Elm. Potentiale

"$\operatorname{div}\operatorname{rot} \equiv 0$"
"$\operatorname{rot}\operatorname{grad} \equiv \vec{0}$"

$$\boxed{\begin{aligned} &\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho \\ \checkmark\ &\operatorname{div}\vec{B} = 0 \\ \checkmark\ &\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ &\operatorname{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{aligned}}$$

Ansatz 1

$$\boxed{\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{A} \\ \operatorname{rot}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) &= \vec{0} \end{aligned}\right\} \Downarrow$$

Ansatz 2

$$\boxed{\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{div}\left(-\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 4\pi\rho$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} - \operatorname{grad}\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$$

$\Delta u := \operatorname{div}\operatorname{grad} u$	"Laplace"
$\Delta\vec{a} := \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a}$	"Vektorlaplace"

(manchmal ✡ geschrieben)

Beachte: $(\Delta\vec{a})_j = \Delta(a_j)$ nur bei kartesischen Vektorkomponenten!

$$-\underbrace{\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi}_{\Delta\varphi} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{div}\,\vec{A} = 4\pi\rho$$

$$\underbrace{\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}}_{\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A} - \Delta\vec{A}} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \mathrm{grad}\,\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\boxed{\begin{aligned} -\Delta\varphi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) &= 4\pi\rho \\ -\Delta\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) &= \frac{4\pi}{c}\vec{j} \end{aligned}}$$

allg. FG für elm. Potentiale

Eichtransformationen: $\varphi, \vec{A} \longrightarrow \bar{\varphi}, \bar{\vec{A}}$

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\varphi} &= \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \\ \bar{\vec{A}} &= \vec{A} + \mathrm{grad}\,f \end{aligned}}$$

f ... Eichfunktion

$$\Rightarrow \bar{\vec{E}} = -\mathrm{grad}\,\bar{\varphi} - \frac{1}{c}\frac{\partial\bar{\vec{A}}}{\partial t} = -\mathrm{grad}\,\varphi + \cancel{\mathrm{grad}\,\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \cancel{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}\,f} = \vec{E}$$

$$\bar{\vec{B}} = \mathrm{rot}\,\bar{\vec{A}} = \mathrm{rot}\,\vec{A} + \underbrace{\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,f}_{0} = \vec{B}$$

"EICHINVARIANZ"

Spezielle Klasse von elm. Potentialen: Potentiale in "Lorenzeichung"

L. Lorenz $\updownarrow$ H. A. Lorentz

"Nebenbedingung" (möglich! s. später): Lorenzkonvention

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0}$$

$\Rightarrow$ FG für Potentiale "vereinfachen" sich

$$-\Delta\varphi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}_{0} = 4\pi\rho$$

$$-\Delta\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \operatorname{grad}\overbrace{\left(\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}^{0} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\boxed{\Box := \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta}$$

"d'Alembert" ("Quabla", "vierdim. Laplace", "Wellenoperator")

Nur in kartes. Komp. zerlegen!

$$\boxed{\begin{aligned} \Box\varphi &= 4\pi\rho \\ \Box\vec{A} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j} \\ \operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} &= 0 \end{aligned}}$$

FG für elm. Potentiale in Lorenzeichung

} inhom. WG für φ, A_x, A_y, A_z

"Nebenbedingung"

Ergänzungen:

1) Eichinvarianz ermöglicht diese spezielle Wahl der Potentiale

Annahme: $\varphi, \vec{A}$ erfüllen Lorenzkonvention nicht, d.h. es gilt $\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \neq 0$

Behauptung: Dann erfüllen $\overline{\varphi}, \vec{\overline{A}}$ die Lorenzkonvention, wenn für f eine Lösung von

$$\Box f = \operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \qquad \text{(inhom. Dgl.)}$$

gewählt wird.

Beweis:
$$\operatorname{div}\vec{\overline{A}} + \frac{1}{c}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial t} = \operatorname{div}(\vec{A} + \operatorname{grad} f) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right)$$
$$= \operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \underbrace{\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}}_{-\operatorname{div}\vec{A} - \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}} = 0 \quad ✓$$

2) $\exists$ nichtabzählbar ∞ viele Sätze von Potentialen in Lorenzeichung (welche alle dieselben Felder $\vec{E}, \vec{B}$ liefern): Ist $\varphi, \vec{A}$ ein solcher Satz, so ist es auch $\overline{\varphi}, \vec{\overline{A}}$, wenn f Lösung von $\Box f = 0$ ist. (Offensichtlich; s. 1))