Erhaltungssätze in der Mx-L-Theorie für das abgeschlossene System

Inertialsystem: 1) Zeit homogen
2) Bezugsraum homogen
3) Bezugsraum isotrop

$\Longrightarrow$ für beliebige abgeschlossene Systeme besteht:

1) zeitliche Translationinvarianz $\Longrightarrow$ Energieerhaltung

2) räumliche Translationsinvarianz $\Longrightarrow$ Impulserhaltung

3) räumliche Drehinvarianz $\Longrightarrow$ Drehimpulserhaltung

Bemerkung:

Allgemeines Theorem (E. Noether): Noethertheorem

Zu jeder kontinuierlichen Symmetriegruppe gehört eine Erhaltungsgröße. ●

Reminiszenz an relativistische Mechanik:

BG:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\frac{m\vec{v}(t)}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}}_{\vec{p}(t)} = \vec{K}(t)$$

$$\Downarrow$$

Arbeitssatz:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}}_{E(t)} = \vec{K}(t)\cdot\vec{v}(t)$$

$$E(t) = \underbrace{mc^2}_{\text{Ruhenergie}} + \underbrace{\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}} - mc^2\right)}_{T(t)\ \text{kinetische Energie}}$$

Energieerhaltungssatz für das abgeschlossene System

$$\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r},t) = 4\pi \sum_{a=1}^{N} q_a\, \delta(\vec{r}-\vec{r}_a(t))$$

$$\operatorname{div}\vec{B}(\vec{r},t) = 0$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot}\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{4\pi}{c}\sum_{a=1}^{N} q_a \vec{v}_a(t)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_a(t)) + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\frac{m_a \vec{v}_a(t)}{\sqrt{1-\frac{v_a^2(t)}{c^2}}}}_{\vec{p}_a(t)} = \overbrace{q_a\left[\vec{E}(\vec{r}_a(t),t) + \frac{\vec{v}_a(t)}{c}\times\vec{B}(\vec{r}_a(t),t)\right]}^{\vec{K}_a(t)}$$

$$a = 1, 2, \dots, N$$

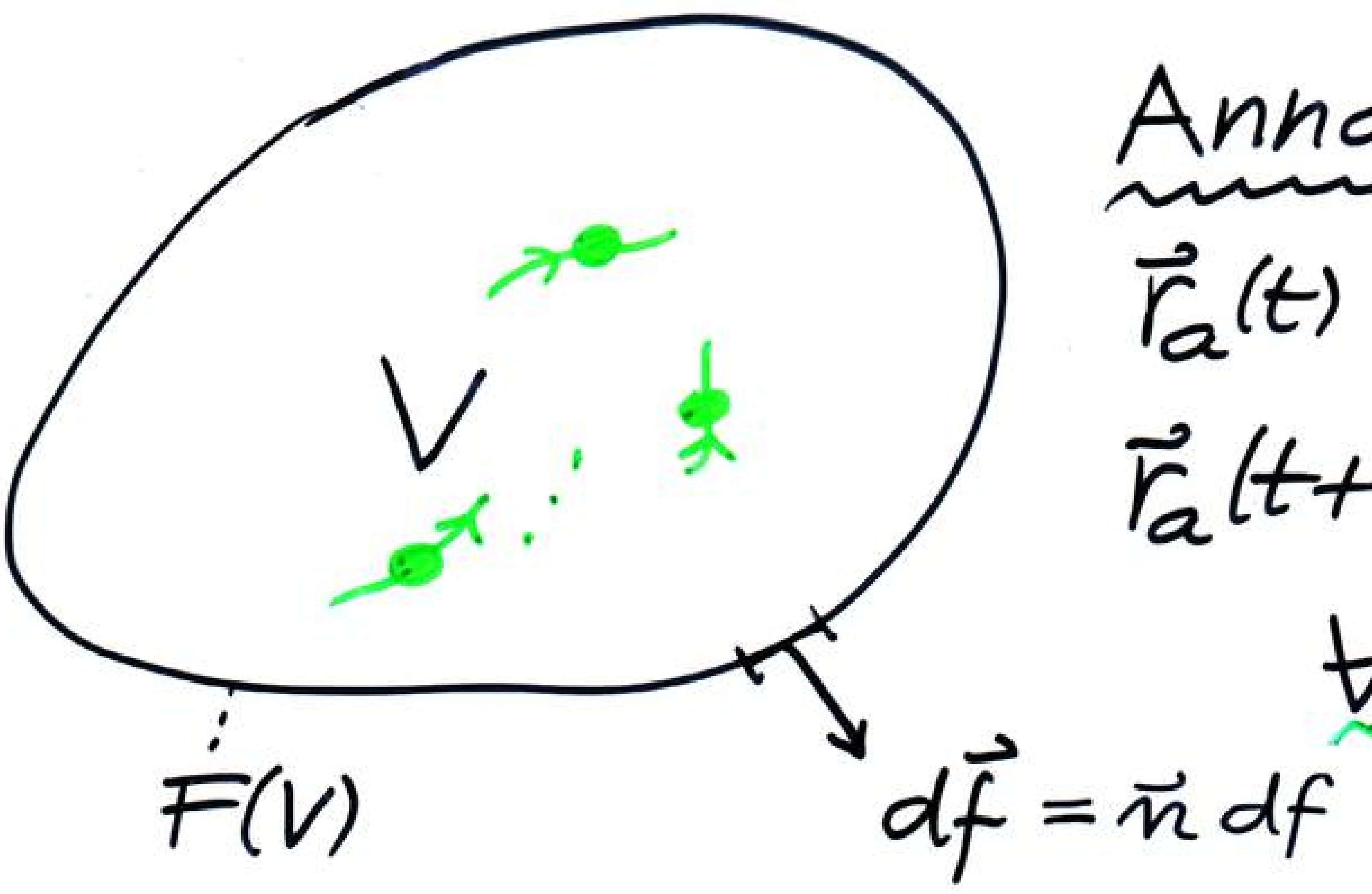
$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\frac{m_a c^2}{\sqrt{1-\frac{v_a^2(t)}{c^2}}}}_{E_a(t)} = \underbrace{q_a\, \vec{v}_a(t)\cdot\vec{E}(\vec{r}_a(t),t)}_{\vec{K}_a(t)\cdot\vec{v}_a(t)}$$

$$a = 1, 2, \dots, N$$

$$E_a(t) = m_a c^2 + m_a c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_a^2(t)}{c^2}}} - 1\right)$$

Ruhenergie — kinetische Energie — der Ladung



Annahme:

$\vec{r}_a(t) \in V$

$\vec{r}_a(t+dt) \in V$

$\forall a$ $(a = 1, 2, \ldots, N)$

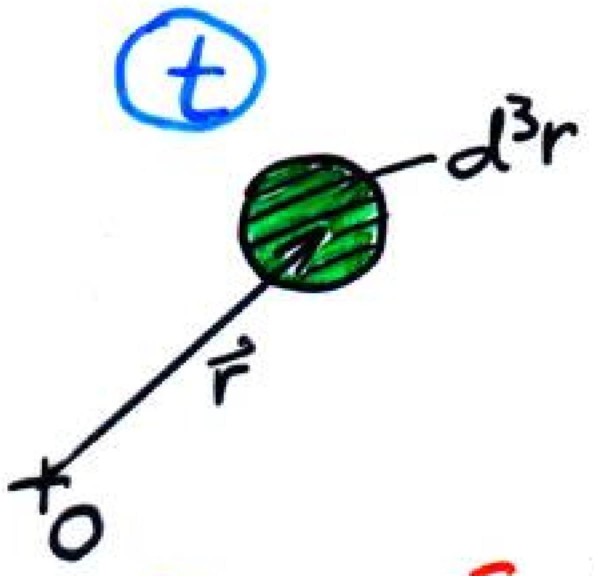
"Erwartung":

$$-\frac{d}{dt}\Big\{ E_{mech}(t) + \underbrace{\int_V u_{elm}(\vec{r},t)\, d^3r}_{E_{elm}(t;V)} \Big\}$$

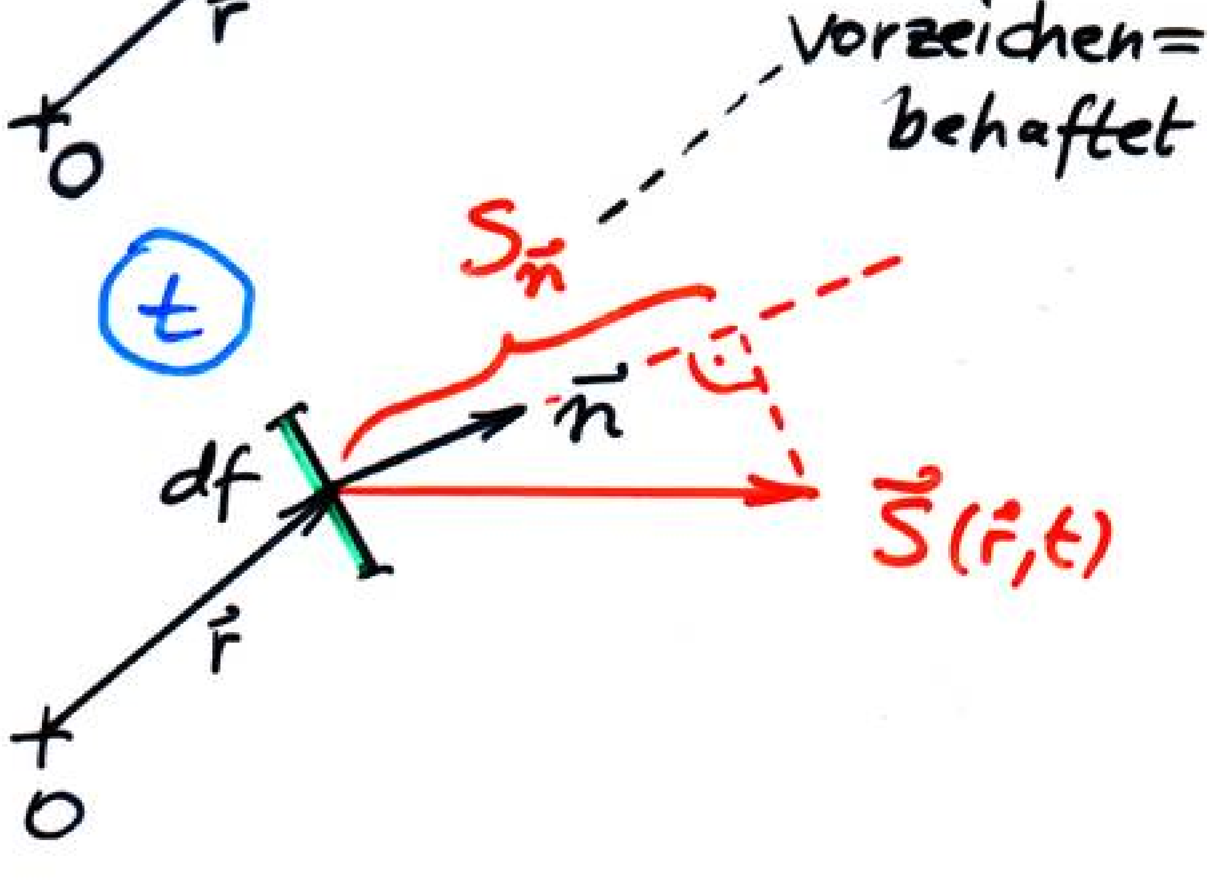
$$= \oint_{F(V)} \vec{S}(\vec{r},t) \cdot d\vec{f}$$

$\vec{E}, \vec{B}$

$u_{elm}(\vec{r},t)\, d^3r$



$\underbrace{\vec{S}(\vec{r},t) \cdot \vec{n}}_{=:\, S_{\vec{n}}(\vec{r},t)}\, df$



$$\frac{d}{dt}E_{mech}(t) = \frac{d}{dt}\sum_{a=1}^{N} E_a(t)$$

$$= \sum_{a=1}^{N} \frac{d}{dt}\frac{m_a c^2}{\sqrt{1-\frac{v_a^2(t)}{c^2}}}$$

$$= \sum_{a=1}^{N} q_a \vec{v}_a(t)\cdot \underline{\vec{E}(\vec{r}_a(t),t)}$$

$$= \int_V d^3r \underbrace{\sum_{a=1}^{N} q_a \vec{v}_a(t)\cdot \vec{E}(\vec{r},t)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_a(t))}_{\vec{j}(\vec{r},t)}$$

$$= \int_V d^3r\, \underbrace{\vec{j}(\vec{r},t)}\cdot \vec{E}(\vec{r},t)$$

mechanische Leistungsdichte

Einsetzen :

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$= \frac{c}{4\pi}\int_V d^3r\, \vec{E}\cdot \mathrm{rot}\,\vec{B} - \frac{1}{4\pi}\int_V d^3r\, \underbrace{\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}_{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}^2}$$

$$-\frac{d}{dt}\left\{ E_{mech}(t) + \int_V d^3r\, \frac{1}{8\pi}\vec{E}^2(\vec{r},t) \right\}$$

$$= -\frac{c}{4\pi}\int_V d^3r\, \vec{E}(\vec{r},t)\cdot \mathrm{rot}\,\vec{B}(\vec{r},t)$$

$$\frac{c}{4\pi}\vec{B}\cdot \Big| \quad -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\vec{E}$$

$$\int_V d^3r \ldots \Big| \quad -\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{8\pi}\vec{B}^2 = \frac{c}{4\pi}\vec{B}\cdot \mathrm{rot}\,\vec{E}$$

$$-\frac{d}{dt}\int_V d^3r\, \frac{1}{8\pi}\vec{B}^2(\vec{r},t)$$

$$= \frac{c}{4\pi}\int_V d^3r\, \vec{B}(\vec{r},t)\cdot \mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r},t)$$

$$-\frac{d}{dt}\left\{ E_{mech}(t) + \int_V d^3r\, \underbrace{\frac{1}{8\pi}\left[\vec{E}^2(\vec{r},t) + \vec{B}^2(\vec{r},t)\right]}_{=:\, u_{elm}(\vec{r},t)} \right\}$$

$$= \int_V d^3r\, \frac{c}{4\pi}\Big[\underbrace{\vec{B}\cdot \mathrm{rot}\,\vec{E} - \vec{E}\cdot \mathrm{rot}\,\vec{B}}_{\mathrm{div}\,(\vec{E}\times\vec{B})}\Big]$$

$$= \oint_{F(V)} d\vec{f}\cdot \underbrace{\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{B}(\vec{r},t)\right]}_{=:\, \vec{S}(\vec{r},t)}$$

$$-\frac{d}{dt}\Big\{E_{mech}(t)+\int_V d^3r\,\overbrace{\frac{1}{8\pi}\big[\vec{E}^2(\vec{r},t)+\vec{B}^2(\vec{r},t)}^{u_{elm}(\vec{r},t)}+\operatorname{div}\vec{W}(\vec{r},t)\big]\Big\}$$

$$=\oint_{F(V)} d\vec{f}\cdot\overbrace{\frac{c}{4\pi}\big[\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{B}(\vec{r},t)}^{\vec{S}(\vec{r},t)}-\frac{1}{2c}\frac{\partial\vec{W}(\vec{r},t)}{\partial t}\big]$$

(Dimension von $\vec{W}$: Energie / Flächeneinheit)

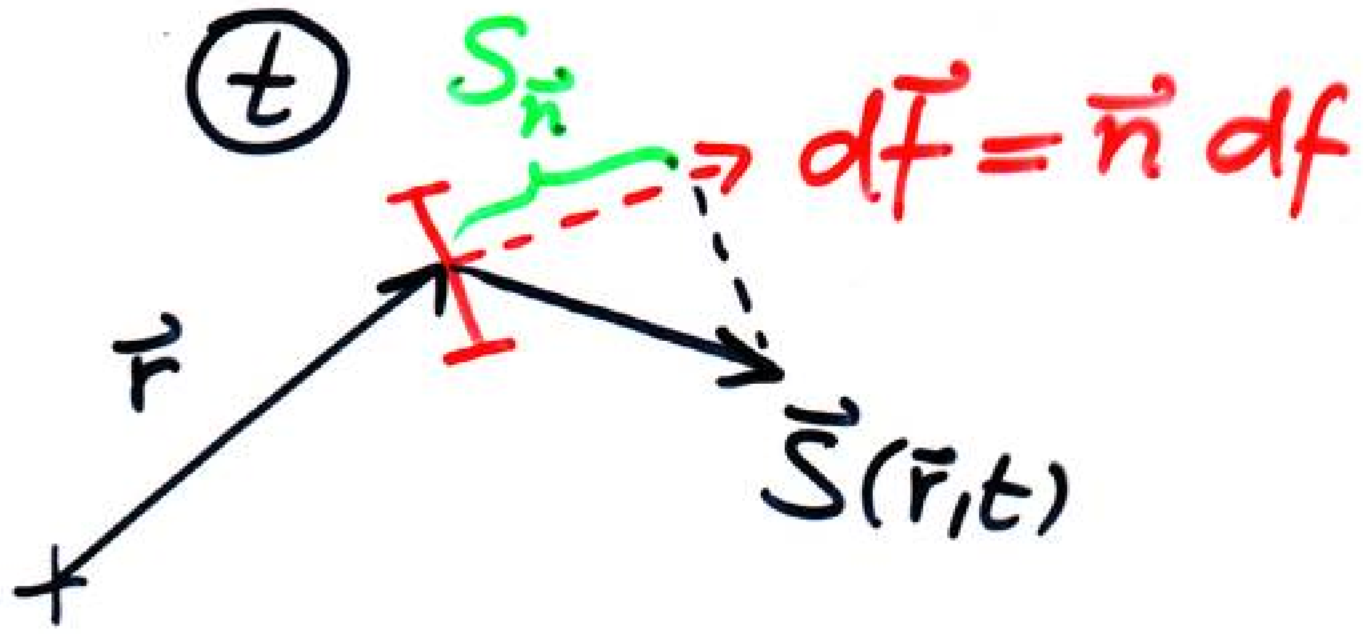
"vorläufiges" Kraftgesetz wurde verwendet:

Problem mit unendlicher Selbstenergie der Punktladungen!

$-\frac{d}{dt}\Big|\quad\frac{1}{8\pi}\cdot\Big|$

$$\int_V d^3r\,\operatorname{div}\vec{W}=\oint_{F(V)} d\vec{f}\cdot\vec{W}$$

$$\boxed{\begin{aligned}-\frac{d}{dt}\left\{E_{mech}(t)+E_{elm}(t;V)\right\} &= \oint_{F(V)} \vec{S}(\vec{r},t)\cdot d\vec{f} \\ &= \oint_{F(V)} S_{\vec{n}}\, df\end{aligned}}$$



$$\vec{S}\cdot\vec{n} =: S_{\vec{n}}$$

"Energiestrom bzgl. Richtung $\vec{n}$"

Annahme: "lokalisierte Bewegung"

$$E_{mech}(t) + E_{elm}(t;V\to\mathbb{R}^3) \overset{?}{\longrightarrow} \text{konst.} \quad \forall t$$

$$\oint_{\substack{F(V)\\ V\to\mathbb{R}^3}} S_{\vec{n}}\, df \longrightarrow \overset{?}{0}$$

schwach beschleunigte nichtrelativistische Ladungen:

$$\sum_{a=1}^{N} \frac{m_a v_a^2(t)}{2} + \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \left[\vec{E}^2(\vec{r},t) + \vec{B}^2(\vec{r},t) \right] \approx \text{konst.}$$

$\forall t$ (während Beobachtungszeit)

Ruhenergie ?

unendliche Selbstenergiebeiträge!

Impulserhaltungssatz

Analog zu Energieerhaltungssatz:

$\vec{E}, \vec{B}$ $\begin{cases} u_{elm} = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \\ \vec{S} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E} \times \vec{B}) \end{cases}$

$$-\frac{d}{dt}\left[E_{mech}(t) + \int_V d^3r\, u_{elm}(\vec{r},t)\right] = \oint_{F(V)} \vec{S}(\vec{r},t)\cdot d\vec{f} = \oint_{F(V)} \underbrace{\vec{S}(\vec{r},t)\cdot\vec{n}}_{=:\, S_{\vec{n}}(\vec{r},t)}\, df$$

$\vec{E}, \vec{B}, \vec{n}$

"Erwartung" für Impulserhaltungssatz:

$\vec{E}, \vec{B}$

$$-\frac{d}{dt}\left[\vec{p}_{mech}(t) + \int_V d^3r\, \vec{\mathcal{P}}_{elm}(\vec{r},t)\right] = \oint_{F(V)} \overleftrightarrow{\sigma}(\vec{r},t)\cdot d\vec{f} = \oint_{F(V)} \underbrace{\overleftrightarrow{\sigma}(\vec{r},t)\cdot\vec{n}}_{\vec{G}_{\vec{n}}(\vec{r},t)}\, df$$

$\vec{E}, \vec{B}, \vec{n}$

Schreibweisen:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_{k=1}^{3} a_k b_k$$

$$\overleftrightarrow{T}\cdot\vec{b} = \vec{c} \quad \text{mit} \quad c_i = \sum_{k=1}^{3} T_{ik} b_k \quad \text{falls} \quad T_{ki} = T_{ik}$$

VS!

$$\frac{d}{dt}\vec{p}_{mech}(t) = \frac{d}{dt}\sum_{a=1}^{N}\vec{p}_a(t)$$

BG verwendet

$$= \sum_{a=1}^{N}\frac{d}{dt}\frac{m_a\vec{v}_a(t)}{\sqrt{1-\frac{v_a^2(t)}{c^2}}} = \sum_{a=1}^{N}\vec{K}_a(t)$$

$$= \sum_{a=1}^{N} q_a\left[\vec{E}(\vec{r}_a(t),t) + \frac{\vec{v}_a(t)}{c}\times\vec{B}(\vec{r}_a(t),t)\right]$$

$$= \int_V d^3r\, \vec{E}(\vec{r},t)\underbrace{\sum_{a=1}^{N} q_a\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_a(t))}_{\rho(\vec{r},t)}$$

$$- \int_V d^3r\left[\vec{B}(\vec{r},t)\times\underbrace{\sum_{a=1}^{N} q_a\frac{\vec{v}_a(t)}{c}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_a(t))}_{\frac{\vec{j}(\vec{r},t)}{c}}\right]$$

$$\rho\vec{E} + \frac{\vec{j}}{c}\times\vec{B}$$

$$\parallel$$

mechanische Kraftdichte

$$= \int_V d^3r\left[\vec{E}(\vec{r},t)\underbrace{\rho(\vec{r},t)}_{\frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r},t)} - \vec{B}(\vec{r},t)\times\frac{\vec{j}(\vec{r},t)}{c}\right]$$

$$\frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\vec{B} - \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_V d^3r\left[\vec{E}\operatorname{div}\vec{E} - \vec{B}\times\operatorname{rot}\vec{B} + \vec{B}\times\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]$$

$$\frac{d}{dt}\vec{p}_{mech}(t) = \int_V d^3r \; \underbrace{\frac{1}{4\pi}\left[\vec{E}\,\mathrm{div}\,\vec{E} - \vec{B}\times\mathrm{rot}\,\vec{B} + \vec{B}\times\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]}$$

Umformung unter Benützung der restlichen Mx-Gln.

$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ und $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ gibt

$$\frac{1}{4\pi}\left[\vec{E}\,\mathrm{div}\,\vec{E} - \vec{B}\times\mathrm{rot}\,\vec{B} + \vec{B}\times\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]_i$$

$$= -\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\underbrace{\left[\frac{1}{8\pi}\delta_{ij}\,(\vec{E}^2+\vec{B}^2) - \frac{1}{4\pi}(E_i E_j + B_i B_j)\right]}_{=:\ \sigma_{ij}(\vec{r},t)\ =\ \sigma_{ji}(\vec{r},t)}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\frac{1}{4\pi c}(\vec{E}\times\vec{B})_i}_{=:\ \mathcal{P}_{elm,i}(\vec{r},t)}$$

$\overset{\text{9-2, 9-3}}{\text{Ü:}}$

$$\oint_{F(V)}\sum_{j=1}^{3}\overbrace{df_j}^{df\,n_j}\,\sigma_{ij}(\vec{r},t) = \oint_{F(V)} df \overbrace{\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}\,n_j}^{G_{\vec{n},i}}$$

$$-\frac{d}{dt}\left\{\vec{p}_{mech}(t) + \int_V d^3r\,\vec{\mathcal{P}}_{elm}(\vec{r},t)\right]_i = \overbrace{\int_V d^3r \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}(\vec{r},t)}$$

MATHEMATISCHER EXKURS:

Verallgemeinerter Gaußscher Integralsatz

$$\boxed{\int_V d^3r \, \frac{\partial}{\partial x_i} T_{jkl\ldots} = \oint_{F(V)} df_i \, T_{jkl\ldots}}$$

$T_{jkl\ldots}$ beliebiges kartesisches Tensorfeld

Beispiele:

1) $\int_V d^3r \, \frac{\partial}{\partial x_i} S = \oint_{F(V)} df_i \, S$ bzw. $\int_V d^3r \, \operatorname{grad} S = \oint_{F(V)} d\vec{f} \, S$

2) $\int_V d^3r \, \frac{\partial}{\partial x_i} A_j = \oint_{F(V)} df_i \, A_j$

$$\Downarrow$$

$\int_V d^3r \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} A_i = \oint_{F(V)} \sum_i df_i \, A_i$ bzw. $\int_V d^3r \, \operatorname{div} \vec{A} = \oint_{F(V)} d\vec{f} \cdot \vec{A}$

Gaußscher Satz im engeren Sinn

3) $T_{kj} = T_{jk}$

$$\int_V d^3r \, \frac{\partial}{\partial x_i} T_{jk} = \oint_{F(V)} df_i \, T_{jk}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_V d^3r \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} T_{ik} = \oint_{F(V)} \sum_i df_i \, T_{ik} \quad \text{bzw.} \quad \int_V d^3r \, \vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{T} = \oint_{F(V)} d\vec{f} \cdot \overleftrightarrow{T}$$

$$\boxed{-\frac{d}{dt}\left\{\vec{p}_{mech}(t) + \int_V d^3r\, \vec{\mathcal{P}}_{elm}(\vec{r},t)\right] = \oint_{F(V)} \overleftrightarrow{\sigma}(\vec{r},t)\cdot d\vec{f} = \oint_{F(V)} \vec{G}_{\vec{n}}(\vec{r},t)\, df}$$

mit

$$\underline{\vec{\mathcal{P}}_{elm}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi c}\left[\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{B}(\vec{r},t)\right] = \frac{\vec{S}(\vec{r},t)}{c^2}}$$

$$\underline{\overleftrightarrow{\sigma}(\vec{r},t) = \frac{1}{8\pi}\left[\vec{E}^2(\vec{r},t)+\vec{B}^2(\vec{r},t)\right]\overleftrightarrow{1} - \frac{1}{4\pi}\left[\vec{E}(\vec{r},t)\circ\vec{E}(\vec{r},t)+\vec{B}(\vec{r},t)\circ\vec{B}(\vec{r},t)\right]}$$

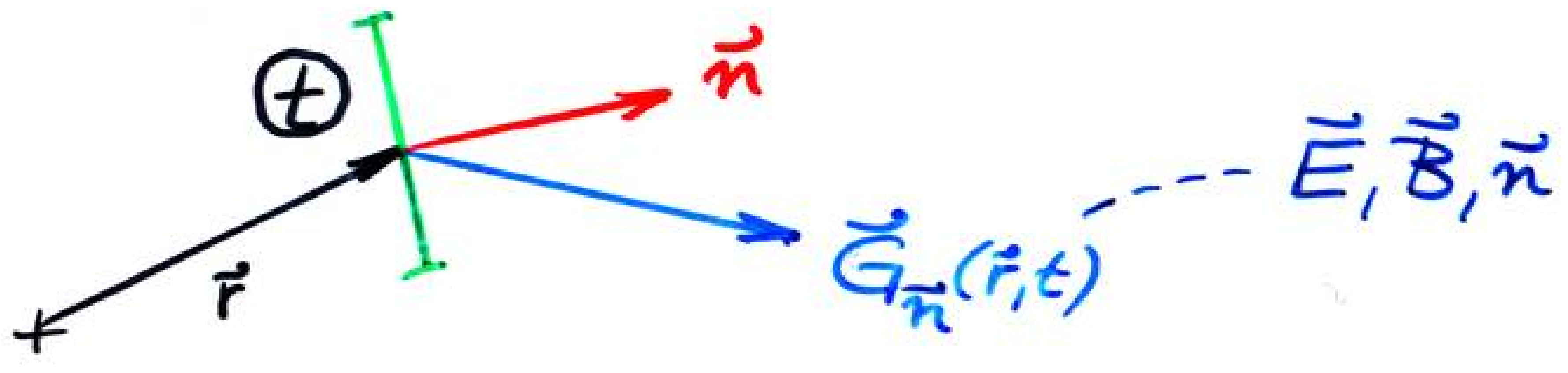
$$\underline{= u_{elm}(\vec{r},t)\overleftrightarrow{1} - \frac{1}{4\pi}\left[\vec{E}(\vec{r},t)\circ\vec{E}(\vec{r},t)+\vec{B}(\vec{r},t)\circ\vec{B}(\vec{r},t)\right]}$$

$$(\vec{a}\circ\vec{b})_{ij} = a_i b_j$$
$$(\overleftrightarrow{1})_{ij} = \delta_{ij}$$

d.h.

$$\sigma_{ij} = u_{elm}\,\delta_{ij} - \frac{1}{4\pi}\left[E_iE_j + B_iB_j\right]$$

$$\underline{\vec{G}_{\vec{n}}(\vec{r},t) = \overleftrightarrow{\sigma}(\vec{r},t)\cdot\vec{n} = u_{elm}(\vec{r},t)\,\vec{n} - \frac{1}{4\pi}\Big[(\vec{E}(\vec{r},t)\cdot\vec{n})\,\vec{E}(\vec{r},t)}$$
$$\underline{+\,(\vec{B}(\vec{r},t)\cdot\vec{n})\,\vec{B}(\vec{r},t)\Big]}$$



lokalisierte Bewegung schwach beschleunigter nichtrelativistischer Ladungen

$$\sum_{a=1}^{N} m_a \vec{v}_a(t) + \frac{1}{4\pi c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \left[\vec{E}(\vec{r},t) \times \vec{B}(\vec{r},t) \right] \approx \overrightarrow{\text{konst.}}\,, \quad \forall t$$

(während Beobachtungsdauer)

Drehimpulserhaltung

Noch komplizierter (äußere Produkte!), nicht vorgetragen.

IMPULS		
$\vec{\mathcal{P}}_{elm}(\vec{r},t)$	$\vec{\mathcal{L}}_{elm}(\vec{r},t) = \vec{r} \times \vec{\mathcal{P}}_{elm}(\vec{r},t)$	Felddrehimpulsdichte
$\overleftrightarrow{\sigma}(\vec{r},t)$	$\overleftrightarrow{\tau}(\vec{r},t) = \vec{r} \times \overleftrightarrow{\sigma}(\vec{r},t)$	Felddrehimpulsstromdichte
$\vec{G}_{\vec{n}}(\vec{r},t)$	$\vec{H}_{\vec{n}}(\vec{r},t) := \overleftrightarrow{\tau}(\vec{r},t) \cdot \vec{n}$	Felddrehimpulsstromdichte bzgl. Richtung $\vec{n}$

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ mit $c_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} a_j b_k$

$\vec{a} \times \overleftrightarrow{T} = \overleftrightarrow{R}$ mit $R_{il} = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} a_j T_{kl}$ für $T_{kl} = T_{lk}$.