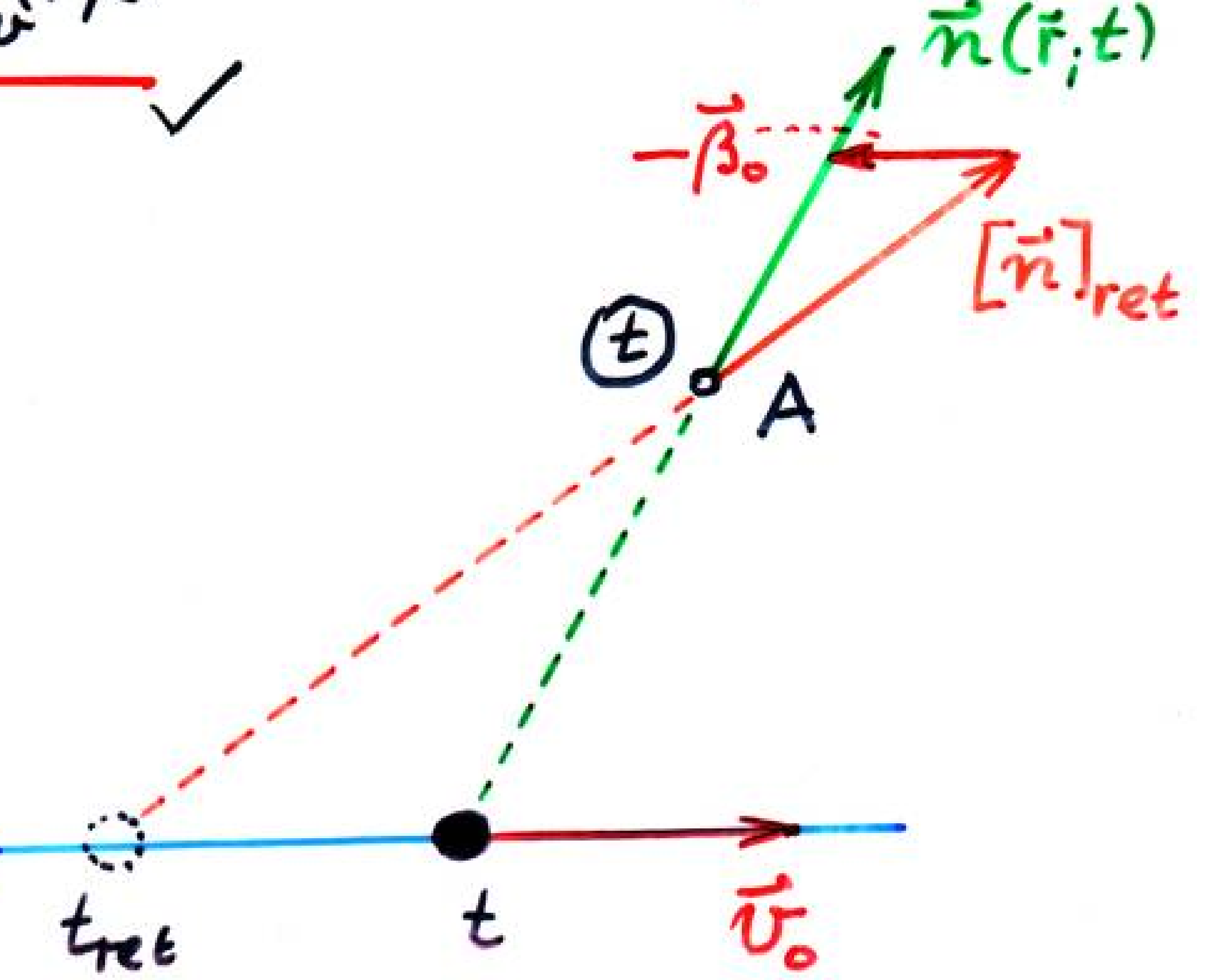
Aufg. 6

$$\underline{\vec{B}(\vec{r},t)} = [\vec{n}]_{ret} \times \vec{E}(\vec{r},t)$$

$$\underline{= \vec{B}_v(\vec{r},t) = \vec{\beta}_0 \times \vec{E}_v(\vec{r},t)} \checkmark$$

konvektives Coulombfeld +)

$$[\vec{n}]_{ret} = \underbrace{[\vec{n}]_{ret} - \vec{\beta}_0}_{\propto\, \vec{n}(\vec{r},t)} + \vec{\beta}_0$$



+) würde man auch aus av. Lsg. erhalten!

Beschleunigt bewegte Punktladung

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \left[\frac{q}{\gamma^2(v)|g|^3R^2}(\vec{n}-\vec{\beta})\right]_{ret}$$

$$+ \left[\frac{q}{c|g|^3R}\left\{\vec{n}\times\left((\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}\right)\right\}\right]_{ret}$$

$$= \vec{E}_v(\vec{r},t) + \vec{E}_b(\vec{r},t)$$

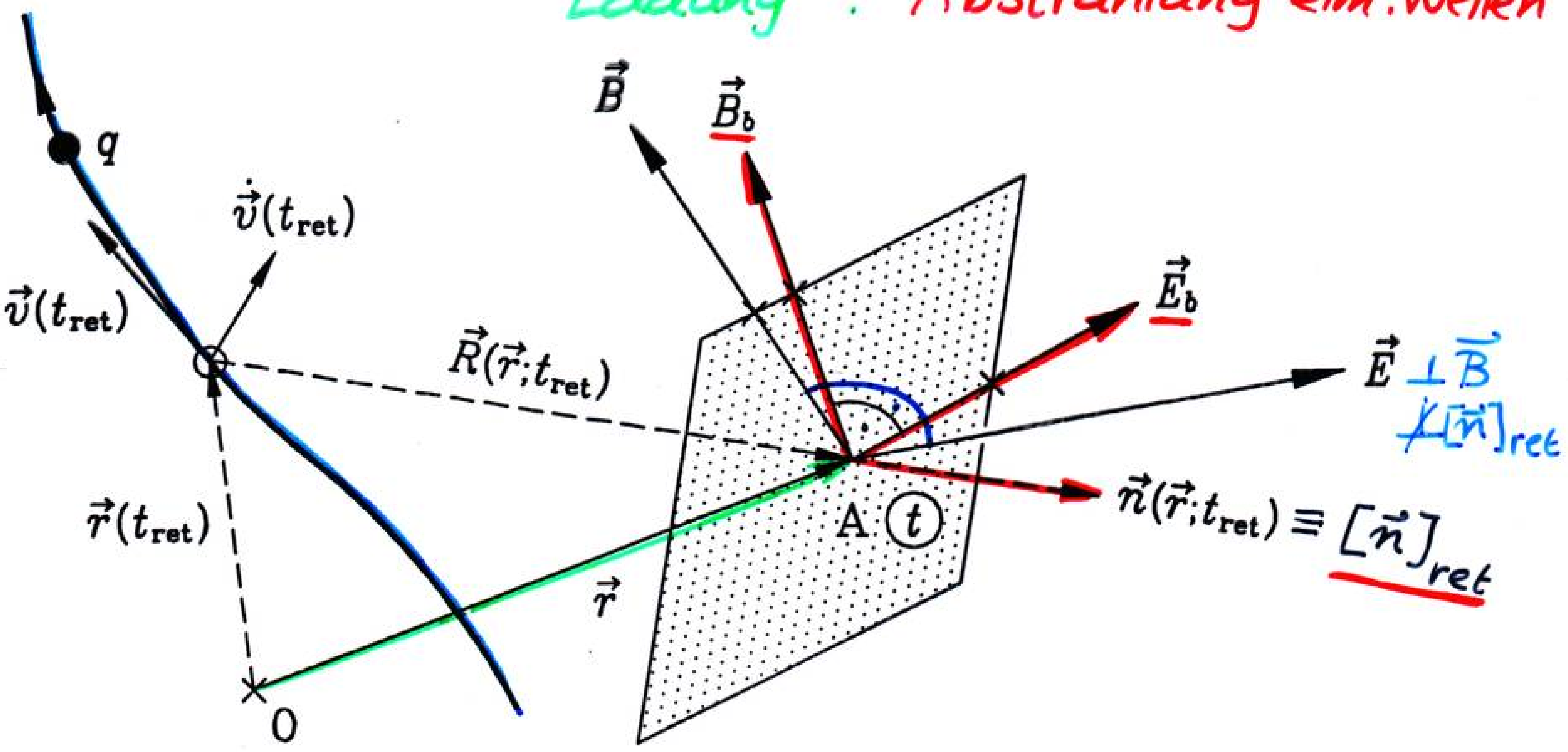
$$\vec{B}(\vec{r},t) = [\vec{n}]_{ret}\times\vec{E}_v(\vec{r},t) + [\vec{n}]_{ret}\times\vec{E}_b(\vec{r},t)$$

$$= \vec{B}_v(\vec{r},t) + \vec{B}_b(\vec{r},t) = [\vec{n}]_{ret}\times\vec{E}(\vec{r},t)$$

$\vec{E}_v, \vec{B}_v$: $\sim \frac{1}{R^2}$ "bleibt bei der Ladung"

Verallgemeinertes Coulombfeld

$\vec{E}_b, \vec{B}_b$: $\sim \frac{1}{R}$ "löst sich teilweise von der Ladung": Abstrahlung elm. Wellen



$\boxed{[\vec{n}]_{ret}, \vec{E}_b, \vec{B}_b \text{ orth. DB (RS)} \quad |\vec{E}_b| = |\vec{B}_b|}$

$\vec{E} \not\perp [\vec{n}]_{ret}, |\vec{E}| \neq |\vec{B}|$