Q U A N T E N F E L D T H E O R I E   I [*]

Maximilian Attems [†]
Manfred Schweda [‡]

SS 2004 (Version 23. Mai 2007)

[*] http://tph.tuwien.ac.at/teaching.html
[†] mattems@hep.itp.tuwien.ac.at
[‡] mschweda@tph.tuwien.ac.at

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Quantenfeldtheorie (QFT) vereinigt die bekannten Regeln der Quantentheorie mit der speziellen Relativitätstheorie und der Feldtheorie. Ein Standardbeispiel der Quanten-Feldtheorie ist die Quantenelektrodynamik (QED). Die aufgrund ihrer präzisen Aussagen und theoretischen Resultate wie z. B. die Berechnung der Feinstrukturkonstante α ein unerreichtes Vorbild für jedes andere dynamische Modell darstellt.
Eine selbstkonsistente Einführung in die Quantenfeldtheorie sollte sich also in sinnvoller Weise mit den Begriffen der klassischen Feldtheorie, den Postulaten der speziellen Relativitätstheorie samt den daraus resultierenden Konsequenzen und mit den Grundzügen der Quantenmechanik auseinandersetzen.
Im nächsten Kapitel wird die klassische freie Feldtheorie mit Berücksichtigung der Relativitätstheorie behandelt. Es werden die Grundsätze der Feldtheorie und die Lorentz-Transformation in ko- und kontravarianter Schreibweise entwickelt. Im Anschluß daran wird der klassische Lagrange Formalismus präsentiert, der ein allgemein gültiges Instrumentarium zur Herleitung von Feld- beziehungsweise Wellengleichungen darstellt. Im Rahmen dieses Stoffes wollen wir die freie Klein-Gordon-Gleichung, die freien Maxwell-Gleichungen und die freie Dirac-Gleichung diskutieren. Die Aufstellung und der Nachweis des Noether-Theorems folgt.
Im darauf folgenden Kapitel werden wir die Gesetze der Quantentheorie in die freie Feldtheorie einbauen. Bei dieser Gelegenheit werden wir die Grundlagen der Quantentheorie, soweit diese für unser Betrachtungen nötig sind, wiederholen.
Im aufbauenden Skriptum Quantenfeldtheorie 2 [9] werden die realistischeren - wechselwirkenden Feldmodelle diskutiert. Dabei werden die Feynman-Regeln und die Störungstheorie entwickelt. Im letzten Kapitel wollen wir dort die Renormierung der Quantenfeldtheorie betrachten.
Danke an Klaus Ita, Jürgen Klepp, Elisabeth Magerl, Regine Müller, Volkmar Putz, Maria Schimpf, Michael Wind für geborgte Skripten und Anregungen. Korrekturen und Ergänzungen werden gerne entgegen genommen. Viel Freude an diesem spannendem Gebiet der Physik.

2 Die freie Feldtheorie

2.1 Der Feldbegriff

Bevor wir uns wirklich systematisch den freien Feldmodellen zuwenden, wollen wir an Hand der klassischen Maxwelltheorie den Begriff des Feldes[1] näher betrachten.
Zu diesem Zweck nehmen wir vorübergehend an, daß wir zwei ruhende, geladene Teilchen haben, die aufeinander eine Wechselwirkung ausüben. Man kann sich nun vorstellen, daß eines der beiden Teilchen ein Feld erzeugt und dadurch auf das andere Teilchen, das sich ja in diesem Feld befindet, eine Kraft ausübt. In der klassischen Physik ist diese Modellvorstellung nur ein Hilfsmittel. Berücksichtigt man jedoch die Prinzipien der speziellen Relativitätstheorie, so bekommt man einen anderen Sachverhalt, da man die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit (Kausalität) der Wirkung einberechnen muß. Eine Änderung der Lage des einen Teilchens beeinflußt das andere Teilchen erst nach einer gewissen, endlichen Zeitspanne.
Das Feld besitzt somit physikalische Bedeutung. Wechselwirkungen haben nur eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit (Kausalität). Es existiert also keine unmittelbare Wechselwirkung zwischen räumlich getrennten Teilchen.

2.2 Aufstellung von Feld- oder Wellengleichungen

Zur Erinnerung die 4 Maxwell-Gleichungen in ihrer allgemeinen Form:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \qquad \vec{\nabla}\vec{B} = 0, \tag{1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \vec{\nabla}\vec{D} = 4\pi\rho. \tag{2}$$

Sie werden noch durch die sogenannten Materialgleichungen ergänzt:

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E}, \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}, \qquad \vec{j} = \sigma\vec{E}. \tag{3}$$

Die Maxwell-Gleichungen sind also ein gekoppeltes Gleichungssystem. Durch Entkoppelung des Systems können wir zwei Wellengleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{H}$ aufstellen. In Indexschreibweise benützen wir:

$$(rot\vec{H})_i = \epsilon_{ijk}\partial_j H_k, \qquad \vec{\nabla}\vec{B} = \partial_i B_i.$$

Für die folgende Betrachtung soll gelten: $\epsilon = const$, $\mu = const$, $\sigma = const$. Es gilt für Metalle: $\rho = 0 \qquad \Rightarrow \quad div\vec{E} = 0$.

[1] siehe auch Dirschmid, Kummer, Schweda [4] Kapitel 1

Zur Aufstellung einer Wellengleichung bilden wir nochmals den Rotor von einer der beiden oberen Maxwell-Gleichungen.

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \times (-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}).$$

Mit Hilfe der Vektoranalysis erhalten wir links

$$\left(rot(rot\vec{E})\right)_i = \left(\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right)\right)_i = \epsilon_{ijk}\partial_j \epsilon_{klm}\partial_l E_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_j\partial_l E_m$$

$$\Rightarrow rot(rot\vec{E}) = \partial_i\partial_m E_m - \partial_j\partial_j E_i = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{E}) - (\vec{\nabla})^2\vec{E}.$$

und rechts der Gleichung

$$-\frac{1}{c}\vec{\nabla} \times (\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \times \vec{H}$$

$$\Rightarrow grad(div\vec{E}) - \triangle\vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \times \vec{H}.$$

Da $\rho = 0$ und damit $div\vec{E} = 0$ für Metalle gilt, erhält man

$$-\triangle\vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{4\pi}{c}\sigma\vec{E} + \frac{1}{c}\epsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{\epsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Wir haben die 1. Telegraphengleichung für $\vec{E}$ berechnet:

$$\triangle\vec{E} - \frac{\epsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \qquad 1.TG. \tag{4}$$

In analoger Weise erhält man die 2. Telegraphengleichung für $\vec{H}$

$$\triangle\vec{H} - \frac{\epsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \qquad 2.TG. \tag{5}$$

Betrachten wir nun den Spezialfall des Vakuums, so gilt $\epsilon = \mu = 1$, $\sigma = 0$ und wir erhalten mit

$$\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Box$$

die beiden Wellengleichungen

$$\Box\vec{E} = 0, \tag{6}$$

$$\Box\vec{H} = 0. \tag{7}$$

Die Wellengleichungen beschreiben die Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle. Im Vakuum gelten freie, homogene Feldgleichungen für die Feldgrößen $\vec{E}$ und $\vec{H}$.
Dieses Konzept, die Aufstellung freier, homogener Wellengleichungen für die entsprechenden Feldgrößen, werden wir nun allgemein besprechen. Es wird möglich sein, die Feldgleichungen aus einer „Lagrange-Funktion“ herzuleiten. Dieses Verfahren hat sich bei der Behandlung von quantisierten Feldtheorien gut bewährt.
Zuvor sollen die Prinzipien der Relativitätstheorie berücksichtigt werden.

2.3 Die Lorentz-Transformation

2.3.1 Einleitung

Albert Einstein hat in seiner speziellen Relativitätstheorie verschiedene, teilweise bereits bekannte Prinzipien zu einer geschlossenen Theorie geformt.
Durch die Existenz einer maximalen Geschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit c, die in allen **Inertialsystemen** gleich groß ist, müssen wir neue Transformationsgleichungen suchen, von denen wir aus Eindeutigkeitsgründen eine lineare Gestalt verlangen. Die Lorentz-Transformation erfüllt diese Bedingungen.
Durch Einführung von Vierervektoren läßt sich der Sachverhalt gut diskutieren.

2.3.2 Natürliche Einheiten

In der relativistischen Quantentheorie erhält man natürliche Einheiten durch setzen:

$$\hbar = 1, \qquad c = 1. \tag{8}$$

$c = 1$ impliziert, Zeit- und Längenintervalle auf die selbe Basis zu stellen (So ist es in der Astronomie üblich Lichtjahre als Entfernungsangabe anzugeben). $c^2t^2 = \vec{x}^2$ beschreibt die Ausbreitung des Lichtes.
$\hbar$ hat die Dimension Energie x Zeit. $\hbar = 1$ erlaubt daher Zeit und somit auch Länge als Intervalle inverser Energie anzusehen. So ist Gev $(10^9 eV) \approx (0,2fm)^{-1}$ eine oft benützte Einheit für Energie in der Teilchenphysik.
Die elektrische Ladung schließlich erscheint als dimensionslose Größe $\alpha := \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{137.036}$.

2.3.3 Vierervektoren

Der euklidische 3-dimensionale Raum $\vec{x} = (x, y, z) = (x^1, x^2, x^3)$ wird durch die 4-dimensionalen Raumzeit-Koordinaten generalisiert. Dies führt zur Defintion des

- Kontravarianten Vektors x^μ:

  $$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3).$$

  Griechische Indizes $\mu, \nu, \rho, ..$ nehmen die Werte 0, 1, 2, 3 an, lateinische Indizes $i, j, ..$ 1, 2, 3. Die Verwendung lateinischer Indizes verdeutlicht die jeweilige Beschränkung auf den gewöhnlichen Raum,

  $$x^\mu = (x^0, x^i) = (t, \vec{x}). \tag{9}$$

- Analog definiert man den kovarianten Vektor x_μ:

  $$x_\mu = (x_0, x_i) = (t, -\vec{x}). \tag{10}$$

2.3.4 Maßtensor

Im folgendem definieren wir einen pseudoeuklidischen Raum den sogenannten Minkowski-Raum ahand der bereits aufgestellten Ortsvierervektoren.
Wir bilden den „Viererbetrag “:

$$x^2 = x_\mu \cdot x^\mu = (x^0)^2 - (x^i)^2 = t^2 - \vec{x}^2 = const.$$

Dieser „Viererbetrag“ kann durch Einführung einer Metrik genauer formuliert werden. Dies geschieht in völliger Analogie zum dreidimensionalen, euklidischen Raum.
Da wir Längenmessungen durchführen wollen, definieren wir ein infinitesimales Wegelement:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \geq 0.$$

wobei der Maßtensor g_{ik} die Form

$$g_{ik} = \delta_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

besitzt. Im euklidischen Raum herrscht also eine positiv definite Metrik. In völliger Analogie dazu definiert man im 4-dimensionalen Minkowski-Raum mittels $x_\mu \cdot x^\mu$ ein infinitesimales „Viererwegelement“ :

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^i)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{11}$$

Im Unterschied zum 3-dimensionalen Raum handelt es sich aber im 4-dimensionalen Raum um eine indefinite Metrik.

$$ds^2 \begin{cases} > 0, & zeitartig, \\ = 0, & lichtartig, \\ < 0, & raumartig. \end{cases}$$

Die Klassifizierung entspricht der Lage des Vektors x^μ relativ zum Lichtkegel. Für die beiden ersten Fälle kann man noch eine Unterscheidung hinsichtlich des Vorzeichens der Zeitkomponente treffen:

$x^0 > 0$, der Vektor weist in die Zukunft,

$x^0 < 0$, der Vektor weist in die Vergangenheit.

$g_{\mu\nu}$ ist in der speziellen Relativitätstheorie ortsunabhängig. Das Abstandsquadrat läßt sich nun formulieren (Nicht freie Indices dürfen „umgedreht“ werden):

$$x^2 = x_\mu x^\nu = x^\mu x_\nu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g^{\lambda\rho} x_\lambda x_\rho. \tag{12}$$

Durch Anwendung des Maßtensors $g_{\mu\nu}$ wird also aus einem kovarianten ein kontravarianter Vektor und umgekehrt:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, \tag{13}$$

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu. \tag{14}$$

Die explizite Form des Maßtensors lautet:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Numerisch gilt übrigens:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}.$$

Verifizierbar anhand:

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\mu'} g_{\nu\nu'} g^{\mu'\nu'}.$$

Ferner gilt

$$g_{\mu\sigma} g^{\sigma\rho} = \delta_\mu{}^\rho = \delta^\rho{}_\mu. \tag{16}$$

2.3.5 Mathematische Formulierung der Lorentz-Transformation

Der Wechsel des Bezugssystems durch eine Lorentz-Transformation transformiert die Koordinaten linear und reell so, daß der Viererbetrag $x_\mu \cdot x^\mu$ eine Invariante ist.
Einen ähnlichen Sachverhalt kennen wir bereits von den 3-dimensionalen, orthogonalen Drehungen, deren Erweiterung die Lorentz-Transformation ist.
Für orthogonale Drehungen gilt (siehe Methodenvorlesung [7] [2]):

$$\overline{x}_i \cdot \overline{x}_i = x_i \cdot x_i = const,$$

$$a_{ij} a_{lj} = \delta_{il},$$
$$a^T a = \mathbb{1}.$$

In Analogie formuliert man die Lorentz-Transformation. $L^\mu{}_\nu$ ist eine 4×4 Matrix und kennzeichnet die Lorentz-Transformation. Definition:

$$x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu. \tag{17}$$

---

[2]

$$x_i \equiv x^i, \qquad \bar{x}_i = a_{ij} x_j.$$

Durch Hinauf- oder Herabziehen des Indexes kann man aus der Matrix $L^\mu{}_\nu$ die Matrizen $L_\mu{}^\nu$, $L^{\mu\nu}$, $L_{\mu\nu}$ (z.B.: $L^{\mu\nu} = g^{\nu\rho}L^\mu{}_\rho$) erhalten. Die Bedingungen der Reellität und der Erhaltung des Abstandsquadrates schreiben sich wie folgt:

$$(L^\mu{}_\nu)^* = L^\mu{}_\nu \tag{18}$$

$$\left(L^\rho{}_\mu\right)^T (L^\mu{}_\lambda) = \delta^\rho{}_\lambda \tag{19}$$

Denn das Skalarprodukt ist Lorentz-invariant.

$$x'_\mu x'^\mu = L_\mu{}^\rho L^\mu{}_\lambda x_\rho x^\lambda = (L^T)^\rho{}_\mu L^\mu{}_\lambda x_\rho x^\lambda = x_\lambda x^\lambda \qquad \Rightarrow L_\mu{}^\rho L^\mu{}_\lambda = \delta^\rho{}_\lambda$$

Die endliche Lorentz-Transformation läßt sich auch durch wiederholte Anwendung einer infinitesimalen Transformation konstruieren[3].

$$L^\nu{}_\mu = g^\nu{}_\mu + \Delta\omega^\nu{}_\mu, \tag{20}$$

wobei wegen

$$L_\mu{}^\nu L^\mu{}_\sigma = \delta^\nu{}_\sigma,$$

mit Umbenamsung der Indize im letzten Schritt

$$(g_\mu{}^\nu + \Delta\omega_\mu{}^\nu)(g^\mu{}_\sigma + \Delta\omega^\mu{}_\sigma) = g_\mu{}^\nu g^\mu{}_\sigma + g_\mu{}^\nu \Delta\omega^\mu{}_\sigma + \Delta\omega_\mu{}^\nu g^\mu{}_\sigma + \underbrace{\Delta\omega_\mu{}^\nu \Delta\omega^\mu{}_\sigma}_{<<O(\Delta\omega)} = \delta^\nu{}_\sigma + \Delta\omega^\nu{}_\sigma + \Delta\omega_\sigma{}^\nu$$

$$\Delta\omega^\nu{}_\sigma = -\Delta\omega_\sigma{}^\nu, \tag{21}$$

um ein invariantes Eigenzeit-Intervall zu erhalten. $\Delta\omega^{\mu\nu}$ ist der Parameter (verallgemeinerter Drehwinkel) einer infinitesimalen Lorentz-Transformation und es gibt 6 unabhängige $\Delta\omega^{\mu\nu}$ (3 gewöhnliche Drehungen entlang der 3 Raumachsen x^1, x^2, x^3 in den Ebenen x^2x^3, x^1x^3, x^1x^2, sowie 3 eigentliche „Lorentz-Transformationen“ in den Ebenen x^0x^1, x^0x^2, x^0x^3).

2.3.6 Beispiele infinitesimaler Lorentz-Transformation

$$\Delta\omega^{01} = \Delta\beta$$

ist eine Transformation auf ein Koordinatensystem, das sich mit der konstanter Geschwindigkeit $\Delta\beta$ in x-Richtung bewegt.

$$\Delta\omega^1{}_2 = -\Delta\omega^{12} = \Delta\phi$$

[3]siehe auch: Bjorken - Drell [1], Kapitel 2.2 oder Messiah [5].

ist eine Drehung um den Winkel $\Delta\phi$ um die x^3-Achse.
Zur Gewinnung der endlichen Transformation schreibt man

$$\Delta\omega^{\nu}{}_{\mu} = +\Delta\omega \left(J_n\right)^{\nu}{}_{\mu}$$

$\Delta\omega$: Infinitesimalparameter oder „Drehwinkel" um eine Achse in n-Richtung.

J_n: 4×4 Koeffizientenmatrix einer Darstellung der Einheits-Lorentz-Drehung um die n-te Achse.

Das folgende Beispiel zeigt eine Transformation auf ein gestrichenes System, das sich mit einer infinitesimalen Geschwindigkeit $\Delta\omega = \Delta\beta$ in x^1-Richtung bewegt.

$$J^{\nu}{}_{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$J^{0}{}_{1} = J^{1}{}_{0} = -J^{01} = +J^{10} = -1.$$

Unter Verwendung der algebraischen Eigenschaft

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J^3 = +J$$

$$\Rightarrow J^{2N} = J^2, \qquad J^{2N+1} = J$$

kann man die endliche Transformation durch „N-maliges Hintereinanderschalten" der Elementar Lorentz-Rotatation

$$\Delta\omega = \frac{\omega}{N}$$

für gleichförmige Relativbewegung in x^1 - Richtung schreiben als

$$x'^{\nu} = \lim_{N\Rightarrow\infty} \left(g + \frac{\omega}{N} J\right)^{\nu}{}_{\alpha_1} \left(g + \frac{\omega}{N} J\right)^{\alpha_1}{}_{\alpha_2} \cdots x^{\alpha_N} = {}^{4} \left(e^{\omega J}\right)^{\nu}{}_{\mu} x^{\mu} =$$

$$= \left(\cosh \omega J + \sinh \omega J\right)^{\nu}{}_{\mu} x^{\mu} = {}^{5} \left(1 - J^2 + J^2 \cosh \omega + J \sinh \omega\right)^{\nu}{}_{\mu} x^{\mu}.$$

---

[4]

$$expA = \lim_{N\Rightarrow\infty} \left(1 + \frac{A}{N}\right)^{N}, \qquad e^x = \cosh x + \sinh x$$

[5]

$$\cosh(wJ) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \omega^{2n} J^{2n} = \left| J^{2n} = J^2 \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \right| = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \omega^{2n} J^2 = 1 - J^2 + J^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \omega^{2n}$$

Für die einzelnen Komponenten ergibt sich

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\omega & -\sinh\omega & 0 & 0 \\ -\sinh\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix},$$

$$x'^\nu = L^\nu{}_\mu x^\mu = \left(g^\nu{}_\mu + \Delta\omega^\nu{}_\mu\right) x^\mu$$

oder

$$x'^0 = \cosh\omega\left(x^0 - \tanh\omega x^1\right),$$
$$x'^1 = \cosh\omega\left(x^1 - \tanh\omega x^0\right),$$
$$x'^2 = x^2,$$
$$x'^3 = x^3.$$

Der Lorentz-Drehwinkel ω hängt mit der Relativgeschwindigkeit über

$$\tanh\omega = \beta, \qquad \cosh\omega = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \beta^2 = \frac{v^2}{c^2}$$

zusammen.
Das Ergebnis kann auf die Bewegung in beliebige Richtungen oder Raumdrehungen um beliebige Achsen verallgemeinert werden. Die 6 Matrizen $J^\nu{}_\mu$, welche die 6 unabhängigen Lorentz-Drehungen erzeugen, sind die 4-dimensionale Verallgemeinerung der bereits erwähnten 3-dimensionalen Raumdrehungen.

2.3.7 Lorentz-Transformation eines Gradienten

Aus den 2 Arten von Vektoren bildet man 2 Ableitungen.

- Kovarianter Vierergradient ∂_μ:

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\frac{\partial}{\partial x^0}, \vec{\nabla}), \qquad \text{mit} \quad \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\lambda} = \delta^\mu{}_\lambda. \tag{22}$$

- Kontravarianter Vierergradient ∂^μ:

$$\partial^\mu := \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\frac{\partial}{\partial x_0}, -\vec{\nabla}). \tag{23}$$

$$\Rightarrow \cosh(wJ) = 1 - J^2 + J^2\cosh(\omega)$$

$$\sinh(wJ) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\omega^{2n+1}J^{2n+1} = \left|J^{2n+1} = J \quad \forall n\epsilon\mathbb{N}_0\right| = J\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\omega^{2n+1} = Jsinh(\omega)$$

Durch Anwendung eines Gradienten auf eine Skalarfunktion (z.B.: $\phi(t,\vec{x}) \equiv \phi(x^\mu) := \phi(x)$ Kurzschreibweise) erhält die Ableitung Vektorcharakter:

$$\partial_\mu \phi(x) = V_\mu(x),$$

$$\partial^\mu \phi(x) = F^\mu(x).$$

Als Beispiel wenden wir $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ auf die skalare Größe des Abstandsquadrates an:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(x^2\right) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(g_{\sigma\rho}x^\sigma x^\rho\right) = g_{\sigma\rho}\left[\underbrace{\left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\mu}\right)}_{\delta_\mu{}^\sigma} x^\rho + x^\sigma \underbrace{\left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x^\mu}\right)}_{\delta_\mu{}^\rho}\right] = x_\mu + x_\mu = 2x_\mu.$$

Bei Lorentz-Transformation eines Gradienten einer Skalarfunktion können wir folgendes Verhalten feststellen. $\partial^\mu\phi(x)$ verhält sich wie ein kontravarianter Vektor x^μ bei der Lorentz-Transformation. $\partial_\nu\phi(x)$ verhält sich wie ein kovarianter Vektor x_ν bei der Lorentz-Transformation.

$$(\partial^\mu\phi(x))' = L^\mu{}_\nu \partial^\nu \phi(x)$$

Beweis (Es gilt für eine Skalarfunktion $\phi'(x') = \phi(x)$):

$$(\partial^\mu\phi(x))' = \partial'^\mu \phi'(x') = \partial'^\mu \phi(x).$$

Mittels Anwendung der Kettenregel erhält man:

$$\partial'^\mu = \frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\nu} = L_\nu{}^\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} = \left(L^\mu{}_\nu\right)^T \frac{\partial}{\partial x_\nu}$$

$$\text{mit} \qquad L^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh\omega & -\sinh\omega & 0 & 0 \\ -\sinh\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad L^\mu{}_\nu = \left(L_\nu{}^\mu\right)^T$$

folgt

$$\partial'^\mu = L^\mu{}_\nu \partial^\nu. \tag{24}$$

Folgende Beziehungen kann man noch aufstellen:

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu,$$

$$\partial_\mu = g_{\mu\nu}\partial^\nu.$$

Das Produkt

$$\partial_\mu\partial^\mu = g_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu = g_{00}(\partial^0)^2 - (\vec{\nabla})^2 = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \Delta \equiv \Box$$

ergibt also den d'Alembert-Operator:

$$\partial_\mu\partial^\mu = \Box. \tag{25}$$

2.4 Das Hamilton'sche Prinzip

2.4.1 Klassische Punktmechanik

Zur Veranschaulichung dient die Vorstellung der Bewegung eines Teilchens in einem Kraftfeld. Zwecks Vereinfachung wird ein konservatives Kraftfeld gewählt, in dem man daher die Kraft als Gradient eines Potentials ausdrücken kann.
In Systemen, für die bestimmte Neben- oder auch Zwangsbedingungen gelten (z. B. eine Kugel rollt auf einer schiefen Ebene), sind die kartesischen Koordinaten wegen dieser Nebenbedingungen nicht mehr unabhängig voneinander. Man führt daher eine entsprechende Anzahl von neuen, unabhängigen Koordinaten, eben die „verallgemeinerten Koordinaten", ein und braucht die Nebenbedingungen nicht mehr zu beachten. [6]
$q(t)$ sei die verallgemeinerte Ortskoordinate und $\dot{q}(t)$ sei die verallgemeinerte Geschwindigkeit.
Zur Beschreibung ist noch die Bestimmung der Anzahl der Freiheitsgrade nötig. Darunter versteht man die Anzahl der voneinander unabhängig möglichen Bewegungen.
Einige Beispiele:
Dieses System besitzt genau einen Freiheitsgrad, die Auslenkung x aus der Ruhelage x_0.

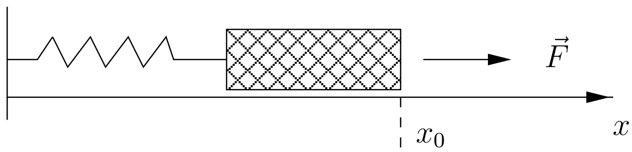

Abbildung 1: Körper der Masse m mit Ruhelage x_0 auf den die Kraft $\vec{F}$ wirkt.

Zur Beschreibung der Kugel auf der Platte sind 2 Koordinaten nötig, das System besitzt

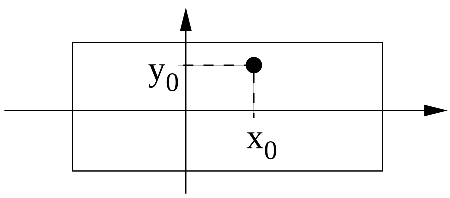

Abbildung 2: Kugel auf ebener Fläche mit Ausgangskoordinaten x_0, y_0

also 2 Freiheitsgrade.
Man kann auch noch zwischen den Freiheitsgraden der Translation und der Rotation unterscheiden, im Fall unseres Teilchens in einem konservativen Kraftfeld können wir uns auf die 3 Freiheitsgrade der Translation beschränken.

[6] siehe auch: Päsler [6].

Zur weiteren Beschreibung definieren wir eine mathematische Kenngröße, die Lagrange-Funktion $L\left(q(t), \dot{q}(t)\right)$, die ein bestimmtes mechanisches System charakterisiert.
Nun hat man fast alle Mittel, um das „Hamilton'sche Prinzip“ oder das „Prinzip der kleinsten Wirkung“ zu formulieren.
Unter einer Wirkung[7] $W = W[q]$ versteht man den Ausdruck:

$$W[q] = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q(t), \dot{q}(t)\right) dt \tag{26}$$

auch Wirkungsintegral genannt, wobei t_1, t_2 feste Zeitpunkte sind.

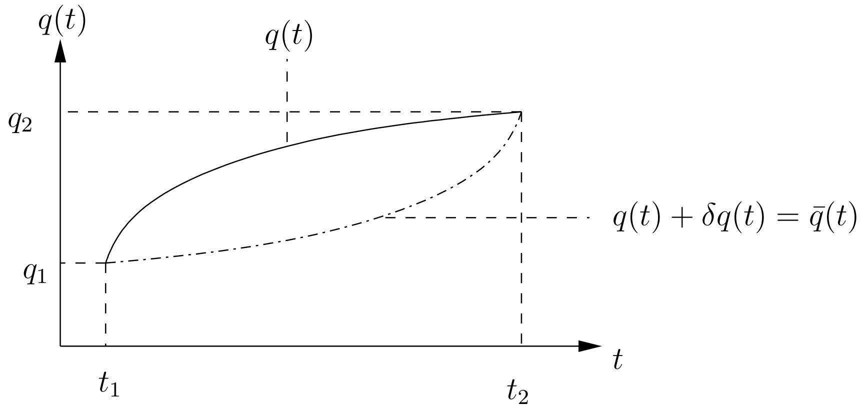

Abbildung 3: Die Variation des Wirkungsintegrals.

Wir stehen daher vor dem Problem, jene Funktionen $q(t)$ mit $q(t_1) = q_1$ und $q(t_2) = q_2$ zu suchen, für die das obige Integral (26) ein Minimum wird. Dies ist das Prinzip der kleinsten Wirkung. Diese Problemstellung der Variationsrechnung lösen wir folgendermaßen. Zunächst nehmen wir an, wir hätten irgendwie eine Lösung $q = q(t)$ gefunden, die W zu einem Minimum macht.
Wenn wir von einer Funktion $f(t)$ behaupten, sie besitze an der Stelle t_0 eine Minimum, so ist $f(t_0) < f(t)$ für $t \neq t_0$ also in einer gewissen Umgebung von t_0.
Wir haben damit die Funktion in der Nähe von t_0 untersucht und die entsprechenden Funktionswerte in einer Umgebung von t_0 verglichen. Analog hat man daher in unserem Problem den Wert des Integrales W für die Funktion $q(t)$ mit den Werten zu vergleichen, die auch für andere zulässige Vergleichskurven

$$\bar{q}(t) = q(t) + \delta q(t) \tag{27}$$

[7] Defininition eines Funktionals : mathematische Abbildung

$$W : q(t) \longrightarrow W[q] \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q})$$

ergeben, die in der Nähe von $q(t)$ liegen (siehe Abbildung). Dabei ist $\delta q(t)$ eine Funktion, die in dem ganzen Zeitintervall von t_1 bis t_2 klein ist; sie heißt die „Variation" der Funktion $q(t)$ und es gilt

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0. \tag{28}$$

Nun vergleichen wir die Werte des Integrales für die beiden Vergleichskurven $q(t)$ und $\bar{q}(t)$ und untersuchen die dadurch hervorgerufene Veränderung (Variation von W). [8]

$$\delta W[q] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L\left(q(t), \dot{q}(t)\right) = W[q + \delta q] - W[q] = 0, \tag{29}$$

$$\delta W[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[L\left(q(t) + \delta q(t), \dot{q}(t) + \delta\dot{q}(t)\right) - L\left(q(t), \dot{q}(t)\right)\right],$$

$$\delta W[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[L\left(q(t), \delta\dot{q}(t)\right) + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} + O\left(\delta q^2\right) - L(q, \dot{q})\right].$$

Die Entwicklung der Differenz nach Potenzen von $\delta q(t)$ und $\delta\dot{q}(t)$ beginnt mit Glieder der ersten Ordnung. Die notwendige Bedingung dafür, dass W ein Minimum wird, ist das Verschwinden der Gesamtheit dieser Glieder.

Nach der Ausführung der Variation erhält man

$$\delta W = \int_{t_1}^{t^2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right) = 0.$$

Berücksichtigt man ferner die Vertauschbarkeit der Variation und Zeitableitung, dass

$$\delta\dot{q} = \frac{d}{dt}\delta q$$

ist, so bekommt man nach partieller Integration

$$\delta W = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t^2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q = 0.$$

---

[8] Aus der Mathematik kennen wir folgende Vorgangsweise:

$$\hbar q(t) = q(t) + \epsilon v(t), \qquad v(t_1) = v(t_2) = 0.$$

$$J(\epsilon) = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q(t) + \epsilon v(t), \dot{q}(t) + \epsilon\dot{v}(t)\right) dt \qquad \Rightarrow \text{Extremum}$$

$$\text{Definition}: \quad L_q = \frac{\partial L}{\partial q}, \qquad L_{\dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}.$$

$$J'(\epsilon)\Big|_0 = \int_{t_1}^{t_2} \left(L_q v + L_{\dot{q}}\dot{v}\right) dt = 0$$

$$= \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \left(L_q - \frac{d}{dt}L_{\dot{q}}\right) v(t) dt + \underbrace{\left(L_{\dot{q}} v(t)\right)}_{0}\Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$\Rightarrow L_q - \frac{d}{dt}L_{\dot{q}} = 0$$

Wegen der Randwerte (28) bleibt nur das Integral übrig, welches für beliebige Werte von δq gleich Null sein soll. Dies ist jedoch nur möglich, wenn der Integrand verschwindet also

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0. \tag{30}$$

Das ist die **„Euler-Lagrange-Gleichung “.**
Wir können nun den kanonischen Impuls definieren:

$$p(t) = \frac{\partial L\left(q(t), \dot{q}(t)\right)}{\partial \dot{q}(t)}. \tag{31}$$

Jetzt können wir das System mit den kanonischen Koordinaten $(p,\ q)$ beschreiben. Dazu führen wir statt der Lagrange-Funktion L die Hamilton Funktion H ein. Das erreichen wir durch eine „Legendre-Transformation “[9], welche die Bauart

$$H(p,q) = p\dot{q}(q,p) - L\left(q, \dot{q}(q,p)\right) \tag{32}$$

besitzt (keine explizite t Abhängigkeit $L(q,\dot{q}) \neq L(q(t),\dot{q}(t),t)$). Die implizite Translationsinvarianz bedeutet Energieerhaltung.
Das Vermögen dieser Transformation ist es, die $\dot{q}$-Abhängigkeit zugunsten einer p-Abhängigkeit zu eliminieren. Wie man sieht, hängt die linke Seite nur von p und q ab, nicht aber von $\dot{q}$.
Die Lagrange-Funktion $L(q,\dot{q})$ setzt sich aus [10]

$$L = T - V \tag{33}$$

zusammen, wobei T die kinetische Energie und V das Potential bedeutet, sie besitzt nur mathematische Bedeutung.
Hingegen kann man über $H(p,q)$ aussagen:

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}} = p - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0.$$

Mit H können wir die kanonischen Bewegungsgleichungen aufstellen

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} + p\frac{\partial \dot{q}}{\partial p} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}_{p}\frac{\partial \dot{q}}{\partial p} = \dot{q},$$

[9] Legendre-Transformation - Übergang $x, y \Rightarrow u, y$:

$$f = f(x,y) = ux + vy \qquad df = udx + vdy \qquad \longrightarrow g = g(u,y) \qquad g = f - ux$$

$$dg = df - udx - xdu = vdy - xdu$$

hier $H = \bar{H}$ Konvention, da H interpretierbar als Energie

$$L = L(q,\dot{q}) \qquad dL = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial q}dq \qquad \longrightarrow \bar{H} = \bar{H}(q,p) \qquad -\bar{H} = L - p\dot{q}$$

[10] Für ein Punktteilchen mit der Masse m in einem konservativen Kraftfelt gilt $L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q)$.

$$\frac{\partial H}{\partial q} = p\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial q} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}_{p}\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = -\dot{p}.$$

Bezüglich der Zeitabhängigkeit kann man sagen

$$\frac{dH}{dt} = \underbrace{\frac{\partial H}{\partial q}}_{-\dot{p}}\dot{q} + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p}}_{\dot{q}}\dot{p} = 0.$$

Wir können die Hamilton-Funktion als

$$H = T + V$$

darstellen. H entspricht also der Gesamtenergie E des Systems und hat damit physikalische Bedeutung.

2.4.2 Berechnung der Lagrange-Funktion anhand eines Beispiels

Zum Abschluß wollen wir die Bewegung eines Teilchens der Masse m in einem konservativen Kraftfeld studieren.
In diesem Fall lautet die Newton'sche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial V(q)}{\partial q}.$$

Um die entsprechende Lagrange-Funktion zu erhalten, bilden wir

$$m\ddot{q}\delta q = -\frac{\partial V}{\partial q}\delta q = -\delta V.$$

Wir bilden auf beiden Seiten das Integral über die Zeit. An den festen Bahnendpunkten gilt:

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt m\ddot{q}\delta q = -\int_{t_1}^{2} dt \frac{\partial V}{\partial q}\delta q = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta V = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt V(q),$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left(m\ddot{q}\delta q + \delta V\right) = 0.$$

Mittels partieller Integration erhalten wir

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left(-m\dot{q}\frac{d}{dt}\delta q + \delta V\right) + m\dot{q}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2} = 0,$$

$$m\dot{q}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2} = 0, \qquad \text{da} \qquad \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0.$$

$$-m\dot{q}\frac{d}{dt}\delta q = -m\dot{q}\delta\dot{q} = -m\delta\left(\frac{\dot{q}}{2}\right)^2.$$

Damit folgt schließlich

$$
\begin{aligned}
-\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m\dot{q}^2}{2} - V \right) &= 0, \\
-\delta \int_{t_1}^{t_2} dt L \left(q(t), \dot{q}(t) \right) &= 0, \\
L \left(q(t), \dot{q}(t) \right) &= \frac{1}{2} m\dot{q}^2 - V.
\end{aligned} \tag{34}
$$

Damit haben wir die Lagrange-Funktion für dieses System berechnet.
Umkehrung: Euler-Lagrange liefert

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

mit einsetzen obriger Lagrange-Funktion (34).

$$-\frac{\partial V}{\partial q} - \frac{d}{dt}(m\dot{q}) = 0$$

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial V}{\partial q}$$

2.4.3 Klassische Feldtheorie

Wie sich zeigt, lassen sich die im vorherigen Kapitel dargestellten Prinzipien in ähnlicher Weise auf feldtheoretische Modelle übertragen. Dies geschieht schrittweise, zunächst erweitern wir das bisherige Prinzip auf Systeme mit n Teilchen.

$$q(t) \longrightarrow q_i(t)$$

Allerdings ist zu beachten, daß wir punktmechanische System mit verallgemeinerten Koordinaten $q_i(t)$ beschreiben konnten. Die Koordinate ist also nur von der Zeit abhängig und ist durch einen diskreten Index i gekennzeichnet, der den endlich vielen Freiheitsgraden des Systems entspricht. Bei Feldern ϕ_i haben wir neben der Zeitabhängigkeit auch eine Abhängigkeit vom Ort zu beachten, ϕ ist also ein $\phi(t, \vec{x}) = \phi(x^\mu)$. Wir wollen nun unser Feld analog zu einem Punktsystem mit generalisierten Koordinaten a_i beschreiben. Dabei kennzeichnet nun ϕ_i die Feldfunktion und $\vec{x} = x_i$ den Ortsvektor. Da es im Raum beliebig viele Ortsvektoren gibt, entspricht also die Beschreibung des Feldes der Beschreibung eines mechanischen Systems mit ∞ vielen Freiheitsgraden. Hier können wir also von einer kontinuierlichen Beschreibung sprechen.
Zur Veranschaulichung wollen wir als Beispiel den diskreten Fall von n Freiheitsgraden mit den kanonischen Bewegungsgleichungen

$$\dot{q}_i(t) = \frac{\partial H(p_i, q_i)}{\partial p_i(t)} \qquad \dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H(p_i, q_i)}{\partial q_i(t)} \tag{35}$$

betrachten. Führen wir den Grenzübergang $n \Rightarrow \infty$ durch, so erhalten wir statt der diskreten die kontinuierliche Beschreibung mittels einer Feldtheorie. Das Feld wird in jedem Punkt durch eine unabhängige, verallgemeinerte Koordinate dargestellt. In unserem konkreten Beispiel beschreiben wir die Schwingung durch eine stetige Funktion $\phi(x)$, dem Auslenkungsfeld. $\phi(x)$ mißt also die Amplitude, $\dot{\phi}(x)$ die Geschwindigkeit. Nach der oben eingeführten Analogie lautet also die kanonische Beschreibung für Felder $\phi(x)$:

$$\begin{aligned} q_i(t) &\longrightarrow \phi(x), \\ \dot{q}_i(t) &\longrightarrow \dot{\phi}(x), \\ p_i(t) &\longrightarrow \pi(x). \end{aligned}$$

Zur weiteren Beschreibung führen wir hier eine „Lagrange Dichte“ $\mathcal{L}$ ein, durch Volumsintegration erhalten wir dann wieder die von der Punktmechanik bekannte Lagrange-Funktion L:

$$L(\phi, \partial_\mu \phi) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^3x. \tag{36}$$

Wir wollen die Gestalt und die Bedeutung von $\mathcal{L}$ mittels eines Beispiels studieren.
Wir betrachten den einfachsten Feldtyp, das freie, reelle und skalare Feld $\phi(x)$. Die Wellengleichung für dieses Feld ist die „Klein-Gordon-Gleichung “:

$$(\Box + m^2)\phi(x) = 0. \tag{37}$$

Die Variation der Feldamplitude $\phi(x)$ ist durch

$$\delta\phi(x^0 = t_1, \vec{x}) = \delta\phi(x^0 = t_2, \vec{x}) = 0$$

definiert. Wir verwenden die gleiche Vorgangsweise wie bei der Berechnung der Lagrange-Funktion L aus der Newton'sche Bewegungsgleichung. Allerdings wird hier über die Zeit- und die kontinuierliche Ortskoordinate integriert.

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \left[\left(\Box + m^2\right)\phi(x)\right]\delta\phi = 0,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + m^2\right)\phi(x)\right]\delta\phi = 0,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dx^0 \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \left[-\frac{\partial\phi}{\partial x^0}\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^0}\right) + \frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^0}\delta\phi\right) + \vec{\nabla}\phi\vec{\nabla}\delta\phi - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\phi\delta\phi\right) + \frac{m^2}{2}\delta\phi^2\right] = 0.$$

Die beiden Oberflächenterme verschinden wegen $\delta\phi(t_1) = \delta\phi(t_2) = 0$, $\lim_{\vec{x}\to\infty}\phi(t, \vec{x}) = 0$.
Wir benützen die Relation $[\delta, \partial_\mu] = 0$:

$$\delta(\partial_\mu\phi) = \delta\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\phi + \delta\phi) - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\phi = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\delta\phi) = \partial_\mu(\delta\phi).$$

Es folgt

$$\int_{t_1}^{t_2} dx^0 \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \left[-\delta\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^0}\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^0}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(\vec{\nabla}\phi(x)\vec{\nabla}\phi(x)\right) + \frac{1}{2}m^2\delta\phi^2(x)\right] = 0.$$

Daraus ergibt sich mit

$$\frac{1}{2}\delta\left((\partial_0\phi)^2\right) = \partial_0\phi\delta\partial_0\phi, \qquad \frac{1}{2}\delta\left(\vec{\nabla}\phi\nabla\phi\right) = \vec{\nabla}\phi\delta\vec{\nabla}\phi \quad \text{und} \qquad \frac{1}{2}\delta\left(\phi^2\right) = \phi\delta\phi$$

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} dx^0 \int_{-\infty}^{\infty} d^3x\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^0}\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^0} - \vec{\nabla}\phi\vec{\nabla}\phi - m^2\phi^2\right] = 0.$$

In Viererschreibweise

$$\delta\int d^4x\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2\right) = 0,$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2(x)\right).$$

Wir haben damit die Lagrange-Dichte für das Skalarfeld berechnet, man sieht, daß $\mathcal{L}$ ein Lorentz-kovariantes Funktional des Feldes $\phi(x)$ und seiner Ableitung $\partial_\mu\phi(x)$ ist.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x))$$

und

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}\left(\phi(t,\vec{x}), \partial_\mu \phi(t,\vec{x})\right).$$

Wir nehmen in unserer Feldtheorie stets an, daß die jeweiligen Feldgleichungen aus den entsprechenden Lagrangedichten $\mathcal{L}$ abgeleitet werden können. Das geschieht analog dem Hamilton'schen Prinzip in der Punktmechanik durch die Forderung, daß die Wirkung für die Felder stationär ist.

$$\delta W[\phi] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \mathcal{L}\left(\phi(t,\vec{x}), \partial_\mu \phi(t,\vec{x})\right) = 0$$

in Viererschreibweise wiederum

$$\delta W[\phi] = \delta \int_R d^4x \mathcal{L}\left(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)\right) = 0.$$

Die Durchführung der Variation liefert uns wieder die Euler-Lagrange-Bewegungsgleichung.

$$\delta W[\phi] = W[\phi + \delta\phi] - W[\phi] =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \left[\mathcal{L}\left(\phi + \delta\phi, \partial_\mu\left(\phi + \delta\phi\right)\right) - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)\right] = 0.$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \left[\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\delta\partial_\mu\phi + O(\delta^2) - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)\right] = 0,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\left(\partial_\mu\phi\right)\right] = 0.$$

Wir erhalten mit partieller Integration

$$\int d^4x \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\partial_\mu\delta\phi = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\right)\delta\phi\Big|}_{=0} - \int d^4x \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\delta\phi,$$

$$\int d^4x \delta\phi \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\right] = 0.$$

Da diese Bedingung für beliebige Variationen $\delta\phi$ gelten soll, erhalten wir

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi} = 0 \tag{38}$$

die Euler-Lagrange-Gleichung[11].

Wird ein System durch n Felder beschrieben, so gilt

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\phi_i(x), \partial_\mu\phi_i(x)\right),$$

[11] Anhand einsetzen in die Euler-Lagrange-Gleichung können wir die vorher berechnete Lagrange-Dichte überprüfen, ob wir wieder die freie Feldgleichung des Skalarfeldes erhalten.

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -m^2\phi, \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)} = \partial^\mu\phi \qquad \Rightarrow \quad \left(\Box + m^2\right)\phi(x) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i} = 0. \tag{39}$$

Man erhält also n Feldgleichungen.

Das Einsetzen einer bestimmten Lagrange-Dichte in die Euler-Lagrange-Gleichung führt dann zu jeweils charakteristischen Feldgleichung.

Im nächsten Kapitel werden wir die drei wichtigsten Feldtypen auf diese Art besprechen, ihren physikalischen Gehalt und die Lösungen der Feldgleichungen werden wir auch diskutieren.

2.5 Das Klein-Gordon-Feld

Das reelle, freie Skalarfeld $\phi(x)$ ist der einfachste Feldtyp. Es genügt der freien Klein-Gordon-Gleichung:

$$\left(\Box + m^2\right)\phi(x) = 0. \tag{40}$$

Die Lagrange-Dichte lautet

$$\mathcal{L}\left(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)\right) = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - m^2 \phi^2(x)\right). \tag{41}$$

Wir wollen die Feldgleichung lösen und führen daher eine Fouriertransformation für $\phi(x)$ in den Impulsraum durch. Ansatz:

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4k e^{+ikx} \tilde{\phi}(k).$$

Wir sehen, daß nur invariante Lorentz-Skalare vorkommen. Das Produkt im Exponent bedeutet

$$kx = k_\mu x^\mu = k^\rho x_\rho = k_0 x^0 - \vec{k}\vec{x}.$$

Da wir ein reelles Feld betrachten gilt außerdem

$$\phi(x) = \phi^\star(x),$$

$$\phi^\star(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4k e^{-ikx} \tilde{\phi}^\star(k),$$

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4k e^{+ikx} \tilde{\phi}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{+\infty}^{-\infty} (-d^4k) e^{-ikx} \tilde{\phi}(-k).$$

Das bedeutet also, daß bei der Transformation der komplex konjugierten Größe $\phi^\star$ die Variable k durch $-k$ ersetzt wird.

$$\tilde{\phi}^\star(k) = \tilde{\phi}(-k), \qquad \tilde{\phi}^\star(-k) = \tilde{\phi}(k).$$

Wir erhalten durch Einsetzung in die Klein-Gordon-Gleichung

$$\left(\Box + m^2\right)\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(\Box + m^2\right) \int d^4k e^{+ikx} \tilde{\phi}(k) = 0$$

und durch zweimaliges differenzieren

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^4k (-k^2 + m^2) e^{+ikx} \tilde{\phi}(k) = 0.$$

Unsere Gleichung lautet also im Impulsraum

$$(-k^2 + m^2)\tilde{\phi}(k) = 0.$$

Wir müssen zwei Fälle betrachten:

a) $k^2 \neq m^2 \quad \longrightarrow \quad \tilde{\phi}(k) = 0.$

b) $k^2 = m^2 \quad \longrightarrow \quad \tilde{\phi}(k) \neq 0.$

Mit $\tilde{\phi}(k) = \delta(k^2 - m^2)\tilde{\phi}'(k)$ deckt man beide Fälle ab, um nicht triviale Lösungen zu erhalten:

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^4k e^{+ikx} \delta(k^2 - m^2)\tilde{\phi}'(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^4k e^{+ikx} \delta((k^0)^2 - \vec{k}^2 - m^2)\tilde{\phi}'(k).$$

Wir haben eine Nullstelle (Hyperbel in 2 Hauptlage) für

$$k^{0^2} - \vec{k}^2 - m^2 = 0,$$

$$k^0 = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \equiv \pm\omega_k.$$

Das ist die Gleichung für 2 Massenschalen.

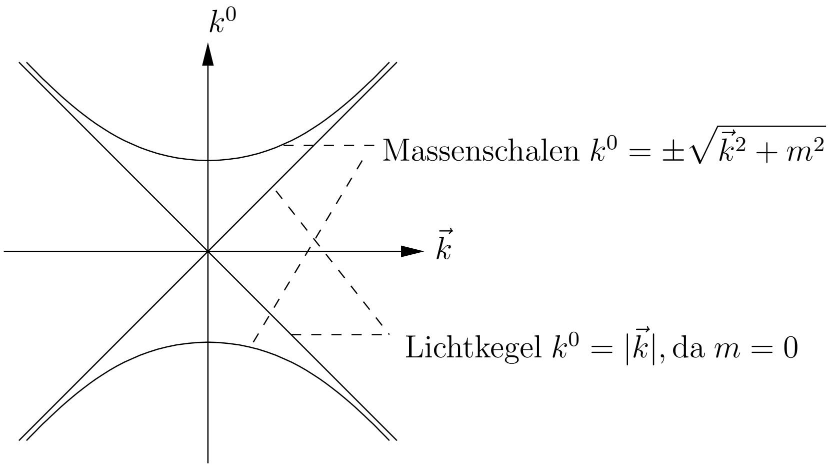

Abbildung 4: Lichtkegel mit 2 Massenschalen.

Wir können $\phi(x)$ bez. der Fourier-Transformation in eine positiven und negativen Frequenzanteil aufspalten. In der Quantentheorie werden wir die beiden Anteile als Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren darstellen können.

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x). \tag{42}$$

Wir führen zur näheren Definition in die Fourier-Transformierte eine Stufenfunktion $\theta(k^0)$ ein.

$$\theta(k^0) + \theta(-k^0) = \mathbb{1}.$$

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^4k e^{+ikx} \delta(k^2 - m^2)\mathbb{1}\phi(k) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^4k e^{+ikx} \left[\delta(k^2 - m^2)\theta(k^0)\phi(k) + \delta(k^2 - m^2)\theta(-k^0)\phi(k)\right]. \end{aligned}$$

Für $k^0 > 0$ folgt

$$
\begin{aligned}
\phi^+(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^4k e^{+ikx} \delta(k^2 - m^2)\theta(k^0)\phi(k), \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega_k} e^{+ikx} \underbrace{\phi(\omega_k, \vec{k})}_{\phi^+(k)} .
\end{aligned}
$$

Für $k^0 < 0$ gilt

$$
\begin{aligned}
\phi^-(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^4k e^{-ikx} \delta(k^2 - m^2)\theta(-k^0)\phi(k^0, -\vec{k}), \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega_k} e^{-ikx} \underbrace{\phi(-\omega_k, -\vec{k})}_{\phi^-(k)} .
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \phi^-(k) = \left(\phi^+(k)\right)^* .
$$

Den positiven Frequenzanteil kann man auch durch das Vorzeichen des Fourierexponenten charakterisieren. Dies geschieht so, daß man übereinkommt, das Vorzeichen des „Frequenzterms“ $k_0 x_0 = x^0\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ zur Kennzeichnung heranzuziehen.

$$
\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{2\omega_k} \left[e^{ikx}\phi^+(\vec{k}) + e^{-ikx}\phi^-(\vec{k}) \right] .
$$

2.6 Das Elektromagnetische Feld

Das elektrische und magnetische Feld schrieben wir bisher an:

$$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z),$$
$$\vec{H} = (H_x, H_y, H_z).$$

Bei Abwesenheit von Quellen $\vec{H} = \vec{B}$ haben die Maxwell-Gleichungen folgende Gestalt:

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \qquad div\vec{E} = 0, \tag{43}$$

$$rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \qquad div\vec{H} = 0. \tag{44}$$

Ferner wissen wir, daß sich diese Vektorfelder von Potentialen ableiten lassen. Sei ϕ das skalare Potential und $\vec{A}$ das entsprechende Vektorpotential, so gilt

$$\vec{E} = -grad\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

$$\vec{H} = rot\vec{A}.$$

Diese Darstellung ist jedoch nicht eindeutig, wie wir sehen werden, da bei einer „sogenannten“ lokalen Eichtransformation ($\psi \ldots$ Eichfunktion, Parameter)

$$\phi = \phi' + \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

$$\vec{A} = \vec{A}' - grad\psi$$

in den oberen Gleichungen folgt,

$$\vec{E} = -grad\left(\phi' + \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A}' - grad\psi) = -grad\phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t},$$

$$\vec{H} = rot\vec{A}', \qquad \text{da} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\psi = 0 \quad \text{ist.}$$

Man nennt diese Prozedur eine Umeichung der Potentiale. Die Gleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{H}$ haben in den gestrichenen Größen die gleiche Form. $\vec{E}$ und $\vec{H}$ sind daher die entsprechenden physikalischen Felder. Man hat also eine zusätzliche Freiheit, über die man noch verfügen kann. So setzt man zum Beispiel nach der Lorentz-Konvention

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \tag{45}$$

Mit den beiden in Kapitel 2.3.7 eingeführten Vierergradienten

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}),$$

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla})$$

können wir die Divergenz eines Vierervektors B^μ definieren

$$B^\mu = \left(B^0, \vec{B}\right), \tag{46}$$

$$\partial_\mu B^\mu = \frac{\partial}{\partial t} B^0 + \vec{\nabla}\vec{B}.$$

Fassen wir nun die beiden Potentiale ϕ und $\vec{A}$ zu einem Viererpotential zusammen, so haben wir

$$A^\mu = \left(\phi, \vec{A}\right), \tag{47}$$

$$A_\mu = \left(\phi, -\vec{A}\right). \tag{48}$$

Die oben genannte Lorentz-Konvention lautet dann

$$\partial_\mu A^\mu = g_{\mu'\mu} \partial^{\mu'} A^\mu = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{A} = 0. \tag{49}$$

Diese Gleichung ist die eigentliche Motivation für den Ansatz $A^\mu = \left(\phi, \vec{A}\right)$.
Man muß jetzt noch zeigen, daß sich A_μ wie ein Vierervektor verhält. Bei Lorentz-Transformation ${A_\mu}' = {L_\mu}^\lambda A_\lambda$ sind $A_\mu A^\mu$ und $\partial_\mu A^\mu$ invariante Lorentz-Skalare.
Nachdem wir das Vektorpotential A_μ eingeführt haben, können wir die insgesamt sechs Komponenten der beiden Vektorfelder $\vec{E}$ und $\vec{H}$ in einen antisymmetrischen, elektromagnetischen Feldtensor $F^{\mu\nu}$ von Rang 2 einordnen.
Daher definiert man den kontravarianter Feldtensor (siehe auch Skriptum Allgemeine Relativitätstheorie[8] „Viererrotation"):

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = -F^{\nu\mu} \tag{50}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & H_z & -H_y \\ E_y & -H_z & 0 & H_x \\ E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{51}$$

kovarianter Feldtensor

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & H_z & -H_y \\ -E_y & -H_z & 0 & H_x \\ -E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{52}$$

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} F^{\lambda\sigma}. \tag{53}$$

Bei Lorentz-Transformation erhält man

$$F'^{\mu\nu}(x') = L^{\mu}{}_{\lambda} L^{\nu}{}_{\rho} F^{\lambda\rho}(x), \qquad\qquad x'^{\sigma} = L^{\sigma}{}_{\rho} x^{\rho}.$$

Da sich die Vektorfelder $\vec{E}$ und $\vec{H}$ aus den Potentialen darstellen lassen, wird dies auch in kovarianter Form zu erwarten sein. $F_{\mu\nu}$ ist Lorentz-eichinvariant.

Es gilt zum Beispiel:

$$F_{01} = +E_x = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = \dot{A}_1 - \partial_1 \phi = \left| A_\mu = (\phi, -\vec{A}) \right| = -\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x^1},$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -grad\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Nun können wir auch die Maxwell-Gleichungen kovariant formulieren.

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0, \tag{54}$$

$$\partial_\rho F_{\sigma\tau} + \partial_\sigma F_{\tau\rho} + \partial_\tau F_{\rho\sigma} = 0. \tag{55}$$

Wir überprüfen $\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0$:

$$\nu = 0, \qquad \partial^\mu F_{\mu 0} = \partial^i F_{i0} = \left| \begin{array}{c} F_{i0} = (-E_x, -E_y, -E_z) \\ \partial^i = (-\partial_1, -\partial_2, -\partial_3) \end{array} \right| = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = div\vec{E} = 0.$$

$$\nu = 1, \qquad \partial^\mu F_{\mu 1} = \partial^0 F_{01} + \partial^2 F_{21} + \partial^3 F_{31} = \dot{E}_x - (\partial_y H_z - \partial_z H_y),$$

$$\dot{E}_x = \partial_y H_z - \partial_z H_y = \left(\vec{\nabla} \times \vec{H} \right)_x,$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{E}} = rot\vec{H}.$$

$$\rho = 0,\ \sigma = 1,\ \tau = 2, \qquad \partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} = +\dot{H}_z + \partial_x E_y - \partial_y E_x,$$

$$\dot{H}_z = -\left(\partial_x E_y - \partial_y E_x \right)$$

$$\Rightarrow -\dot{\vec{H}} = rot\vec{E}.$$

Wir sehen also, daß wir mit diesem Formalismus die Maxwell-Gleichungen in der gewohnten Form reproduzieren können.

Um einen zu F dualen Feldtensor $\tilde{F}$ einzuführen, definieren wir zuerst den völlig antisymmetrischen ϵ-Tensor 4.Stufe.

$$\epsilon^{\delta\sigma\mu\nu}, \qquad\qquad \epsilon^{\delta\sigma\mu 0} = \epsilon^{ijk}. \tag{56}$$

Für die homogenen Maxwell-Gleichungen ist der duale Feldtensor

$$\tilde{F}_{\delta\sigma} = \frac{1}{2} \epsilon^{\delta\sigma\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{57}$$

ebenfalls eine Losung:

$$\partial^\delta \tilde{F}_{\delta\sigma} = 0. \tag{58}$$

Aus Gleichung (54) folgt

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \partial^\mu \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) = \Box A_\nu - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu = 0.$$

Mit der Lorentz-Konvention $\partial^\mu A_\mu = 0$ folgt

$$\Box A_\nu(x) = 0. \tag{59}$$

Wie bei der Klein-Gordon-Gleichung erhalten wir die Lösung durch eine Fouriertransformation

$$A_\nu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^4k e^{+ik^\mu x_\mu} \delta\left(k^2\right) \tilde{A}_\nu(k).$$

Im Impulsraum lautet die Lorentz-Konvention

$$\partial^\mu A_\mu = 0 = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^4k e^{+ik^\mu x_\mu} (-i) k^\nu \delta\left(k^2\right) \tilde{A}_\nu(k)$$

Orthogonalität

$$\Rightarrow k^\nu \tilde{A}_\nu(k) = 0.$$

Mit der Annahme $\phi = 0$ (ist eine andere Art der Eichfreiheit [12])

$$\tilde{A}_\nu(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\vec{\tilde{A}} \end{pmatrix}$$

erhält man speziell

$$k^\mu = (k^0, 0, 0, k^0), \qquad\qquad k^2 = 0,$$

so folgt daß

$$\vec{k}\vec{A} = k^3 A_3 = 0 \qquad\qquad \Rightarrow A_3 = 0.$$

Diese Gleichung kennzeichnet die Transversalität des elektromagnetischen Feldes.

Mit Hilfe des Hamilton'schen Prinzips können wir wieder eine Lorentz-invariante Lagrange-Dichte berechnen (siehe Ansatz für Klein-Gordon-Gleichung im Kapitel 2.4.3).

$$\delta W[A] = \int_{t_1}^{t_2} d^4x \underbrace{\partial_\mu F^{\mu\nu}(x)}_{Feldgleichung} \delta A_\nu(x) = \int_{t_1}^{t_2} d^4x \partial^\mu F_{\mu\nu}(x) \delta A^\nu(x) = 0$$

[12] axiale Eichung, n ist eine fixe Eichrichtung.

$$n^\mu A_\mu = 0, \qquad n^\mu = (1, 0) \qquad\qquad \Rightarrow \quad n^0 A_0 = 0, \qquad A_0 = \phi = 0.$$

Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} 0 &= -\int d^4x F^{\mu\nu} \delta\left(\partial_\mu A_\nu\right) \\ &= -\frac{1}{2}\int d^4x F^{\mu\nu} \delta\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) = -\frac{1}{2}\int d^4x F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

$$0 = -\frac{1}{4}\delta \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \equiv \delta W[A].$$

Damit bekommen wir als eichinvarianten Lorentz-Skalar folgende Lagrange-Dichte der freien Maxwell Theorie

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \tag{60}$$

oder dank Indexvertauschung [13]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left(\partial \mu A_\nu\right) F^{\mu\nu}.$$

Wir setzen $\mathcal{L}$ in die Euler-Lagrange-Gleichung ein und können dadurch wieder die Feldgleichung berechnen.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_\nu} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \partial_\mu A_\nu}\left(\partial_{\mu'} A_{\nu'} F^{\mu'\nu'}\right) = -F^{\mu\nu}$$

Daraus folgt

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \tag{61}$$

$$\Box A_\nu = 0. \tag{62}$$

[13] via Indexvertauschung:

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu F_{\mu\nu} - \partial^\nu A^\mu F_{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu F_{\mu\nu} - \partial^\mu A^\nu F_{\nu\mu} = \partial^\mu A^\nu (F_{\mu\nu} - F_{\nu\mu}) = 2\partial^\mu A^\nu F_{\mu\nu}.$$

2.7 Das Dirac-Feld

2.7.1 Versuche zur Formulierung einer relativistischen Quantentheorie

Nachdem die Prinzipien der speziellen Relativitätstheorie allgemeine Anerkennung und Bestätigung gefunden hatten, war man bestrebt, eine erweiterte Quantenmechanik zu formulieren, die die Relativitätstheorie berücksichtigt.
Das bedeutet: die gültigen Bewegungsgesetze sollen in allen Inertialsystemen gelten und die gleiche Form haben. Mathematisch ausgedrückt lautet die Forderung: Die Gleichungen der relativistischen Quantentheorie müssen in einer Lorentz-kovarianten Form abgefaßt sein.
Versuchen wir die Forderungen bei einem einfachen Beispiel, dem freien Teilchen $V = 0$ zu erfüllen. Die klassischen Größen lauten:

$$H = T,$$

$$T = \frac{m\vec{v}^2}{2} = \frac{\vec{p}^2}{2m}.$$

Die quantenmechanische Beschreibung erhalten wir durch Einführung von Operatoren für die Observablen.
Impulsoperator:

$$\vec{p} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}. \tag{63}$$

Energieoperator:

$$H \qquad \longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}. \tag{64}$$

Aus der Quantenmechanik folgt die Schrödinger-Gleichung.

$$H\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi. \tag{65}$$

Mit den Gleichungen (63) und (64), wo $\psi(x,t)$ die Wellenfunktion ist, erhält man

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi.$$

Man sieht, daß zweimal nach dem Ort und nur einmal nach der Zeit differenziert wird. Wir erwarten jedoch, eine Gleichung in der Orts- und Zeitableitung gleichberechtigt sind. Diese Gleichung ist bei Durchführung einer Lorentz-Transformation nicht kovariant, die linke Seite zeigt anderes Transformationsverhalten als die rechte. Versuchen wir einen anderen Weg.
Erinnern wir uns an die physikalische Bedeutung von H, so erkennen wir die Gesamtenergie:

$$H = T = E.$$

Aus der Relativitätstheorie wissen wir, daß der Ausdruck

$$E^2 = c^2\vec{p}^2 + m^2c^4$$

die Energie-Impuls-Beziehung, eine Lorentz-kovariante ist. Aus $H = E \Rightarrow H^2 = E^2$ ($[H, E] = 0$) erhalten wir mit den Operatoren die wir oben einführten

$$H^2 = c^2\vec{p}^2 + m^2c^4 = c^2\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\right)^2 + m^2c^4.$$

Wir bilden formal ein Analogon zur Schrödinger-Gleichung

$$H^2\psi = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi$$

und erhalten durch Einsetzen

$$\left(c^4m^2 + c^2\left(\frac{h}{i}\vec{\nabla}\right)^2\right)\psi = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi.$$

Durch Umformung

$$\left(c^4m^2 - c^2\hbar^2\Delta + \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi = 0,$$

mit $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \Box$ erhalten wir endgültig in natürlichen Einheiten ($c = \hbar = 1$)

$$\left(\Box + m^2\right)\psi = 0.$$

Das ist jedoch die bereits bekannte Klein-Gordon-Gleichung in natürlichen Einheiten. Die so gefundene Lösung ist problematisch:

a) Es ergeben sich Probleme mit der von der Schrödinger-Gleichung her bekannten Wahrscheinlichkeitsinterpretation.

b) Wir wissen, daß die Klein-Gordon-Gleichung Lösung mit positiver und negativer Energie besitzt; es gibt dadurch Schwierigkeiten bei der Interpretation dieser negativen Lösungen.

2.7.2 Die Dirac-Gleichung

Um trotz der im vorigen Abschnitt aufgezeigten Probleme zu einer relativistischen Gleichung in Lorentz-kovarianter Form zu gelangen, wählte P. Dirac einen Ansatz, bei dem die Gleichung eine lineare Zeit- und Ortsableitung besitzt. Wir nennen diese Gleichung die „Dirac-Gleichung“:

$$H\Psi = \left(\frac{\hbar c}{i}\alpha_j \partial_j + c^2 \beta m\right)_{\alpha\beta} \Psi_\beta = i\hbar \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial t}. \tag{66}$$

Formal bedeutet dies: $\pm\sqrt{H^2}$!

Damit diese Gleichung die oben genannten Forderungen erfüllt, sind folgende Überlegungen zu beachten:

- Die Koeffizienten α_j können hier nicht einfache Zahlen sein, da die Gleichung sonst nicht einmal gegen räumliche Drehung invariant wäre.
- Ebenso kann Ψ kein reiner Skalar sein, da wir ja Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ beschreiben wollen mit zwei möglichen Freiheitsgraden Spin Auf und Spin Ab. Zusammen mit den zwei möglichen Zuständen von positiver und negativer Energie erwarten wir, daß Ψ mindestens eine vierkomponentige Größe sein wird.

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

ist also eine Spaltenmatrix mit mindestens vier Komponenten, wir nennen Ψ_α in Analogie zur Spin-Wellenfunktion der Quantenmechanik auch „Spinor“.

Damit die Dirac-Gleichung als befriedigend angesehen werden kann, muß sie die richtige Energie-Impuls-Beziehung für ein freies relativistisches Teilchen liefern:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4.$$

Damit diese Beziehung folgt, muß jede Komponente ψ_α von Ψ die Klein-Gordon-Gleichung erfüllen, also:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi_\alpha = H^2 \Psi_\alpha = (-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4)\Psi_\alpha.$$

Wenn wir die Dirac-Gleichung iterieren, finden wir (bei Vernachlässigung der Spinorindizes):

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi = -\hbar^2 c^2 \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\alpha_j \alpha_i + \alpha_i \alpha_j}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\hbar m c^3}{i} \sum_{i=1}^{3} (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} + \beta^2 m^2 c^4 \Psi.$$

Durch Koeffizientenvergleich erkennen wir, daß die vier Größen α_i und β folgende Bedingungen erfüllen müssen:

$$\alpha_i \alpha_k + \alpha_k \alpha_i = 2\delta_{ik}, \tag{67}$$

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0, \tag{68}$$

Aus Gleichung (67) folgt für $i = k$

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = \mathbb{1}.$$

Die Größen α_i und β sind Matrizen. Wir wollen sie explizit konstruieren. Zunächst kann man sagen, daß es hermite'sche Matrizen sein müssen, damit $H = H^+$ ist.

$$\alpha_i = \alpha_i^+,$$

$$\beta = \beta^+.$$

Da

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = \mathbb{1}$$

gilt, sind die Eigenwerte von α_i und β gleich ± 1 ($det\,({\alpha_i}^2) = det(\alpha_i) det(\alpha_i) = 1$ [14]).
Aus der Antikommutatoreigenschaft von α_i und β folgt, daß die Spur von jedem α_i und β gleich Null ist. Der Beweis:
Aus

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0$$

folgt mit $\beta^2 = 1$ und

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \qquad | \cdot \beta,$$

$$\alpha_i \beta^2 + \beta \alpha_i \beta = 0,$$

daß

$$\alpha_i = -\beta \alpha_i \beta.$$

Wegen der zyklischen Vertauschbarkeit unter der Spur

$$SpAB = SpBA$$

gilt dann:

14

$$diag(\alpha_i) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \qquad n = 3, 4, \ldots$$

$$Sp(\alpha_i) = -Sp(\beta\alpha_i\beta) = -Sp(\underbrace{\beta^2}_{=\mathbb{1}}\alpha_i) = -Sp(\alpha_i),$$

$$\Rightarrow \quad Sp(\alpha_i) = Sp(\beta) = 0.$$

Da die Spur die Summe der Eigenwerte ist, muß es gleich viele positive wie negative Eigenwerte geben und die Matrizen daher eine geradzahlige Dimension haben. Die kleinste Dimension $N = 2$ mit den Pauli Matrizen σ_i genügt nicht:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

mit

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \qquad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_i j.$$

Die kleinste Dimension, die die obigen Forderungen für α_i und β erfüllt, ist $N = 4$. Eine spezielle explizite Darstellung der Matrizen lautet:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}.$$

Man kann jetzt zeigen, daß die Dirac-Gleichung (wie die Schrödinger-Gleichung) eine Wahrscheinlichkeitsinterpretation für die Wellenfunktion Ψ zuläßt, daß also gilt:[15]

$$\int \Psi^*\Psi d^3x = 1.$$

Für weitere Betrachtungen führen wir am besten eine neue, vierdimensionale Beschreibung ein, die Lorentz-Kovarianz transparenter macht.
Wir definieren Dirac-Matrizen γ^μ:

$$\begin{array}{lll} \gamma^0 = \beta, & {\gamma^0}^\dagger = \gamma^0 & \text{(hermite'sche Matrix)}, \\ \gamma^i = \beta\alpha_i & {\gamma^i}^\dagger = -\gamma^i & \text{(antihermite'sche Matrix)}. \end{array}$$

Damit ergibt sich für $\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = \delta_{ij}, \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0$

$$\beta| \quad \alpha_i\gamma^0 + \gamma^i = 0,$$

$$\beta\alpha_i\gamma^0 + \gamma^0\gamma^i = \gamma^i\gamma^0 + \gamma^0\gamma^i = 0,$$

$$\{\gamma^i, \gamma^0\} = 0 \tag{69}$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\gamma\}_{\alpha\beta} = 2g^{\mu\gamma}\delta_{\alpha\beta}. \tag{70}$$

Die Dirac-Gleichung lautet dann in natürlichen Einheiten:

[15] siehe Bjorken-Drell [1], Kapitel 1.3

$$
\begin{aligned}
\left(i\frac{\partial}{\partial t} + i\vec{\alpha}\vec{\partial} - \beta m\right)_{\alpha\beta} \Psi_\beta &= 0, \\
\left(i\beta\frac{\partial}{\partial t} + i\beta\vec{\alpha}\vec{\partial} - m\right)_{\alpha\beta} \Psi_\beta &= 0, \\
\left(i\left(\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} + \gamma^i\vec{\partial}\right) - m\right)_{\alpha\beta} \Psi_\beta &= 0, \\
\Rightarrow \quad (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)_{\alpha\beta} \Psi_\beta &= 0.
\end{aligned} \tag{71}
$$

Wir führen noch den Feynman-Dolch ein, er vereinfacht die Schreibweise:

$$
\gamma^\mu\partial_\mu \equiv \not{\partial} \equiv \not{\nabla} \qquad „\partial\text{-slash}“.
$$

Die Dirac-Gleichung in Viererschreibweise lautet also:

$$
(i \not{\nabla} - m)_{\alpha\beta}\Psi_\beta(x) = 0. \tag{72}
$$

Die Dirac-Gleichung ist Lorentz-kovariant. Es gilt also:[16]

$$
(i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x'^\mu} - m)_{\alpha\beta}\Psi'_\beta(x') = 0.
$$

Die Gleichung hat also im gestrichenen System die gleiche Form, $\Psi'(x')$ ist Lösung dieser Gleichung und kein Lorentz-Bezugssystem ist ausgezeichnet. Wir können eine hermite'sch adjungierte Dirac-Gleichung aufstellen:

$$
\Psi^+(-i\overleftarrow{\not{\nabla}}^+ - m) = 0.
$$

$$
(i \not{\nabla}\Psi)^+ = \Psi^+(-i \not{\nabla}^+),
$$

$$
\bar{\Psi} = \Psi^+\gamma^0.
$$

Damit ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\bar{\Psi}\left(-i\gamma^0\overleftarrow{\not{\nabla}}^+ - \gamma^0 m\right) &= 0 \qquad |(-\gamma^0), \\
\bar{\Psi}\left(i\gamma^0\overleftarrow{\not{\nabla}}^+\gamma^0 + m\right) &= 0 \qquad \text{da} \quad (\gamma^0)^2 = 1 \quad \text{und} \quad \gamma^0\overleftarrow{\not{\nabla}}^+\gamma^0 = \overleftarrow{\not{\nabla}}, \\
\Rightarrow \quad \bar{\Psi}(i\overleftarrow{\not{\nabla}} + m) &= 0.
\end{aligned} \tag{73}
$$

[16] Den Beweis findet man bei: Bjorken-Drell [1], Kapitel 2.2

Wir berechnen nun eine Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ für die freie Dirac-Gleichung aus dem Hamilton'schen Prinzip ($\delta W[\bar{\Psi}] \equiv 0$, wir betrachten $\bar{\Psi}$ als linear unabhängig, d.h.: wir betrachten eine Variation für $\bar{\Psi}$ bei konstantem Ψ):

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{t_1}^{t_2} d^4x\delta\bar{\Psi}(i \not\nabla - m)\Psi, \\
&= \delta\int_{t_1}^{t_2} d^4x\bar{\Psi}(i \not\nabla - m)\Psi, \\
W_{Dirac}[\Psi] &= \int d^4x\bar{\Psi}(i \not\nabla - m)\Psi, \\
\Rightarrow \quad \mathcal{L}_1 &= \bar{\Psi}(i \not\nabla - m)\Psi.
\end{aligned} \tag{74}$$

Das erhaltene $\mathcal{L}$ ist nicht hermitesch. Wir können durch die symmetrische Form

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_1^*)$$

eine hermite'sche Lagrange-Dichte erhalten:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}\left[i\bar{\Psi} \not\nabla\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - i(\bar{\Psi} \not\nabla\Psi)^\dagger - m(\bar{\Psi}\Psi)^\dagger\right],$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{i}{2}\left[\bar{\Psi} \not\nabla\Psi - (\bar{\Psi}\partial_\mu\gamma^\mu\Psi)^\dagger\right] - \frac{m}{2}\left[\bar{\Psi}\Psi + \Psi^\dagger\gamma_0\Psi\right],$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{i}{2}(\bar{\Psi} \not\nabla\Psi - \partial^\mu\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi) - m\bar{\Psi}\Psi.$$

Es gilt:

$$W[\Psi] \quad = \quad \int \mathcal{L}_1 d^4x \quad \neq \quad \int \mathcal{L}_2 d^4x.$$

Die beiden Dichten unterscheiden sich um eine totale Divergenz, sie liefern jedoch die gleiche Bewegungsgleichung.
Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\Psi}} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\bar{\Psi}} = 0, \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Psi} = 0.$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial\bar{\Psi}} = 0 \qquad \text{da} \qquad \frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial\partial_\mu\bar{\Psi}} \neq 0.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial\bar{\Psi}} \quad = \quad (i \not\nabla - m)\Psi \quad = \quad 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \bar{\Psi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \partial_\mu \bar{\Psi}} = \frac{i}{2}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\Psi + \frac{i}{2}\partial_\mu \gamma^\mu \Psi = (i \not{\nabla} - m)\Psi = 0.$$

Wir können noch schreiben:

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 - \underbrace{\partial_\mu(\frac{i}{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu \Psi)}_{\text{totale Divergenz}} \quad .$$

2.8 Das Noether-Theorem

2.8.1 Die innere und äußere Veränderung von Feldgrößen

Wir wollen diese beiden Veränderungen mit Hilfe eines Beispiels diskutieren. Wir denken uns ein 2-dimensionales Vektorfeld $\vec{\phi}(x)$ im $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{\varphi}(\vec{x}) \quad = \quad \varphi_i(x_i) \quad \equiv \quad \varphi_i(x^1, x^2), \qquad\qquad i = \mathbb{1}, 2.$$

Betrachten wir die Drehung, so läßt sich die Transformation der Koordinaten im Rahmen von orthogonalen Drehungen ($S^T = S^{-1}$) wie folgt darstellen

$$\vec{x'} = S\vec{x},$$

wobei

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

eine 2×2-Drehmatrix ist. Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Bei Betrachtung der Feldgrößen erhalten wir:

$$\varphi'_i(\vec{x'}) = S_{ij}\varphi_j(\vec{x}) \qquad \text{oder} \qquad \vec{\varphi'}(\vec{x'}) = S\vec{\varphi}(\vec{x}).$$

Da aber gilt:

$$\vec{x'} = S\vec{x}.$$

Daraus folgt:

$$\vec{\varphi'}(\vec{x'}) \quad = \quad \vec{\varphi'}(S\vec{x}) \quad = \quad S\vec{\varphi}(\vec{x}).$$

Mit

$$S^{-1}S = \mathbb{1}$$

bekommen wir schließlich:

$$\vec{\varphi'}(\vec{x}) = S\vec{\varphi}(S^{-1}\vec{x}).$$

Da φ' die Feldgröße im gedrehten, neuen Koordinationssystem darstellt, bedeutet also $\varphi'(x)$, daß man das gedrehte Feld am ursprünglichen Raumpunkt betrachtet. Dem Argument x von $\varphi'(x)$ entspricht deshalb im neuen System ein anderer geometrischer Punkt x'. Die Feldgröße im gestrichenen System, die durch den selben geometrischen Punkt x' charakterisiert wird, kennzeichnet man daher durch $\varphi'(x')$. Daher erscheint es naheliegend, wenn wir die folgenden Veränderungen (Variationen) einführen.
Wir definieren:

1. Die totale Variation[17]:
$$\bar{\delta}\varphi(x) = \varphi'(x) - \varphi(x).$$

2. Die lokale Variation:
$$\delta\varphi(x) = \varphi'(x') - \varphi(x).$$

   Beispiel: nur Drehung

2.8.2 Die Aufstellung und der Nachweis des Noether-Theorems

Das Noether-Theorem besagt:[18]
„Liegt eine kontinuierliche Symmetrietransformation vor, die das Wirkungsintegral invariant läßt, so existieren Erhaltungsgrößen.“
Damit meint man zum Beispiel:
Aus der Translationsinvarianz folgt die Energie- und Impulserhaltung und umgekehrt.
Sei also φ_α ein Satz von klassischen Feldfunktionen, die für $\vec{x} \to \infty$ hinlänglich rasch gegen Null gehen. Der Index α gibt die Zahl der Freiheitsgrade (Komponenten) der Felder an.
Als Wirkungsintegral W kennen wir den Ausdruck
$$W[\varphi_\alpha] = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(\varphi_\alpha(x), \partial_\nu\varphi_\alpha(x))d^4x.$$
Die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ soll aus Gründen der Translationsinvarianz und der Lorentz-Invarianz nicht explizit von x^μ abhängen und ein Lorentz-Skalar sein.
Die Integration ist folgendermaßen zu verstehen:
$$W[\varphi_\alpha] = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}d^4x = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \mathcal{L}d^4x.$$

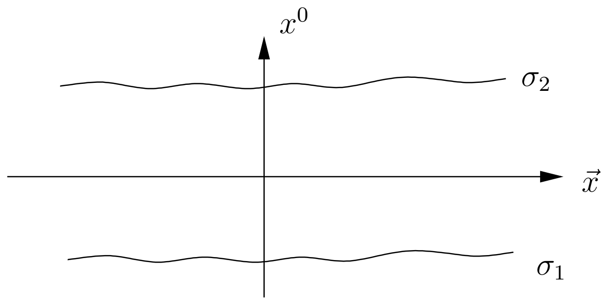

Abbildung 5: σ_1 und σ_2 sind raumartige Flächen ($x^2 < 0$).

[17] Diese Feldvariationen sind nicht mit den Variationen im Rahmen des Prinzips der kleinsten Wirkung, wo $\delta\Psi(t_1, \vec{x}) = \delta\Psi(t_2, \vec{x}) = 0$ ist, zu verwechseln.
[18] Das Theorem gilt allgemein, also auch für wechselwirkende Feldtheorien.

Das Integrationsgebiet reicht in den räumlichen Koordinaten $\vec{x}$ von $-\infty$ bis ∞ und ist zeitliche von den Flächen σ_1, σ_2 begrenzt.
Um nun die Aussagen des Noether-Theorems herleiten zu können, betrachten wir eine stetige, infinitesimale Koordinatentransformation:

$$x \longrightarrow x' = x + \delta x.$$

Damit kann ganz allgemein infinitesimale (auch nichtlineare) Transformationen definieren. Dabei geht der Bereich $\mathbb{R}$ in den Bereich $\mathbb{R}'$ über. Diese infinitesimale Raum-Zeit-Transformation der Koordinaten induziert dann die folgende infinitesimale totale Feldtransformation:

$$\varphi_\alpha \longrightarrow \varphi'_\alpha(x) = \varphi_\alpha(x) + \bar{\delta}\varphi_\alpha(x).$$

Andererseits bewirkt eine solche „kanonische“ Feldtransformation auch eine Veränderung des Wirkungsintegrales W:

$$W(\varphi_\alpha(x)) \longrightarrow W({\varphi_\alpha}'(x)) = W(\varphi_\alpha(x)) + \bar{\delta}W.$$

Die totale Variation (auch Frèchet-Variation) lautet:

$$\bar{\delta}W[\varphi_\alpha] = \int_{\mathbb{R}'} \mathcal{L}(\varphi'_\alpha(x), \partial_\nu \varphi'_\alpha(x)) d^4x - \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(\varphi_\alpha(x), \partial_\nu \varphi_\alpha(x)) d^4x.$$

Zur weiteren Berechnung führen wir folgende Schritte aus:

1. Wir betrachten das Wirkungsintegral im neuen Bereich:

$$\int_{\mathbb{R}'} \mathcal{L}(\varphi'_\alpha(x), \partial_\nu \varphi'_\alpha(x)) d^4x = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(\varphi'_\alpha(x + \delta x(x)), \partial_\nu \varphi'_\alpha(x + \delta x(x))) d^4(x + \delta x(x)).$$

2. Mit einer Taylor-Entwicklung bis zur Ordnung $\delta x(x)$ erhalten wir:

$$\mathcal{L}(\varphi'_\alpha(x+\delta x(x)), \partial_\nu \varphi'_\alpha(x+\delta x(x))) = \mathcal{L}(\varphi'_\alpha(x), \partial_\nu \varphi'_\alpha(x)) + \partial_\mu \mathcal{L}(\varphi'_\alpha(x), \partial_\nu \varphi'_\alpha(x)) \delta x^\mu + O(\delta^2).$$

3. Die Berechnung der Funktionaldeterminante ergibt:

$$d^4x' = \left| \frac{\partial(x + \delta x(x))}{\partial x} \right| d^4x,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + \partial_0 \delta x^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \partial_1 \delta x^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \partial_2 \delta x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \partial_3 \delta x^3 \end{vmatrix} = 1 + \partial_\mu \delta x^\mu + O\left((\delta x^\mu)^2\right).$$

Mit diesen beiden Überlegungen erhalten wir nun in 1.:

$$\int_{\mathbb{R}} d^4x \left[\mathcal{L}(\varphi'_\alpha(x), \partial_\nu \varphi'_\alpha(x)) + \partial_\mu \mathcal{L}(\varphi'_\alpha(x), \partial_\nu \varphi'_\alpha(x))\delta x^\mu\right](1 + \partial\mu' \delta x^{\mu'}).$$

Wir vereinfachen diesen Ausdruck durch Multiplikation und vernachlässigen wieder die höheren Ordnungen (δ^2):

$$\int_{\mathbb{R}} d^4x \Big[\mathcal{L}(\varphi'_\alpha(x), \partial_\nu \varphi'_\alpha(x)) + \partial_{\mu'} \mathcal{L}(\varphi'_\alpha(x), \partial_\nu \varphi'_\alpha(x))\delta x^{\mu'} + \mathcal{L}(\varphi'_\alpha(x), \partial_\nu \varphi'_\alpha(x))\partial_{\mu'} \delta x^{\mu'}\Big] =$$
$$\int_{\mathbb{R}} d^4x \Big[\mathcal{L}(\varphi'_\alpha(x), \partial_\nu \varphi'_\alpha(x)) + \partial_{\mu'} (\mathcal{L}(\varphi'_\alpha(x), \partial_\nu \varphi'_\alpha(x))\delta x^{\mu'})\Big].$$

Setzen wir alles ein, so ergibt sich für die „totale Variation“ der Wirkung:

$$\begin{aligned}
\bar{\delta} W[\varphi_\alpha] &= \int_{\mathbb{R}} d^4x \Big[\mathcal{L}(\varphi'_\alpha(x), \partial_\nu \varphi'_\alpha(x)) + \partial_\mu \left(\mathcal{L}(\varphi_\alpha(x), \partial_\nu \varphi_\alpha(x))\delta x^\mu\right) \\
&\quad - \mathcal{L}(\varphi_\alpha(x), \partial_\nu \varphi_\alpha(x))\Big], \\
&= \int_{\mathbb{R}} d^4x \Big[\mathcal{L}(\varphi_\alpha(x) + \bar{\delta}\varphi_\alpha, \partial_\nu \varphi_\alpha(x) + \partial_\nu \bar{\delta}\varphi_\alpha) + \partial_\mu \left(\mathcal{L}(\varphi_\alpha(x), \partial_\nu \varphi_\alpha(x))\delta x^\mu\right) \\
&\quad - \mathcal{L}(\varphi_\alpha(x), \partial_\nu \varphi_\alpha(x))\Big].
\end{aligned}$$

Man beachte, daß im zweiten Teil des Integranden $\varphi'_\alpha(x)$ durch $\varphi_\alpha(x)$ ersetzt wurde. Dies ist verständlich, da wir nur Glieder bis zur Ordnung δx betrachten wollen. Eine Taylor-Entwicklung des ersten Integranden bis zur Ordnung $\bar{\delta}\varphi_\alpha(x)$ liefert dann:

$$\begin{aligned}
\bar{\delta} W[\varphi_\alpha] &= \int_{\mathbb{R}} d^4x \Big[\mathcal{L}\left(\varphi_\alpha(x), \partial_\nu \varphi_\alpha(x)\right) \\
&\quad + \frac{\partial \mathcal{L}\left(\varphi_\alpha(x), \partial_\nu \varphi_\alpha(x)\right)}{\partial \varphi_\alpha(x)} \bar{\delta}\varphi_\alpha(x) + \frac{\partial \mathcal{L}\left(\varphi_\alpha(x), \partial_\nu \varphi_\alpha(x)\right)}{\partial \partial_\mu \varphi_\alpha(x)} \partial_\mu \bar{\delta}\varphi_\alpha(x) + \\
&\quad \partial_\mu \left(\mathcal{L}\left(\varphi_\alpha(x), \partial_\nu \varphi_\alpha(x)\right) \delta x^\mu\right) - \mathcal{L}\left(\varphi_\alpha(x), \partial_\nu \varphi_\alpha(x)\right)\Big].
\end{aligned}$$

Man sieht, daß sich der erste und der letzte Term kompensieren. Nach partieller Integration des dritten Termes erhalten wir mit $\left[\bar{\delta}, \partial_\mu\right] = 0$

$$\begin{aligned}
\bar{\delta} W &= \int_{\mathbb{R}} d^4x \Bigg[\left(\frac{\partial \mathcal{L}\left(\varphi_\alpha(x), \partial_\nu \varphi_\alpha(x)\right)}{\partial \varphi_\alpha(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}\left(\varphi_\alpha(x), \partial_\nu \varphi_\alpha(x)\right)}{\partial \partial_\mu \varphi_\alpha(x)}\right) \bar{\delta}\varphi_\alpha(x) + \\
&\quad + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}\left(\varphi_\alpha(x), \partial_\nu \varphi_\alpha(x)\right)}{\partial \partial_\mu \varphi_\alpha(x)} \bar{\delta}\varphi_\alpha(x) + \mathcal{L}\left(\varphi_\alpha(x), \partial_\nu \varphi_\alpha(x)\right) \delta x^\mu\right)\Bigg].
\end{aligned}$$

Wir erkennen im ersten Term die Euler-Lagrange-Bewegungsgleichung, von der wir wissen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_\alpha} = 0.$$

Nun besagt das Noether-Theorem, daß

$$\bar{\delta} W = 0$$

gilt, um Invarianz (= Symmetrie) des Wirkungsfunktional zu erreichen.

$$\int_{\mathbb{R}} d^4 x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}\left(\varphi_\alpha(x), \partial_\nu \varphi_\alpha(x)\right)}{\partial \partial_\mu \varphi_\alpha} \bar{\delta} \varphi_\alpha + \mathcal{L}\left(\varphi_\alpha(x), \partial_\nu \varphi_\alpha(x)\right) \delta x^\mu \right) = 0.$$

Durch Anwendung des Gauß'schen Satzes im M_4 (siehe auch spätere Fußnote (20)) bekommt man

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}\left(\varphi_\alpha(x), \partial_\nu \varphi_\alpha(x)\right)}{\partial \partial_\mu \varphi_\alpha} \bar{\delta} \varphi_\alpha + \mathcal{L}\left(\varphi_\alpha(x), \partial_\nu \varphi_\alpha(x)\right) \delta x^\mu \right) = 0.$$

Wir definieren jetzt

$$F(\sigma) = \int_\sigma d\sigma_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}\left(\varphi_\alpha(x), \partial_\nu \varphi_\alpha(x)\right)}{\partial \partial_\mu \varphi_\alpha} \bar{\delta} \varphi_\alpha + \mathcal{L}\left(\varphi_\alpha(x), \partial_\nu \varphi_\alpha(x)\right) \delta x^\mu \right) := \int_\sigma d\sigma_\mu J^\mu$$

wobei

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma_\mu J^\mu = F(\sigma_2) - F(\sigma_1),$$

da wir für $\vec{x}$ natürliche Randbedingungen verlangen

$$\lim_{\vec{x} \to \infty} \varphi(t, \vec{x}) = \lim_{\vec{x} \to \infty} \partial_\mu \varphi(t, \vec{x}) = 0.$$

Wir versuchen nun in diesen Formeln die totale Veränderung durch die lokale Veränderung auszudrücken. Es gilt ja

$$\varphi'_\alpha(x') = \varphi'_\alpha(x + \delta x) = \varphi'_\alpha(x) + \partial_\mu \varphi'_\alpha(x) \delta x^\mu + O\left(\delta^2\right) = \varphi'_\alpha(x) + \partial_\mu \varphi_\alpha(x) \delta x^\mu.$$

Mit

$$\bar{\delta} \varphi_\alpha(x) = \varphi'_\alpha(x) - \varphi_\alpha(x)$$

erhält man

$$\bar{\delta} \varphi_\alpha(x) = \varphi'_\alpha(x') - \varphi_\alpha(x) - \partial_\mu \varphi_\alpha(x) \delta x^\mu,$$

das heißt:

$$\bar{\delta} \varphi_\alpha(x) = \delta \varphi_\alpha(x) - \partial_\mu \varphi_\alpha(x) \delta x^\mu.$$

Wir können nun im Integral schreiben

$$\begin{aligned} F(\sigma) \quad = \quad & \int_\sigma d\sigma_\mu \Bigg[\sum_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}\left(\varphi_\alpha(x), \partial_\nu \varphi_\alpha(x)\right)}{\partial \partial_\mu \varphi_\alpha} \left(\delta \varphi_\alpha(x) - \partial_{\mu'} \varphi_\alpha(x) \delta x^{\mu'} \right) \\ & + \mathcal{L}\left(\varphi_\alpha(x), \partial_\nu \varphi_\alpha(x)\right) \delta x^\mu \Bigg], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(\sigma) &= \int_\sigma d\sigma_\mu \Bigg[\sum_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}\left(\varphi_\alpha(x), \partial_\nu\varphi_\alpha(x)\right)}{\partial\partial_\mu\varphi_\alpha} \delta\varphi_\alpha(x) - \\ & \left(\sum_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}\left(\varphi_\alpha(x), \partial_\nu\varphi_\alpha(x)\right)}{\partial\partial_\mu\varphi_\alpha(x)} \partial_{\mu'}\varphi_\alpha(x) - \mathcal{L}\left(\varphi_\alpha(x), \partial_\nu\varphi_\alpha(x)\right) \delta_{\mu'}{}^\mu \right) \delta x^{\mu'} \Bigg]. \end{aligned}$$

Jede kontinuierliche Raumzeittransformation läßt sich parametrisieren. Seien die $\delta\omega^j$ die linear unabhängigen, infinitesimalen Parameter, die eine Parametrisierung einer beliebigen infinitesimalen Transformation der Koordinaten charakterisieren, so folgt aus [19]

$$\delta x^\mu = \sum_j x^\mu{}_j \delta_\omega{}^j,$$

daß sich auch die lokale Feldvariation in ähnlicher Weise parametrisieren lassen muß:

$$\delta\varphi_\alpha = \sum_j Y_{\alpha j} \delta_\omega{}^j.$$

Wir erhalten dann mit der Abkürzung

$$\begin{aligned} T^\mu{}_j &= \left(\sum_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}\left(\varphi_\alpha(x), \partial_\nu\varphi_\alpha(x)\right)}{\partial\partial_\mu\varphi_\alpha} \partial_\rho\varphi_\alpha - \mathcal{L}\left(\varphi_\alpha(x), \partial_\nu\varphi_\alpha(x)\right) \delta^\mu{}_\rho \right) x^\rho{}_j \\ & - \sum_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}\left(\varphi_\alpha(x), \partial_\nu\varphi_\alpha(x)\right)}{\partial\partial_\mu\varphi_\alpha} Y_{\alpha j} \end{aligned}$$

die Gleichung

$$F(\sigma) = \int_\sigma d\sigma_\mu \sum_j T^\mu{}_j \delta_\omega{}^j.$$

Da gilt

$$\bar{\delta} W = 0$$

können wir sagen

$$\int_{\sigma_1} d\sigma_\mu \sum_j T^\mu{}_j \delta_\omega{}^j = \int_{\sigma_2} d\sigma_\mu \sum_j T^\mu{}_j \delta_\omega{}^j$$

und es folgt

$$\int_{\sigma_1} d\sigma_\mu T^\mu{}_j = \int_{\sigma_2} d\sigma_\mu T^\mu{}_j.$$

Wir sehen, daß dieser Ausdruck Erhaltungscharakter besitzt. Das Integral zwischen den Flächen $dx^0 = const(\sigma_1 = t_1 = x_1^0, \sigma_2 = t_2 = x_2^0)$[20] laut Abbildung (6)
ergibt eine Größe

[19]Wo $x^\mu{}_j = x^\mu{}_j(x)$, $Y_{\alpha j} = Y_{\alpha j}(x)$ sein kann.

[20]ist für die Fläche

$$d\sigma^\mu = \begin{pmatrix} dx^1 dx^2 dx^3 \\ dx^2 dx^3 dx^0 \\ dx^3 dx^0 dx^1 \\ dx^0 dx^1 dx^2 \end{pmatrix} = \left| dx^0 = 0 \right| = d\sigma^\mu = \begin{pmatrix} x^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

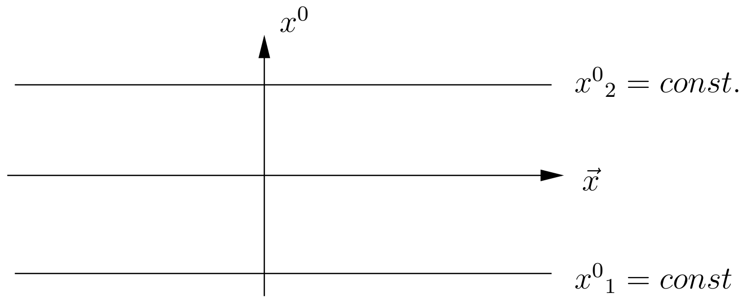

Abbildung 6: Flächen $x^0{}_2$, $x^0{}_1$.

$$\int_{x_1^0} d^3x T^0{}_j(x_1^0, x^i) = \int_{x_2^0} d^3x T^0{}_j(x_2^0, x^i) := Q_j.$$

Q_j ist eine Erhaltungsgröße, die wir Ladung nennen, und es gilt

$$\frac{d}{dt} Q_j(t) = 0.$$

Für allgemeine Erhaltungsgrößen definieren wir eine funktionale Ableitung

$$\frac{\delta F_j(\sigma)}{\delta \sigma(x)} = \lim_{\Delta(x)\to 0} \frac{F(\sigma_2) - F(\sigma_1)}{\Delta(x)},$$

wo Δx das vierdimensionales infinitesimale Volumen ist, das von den Flächen σ_1 und σ_2 umschlossen wird.
Mit dem Gauß'schen Satz erhalten wir

$$\lim_{\Delta(x)\to 0} \frac{\int_{\Delta(x)} d^4x \partial_\mu T^\mu{}_j(x)}{\Delta(x)} = 0,$$

wobei wir nun als Bereich betrachten.

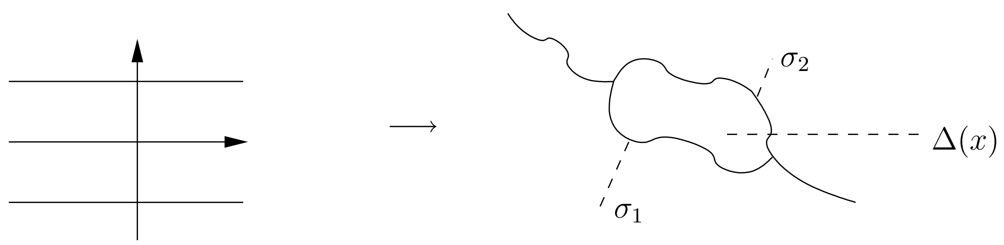

Abbildung 7: Flächen σ_1, σ_2.

Damit können wir das Noether-Theorem kovariant formulieren:

$$\partial_\mu T^\mu{}_j = 0. \tag{75}$$

2.8.3 Erhaltungssätze für Energie und Impuls

Wir wollen nun noch einige Konsequenzen, die sich aus dem Noether-Theorem ergeben, betrachten. An Hand einer freien, skalaren φ^4-Theorie können wir die Translationsinvarianz untersuchen Wir haben also nun $\varphi_\alpha(x) \to \varphi(x)$. Wir können eine infinitesimale Translation folgendermaßen schreiben (mit konstantem Verschiebungsvektor ϵ^μ)

$$x^\mu \to x^{\mu'} = x^\mu + \delta x^\mu := x^\mu + \epsilon^\mu$$

das heißt

$$x^\mu{}_\rho = \delta^\mu{}_\rho,$$
$$\delta x^\mu = \sum_j x^\mu{}_j \delta\omega^j := \sum_\rho x^\mu{}_\rho . \epsilon^\rho$$

Dabei ist ϵ^μ ein konstanter Verschiebungsvektor. Wegen $\varphi'(x') = \varphi(x)$ verschwindet auch die lokale Variation

$$\delta\varphi = 0, \qquad\qquad Y_{\alpha j} = 0$$

und wir erhalten als Resultat den Energie-Impulstensor

$$T_{\nu\mu} = T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}\left(\varphi_\alpha(x), \partial_\nu \varphi_\alpha(x)\right)}{\partial \partial^\mu \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} - \mathcal{L}\left(\varphi_\alpha(x), \partial_\nu \varphi_\alpha(x)\right) g_{\mu\nu}. \tag{76}$$

Mit Hilfe der Bewegungsgleichungen zeigt man nun leicht, daß gilt

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0. \tag{77}$$

Wir wollen nun untersuchen, welche physikalische Bedeutung der symmetrische Tensor $T_{\mu\nu}$ besitzt. Wir betrachten zu diesem Zweck

$$Q_\mu = \int d^3x T_{\mu 0}(x).$$

Aus dem Noether-Theorem wissen wir, daß gilt

$$\dot{Q}_\mu(t) = 0. \tag{78}$$

Zu einer Interpretation des Vierervektors gelangt man, indem man die einzelnen Komponenten untersucht.

$$\begin{aligned} Q_0 &= \int d^3x T_{00}(x) = \int d^3x \left(\pi\dot{\varphi} - \mathcal{L}\right) = \int d^3x \mathcal{H}(x) \\ &= \int d^3x \left(\dot{\varphi}^2(x) - \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2(x) + \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\varphi(x)\right)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2(x)\right) \\ &= \int d^3x \frac{1}{2}\left(\dot{\varphi}^2(x) + \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\varphi(x)\right)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2(x)\right) := E \geq 0 \qquad \text{(positiv definit)} \end{aligned}$$

Da $\mathcal{H}$ das feldtheoretische Analogon zur Hamilton-Funktion H der Punktmechanik darstellt, können wir $\mathcal{H}(x)$ als Hamilton-Dichte bezeichnen und daher Q_0 mit der Gesamtenergie des Systems identifizieren. Ähnlich verfährt man mit den Raumkomponenten

$$\vec{Q}(t) = + \int d^3 x \pi \vec{\nabla} \varphi(x) := \vec{P},$$

$$\dot{\vec{Q}}(t) = 0.$$

$\vec{P}$ ist der Impuls des Systems. Wir sehen also, daß es möglich ist, die Energie und den Impuls in einem Vierervektor zusammenzufassen, wir erhalten

$$Q^\mu = \left(E, \vec{P}\right)$$

und

$$\dot{\vec{Q}}^\mu(t) = 0.$$

Das entspricht den Erhaltungssätzen für Energie und Impuls!
Wir erkennen damit also die physikalische Bedeutung von $T_{\mu\nu}$, wir nennen den Tensor auch den relativistischen Energie-Impuls-Tensor.

3 Die Quantisierung der freien Feldtheorie

3.1 Die kanonische Quantisierung in der Punktmechanik

Bevor wir uns mit der Quantisierung von Feldern näher beschäftigen, werden wir als Einführung und zur Wiederholung nochmals den Quantisierungsprozeß der nichtrelativistischen Quantenphysik bei einem punktmechanischen System betrachten.
Die physikalischen Größen, die wir zur Beschreibung des Systems verwenden und die wir auch messen können, werden bei der kanonischen Quantisierung zu linearen, hermite'schen Operatoren, die im Hilbert-Raum auf eine Zustandsfunktion wirken.
Es entspricht zum Beispiel

$$\begin{aligned} &\text{der Ort} \quad q_j && \text{dem Ortsoperator} \quad q_j, \\ &\text{der Impuls} \quad p_i && \text{dem Impulsoperator} \quad p_i \longrightarrow \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q_i}, \\ &\text{die Hamiltonfunktion} && \text{dem Hamiltonoperator} \\ &H = \frac{p_i^2}{2m} + V && H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V. \end{aligned} \tag{79}$$

Zwischen den Operatoren gibt es Beziehungen, die wir Kommutatorrelationen nennen. Wir können zum Beispiel für den Orts- und Impulsoperator berechnen:

$$p_i q_j = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q_i}(q_j) = \frac{\hbar}{i}\delta_{ij} + q_j \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q_i}.$$

Dies ergibt den Gleichzeitkommutator:

$$[p_i, q_j] = p_i q_j - q_j p_i = \frac{\hbar}{i}\delta_{ij}.$$

Es ist wichtig zu erwähnen, daß diese Kommutatoren zu allen Zeiten gelten; man spricht daher auch von Gleichzeitkommutatoren. Es gilt also

$$[p_i(t), q_j(t)] = \frac{\hbar}{i}\delta_{ij}\,, \qquad \forall t \tag{80}$$

und die Kommutatoren

$$[p_i(t), p_j(t)] = [q_i(t), q_j(t)] = 0$$

vertauschen miteinander. Wenn zwei Operatoren vertauschen, so ist gleichzeitige Meßbarkeit gegeben.
Die zeitliche Entwicklung eines quantenmechanischen System gehorcht der Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi. \tag{81}$$

Im folgenden werden wir einen analogen Formalismus für Felder suchen.

3.2 Die Quantisierung des Klein-Gordon-Feldes

3.2.1 Kanonische Quantisierung

Sei $\phi(x)$ ein reelles Skalarfeld, welches der freien Klein-Gordon-Gleichung genügt

$$(\Box + m^2)\phi(x) = 0.$$

Die entsprechende Lagrange Dichte, die auf die freien Feldgleichungen führt lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2\right).$$

Als kanonischen Impuls bezeichnet man den Ausdruck

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)}{\partial\dot{\phi}} = \dot{\phi}.$$

Bei der kanonischen Quantisierungsprozedur werden Größen π und ϕ zu hermite'schen Operatoren, die in natürlichen Einheiten die folgenden gleichzeitigen Vertauschungsrelationen erfüllen sollen

$$[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t)] = [\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)] = 0, \tag{82}$$

$$[\pi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t)] = -i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'). \tag{83}$$

Da wir ein reelles Feld quantisieren, gilt analog zu $\phi(x) = \phi^*(x)$ in der klassischen Theorie, daß

$$\phi(x) = \phi^\dagger(x) \tag{84}$$

der Operator gleich dem hermite'schen konjugierten Operator ist.
Um eine genauere Auskunft über die Struktur von $\phi(x)$ zu bekommen, beachten wir daß jede beliebige Lösung der freien Klein-Gordon-Gleichung in ein Fourier-Integral über einfache ebene Wellen entwickelt werden kann.
In völliger Analogie zur freien klassischen Feldtheorie (siehe Kapitel 2.4.3) können wir daher auch hier schreiben

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^4k e^{+ikx}\tilde{\phi}(k). \tag{85}$$

Wir wissen auch, daß sich $\phi(x)$ in einen positiven und einen negativen Frequenzanteil aufspalten läßt.

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int \frac{d^3k}{2\omega_k}\left(e^{+ikx}\tilde{\phi}^+(k) + e^{-ikx}\tilde{\phi}(k)\right)$$

Mit den Abkürzungen

$$a(\vec{k}) := \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\tilde{\phi}(\vec{k}) \qquad a^+(\vec{k}) := \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\tilde{\phi}^+(\vec{k}) \tag{86}$$

$$f_k(x) = \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \qquad f_k^*(x) = \frac{e^{+ikx}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \tag{87}$$

wobei

$$\omega_k \equiv k^0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$

erhält man dann

$$\phi(x) = \int d^3k \left(a^+(\vec{k}) f_k^*(x) + a(\vec{k}) f_k(x) \right). \tag{88}$$

In der Quantenfeldtheorie sind nun die Fourier-Amplituden $a^+(\vec{k})$ und $a(\vec{k})$ Operatoren, wobei a^+ hermite'sch konjugiert zu a ist ($\phi^+ = \phi$).

Wir kennen den Gleichzeitkommutator der Feldoperatoren im Ortsraum und wollen die Konsequenz für den Impulsraum berechnen.

$\overleftrightarrow{\partial}_0$ bedeutet

$$a(t)\overleftrightarrow{\partial}_0 b(t) = a(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^0} b(t)\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x^0} a(t)\right) b(t) = a(t)\dot{b}(t) - \dot{a}(t)b(t).$$

Mit

$$ikx = i(\omega_k t - \vec{k}\vec{x}),$$

folgt

$$\int d^3x f_k^*(\vec{x},t) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'} = \int d^3x \frac{e^{ikx} i(-iw_{k'}) e^{-ik'x}}{2\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}(2\pi)^3} - \frac{e^{ikx} i(-iw_k) e^{-ik'x}}{2\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}(2\pi)^3} = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}').$$

Da die Orthogonalitätsrelationen

$$\int d^3x f_k^*(\vec{x},t) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'} = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'), \tag{89}$$

$$\int d^3x f_k(\vec{x},t) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'} = 0 \tag{90}$$

gelten, können wir für die Amplituden die Umkehrung der Entwicklung berechnen.

$$\begin{aligned}
\int d^3x f_k^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(\vec{x},t) &= \int d^3x \int d^3k' \underbrace{f_k^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \Big(a^+(\vec{k}') f_{k'}^*(x)}_{=0} + a(\vec{k}') f_{k'}(x) \Big) \\
&= \int\int d^3k' d^3x f_k^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 a(\vec{k}') f_{k'}(x) \\
&= \int d^3k' \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') a(\vec{k}') = a(\vec{k})
\end{aligned}$$

Resultat mit $\phi^+ = \phi$:

$$a(\vec{k}) = i \int d^3x f_k^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x). \tag{91}$$

Hermitisch konjugiert:

$$a^+(\vec{k}) = -i \int d^3x f_k(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x). \tag{92}$$

Aufgrund dieser Darstellung würde man erwarten, daß die Operatoren $a^+(\vec{k})$ und $a(\vec{k})$ zeitabhängig sind. Wir zeigen jedoch etwas später, daß dies nicht der Fall ist.
Mit Hilfe der kanonischen Vertauschungsrelationen für $\dot{\phi}(x)$ und $\phi(x)$ folgt nun

$$\begin{aligned}
\left[a(\vec{k}), a^+(\vec{k}')\right] &= \int\int d^3x d^3x' \left[f_k^*(x)\overleftrightarrow{\partial}_0\phi(x), f_{k'}(x')\overleftrightarrow{\partial}_0\phi(x')\right], \\
&= \int\int d^3x d^3x' \left[f_k^*(x)\dot{\phi}(x) - \dot{f}_k(x)\phi(x), f_{k'}^*(x')\dot{\phi}(x') - \dot{f}_{k'}(x')\phi(x')\right], \\
&= \int\int d^3x d^3x' \left\{-f_k^*(x)\dot{f}_{k'}(x')\left[\dot{\phi}(x), \phi(x')\right] - \dot{f}_k^*(x)f_{k'}(x')\left[\phi(x), \dot{\phi}(x')\right]\right\}, \\
&= \int\int d^3x d^3x' \left\{f_k^*(x)\dot{f}_{k'}(x') - \dot{f}_k^*(x)f_{k'}(x')\right\} \underbrace{\left[\phi(x), \dot{\phi}(x')\right]}_{i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')}, \\
&= \int d^3x f_k^*(x) i\overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}(x) = \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}').
\end{aligned}$$

Damit

$$\left[a(\vec{k}), a^+(\vec{k}')\right] = \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}') \tag{93}$$

und analog

$$\left[a(\vec{k}), a(\vec{k}')\right] = \left[a^+(\vec{k}), a^+(\vec{k}')\right] = 0. \tag{94}$$

Nun überprüfen wir die Zeitunabhängigkeit von $a(\vec{k})$, $a^+(\vec{k})$. Das heißt wir betrachten den Ausdruck

$$\dot{a}(\vec{k}, t) = i\int d^3x \left(f_k^*(x){\partial_0}^2 - \left({\partial_0}^2 f_k^*(x)\right)\phi(x)\right) + \partial_0\left(f_k^*(x)\right)\partial_0\left(\phi(x)\right) - \partial_0\left(f_k^*(x)\right)\partial_0\left(\phi(x)\right).$$

Wegen

$$(\Box + m^2)f_k^*(x) = \left({\partial_0}^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2\right)f_k^*(x) = 0$$

und

$$(\Box + m^2)\phi(x) = \left({\partial_0}^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2\right)\phi(x) = 0$$

folgt mittels Einsetzen

$$\dot{a}(\vec{k}, t) = i\int d^3x \left(f_k^*(x)\vec{\nabla}^2 - m^2\phi(x)f_k^*(x) - ({\partial_0}^2 f_k^*(x))\right)\phi(x)$$

und partieller Integration

$$\dot{a}(\vec{k}, t) = i\int d^3x \left(+(\vec{\nabla}^2 f_k^*(x))\phi(x) - m^2 f_k^*(x)\phi(x) - ({\partial_0}^2 f_k^*(x))\phi(x)\right),$$

$$\dot{a}(\vec{k}, t) = -i\int d^3x \phi(x)(\Box + m^2)f_k^*(x) = 0.$$

Damit sehen wir

$$\dot{a}(\vec{k}, t) = 0, \qquad a(\vec{k}, t) = a(\vec{k})$$

also die Zeitunabhängigkeit von $a(\vec{k})$.

Wir wollen uns nun die Bedeutung von $a(\vec{k})$ und $a^+(\vec{k})$ vergewissern und betrachten die Gesamtenergie

$$H = \int d^3x\mathcal{H},$$

wobei für die Hamilton-Dichte $\mathcal{H}$ gilt

$$\mathcal{H} = \dot{\phi}\pi - \mathcal{L} = \dot{\phi}^2 - \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 + (\vec{\nabla}\phi)(\vec{\nabla}\phi) + m^2\phi^2) \qquad \text{(positiv definit).} \tag{95}$$

Setzt man Hier die Entwicklung für ϕ ein (siehe auch Anhang A.1), so erhält man

$$H = \frac{1}{2}\int d^3k\omega_k(a(\vec{k})a^+(\vec{k}) + a^+(\vec{k})a(\vec{k})) \equiv \int d^3xH_{\vec{k}}.$$

Wir erkennen, daß der Hamiltonoperator eine kontinuierliche Summe von Termen ist, von denen jeder die Form eines Hamiltonoperators für einen 1-dimensionalen, harmonischen Oszillator mit der Frequenz ω_k besitzt.

Um die Energieeigenwerte und die entsprechenden Eigenfunktionen angeben zu können, untersuchen wir zunächst die Vertauschungsrelation von H mit den Operatoren $a(\vec{k})$ und $a^+(\vec{k})$. Dazu benötigen wir folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \left[A^2, B\right] &= A^2B - BA^2, \\ &= A^2B - ABA + ABA - BA^2, \\ &= A[A,B] + [A,B]A, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [AB, C] &= ABC - CAB, \\ &= ABC - ACB + ACB - CAB, \\ &= A[B,C] + [A,C]B. \end{aligned}$$

Unter der Zuhilfenahme der bereits bekannten Kommutatorrelationen $[a(\vec{k}), a^+(\vec{k}')] = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')$, $[a(\vec{k}), a(\vec{k}')] = 0$ können wir durch Berechnung den folgenden Kommutator ermitteln:

$$\begin{aligned} [H, a^+(\vec{k}')] &= \frac{1}{2}\int d^3k\omega_{\vec{k}}[a^+(\vec{k})a(\vec{k}) + a(\vec{k})a^+(\vec{k}), a^+(\vec{k}')], \\ &= \frac{1}{2}\int d^3k\omega_{\vec{k}}\Big(a(\vec{k})\underbrace{[a^+(\vec{k}), a^+(\vec{k}')]}_{=0} + \underbrace{[a(\vec{k}), a^+(\vec{k}')]}_{=\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')} a^+(\vec{k}), \\ &\quad + a^+(\vec{k})\underbrace{[a(\vec{k}), a^+(\vec{k}')]}_{=\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')} + \underbrace{[a^+(\vec{k}), a^+(\vec{k}')]}_{=0} a(\vec{k})\Big), \end{aligned}$$

$$[H, a^+(\vec{k}')] = \omega_{k'}a^+(\vec{k}'). \tag{96}$$

In gleicher Weise erhält man

$$[H, a(\vec{k}')] = -\omega_{k'} a(\vec{k}'). \tag{97}$$

Um nun zu einer Interpretation für die Größen $a^+(\vec{k})$ und $a(\vec{k})$ zu gelangen, nehmen wir an, daß ein „Vakuumszustand" $|0\rangle$ der freien Theorie existiere, der auf eins normiert sei. Es soll für ihn gelten:

$$H\,|0\rangle = 0\,|0\rangle = 0. \tag{98}$$

Ausgehend von dieser Gleichung (98) studieren wir nun das folgende Eigenwertproblem:

$$Ha^+(\vec{k})\,|0\rangle = \Big(a^+(\vec{k})H + \omega_{\vec{k}} a^+(\vec{k})\Big)\,|0\rangle = \omega_{\vec{k}} a^+(\vec{k})\,|0\rangle\,.$$

Das bedeutet, daß der Zustand $a^+(\vec{k})\,|0\rangle$ die Energie $\omega_{\vec{k}}$ besitzt.
Man kann also sagen, daß der Operator $a^+(\vec{k})$, wenn er auf den Vakuumszustand $|0\rangle$ angewandt wird, einen Einteilchenzustand mit der Energie $\omega_{\vec{k}}$ erzeugt:

$$a^+(\vec{k})\,|0\rangle = \left|\omega_{\vec{k}}, \vec{k}\right\rangle \equiv \left|\vec{k}\right\rangle. \tag{99}$$

Aus diesen Grund nennen wir $a^+(\vec{k})$ einen Erzeugungsoperator. Durch wiederholte Anwendung von $a^+(\vec{k})$ ist es möglich in gleicher Weise einen beliebigen n-Teilchenzustand der freien Theorie zu erzeugen, also

$$\left|\vec{k}_1, \vec{k}_2, \ldots, \vec{k}_n\right\rangle = a^+(\vec{k}_n)\ldots a^+(\vec{k}_2)a^+(\vec{k}_1)\,|0\rangle\,.$$

Aufgrund der Vertauschungsrelation von H mit $a(\vec{k})$ ist zu vermuten, daß man durch die Anwendung des Operators $a(\vec{k})$ auf Teilchenzustände „Teilchen" vernichten kann. Wir nennen $a(\vec{k})$ daher auch den Vernichtungsoperator. Dieser Prozess muß nach unten beschränkt sein, wir fordern daher

$$a(\vec{k})\,|0\rangle = 0,$$

weil ja das Vakuum per Definition keine Teilchen enthält.

Soweit die intuitive Interpretation der Leiteroperatoren $a^+(\vec{k})$ und $a(\vec{k})$. Unglücklicherweise gibt es jedoch zwei offensichtliche Probleme:

a) Zunächst bemerkt man leicht, daß als Folge der Vertauschungsrelation der Operatoren a^+, a

$$\left\langle\vec{k}|\vec{k}'\right\rangle = \langle 0|\underbrace{a(\vec{k})a^+(\vec{k}')}_{\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')+a^+(\vec{k}')a(\vec{k})}|0\rangle = \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')$$

eine unbeschränkte Norm existiert.

b) Mit Punkt a) ergibt sich nun für den Erwartungswert

$$
\begin{aligned}
\langle 0| H |0\rangle &= \frac{1}{2}\int d^3k\omega_{\vec{k}} \langle 0| a^+(\vec{k})a(\vec{k}) + a(\vec{k})a^+(\vec{k}) |0\rangle \\
&= \frac{1}{2}\int d^3k\omega_{\vec{k}} \left(0 + \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k})\right) \\
&= \frac{1}{2}\delta^{(3)}(0)\int d^3k \underbrace{\omega_{\vec{k}}}_{\sqrt{\vec{k}^2+m^2}} = \frac{1}{2}\delta(0)\int d^3k\sqrt{\vec{k}^2+m^2}.
\end{aligned}
$$

ein zweifach divergenter Ausdruck.

$$
\begin{aligned}
\int d^3k\sqrt{\vec{k}^2+m^2} &= \left| \begin{array}{c} |\vec{k}| = k \\ d^3k = k^2dk4\pi \end{array} \right| = 4\pi\int_0^\infty k^2dk\sqrt{k^2+m^2}, \\
&\approx \int_0^\infty k^3dk = \frac{k^4}{4}\bigg|_0^\infty \to \infty.
\end{aligned}
$$

Da wir die Existenz eines Vakuums mit der Energie 0 angenommen haben, scheint das eben erhaltene Resultat ein Widerspruch zu sein. Dies kommt daher, daß man bei der Quantisierung noch auf die Stellung der Operatoren Rücksicht nehmen muß, um konsistente Resultate zu erhalten. Wir definieren daher eine so genannte „Normalordnung“, die besagt, daß ein Erzeugungsoperator stets links neben einem Vernichtungsoperator zu stehen hat. Wir drücken dies symbolisch durch $: H :$ aus. Es ergibt sich also jetzt:

$$
\begin{aligned}
: H := H_N &= \frac{1}{2}\int d^3k\omega_{\vec{k}} : \left(a(\vec{k})a^+(\vec{k}) + a^+(\vec{k})a(\vec{k})\right) : \\
&= \frac{1}{2}\int d^3k\omega_{\vec{k}} \left(a^+(\vec{k})a(\vec{k}) + a^+(\vec{k})a(\vec{k})\right) \\
&= \int d^3k\omega_{\vec{k}} a^+(\vec{k})a(\vec{k}).
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe dieser Normalordnung gelingt es also, die unendliche „Nullpunktsenergie“ zu eliminieren und wir erhalten wirklich

$$\langle 0| H_N |0\rangle = 0.$$

Wir kommen überein, daß wir diese Normalordnung schon in der Lagrange-Dichte einführen. Nachdem wir das Problem im Punkt b) beheben konnten, wollen wir auch die Schwierigkeit von Punkt a) lösen. Das gelingt uns durch die Einführung von Wellenpacketen. Sei $F(\vec{k})$ eine quadratisch integrierbare Funktion, so kann man folgende Einteilchenzustände definieren:

$$|\phi_1\rangle \equiv \int d^4kF(k)\delta(k^2-m^2)a^+(\vec{k})|0\rangle = \int \frac{d^3k}{2\omega_{\vec{k}}}F(\vec{k})a^+(\vec{k})|0\rangle .$$

Diese Zustände führen auf eine beschränkte Norm, so daß also gilt

$$\begin{aligned}
\langle\phi_1|\phi_1'\rangle &= \int \frac{d^3k d^3k'}{2\omega_{\vec{k}} 2\omega_{\vec{k}'}} F(\vec{k}) F^*(\vec{k}') \underbrace{\langle 0|\, a(\vec{k}) a^+(\vec{k}')\, |0\rangle}_{\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')} \\
&= \int \frac{d^3k}{4\omega_{\vec{k}}{}^2} \left| F(\vec{k}) \right|^2 < \infty,
\end{aligned}$$

weil $F(\vec{k})$ quadratisch integrierbar ist.

3.2.2 Alternative Quantisierungsmethode

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir eine Alternative anbieten, die es gestattet, den Prozess der Quantisierung eleganter zu formulieren. Wir diskutieren den Sachverhalt wieder an Hand der skalaren ϕ^4-Theorie und untersuchen das Verhalten des hermite'schen Feldoperators $\phi(x)$ (also $\phi^+(x) = \phi(x)$) gegenüber einer infinitesimalen Translation[21] (im Heisenberg-Bild)

$$x \longrightarrow x' = x + \epsilon.$$

Analog zur Zeitentwicklung im Schrödinger-Bild diskutieren wir nun die allgemeine Verschiebung in einer freien Feldtheorie

$$|\psi(t)\rangle_S = e^{-iHt} |\psi_H(t=0)\rangle .$$

Aus diesem Grund muß ein unitärer Operator $U(\epsilon)$ existieren, der das entsprechende Transformationsverhalten für den verschobenen Ort im Heisenberg-Bild beschreibt:

$$\left.\begin{array}{c} \phi(x') = \phi(x+\epsilon) = U^{-1}(\epsilon)\phi(x)U(\epsilon) \\ \phi(x') = \phi^+(x') = U^+(\epsilon)\phi^+(x)\left(U^{-1}(\epsilon)\right)^+ \end{array}\right\} \Rightarrow U^+ = U^{-1}. \tag{100}$$

Aus der Mathematik wissen wir, daß sich jeder unitäre Operator durch

$$U(\epsilon) = e^{iQ(\epsilon)} \qquad \text{mit} \quad Q^+ = Q$$

darstellen läßt, wobei gilt $Q^+(\epsilon) = Q(\epsilon)$.
Für kleine ϵ soll gelten: [22]

$$Q(\epsilon) = Q'_\mu \epsilon^\mu \qquad \Rightarrow U(\epsilon) \approx 1 + iQ(\epsilon) \approx 1 + Q'_\mu \epsilon^\mu .$$

Nun studieren wir das Transformationsverhalten von $\phi(x+\epsilon)$ mit Hilfe von Gleichung (100) bis zur Ordnung ϵ_μ:

$$\begin{aligned} \phi(x+\epsilon) &= \phi(x) + \partial_\mu\phi(x)\epsilon^\mu + 0(\epsilon^2) \\ &= (1 - iQ'_\mu\epsilon^\mu)\phi(x)(1 + iQ'_\mu\epsilon^\mu) \\ &= \phi(x) - i\left[[Q'_\mu, \phi(x)]\epsilon^\mu + 0(\epsilon^2)\right] . \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\partial_\mu\phi(x) = -i\left[Q'_\mu, \phi(x)\right] .$$

[21] siehe auch Kapitel 2.8.2 zum Noether-Theorem

[22]
$$Q(\epsilon) = Q(0) + \partial_\mu Q(0)\epsilon^\mu + O(\epsilon^2)$$
$$Q(0) = 0 \qquad \partial_\mu Q(0) = Q'_\mu$$

Aus

$$\phi'(x') = \phi'(x+\epsilon) = \phi'(x) + \epsilon^\mu \partial_\mu \phi + O(\epsilon^2)$$

folgt für

$$\bar{\delta}\phi = \phi'(x) - \phi(x) = \phi'(x') - \epsilon^\mu \partial_\mu \phi - \phi(x) = -\epsilon^\mu \partial_\mu \phi.$$

Dies steht in engen Zusammenhang mit den Überlegungen beim Noether-Theorem (2.8.2). In unserer quantisierten Feldtheorie ist daher die totale Variation des Feldoperators $\phi(x)$ durch

$$\bar{\delta}\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) = -\partial_\mu \phi(x)\epsilon^\mu = +i\left[Q'_\mu, \phi(x)\right]\epsilon^\mu$$

gegeben. Man sagt auch, daß die Größe Q'_μ die entsprechende Translationen in der Quantenfeldtheorie erzeugt. Q'_μ wird daher auch Erzeuger der Translation genannt. Da die Resultate des Noether-Theorems auch in einer quantisierten Feldtheorie ihre Gültigkeit behalten, ist es naheliegend die entsprechenden Ergebnisse aus dem Kapitel 2.8.2 zu übernehmen.

Es erscheint zweckmäßig den folgenden Operator Q_μ einzuführen:

$$\begin{aligned} Q_\mu &= \int d^3x' T_{0\mu}(\vec{x}, t) = \int d^3x' \left(\dot{\phi}(\vec{x}', t)\partial_\mu \phi(\vec{x}', t) - g_{0\mu}\mathcal{L}\right) = \\ &= \int d^3x' \left(\pi(\vec{x}', t)\partial_\mu \phi(\vec{x}', t) - g_{0\mu}\mathcal{L}\right) \qquad\qquad \dot{Q}_\mu = 0 \end{aligned} \tag{101}$$

und damit den Kommutator $[Q_\mu, \phi(x)]$ zu untersuchen.

Dies ist nun mit Hilfe der kanonischen Gleichzeitkommutatoren für π und ϕ von oben möglich.

Unter Verwendung der Formel

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$$

wobei A, B, C beliebige nicht vertauschende Operatoren seien, zeigt man nun (zur Rechnung siehe Anhang A.2), daß gilt:

$$[Q_\mu, \phi(x)] = -i\partial_\mu \phi(x).$$

Das legt die folgende Identifikation nahe:

$$-Q'_\mu \equiv Q_\mu = \int d^3x' T_{0\mu}(x).$$

Die eben angestellten Überlegungen erlauben es nun, zu setzen [23]

$$Q_\mu = \int d^3k k_\mu a^+(\vec{k}) a(\vec{k}).$$

[23]Man erinnere sich

$$H = E \equiv Q_0 = \int d^3k \omega_k a^+(\vec{k}) a(\vec{k})$$

Der Feldoperator ließ sich durch

$$\phi(x) = \int d^3k \left(a(\vec{k}) f_k(x) + a^+(\vec{k}) f_k^*(x) \right)$$

darstellen. Wir können daher über die Kommutatorbeziehung

$$\begin{aligned} i[Q_\mu, \phi] &= i \int\int d^3k d^3k' k_\mu [a^+(\vec{k}) a(\vec{k}), a'(\vec{k}) f'_k(x) + a'^+(\vec{k}) f'^*_k(x)] \\ &= i \int\int d^3k d^3k' k_\mu \left(-\delta(\vec{k} - \vec{k}') a(\vec{k}) f'_k(x) + \delta(\vec{k} - \vec{k}') a^+(\vec{k}) f'^*_k(x) \right) \\ &= \int d^3k (-ik_\mu a(\vec{k}) f_k(x) + ik_\mu a^+(\vec{k}) f_k^*(x)) \end{aligned}$$

$$i[Q_\mu, \phi] = \partial_\mu \phi \tag{102}$$

Auskunft über die Vertauschungsrelation von $a(\vec{k})$ und $a^+(\vec{k})$ erhalten.
Mit dem eben skizzierten Verfahren gelangt man in vielen Fällen schneller zu den gewünschten Vertauschungsrelationen.

3.3 Singuläre Funktionen

3.3.1 Meßbarkeit und Kausalität

Aufgrund der kanonischen Vertauschungsrelationen in einer freien Quantenfeldtheorie wird die Meßbarkeit von Feldern (im Gegensatz zur klassischen Feldtheorie) eingeschränkt. Aus der Quantenmechanik wissen wir, daß zwei Observable gleichzeitig messbar sind, wenn ihr Kommutator verschwindet.

Aus diesem Grund wird in einer quantisierten Feldtheorie die exakte Messung zweier Feldstärken an zwei verschiedenen Raum-Zeit-Punkten x und y (2 völlig separierte Raumzeitpunkte) nur dann möglich sein wenn der Kommutator $[\phi(x), \phi(y)]$ verschwindet.

Mit der Fourier-Darstellung der Lösung für das freie Klein-Gordon-Feld und der Vertauschungsrelation

$$\left[a(\vec{k}), a^{+}(\vec{k}')\right] = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')$$

können wir daher den Kommutator zweier skalarer Feldoperatoren an verschiedenen Punkten x und y berechnen mittels Koordinatentransformation $\vec{k} \to -\vec{k}$:

$$\begin{aligned}
[\phi(x), \phi(y)] &= \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \int \frac{d^3k'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}}} (\left[a(\vec{k}), a^{+}(\vec{k}')\right] e^{-ikx+ik'y} \\
&\quad + \left[a^{+}(\vec{k}), a(\vec{k}')\right] e^{ikx-ik'y}) \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left(e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)}\right) \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \left(e^{-ik^0(x^0-y^0)} - e^{ik^0(x^0-y^0)}\right) \\
&= \frac{-i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_k} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} sin \omega_k (x^0 - y^0) \\
&= i\Delta(x-y)\mathbb{1}.
\end{aligned} \tag{103}$$

Die letzte Zeile definiert eine singuläre Funktion (für $x^\mu = y^\mu$)

$$\Delta(x-y) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_k} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \sin \omega_k (x^0 - y^0). \tag{104}$$

Diese Funktion besitzt folgende Eigenschaften:

a) Da $\Delta(x-y)$ nur von der Differenz der Punkte x und y abhängt, ist sie translationsinvariant.

b) Die Funktion ist Lorentz-invariant.
Dies sieht man, wenn man das invariante Volumselement

$$\int \frac{d^3k}{2\omega_k} \equiv \int d^4k \delta(k^2 - m^2)\Theta(k^0)$$

einführt. Betrachtet man jetzt eine Lorentz-Transformation

$$(x-y)'_\mu = L_\mu{}^\lambda (x-y)_\lambda$$

so findet man mittels Relation $k'^\lambda = L_\mu{}^\lambda k^\mu$ folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
\Delta(x'-y') &= -i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^3}\delta(k^2-m^2)\theta(k^0)\left(e^{-ik^\mu L_\mu{}^\lambda (x-y)_\lambda} - e^{ik^\mu L_\mu{}^\lambda (x-y)_\lambda}\right) \\
&= \left| \begin{array}{c} (L^\lambda{}_\mu)^T k^\mu = k'^\lambda \\ d^4k' = d^4k \\ k'^2 = k^2 \end{array} \right| = \Delta(x-y)
\end{aligned}$$

für $det(L^\mu{}_\nu) = +1, L^{00} > 0$ (orthochrone Lorentz-Transformationen).

c) Wenn man für die zeitartigen Vektoren $k^2 > 0$ die invariante Vorzeichenfunktion

$$\theta(k^0) - \theta(-k^0) = \epsilon(k^0) = \begin{cases} +1, & k^0 = +\sqrt{k^2+m^2} > 0 \\ -1, & k^0 = -\sqrt{k^2+m^2} < 0 \end{cases}$$

einführt, so kann man die invariante Funktion $\Delta(x-y)$ geschlossener anschreiben:

$$\Delta(x-y) = -i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^3}\delta(k^2-m^2)\epsilon(k^0)e^{-ik(x-y)}.$$

d) Da die Funktion $\Delta(x-y)$ über Kommutatoren von freien Feldoperatoren definiert ist, erwarten wir, daß gilt:

$$(\Box_x + m^2)\Delta(x-y) = 0.$$

e) Die Funktion $\Delta(x-y)$ ist eine ungerade Funktion, da gilt:

$$\Delta(x-y) = -\Delta(y-x).$$

f) Untersucht man das Verhalten der Funktion für $x = y \qquad \rightarrow \Delta = \Delta(0)$ so findet man, daß sich $\Delta(0)$ durch die Differenz von zwei Ausdrücken der Form

$$\int \frac{d^3k}{\omega_k} = \int \frac{d^3k}{\sqrt{k^2+m^2}}$$

darstellen läßt. Diese Integrale divergieren „quadratisch". Aus diesem Grund nennen wir $\Delta(x-y)$ singuläre Funktion.

g) Aus den obigen Darstellung für $\Delta(x-y)$ ist ersichtlich, daß der Gleichzeitkommutator zweier Feldamplituden verschwindet:

$$\left[\phi(\vec{x}, x^0), \phi(\vec{y}, x^0)\right] = 0.$$

Aufgrund der Lorentz-Invarianz (beläßt die Norm) folgt dann:

$$\Delta(x-y)=0 \qquad \forall (x-y)^2<0.$$

Mit anderen Worten bedeutet dies, daß zwei Feldoperatoren mit raumartigen Abständen vertauschen. Dies bedeutet also: Sind zwei Punkte nicht durch ein Lichtsignal oder eine sonstige physikalische Störung miteinander verbunden, so kann man in diesen Punkten die entsprechenden Feldgrößen exakt und unabhängig voneinander messen.

h) Die Zeitableitung von der Funktion $\Delta(x-y)$ ist singulär, da

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\Delta(x-y)\Big|_{x^0=y^0}=-\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}).$$

Diese Aussage ist mit den kanonischen Vertauschungsrelationen konsistent, da ja gilt:

$$\left[\pi(\vec{x},x^0),\phi(\vec{x}',x^0)\right]=-i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}').$$

3.3.2 Die Ausbreitungsfunktion - Propagatoren

Da wir die Lösung des freien Skalarfeldes $\phi(x)$ im Impulsraum mittels einer Fourier-Transformation durch

$$\phi(x) = \int d^3k \left[a(\vec{k}) f_k(x) + a^+(\vec{k}) f_k^*(x)\right]$$

darstellen konnten, und die Operatoren $a^+(\vec{k})$ und $a(\vec{k})$ als Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren interpretierten, erscheint es sinnvoll, die Größen

$$\langle 0|\, \phi(x)\phi(y)\, |0\rangle_{(0)} : \qquad x^0 > y^0, \tag{105}$$

$$\langle 0|\, \phi(y)\phi(x)\, |0\rangle_{(0)} : \qquad y^0 > x^0 \tag{106}$$

zu untersuchen.
Intuitiv erwarten wir, daß der Ausdruck (105) die Erzeugung eines Teilchens am Ort y mit der anschließenden Vernichtung des gleichen Teilchens am Ort x. Da wir eine freie Feldtheorie studieren, vermuten wir, daß sich das Teilchen zwischen den Raumzeitpunkten x und y frei bewegen wird.
Eine analoge Aussage gilt für die umgekehrte Zeitordnung, also $y^0 > x^0$.

Um beide Fälle gemeinsam studieren zu können ist es zweckdienlich, das folgende Zeitordnungssymbol T für zwei Feldoperatoren einzuführen:

$$T\left(\phi(x)\phi(y)\right) = \phi(x)\phi(y)\theta(x^0 - y^0) + \phi(y)\phi(x)\theta(y^0 - x^0). \tag{107}$$

Unsere Aufgabenstellung zielt also auf die Berechnung des Ausdruckes

$$\langle 0|\, T(\phi(x)\phi(y))\, |0\rangle_{(0)} := i\Delta_F(x-y)$$

hin, den wir zur Definition der Funktion $\Delta_F(x-y)$ verwenden. Zunächst berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\langle 0|\, \phi(x)\phi(y)\, |0\rangle_{(0)}\, \theta(x^0 - y^0) &= \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3)2\omega_k}} \frac{d^3k'}{\sqrt{(2\pi)^3)2\omega_{k'}}} \langle 0| \left(a(\vec{k})e^{-ikx} + a^+(\vec{k})e^{ikx}\right) \\
&\quad \left(a(\vec{k}')e^{-ik'y} + a^+(\vec{k}')e^{ik'y}\right) |0\rangle\, \Theta(x^0 - y^0), \\
&= \int\int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega_k \omega k'}} \langle 0|\, a(\vec{k}) a^+(\vec{k}')\, |0\rangle\, e^{-ikx + ik'y} \Theta(x^0 - y^0) \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{-ik(x-y)} \theta(x^0 - y^0).
\end{aligned}$$

Die weitere Berechnung ist dadurch geprägt, daß man mit Hilfe der Integraldarstellung der Stufenfunktion

$$\theta\left(\pm(x^0 - y^0)\right) = \pm\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{e^{i(x^0 - y^0)\tau}}{\tau \mp i\epsilon} \qquad \epsilon > 0$$

versucht, für die Größe $\Delta_F(x-y)$ eine Fourier-Darstellung zu finden.

$$\begin{aligned}
\Delta_F(x-y) &= -i\Big(\langle 0|\,\phi(x)\phi(y)\,|0\rangle_{(0)}\,\theta(x^0-y^0)+\langle 0|\,\phi(y)\phi(x)\,|0\rangle_{(0)}\,\theta(y^0-x^0)\Big)\,,\\
&= -\int\frac{d^3k d\tau}{(2\pi)^4 2k^0}\left(\frac{e^{-ik(x-y)}}{\tau-i\epsilon}e^{i(x^0-y^0)\tau}-\frac{e^{-ik(y-x)}}{\tau+i\epsilon}e^{i(x^0-y^0)\tau}\right),\\
&= -\int\frac{d^3k d\tau}{(2\pi)^4 2k^0}\left(\frac{e^{-ik^0(x^0-y^0)+i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})+i(x^0-y^0)\tau}}{\tau-i\epsilon}-\frac{e^{ik^0(x^0-y^0)+i\vec{k}(\vec{y}-\vec{x})+i(x^0-y^0)\tau}}{\tau+i\epsilon}\right),\\
&= -\int\frac{d^3k d\tau}{(2\pi)^4 2k^0}e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})}\left(\frac{e^{-i(x^0-y^0)(k^0-\tau)}}{\tau-i\epsilon}-\frac{e^{i(x^0-y^0)(k^0+\tau)}}{\tau+i\epsilon}\right).
\end{aligned}$$

Durch Substitution können wir ein Integral in kovarianter Viererschreibweise bekommen, wir setzen daher

$$k^0-\tau=k'^0,\qquad\qquad k^0+\tau=-k'^0$$

und mit

$$\tau=k^0-k'^0,\qquad\qquad \tau=-k'^0-k^0$$

$$d\tau=-dk'^0$$

erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
\Delta_F(x-y) &= -\int\frac{d^3k dk'^0}{(2\pi)^4 2k^0}e^{-ik'^0(x^0-y^0)+i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})}\left(\frac{1}{k^0-k'^0-i\epsilon}-\frac{1}{-k^0-k'^0+i\epsilon}\right),\\
&= -\int\frac{d^3k dk'^0}{(2\pi)^4 2k^0}e^{-ik'^0(x^0-y^0)+i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})}\frac{2k^0}{\underbrace{k^{0^2}-k'^{0^2}-i\epsilon'}_{=(-1)\left(-(\vec{k}^2+m^2)+k'^{0^2}+i\epsilon'\right)}}.
\end{aligned}\tag{108}$$

Wir können jetzt das ϵ im Zähler Null setzen, da wir es nur für die Integration um die Singularität benötigen.
Wir verwenden nun die Beziehung

$$k^{0^2}=\vec{k}^2+m^2$$

und können jetzt, wenn wir den Übergang

$$k'^0\longrightarrow k^0$$

durchführen, unsere Funktion $\Delta_F(x-y)$ in kovarianter Form anschreiben:

$$\Delta_F(x-y)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik(x-y)}\frac{1}{k^2-m^2+i\epsilon}.\tag{109}$$

Ähnlich wie im vorigen Kapitel bei der Funktion $\Delta(x-y)$ wollen wir nun die Eigenschaften der Funktion $\Delta_F(x-y)$ (eigentlich eine Distribution) diskutieren.

a) Die Funktion ist Lorentz- und translationsinvariant. Der Nachweis erfolgt mit den gleichen Argumenten wie im vorigen Kapitel 3.3.1.

b) Mit Hilfe der Fourier-Darstellung der Funktion $\Delta_F(x-y)$ berechnet man leicht die Wirkung des Klein-Gordon-Operators auf $\Delta_F(x-y)$.
Wir erhalten also:

$$(\Box + m^2)\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \frac{-k^2+m^2}{k^2-m^2+i\epsilon}.$$

Da wir die ϵ-Vorschrift für diese Betrachtung nicht benötigen und daher weglassen, bekommen wir jetzt als Resultat

$$\begin{aligned}(\Box + m^2)\Delta_F(x-y) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \frac{-k^2+m^2}{k^2-m^2+i\epsilon}, \\ &= -\delta^4(x-y). \end{aligned} \tag{110}$$

Dies ist jedoch die Definitionsgleichung einer Green'schen-Funktion. Diese Funktionen spielen, wie wir aus der Mathematik und aus den Methoden der Theoretischen Physik [7] wissen, bei der Lösung von inhomogenen Differentialgleichungen, vor allem bei partiellen Differentialgleichungen, eine zentrale Rolle.

In unserem speziellen Fall einer freien ϕ^4-Theorie und im Hinblick auf den Einbau von Wechselwirkungen steht man daher vor folgender Aufgabenstellung:
Die freie Theorie ist durch die Gleichung

$$\left(\Box + m^2\right)\phi_{frei}(x) = 0$$

gekennzeichnet, während das allgemeinere Problem, die wechselwirkende Feldtheorie, durch inhomogene, partielle Differentialgleichungen der Bauart

$$\left(\Box + m^2\right)\phi(x) = \tilde{\jmath}(x)$$

beschrieben wird, wobei $\tilde{\jmath}(x)$ eine klassische oder auch eine operatorwertige Funktion sein kann.
$\phi(x)$ ist nun ein wechselwirkender Feldoperator im Heisenberg-Bild. Die Lösung dieser Differentialgleichung läßt sich mit Hilfe der Green'schen Funktionen besonders elegant formulieren. Insbesondere bei Vorgabe der sogenannten „Feynman'schen Randbedingungen" läßt sich $\phi(x)$ folgendermaßen darstellen:

$$\phi(x) = \phi_{frei}(x) - \int d^4x' \Delta_F(x'-x)\tilde{\jmath}(x').$$

Die Feynman'schen Randbedingungen sagen aus, daß $\phi(x)$ in der Zukunft $t \to +\infty$ nur positive Frequenzen enthalten soll (in der Vergangenheit nur negative Frequenzen).
Dies bedeutet für $x^0 \to \infty$:

$$\begin{aligned} \Delta_F(x-0) &= -i \lim_{x^0 \to +\infty} \langle 0| \, \phi(x)\phi(0) \, |0\rangle_{(0)} \, , \\ &\approx -i \lim_{x^0 \to +\infty} \sum_n e^{-i\omega_n x^0} \qquad\qquad \omega_n > 0. \end{aligned} \tag{111}$$

Diese eben diskutierten Randbedingungen stehen in engem Zusammenhang mit der „ϵ-Vorschrift“ in $\Delta_F(x-y)$. Ursprünglich kam die kleine, positive Größe ϵ dadurch ins Spiel, daß sie den Integrationsweg in der Integraldarstellung für die Stufenfunktion θ festlegte. In der Fourier Darstellung von $\Delta_F(x-y)$ legt sie den Integrationsweg in der komplexen k^0-Ebene fest, wenn man das gesuchte Integral mit Hilfe des Cauchy'schen Integralsatz in eine geschlossene Kurve in der k^0-Ebene (komplex) einbettet (siehe Skizze 8). Dies wird sichtbar, wenn man die Nullstellen der Fouriertransformierten von

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

betrachtet:

$$\begin{gathered} {k^0}^2 = \vec{k}^2 + m^2 - i\epsilon, \\ k^0 = \pm\sqrt{(\vec{k}^2 + m^2)(1 - i\epsilon')} = \pm\omega_k \left(1 - i\frac{\epsilon'}{2}\right), \\ \Rightarrow k^0 = \pm\omega_k \mp i\eta, \qquad\qquad \eta > 0. \end{gathered}$$

Diese ϵ-Vorschrift besagt, daß man den Pol bei $k^0 = +\omega_k$ um einen kleinen, positiven Imaginärteil nach unten verschieben muß, oder anders ausgedrückt, daß man bei einer entsprechenden komplexen Integration den Pol mit positiver Energie oben zu umgehen hat.
Ähnliches gilt für $k^0 = -\omega_k$.

Aus den Feynman'schen Randbedingungen resultiert folgender Integrationsweg in der komplexen k^0-Ebene:

Die oben angeführten Behauptungen lassen sich an Hand von

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik^0(x^0-y^0) + i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \frac{1}{{k^0}^2 - \vec{k}^2 - m^2 + i\epsilon}$$

überprüfen.
Für $x^0 \to \infty$ und $x^0 - y^0 > 0$ wird die k^0-Integration über die untere Halbebene geführt, und das Integrationsgebiet schließt nur den Pol mit positiver Energie ein. Da man den

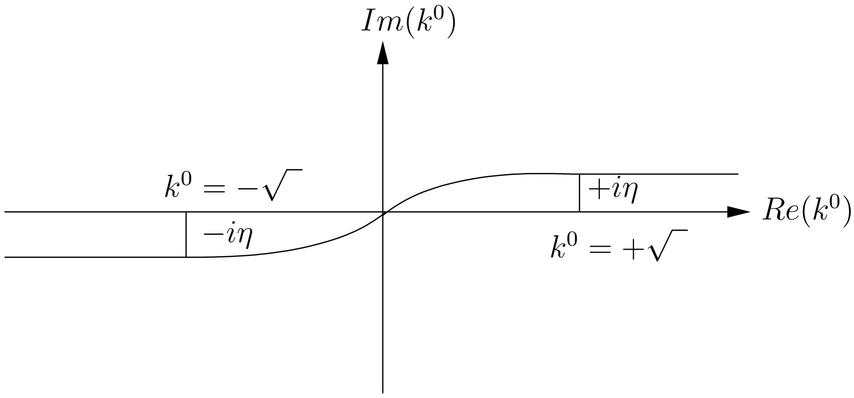

Abbildung 8: Integrationsweg in der komplexen k^0 Ebene.

Hilfsweg (den Beitrag vom Kreis) vernachlässigen will, muß also $Im(k^0) < 0$ gewählt werden, daß heißt der Weg muß über die untere Halbebene geschlossen werden, um Dämpfung (Beitrag vom Hilfsweg) zu erreichen, wählt man $sin\phi < 0$:

$$e^{ik^0(x^0-y^0)} = e^{-iR(\cos\phi + i\sin\phi)(x^0-y^0)}, \qquad \text{mit} k^0 = Re^{i\phi} = R(\cos\phi + i\sin\phi).$$

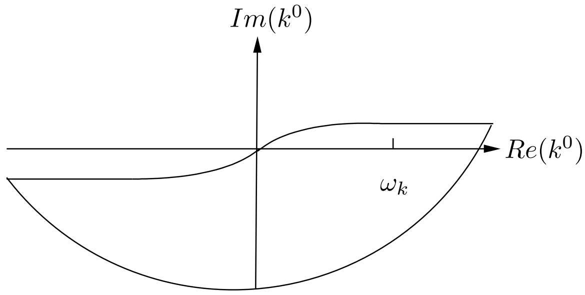

Abbildung 9: Integrationsweg über untere Halbebene mit eingezeichnetem Hilfsweg.

Wir bekommen dann für $x^0 \to \infty$ und $x^0 - y^0 > 0$ mit Hilfe des Cauchy-Integralsatz als Ergebnis:

$$\oint dk^0 \frac{e^{-ik^0(x^0-y^0)+i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})}}{k^{0^2} - \vec{k}^2 - m^2 + i\epsilon} = 2\pi i \sum_i Res(i),$$

$$= 2i\pi lim_{k^0=\sqrt{\vec{k}^2+m^2}} \left(k^0 - \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}\right) \frac{e^{-ik^0(x^0-y^0)+i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})}}{\left(k^0 - \sqrt{\vec{k}^2+m^2}\right)\left(k^0 + \sqrt{\vec{k}^2+m^2}\right)},$$

$$= \frac{i\pi}{\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}} e^{-i\sqrt{\vec{k}^2+m^2}(x^0-y^0)+i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})}.$$

c) Die Funktion $\Delta_F(x-y)$ ist für $x \to y$, also $(x-y)^2 = 0$ ebenfalls eine singuläre Funktion, da gilt:

$$\lim_{x\to y} \Delta_F(x-y) \longrightarrow \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = \Delta_F(0) = i \langle 0| \phi^2(x) |0\rangle_{(0)} .$$

Daraus erkennt man, daß im Rahmen einer freien Theorie $\phi^2(x)$ (Produkt einer operatorwertigen freien skalaren Feldgröße) nicht definiert ist! Dies ist ein Hauptproblem einer quantisierten Feldtheorie.
Dieses Integral divergiert „quadratisch". Das sieht man, wenn man

$$k^0 = ik^4$$

setzt. Dadurch erhält man ein „euklidisches" Integral, wo gilt:

$$k^2_{eukl} = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 = -k^2.$$

Bei Einführung von vierdimensionalen Kugelkoordinaten wird die quadratische „Divergenz" offenkundig.
Wegen unserer ϵ-Vorschrift können wir nun die sogenannte „Wick-Rotation" des Integrationsweges durchführen.
Wir erhalten dabei mit

$$k^0 = ik_4 = \underbrace{e^{\frac{i\pi}{2}}}_{\text{bedeutet Drehung}} k_4.$$

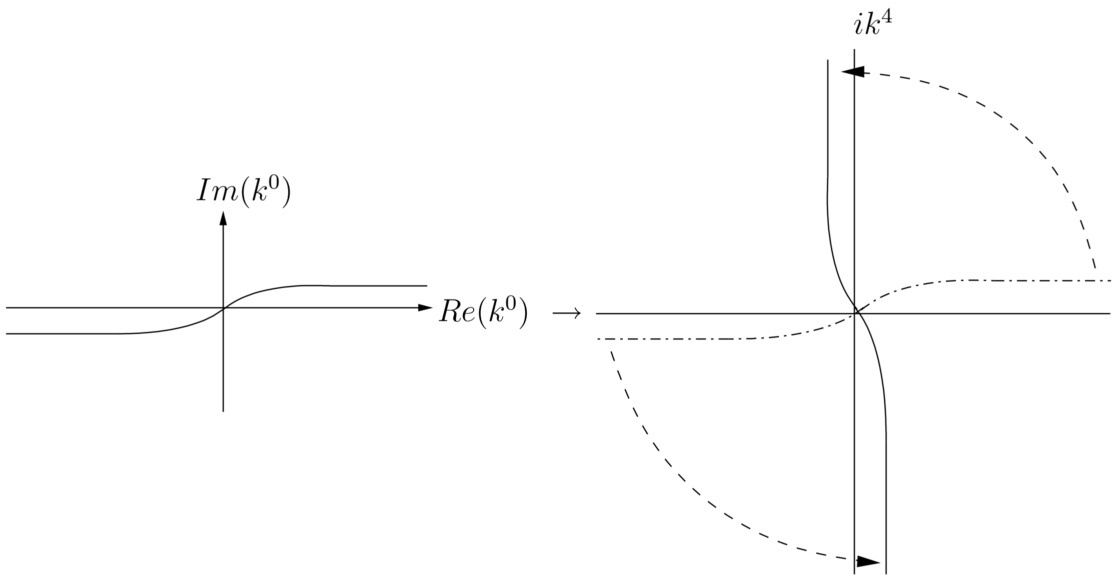

Abbildung 10: Wick-Rotation.

Man sieht in Abbildung (10), daß beim Verdrehen des Integrationsweges in der angeführten Art keine Pole überstrichen werden.

d) Da die Funktion $\Delta_F(x-y)$ die Ausbreitung freier, skalarer Teilchen beschreibt, so ist die Funktion bereits ein Teil der „Feynman-Regeln“.
Wir ordnen daher der Ausbreitung eines skalaren Teilchens im Ortsraum und auch im Impulsraum einen „Graph“, der aus einer Linie besteht, zu.
Wir erhalten im Ortsraum:

$$i\Delta_F(x-y) \equiv \quad x\bullet\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\bullet y\ . \tag{112}$$

Im Impulsraum gilt dann:

$$\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon} \equiv \quad x\bullet\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\bullet y\ . \tag{113}$$

Die Gleichungen (112) und (113) sind bereits wesentliche Elemente der Feynman'schen Regeln einer allgemeinen Quantenfeldtheorie unter Berücksichtigung von Wechselwirkungen.

3.3.3 Green'sche Funktionen

$$W[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \tag{114}$$

$$\frac{\delta W[\phi]}{\delta \phi(y)} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(y)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi(y)} = 0, \tag{115}$$

Rechenregeln des funktionalen Differenzieren

$$\frac{\delta \phi(x)}{\delta \phi(y)} = \delta(x-y), \qquad \delta \frac{\partial_\mu^x \phi(x)}{\delta \phi(y)} = \partial_\mu^x \frac{\delta \phi(x)}{\delta \phi(y)} = \partial_\mu^x \delta(x-y),$$

Um keine freie Theorie zu betrachten, koppelt man das quantisierte freie Feld $\phi(x)$ an eine äußere (unquantisierte) Quelle, um eine Wechselwirkung zu simulieren. Man erhält folgendes inhomogene Problem (das auch später in einer wechselwirkenden QFT sinnvoll sein wird):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2 \right) + j\phi.$$

Lösung der Klein-Gordon Gleichung

$$(\Box_x + m^2)\phi(x) = j(x)$$

mit Ansatz

$$\phi(x) = \int d^4x' G_1(x, x') j(x'),$$

wenn gilt

$$(\Box_x + m^2) G_1(x, x') = \delta^{(4)}(x - x')$$

allgemeine Lösung von

$$G(x, x') = G_0(x, x') + G_1(x, x').$$

Da wir unser inhomogenes Problem in einem unbeschränktem M_4 betrachten, verwendet man das Fourier'sche Integral-Theorem, um die Green-Funktion $G_1(x, x')$ zu berechnen.

$$G_1(x, x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-x')} \tilde{G}(k).$$

Daraus folgt

$$(\Box + m^2) G_1(x, x') = (\Box_x + m^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-x')} \tilde{G}(k),$$

und somit erhält man

$$\tilde{G}(k) = -\frac{1}{k^2 - m^2}.$$

$\tilde{G}(k)$ besitzt einfache Pole auf der reellen k^0-Achse, nämlich bei $k^0 = \pm\omega_k = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$. Daher benützen wir die oben verwendeten Feynman-Randbedingungen, die wir durch

die bekannte $i\epsilon$-Vorschrift einführten (Verschiedene Wege im Komplexen entsprechen verschiedenen Randbedingungen).
Somit erhält man für die Green'sche Funktion den folgenden Feynman-Propagator:

$$G_{Feynman}(x,x') = \Delta_F(x-x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{+ik(x-x')} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}.$$

Aus Feynman'schen Randbedingungen folgt:

$$\lim_{x^0 \to \infty} \Delta_F(x-x') \approx e^{i\omega_k (x^0 - x'^0)}. \tag{116}$$

3.4 Die Quantisierung des Elektromagnetischen Feldes

Klassisch war das freie, elektromagnetische Feld durch eine Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{117}$$

gekennzeichnet. Physikalische Signifikanz besitzt nur der Feldtensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{118}$$

der ja invariant gegenüber einer lokalen infinitesimalen Eichtransformation, die durch eine skalare Funktion Λ charakterisiert ist, war:

$$A_\mu(x) \qquad \longrightarrow \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x).$$

Man hat dadurch die Freiheit, die Potentiale so zu eichen [24], daß gilt:

$$\partial^\mu A_\mu(x) = 0.$$

Voraussetzung dafür ist, daß die „Eichfunktion“ $\Lambda(x)$ ebenfalls eine Lösung der freien masselosen Klein-Gordon Gleichung (Wellengleichung)

$$\Box \Lambda(x) = 0$$

ist.
Es ist daher naheliegend, die Quantisierungsprozedur unter simultaner Berücksichtigung der Lorentz-Konvention und der Eichfreiheit durchzuführen. Darüber hinaus werden wir sehen, daß sich die Forderung nach einer positiven Energiedichte ebenfalls in konsistenter Weise einbauen läßt.
Aus den eben angeführten Gründen erwarten wir, daß nicht alle Komponenten von A_μ linear unabhängig sind. Der Einfachheit halber nehmen wir zunächst an, daß die Komponenten von A_μ unabhängige Größen sind.
In völliger Analogie zur Quantisierung der freien Klein-Gordon-Feldes entwickeln wir nun das Potential A_μ nach ebenen Wellen (es gilt ja: $\Box A_\mu(x) = 0$, wenn $\partial^\mu A_\mu = 0$ ist):

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_k}} \left(A_\mu^-(\vec{k}) e^{-ikx} + A_\mu^+(\vec{k}) e^{ikx} \right) \Big|_{k^0 \equiv \omega_k}. \tag{119}$$

[24] Die Landau Eichung (oder Lorentzkonvention) kann durch ein Multiplayer-Feld implementiert werden

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L}_{inv} + B\partial^\mu A_\mu = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{Gf}, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B} = \partial^\mu A_\mu = 0$$

Der $B\partial^\mu A_\mu$ Term in der erweiterten Lagrange-Dichte, der auch so auf eine erweiterte Wirkung führt, bricht natürlich die Eichinvarianz. Dies ist bei der Berechnung der entsprechenden Propagatoren von großer Bedeutung.

Wir wollen nun die „Polarisationen“, das sind die Spinfreiheitsgrade des Eichfeldes (Spin 1-Teilchen), explizit aus den Fourierkomponenten $A^\pm_\mu(\vec{k})$ abtrennen und stellen $A^\pm_\mu(\vec{k})$ in Basis $\epsilon^{(\rho)}{}_\mu$ (Spin 1-Teilchen) dar.

$$A^\pm_\mu(\vec{k}) = \sum_{\rho=0}^{3} \epsilon^{(\rho)}{}_\mu(\vec{k}) a^\pm_\rho(\vec{k}). \tag{120}$$

Man erhält daher insgesamt:

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega_k}} \sum_\rho \epsilon^{(\rho)}{}_\mu(\vec{k}) \left(a^-_\rho(\vec{k}) e^{-ikx} + a^+_\rho(\vec{k}) e^{ikx} \right)\Big|_{k^0\equiv\omega_k}. \tag{121}$$

Wir haben nun fünf Lorentz-Vektoren: k^μ und $\epsilon^{(\sigma)}{}_\mu$. k^μ beschreibt die Ausbreitung des Photons und $\epsilon^{(\sigma)}{}_\mu$ die Spinfreiheitsgrade. In unserem pseudoeuklidischen M_4 können aber nur vier „Vektoren “ als linear unabhängig angesehen werden (bei gleichzeitiger Berücksichtigung der Lorentz-Bedingung). Dies bedeutet, daß man eine kompatible Wahl für k und $\epsilon^{(\delta)}{}_\mu$ treffen muß. Da für das Photon (physikalische) kein Ruhesystem existiert, wählt man

$$k^\mu = (k^0, 0, 0, k^0), \qquad k^2 = 0. \tag{122}$$

Nun studieren wir, wie die Lorentz-Konvention im Verein mit der Eichfreiheit zwei der vier Komponenten von A_μ eliminiert. Die Lorentz-Konvention impliziert zunächst:

$$\sum_\rho k^\mu \epsilon^{(\rho)}{}_\mu(\vec{k}) a^\pm_\rho = 0. \tag{123}$$

Da $a^\pm_\rho$ ebenfalls unabhängige Größen darstellen, folgt aus der Gleichung (123), daß

$$k^\mu \epsilon^{(\sigma)}{}_\mu(\vec{k}) = 0 \quad \Rightarrow \quad k^\mu \epsilon^{(i)}{}_\mu(\vec{k}) = 0, \qquad\qquad i = 1, 2.$$

Dies bedeutet, daß die $a^\pm_i(\vec{k})$ uneingeschränkt sind, wenn man $k^\mu = (k^0, 0, 0, k^0)$, ($k^\mu k_\mu = 0$) wählt. Es ist daher zielführend, die folgenden Polarisationen einzuführen:

$$\begin{aligned}
\epsilon^{(0)}{}_\mu &= (1,0,0,0) & \epsilon^{(0)}{}_\mu &= (1,0) \equiv \mathcal{H}^\mu \quad \text{(skalare Polarisation)},\\
\epsilon^{(i)}{}_\mu &= (0,1,0,0) & \epsilon^{(i)}{}_\mu &= (0,\vec{\epsilon}_i) \qquad (i=1,2 \quad \text{transversale Polarisation}),\\
\epsilon^{(3)}{}_\mu &= (0,0,0,1) & \epsilon^{(3)}{}_\mu &= (0,\frac{\vec{k}}{k^0}) \qquad (k^0 = |\vec{k}| \quad \text{longitudinale Polarisation}).
\end{aligned}$$

Dabei sollen $\vec{\epsilon}_i$ und $\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ ein orthogonales Dreibein bilden:

$$\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_2 = 0,$$

$$\vec{\epsilon}_i \cdot \vec{k} = 0,$$

$$\vec{\epsilon}_i^{\,2} = 1 \qquad i = 1, 2.$$

Wählt man weiters $\vec{e}_1 \parallel \vec{e}_x$, $\vec{e}_2 \parallel \vec{e}_y$, $\vec{k} \parallel \vec{e}_z$ so ergibt sich:

$$\sum_i \epsilon^{(i)}{}_\mu \epsilon^{(i)}{}_\nu + \epsilon^{(3)}{}_\mu \epsilon^{(3)}{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt dann:

$$\epsilon^{(0)\mu}\epsilon^{(0)\nu} - \left(\sum_i \epsilon^{(i)\mu}\epsilon^{(i)\nu} + \epsilon^{(3)\mu}\epsilon^{(3)\nu} \right) = g^{\mu\nu}.$$

Das legt die folgende „kovariante“ Schreibweise nahe:

$$\epsilon^\mu{}_\rho \epsilon^{\rho\nu} = g^{\mu\nu}. \tag{124}$$

Wir haben daher folgende Vierervektoren:

$$k^\mu \equiv (k^0, +\vec{k}) \qquad \text{mit} \quad \vec{k} \parallel \vec{e}_z,$$

$$e^{0\mu} = (1, 0) \equiv \mathcal{H}^\mu,$$

$$e^{i\mu} = (0, \vec{\epsilon}_i) \qquad \text{für} \quad i = 1, 2,$$

$$\vec{\epsilon}_i \vec{k} = 0, \qquad \vec{\epsilon}_1 \vec{\epsilon}_2 = 0, \qquad e^{3\mu} = \left(0, \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \right).$$

Es gelten die Beziehungen

$$k_\mu \epsilon^{i\mu} = 0,$$

$$k_\mu \epsilon^{0\mu} = k^0 = -k_\mu \epsilon^{3\mu}.$$

Dies wird einsichtig, wenn man

$$\epsilon^{3\mu} = \frac{k^\mu}{k^0} - \kappa^\mu, \qquad \left(\epsilon^{3\mu} = (0, 0, 0, 1) \right)$$

setzt. Die Summe über die physikalischen Polarisationen läßt sich daher folgendermaßen ausdrücken:

$$\sum_i \epsilon^{i\mu}\epsilon^{i\nu} = -g^{\mu\nu} + \underbrace{\frac{\mathcal{H}^\mu k^\nu + \mathcal{H}^\nu k^\mu}{k^0} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^{02}}}_{\epsilon^{(0)\mu}\epsilon^{(0)\nu} - \epsilon^{3\mu}\epsilon^{3\nu}}.$$

Die Terme mit k^0 und $\mathcal{H}^\mu$ bezeichnet man als nicht-kovariante Terme.
Die Lorentz-Konvention lautet nun:

$$\begin{aligned} k^\mu \epsilon^\rho{}_\mu a^\pm_\rho(\vec{k}) &= k^\mu \left(\epsilon^0{}_\mu a^\pm_0(\vec{k}) + \epsilon^1{}_\mu a^\pm_1(\vec{k}) + \epsilon^2{}_\mu a^\pm_2(\vec{k}) + \epsilon^3{}_\mu a^\pm_3(\vec{k}) \right), \\ &= k^\mu \left(\delta^0{}_\mu a^\pm_0(\vec{k}) - \delta^1{}_\mu a^\pm_1(\vec{k}) - \delta^2{}_\mu a^\pm_2(\vec{k}) - \delta^3{}_\mu \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} a^\pm_3(\vec{k}) \right), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Da wir hatten $\vec{k} \parallel \vec{e}_z$, also $k^\mu = (k^0, 0, 0, k^0)$, folgt:

$$a_0^\pm(\vec{k}) = a_3^\pm(\vec{k}).$$

Das bedeutet, daß die skalare Komponente bei gegebener longitudinaler Komponente auch bestimmt ist.

Nun berücksichtigen wir die Eichfreiheit, da wir fordern, daß die Funktion $\Lambda(x)$ ebenfalls $\Box\Lambda(x) = 0$ erfüllen soll, setzt man (siehe Quantisierung des Klein-Gordon Feldes Kapitel 3.2):

$$\Lambda(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \left(\tilde{\Lambda}(\vec{k}) e^{-ikx} + \tilde{\Lambda}^*(\vec{k}) e^{+ikx} \right) \mathbb{1}.$$

Das „eichtransformierte" Potential $A'_\mu(x)$ ist daher:

$$\begin{aligned} A'_\mu(x) &= A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x), \\ &= \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \Bigg\{ \left(\sum_{\rho=0}^{3} \epsilon^\rho{}_\mu(\vec{k}) a_\rho^-(\vec{k}) - ik_\mu \tilde{\Lambda}(\vec{k}) \mathbb{1} \right) e^{-ikx} + \\ &\quad + \left(\sum_{\rho=0}^{3} \epsilon^\rho{}_\mu(\vec{k}) a_\rho^+(\vec{k}) + ik_\mu \tilde{\Lambda}^*(\vec{k}) \right) e^{+ikx} \Bigg\}. \end{aligned}$$

Wenn gilt

$$A'_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \sum_{\rho=0}^{3} \epsilon^\rho_\mu(\vec{k}) \left(a'^-_\rho(\vec{k}) e^{-ikx} + a'^+_\rho(\vec{k}) e^{ikx} \right),$$

dann ist zum Beispiel (weil e^{-ikx} eine kontinuierliche Basis bilden)

$$\sum_{\rho=0}^{3} \epsilon^\rho{}_\mu(\vec{k}) \left(a'^-_\rho(\vec{k}) - a^-_\rho(\vec{k}) \right) = -ik_\mu \tilde{\Lambda}(\vec{k}) \mathbb{1}.$$

Diese Gleichung ist bei $\vec{k} \parallel \vec{e}_z$, $k^\mu = (k^0, 0, 0, k^0)$ und mit obiger Wahl der $\epsilon^\rho{}_\mu(\vec{k})$

$$a'^-_i(\vec{k}) = a^-_i(\vec{k}) \qquad\qquad i = 1, 2,$$

$$a'^-_0(\vec{k}) = a^-_0(\vec{k}) - i\omega_k \tilde{\Lambda}(\vec{k}) \mathbb{1},$$

$$a'^-_3(\vec{k}) = a^-_3(\vec{k}) - i\omega_k \tilde{\Lambda}(\vec{k}) \mathbb{1}$$

erfüllt.

Daraus sieht man, daß man $a'^-_0(\vec{k})$ und $a'^-_3(\vec{k})$ eliminieren kann, wenn man $\tilde{\Lambda}(\vec{k})$ entsprechen wählt. Dabei verbleiben nur zwei „physikalische" Komponenten, nämlich gerade die transversale Komponenten, was ja der Natur des Elektromagnetischen Feldes entspricht.

Das nur die zwei transversalen Komponenten ${a^i}_\rho(\vec{k})$ überleben, ist eine Folge von 2 Bedingungen: $\partial^\mu A_\mu = 0$ und $k^2 = 0$, physikalische „on-shell“-Photonen.

Nun wollen wir die eigentliche Quantisierungsprozedur durchführen. Es wird sich herausstellen, daß die Übertragung der Lorentz-Bedingung und der Eichfreiheit in die quantisierte Theorie nicht problemlos ist.
Die erste Schwierigkeit begegnet uns bei der Berechnung des kanonischen Impulses

$$\Pi_\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\rho A^\mu(x)} = -F_{0\mu},$$

wo $\Pi_0(x)$ identisch verschwindet. Daraus wird unmittelbar einsichtig, daß die kanonische Quantisierungsprozedur auf diese Komponente von $\Pi_\mu(x)$ nicht anwendbar ist. Daher verwenden wir die in Kapitel 3.2.2 dargestellte Alternativmethode, um Aussagen über die Vertauschungsrelationen von $a_\rho^-(\vec{k})$ und $a_\rho^+(\vec{k})$ der Fourierzerlegung

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega_k}} \sum_{\rho=0}^{3} {\epsilon^{(\rho)}}_\mu(\vec{k}) \left(a_\rho^-(\vec{k})e^{-ikx} + a_\rho^+(\vec{k})e^{ikx} \right) \Big|_{k^0 \equiv \omega_k}$$

zu bekommen. Dazu benötigt man den „quantisierten“ Energie-Impulstensor

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu A_\lambda} \partial_\nu A_\lambda - g_{\mu\nu}\mathcal{L},$$

um den „Erzeuger der Translation“ zu berechnen:

$$P_\mu = \int d^3x T_{\mu 0}, \qquad \dot{P}_\mu = 0.$$

Das Transformationsverhalten gegenüber einer infinitesimale Translation ist dann durch den folgenden Kommutator gegeben:

$$[P_\mu, A_\rho(x)] = -i\partial_\mu A_\rho(x).$$

Daraus kann man die Vertauschungsrelationen für die Operatoren $a_\rho^\pm(\vec{k})$ herleiten. Mit Hilfe von

$$g^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\rho} {\epsilon_\rho}^\nu$$

erhält man zunächst (siehe analoge Berechnung von H im Falle des Klein-Gordon-Feldes, es überleben nur die „gemischten Produkte“. Auch hier verwenden wir die Normalordnung, um zu erreichen $\langle 0| P_0 |0\rangle = 0$):

$$\begin{aligned} P_\mu &= -\frac{1}{2} \int d^3k k_\mu g^{\rho\lambda} : \left[a_\rho^+(\vec{k}) a_\lambda^-(\vec{k}) + a_\lambda^-(\vec{k}) a_\rho^+(\vec{k}) \right] : \quad , \\ &= -\int d^3k k_\mu g^{\rho\lambda} a_\rho^+(\vec{k}) a_\lambda^-(\vec{k}). \end{aligned}$$

Andererseits gilt:

$$-i\partial_\mu A_\rho(x) = -\int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} k_\mu \sum_{\lambda=0}^{3} \epsilon^\lambda{}_\rho \left[a_\lambda^-(\vec{k})e^{-ikx} - a_\lambda^+(\vec{k})e^{ikx}\right].$$

Setzt man die letzten Ausdrücke in den Kommutator

$$[P_\mu, A_\rho(x)] = -i\partial_\mu A_\rho(x)$$

ein, so findet man:

$$\left[a_\rho^-(\vec{k}), a_\lambda^+(\vec{k}')\right] = -g_{\rho\lambda}\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}'). \tag{125}$$

Wenn wir diese Kommutatorbeziehung mit ihrem Analogon der skalaren Theorie vergleichen, so sehen wir, daß sich die zeitlichen Komponenten durch ein negatives Vorzeichen auszeichnen. Wir haben daher Schwierigkeiten bei der Interpretation der $a_0^\pm(\vec{k})$ als Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren. Man erhält:

$$\left[a_0^-(\vec{k}), a_0^+(\vec{k}')\right] = -\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}'). \tag{126}$$

Im Vergleich zur skalaren Theorie sind hier die Plätze von Erzeugungs- und Vernichtungsoperator vertauscht. Dies führt uns auf das Problem einer negativen Norm[25]. Teilchen mit negativer Norm bezeichnet man als „Geister“.
Der Operator $a_0^\pm$ bereitet noch eine weitere Schwierigkeit. Betrachtet man etwa den Ausdruck der Energie

$$\begin{aligned} P^0 \equiv E &= -\int d^3k\omega_k g^{\rho\lambda} : a_\lambda^+(\vec{k})a_\lambda^-(\vec{k}) : \\ &= -\int d^3k k^0 \left[a_0^+(\vec{k})a_0^-(\vec{k}) - \left(a_1^+(\vec{k})a_1^-(\vec{k}) + a_2^+(\vec{k})a_2^-(\vec{k}) + a_3^+(\vec{k})a_3^-(\vec{k})\right)\right], \end{aligned}$$

so sieht man, daß E im allgemeinen nicht positiv definit sein wird.
Wenn wir jedoch

$$a_0^\pm(\vec{k}) = a_3^\pm(\vec{k})$$

als eine Operatorgleichung (als Folge der Lorentz-Konvention) auffassen, so ist dann

$$E = \int d^3k k^0 \sum_{i=1}^{2} \underbrace{a_i^+(\vec{k})a_i^-(\vec{k})}_{|a_i|^2}$$

und natürlich

$$P_\mu = \int d^3k k_\mu \sum_{i=1}^{2} a_i^+(\vec{k})a_i^-(\vec{k}).$$

[25] siehe auch Bogoliubov [3]

In beiden Ausdrücken erstrecken sich die Summen nur über die „transversalen Komponenten“, und garantieren so positiv definite Ausdrücke.
Im Abschluß wollen wir noch die Lorentz-Konvention in einer quantisierten Theorie untersuchen. Zu diesem Zweck berechnen wir den Kommutator zweier Vektorpotentiale an verschiedenen Raumzeitpunkten. Mit der Entwicklung für $A_\mu(x)$ und den Vertauschungsrelationen für $a_\rho^\pm(\vec{k})$ findet man die folgende singuläre Funktion:

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] = \int\int \frac{d^3kk'}{2(2\pi)^3\sqrt{\omega_k\omega k'}} {\epsilon_\mu}^\lambda \epsilon_{\lambda\nu} \left(\underbrace{[a_\lambda^-, a_\rho^+]}_{-g_{\lambda\rho}\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')} \; e^{-i(kx-k'y)} + \underbrace{[a_\lambda^+, a_\rho^-]}_{+g_{\lambda\rho}\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')} \; e^{+i(kx-k'y)} \right),$$

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] = \left|{\epsilon_\mu}^\lambda \epsilon_{\lambda\nu} = g_{\mu\nu}\right| = g_{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2) e^{-ik(x-y)} \epsilon(k^0),$$

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] = -ig_{\mu\nu}\Delta(x-y). \tag{127}$$

wobei wir aus Kapitel 3.3.1 wissen, daß für $m = 0$ die singuläre Funktion durch

$$\Delta(x-y) = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2) e^{-ik(x-y)} \epsilon(k^0)$$

gegeben ist.
Daraus resultiert ein Widerspruch, da nach Lorentz-Konvention gilt:

$$\left[\underbrace{\partial^\mu A_\mu(x)}_{=0}, A_\nu(y) \right] = -i\partial_\nu \Delta(x-y) \neq 0.$$

Deshalb kann die Lorentz-Konvention nur als schwache Operatorgleichung gelten, das heißt, nur für

$$\partial^\mu A_\mu(x) |\text{physikalische Zustände} >= 0.$$

Die Forderung trifft also nur auf Matrixelemente

$$\langle\alpha|\, \partial^\mu A_\mu(x)\, |\beta\rangle = 0$$

von physikalischen Zustände $\langle\alpha|$ und $|\beta\rangle$ zu.

3.5 Die Quantisierung des freien Dirac Feldes

3.5.1 Bemerkungen über identische Teilchen und die Unterscheidbarkeit

Wenn man den Quantenzustand von identischen Teilchen beschreiben will, treten im Gegensatz zur klassischen Betrachtungsweise neue, bisher unbekannte Aspekte auf. Die *Ununterscheidbarkeit* der Teilchen hat zur Folge, daß sich die entsprechenden Wellenfunktionen überlappen (Klassisch: Kennzeichnung von 2 Billardkugeln durch zwei Farben hat keinen Einfluß auf ihre Bewegung).
In der Quantenmechanik wird der Zustand von n identischen Teilchen durch einen vollständigen Satz von dynamischen Variablen a für jedes einzelne Teilchen bestimmt. Speziell ist ein Zustand so bestimmt, daß von den n' Teilchen durch die Eigenwerte a', n'' Teilchen durch die Eigenwerte a'', etc. charakterisiert werden. Da die Teilchen ununterscheidbar sein sollen, ist es nicht möglich zu sagen, welches Teilchen durch a' oder a'' festgelegt ist.
Um den Quantenzustand von Vielteilchensystemen sinnvoll beschreiben zu können, machen wir die Annahme, daß ein bestimmter vollständiger Satz von dynamischen Variablen ausreicht, um alle Teilchen der gleichen Art zu charakterisieren. Dies soll auch bei Anwesenheit von Wechselwirkungen gültig sein. Das bedeutet praktisch, falls wir die Eigenwerte a', a'', .. für die n', n'' Teilchen kennen, daß auch der Zustand des direkten Produktes gegeben ist.
Studieren wir die Situation für ein 2-Teilchen System ($n = n' = n'' = 2$). Der Basiszustand eines solchen Systems ist durch $|a' > |a'' >$ gegeben. Wegen der Ununterscheidbarkeit ist auch $|a'' > |a' >$ ein möglicher Zustand. Im allgemeinen gibt es $n!$ verschiedene Vektoren, die alle die gleiche physikalische Situation beschreiben. Wegen des Superpositionsprizipes ist auch jede Linearkombination eine erlaubte Beschreibungsform. Von allen diesen Möglichkeiten kann jedoch nur ein Zustandsvektor den wirklichen Sachverhalt charakterisieren. Es bedarf daher gewisser Kriterien, um die restlichen auszuschließen.
Die Natur lehrt uns, daß aus der genannten Menge von Möglichkeiten nur zwei physikalisch annehmbar sind: Jene, die vollkommen symmetrisch bzw. vollkommen antisymmetrisch bezüglich einer Vertauschung der Eigenwerte sind.
Für $n = 2$ bedeutet dies:

$$|n_{\pm} = 2 >= \frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1 > |a_2 > \pm |a_2 > |a_1 >).$$

Dies kann gruppentheoretisch mit Hilfe der sogenannten Symmetriegruppen gezeigt werden. An Hand unseres einfachen Beispiels kann dies jedoch sofort verstanden werden, da es sich in der Natur um zwei Arten von Teilchen dreht: Die Bosonen (Teilchen mit ganzzahligem Spin) und die Fermionen (Teilchen mit halbzahligem Spin). Die Bosonen, die sogenannten Austauschteilchen, vermitteln die Wechselwirkung zwischen den Fermionen, den Materieteilchen (siehe QFT 2 [9]). So ordnet man aus der Erfahrung heraus den Fermionen den total antisymmetrischen Zustand zu, um das Pauli-Verbot in konsistenter Weise einbauen zu können. Dieses Ausschließungsprinzip besagt, daß identische Fermionen eines Systems nur einfach besetzt sein dürfen. Ist dies nicht erfüllt, so muß der entsprechende Zustand verschwinden. In unserem einfachen Beispiel bedeutet dies für $a' = a''$, daß

$$|n = 2 >_{-} = 0$$

gilt.

3.5.2 Die Konsequenzen des Pauli-Verbotes auf die Quantisierungsprozedur

Bei der Quantisierung des freien Fermi-Feldes führt man ebenfalls das Konzept der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren unter Berücksichtigung des Ausschließungsprinzips ein. Dieses besagt, daß zwei Fermionen quantenmechanisch nicht im gleichen Zustand befinden dürfen.

Wir folgen dem Vorbild der skalaren Theorie und definieren zunächst einen Vakuumszustand ϕ_0, der keine Teilchen enthält. Ein Erzeugungsoperator wird dann so definiert sein, daß er auf ϕ_0 angewandt einen Einteilchenzustand aus der Menge von n-möglichen Zuständen mit der Quantenzahl a erzeugt.

$$b_a^+ \phi_0 \equiv \phi_a = |0 \cdots 1 \cdots\rangle \,. \tag{128}$$

Die rechte Seite von Gleichung (128) bedarf einer Erläuterung. Infolge des Ausschließungsprinzips ist der Zustand a entweder leer oder besetzt. Wir beschreiben diese beiden Möglichkeiten durch zweikomponentige „Vektoren “

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_a , \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_a$$

an. Folglich ist der Vakuumszustand eine Produkt von lauter unbesetzten Zuständen

$$\phi_0 = \prod_{a'=1}^{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{a'} ,$$

während der Einteilchenzustand einfach lautet:

$$\phi_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_a \prod_{a' \neq a}^{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{a'} .$$

Folglich kann der Erzeugungsoperator durch eine 2×2 Matrix dargestellt werden, die gerade aus

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_a \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_a$$

erzeugt. Jede Matrix der Gestalt

$$b_a^+ = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix}_a$$

(mit beliebigen x und y) leistet dies. Das Pauli-Verbot verlangt jedoch, daß gilt:

$$b_a^+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix}_a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Daraus folgert man, daß $x = y = 0$ und daher:

$$b_a^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_a . \tag{129}$$

Auf ähnliche Weise erhält man die entsprechenden Vernichtungsoperatoren:

$$b_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_a . \tag{130}$$

$b_{a'}^+$ und $b_{a'}$ sind also hermite'sch konjugiert zueinander. Aus der expliziten Gestalt von b_a^+, b_a folgen die einfachen Antivertauschungsrelationen:

$$\{b_a, b_{a'}\} = \left\{b_a^+, b_{a'}^+\right\} = 0, \tag{131}$$

$$\left\{b_a, b_{a'}^+\right\} = \mathbb{1}\delta_{aa'} . \tag{132}$$

Wir sehen also, daß das Ausschließungsprinzip Antivertauschungsrelationen zwischen den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren eingeführt hat.

3.5.3 Die Quantisierung

Als Ansatz für die Quantisierung dient der folgende klassische kovariante Ausdruck:

$$\Psi_\alpha(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^4k\delta(k^2 - m^2)\tilde{\Psi}_\alpha(k)e^{+ikx}.$$

Daraus folgt:

$$\Psi_\alpha(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d^3k}{2\omega_k} \left(\tilde{\Psi}_\alpha(\omega_k, \vec{k})e^{+ikx}\Big|_{k^0=\omega_k} + \tilde{\Psi}_\alpha(-\omega_k, \vec{k})e^{+ikx}\Big|_{k^0=-\omega_k} \right).$$

Setzt man im zweiten Integranden $\vec{k} = -\vec{k}$, so ergibt sich:

$$\Psi_\alpha(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d^3k}{2\omega_k} \left(\tilde{\Psi}_\alpha(\omega_k, \vec{k})e^{+ikx} + \tilde{\Psi}_\alpha(-\omega_k, -\vec{k})e^{-ikx} \right)\Big|_{k^0=\omega_k}.$$

In Anlehnung an Bjorken und Drell [1] definiert man besser:

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d^3k}{2\omega_k}\sqrt{\frac{m}{\omega_k}} \left(\tilde{\Psi}_\alpha(\omega_k, \vec{k})e^{+ikx} + \tilde{\Psi}_\alpha(-\omega_k, -\vec{k})e^{-ikx} \right)\Big|_{k^0=\omega_k} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d^3k}{2\omega_k}\sqrt{\frac{m}{\omega_k}} \left(\tilde{\Psi}^+_\alpha(\vec{k})e^{+ikx} + \tilde{\Psi}^-_\alpha(\vec{k})e^{-ikx} \right)\Big|_{k^0=\omega_k}. \end{aligned} \tag{133}$$

Dieser Ausdruck soll nun quantisiert werden, d.h. wir werden in $\Psi^-_\alpha(\vec{k})$ und $\Psi^+_\alpha(\vec{k})$ die entsprechenden Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren vermuten. Da nun

$$(i \not{\nabla} - m)\Psi(x) = 0$$

gilt, folgt natürlich:

$$(\not{k} - m)_{\alpha\beta}\, \Psi^-_\beta(\vec{k}) = 0, \tag{134}$$

$$(\not{k} + m)_{\alpha\beta}\, \Psi^+_\beta(\vec{k}) = 0. \tag{135}$$

Die Matrixstruktur der Lösungen $\Psi^\pm_\beta$ wird sehr wesentlich von der Wahl der Darstellung für die γ-Matrizen abhängen.
Wir wählen:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i \equiv \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0. \end{pmatrix}.$$

Wegen der Lorentz-Invarianz stellen wir unsere Betrachtungen in einem System an, wo $\vec{k} = 0$ ist. In einem solchen Bezugssystem dem „Ruhesystem“ gilt:

$$k^2 = k^{02} = m^2.$$

Unsere Gleichungen nehmen daher die folgende Gestalt an:

$$m(\gamma^0 - 1)\Psi^-(0) = 0,$$

$$m(\gamma^0 + 1)\Psi^+(0) = 0.$$

Mit der obigen Wahl der Darstellung für γ^0 ergeben sich folgende zwei Matrixgleichungen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1^-(0) \\ \Psi_2^-(0) \\ \Psi_3^-(0) \\ \Psi_4^-(0) \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1^+(0) \\ \Psi_2^+(0) \\ \Psi_3^+(0) \\ \Psi_4^+(0) \end{pmatrix} = 0.$$

Im Ruhesystem ($\vec{k} = 0$) erhalten wir daher:

$$\Psi_\alpha^-(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Psi_\alpha^+(0) = c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die entsprechenden Spaltenvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \ldots$$

beschreiben gerade die Spinfreiheitsgrade. In einem beliebigen System $\vec{k} \neq 0$ hat man dann:

$$\Psi_\alpha^-(\vec{k}) = \sum_{\pm s} b(\vec{k}, s) u_\alpha(\vec{k}, s),$$

$$\Psi_\alpha^+(\vec{k}) = \sum_{\pm s} d^+(\vec{k}, s) v_\alpha(\vec{k}, s).$$

Dabei erfüllen die Spinoren u_α und v_α die folgenden Gleichungen:

$$(\not{k} - m) u(\vec{k}, s) = 0,$$

$$(\not{k} + m) v(\vec{k}, s) = 0.$$

Als Gesamtlösung erhalten wir dann:

$$\Psi_\alpha(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d^3k}{2\omega_k} \sqrt{\frac{m}{\omega_k}} \sum_{\pm s} \left(b(\vec{k},s) u_\alpha(\vec{k},s) e^{-ikx} + d^+(\vec{k},s) v_\alpha(\vec{k},s) e^{ikx} \right) . \tag{136}$$

Für den adjungierten Spinor

$$\bar{\Psi}_\alpha = \Psi^+ \gamma^0$$

ergibt sich:

$$\Psi_\alpha(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d^3k}{2\omega_k} \sqrt{\frac{m}{\omega_k}} \sum_{\pm s} \left(b^+ \bar{u}_\alpha e^{ikx} + d \bar{v}_\alpha e^{-ikx} \right) . \tag{137}$$

Wir können die folgenden Antivertauschungsrelationen aufstellen:

$$\left\{ b(\vec{k},s), b^+(\vec{k}',s') \right\} = \delta_{ss'} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'), \tag{138}$$

$$\left\{ d(\vec{k},s), d^+(\vec{k}',s') \right\} = \delta_{ss'} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'), \tag{139}$$

$$\left\{ \Psi_\alpha(x), \Psi^+_\beta(x') \right\} |_{x^0 = x'^0} = \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'). \tag{140}$$

Nachsatz:
Aus

$$W[\Psi, \bar{\Psi}] = \int d^4x \bar{\Psi}(i \not{\nabla} - m)\Psi$$

erkennt man, daß auch hier die kanonische Quantisierungsprozedur versagt, denn der kanonische Impuls zu $\bar{\Psi}$ verschwindet

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\Psi}}} = \Pi_{\bar{\Psi}} = 0,$$

während das entsprechende Pendant Π_Ψ durch

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}} = i\bar{\Psi}\gamma^0 = i\Psi^+$$

gegeben ist. Diese Formel erklärt Gleichung (140) - allerdings mit dem Antikommutator bei gleichen Zeiten. Der Antikommutator steht für die Fermi-Statistik.

A Anhang

A.1 Ergänzungen zur Hamilton-Dichte des Klein-Gordon-Feldes

Für freie Felder berechnetet man folgendermaßen die Hamilton-Dichte:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \phi\pi - \mathcal{L} = \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2\right) \\ &= \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\dot{\phi}\dot{\phi} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\phi\vec{\nabla}\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\dot{\phi}^2 + \vec{\nabla}\phi\vec{\nabla}\phi + m^2\phi^2\right) \geq 0 \qquad \text{(positiv definit).}\end{aligned}$$

Zwecks Einsetzen in obiger Gleichung berechnen wir:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int d^3k \left[f_k^*(x)a^+(\vec{k}) + f_k(x)a(\vec{k})\right], \\ \dot{\phi}(x) &= \int d^3k i\omega_k \left[f_k^*(x)a^+(\vec{k}) - f_k(x)a(\vec{k})\right], \\ \vec{\nabla}\phi(x) &= \int d^3k i\vec{k} \left[-f_k^*(x)a^+(\vec{k}) + f_k(x)a(\vec{k})\right].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\phi}^2(x) &= \int\int d^3kd^3k' - \omega_k\omega_{k'} \left(f_k^*a^+(\vec{k}) - f_k a(\vec{k})\right)\left(f_{k'}^*a^+(\vec{k}') - f_{k'}a(\vec{k}')\right) \\ &= \int\int d^3kd^3k' - \omega_k\omega_{k'}\Big[f_k^*f_{k'}^*a^+(\vec{k})a^+(\vec{k}') - f_kf_{k'}^*a(\vec{k})a^+(\vec{k}') \\ &\quad -f_k^*f_{k'}a^+(\vec{k})a(\vec{k}') + f_kf_{k'}a(\vec{k})a(\vec{k}')\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_k^*f_{k'}^* &= \frac{1}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_k2\omega_{k'}}}e^{i(k+k')x}, \\ f_kf_{k'}^* &= \frac{1}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_k2\omega_{k'}}}e^{-i(k-k')x}, \\ f_k^*f_{k'} &= \frac{1}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_k2\omega_{k'}}}e^{i(k-k')x}, \\ f_kf_{k'} &= \frac{1}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_k2\omega_{k'}}}e^{-i(k+k')x},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\phi(x)\vec{\nabla}\phi(x) &= \int\int d^3kd^3k'(-\vec{k}\vec{k}')\left[-f_k^*(x)a^+(\vec{k}) + f_k(x)a(\vec{k})\right] \\ &\quad \left[-f_{k'}^*(x)a^+(\vec{k}') + f_{k'}(x)a(\vec{k}')\right], \\ &= \int\int d^3kd^3k'(-\vec{k}\vec{k}')\Big[f_k^*(x)f_{k'}^*(x)\underline{a^+(\vec{k})a^+(\vec{k}')} - f_k(x)f_{k'}^*(x)a(\vec{k})a^+(\vec{k}') \\ &\quad -f_k^*(x)f_{k'}(x)a^+(\vec{k})a(\vec{k}') + f_k(x)f_{k'}(x)a(\vec{k})a(\vec{k}')\Big].\end{aligned}$$

Für $m = 0$:

$$\int d^3x \left(\dot{\phi}^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2\right)\Big|_{a^+a^+} = \int d^3x \int d^3k \int d^3k' \frac{1}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_k 2\omega_{k'}}}[-\omega_k\omega_{k'} + \vec{k}\vec{k}'] e^{i(k+k')x}.$$

Folgendes Integral berechnen wir

$$\int d^3x e^{i(k+k')x} = \int d^3x e^{i(\omega_k x^0 + \omega_{k'} x^0 - i(\vec{k}+\vec{k}')x} = e^{i2\omega_k x^0}\delta^{(3)}(\vec{k}+\vec{k}').$$

Eingesetzt folgt aus der Bewegungsgleichung im Impulsraum:

$$\int d^3x(\dot{\phi}^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2)\Big|_{a^+a^+} = \int \frac{1}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_k 2\omega_{k'}}} \underbrace{[-\omega_k{}^2 + \vec{k}^2]}_{=0} e^{2i\omega_k x^0} a^+(\vec{k})a^+(\vec{k}) = 0.$$

A.2 Kommutatorbeziehung der alternativen Quantisierungsprozedur

$$[\phi(\vec{x}',t),\phi(\vec{x},t)]=0 \qquad [\dot\phi(\vec{x}',t),\phi(\vec{x},t)]=-i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') \qquad [\nabla_x\phi(\vec{x},t),\phi(\vec{x}',t)]=0$$

$$\begin{aligned}
[Q_\mu,\phi] &= \int d^3x' \left(\left[\dot\phi(x')\partial'_\mu\phi(x'),\phi(x)\right]-\frac{1}{2}g_{\mu0}\left[\partial'_\mu\phi(x')\partial'^\mu\phi(x')-m\phi^2(x'),\phi(x)\right]\right)\\
&= \int d^3x' \Big\{\dot\phi(\vec{x}',t)[\partial'_\mu\phi(\vec{x}',t),\phi(\vec{x},t)]+[\dot\phi(\vec{x}',t),\phi(\vec{x},t)]\partial'_\mu\phi(\vec{x}',t)\\
&\quad -\frac{1}{2}g_{0\mu}\left(\partial'_\mu\phi(\vec{x}',t)[\partial'^\mu\phi(\vec{x}',t),\phi(\vec{x},t)]+[\partial'_\mu\phi(\vec{x}',t),\phi(\vec{x},t)]\partial'^\mu\phi(\vec{x}',t)\right)\Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[Q_0,\phi] &= \int d^3x' \Big\{\dot\phi(\vec{x}',t)\overbrace{[\dot\phi(\vec{x}',t),\phi(\vec{x},t)]}^{-i\delta(\vec{x}-\vec{x}')}+\overbrace{[\dot\phi(\vec{x}',t),\phi(x,t)]}^{-i\delta(\vec{x}-\vec{x}')}\dot\phi(\vec{x}',t)\\
&\quad -\frac{1}{2}\Big(\dot\phi(\vec{x}',t)[\dot\phi(\vec{x}',t),\phi(\vec{x},t)]+[\dot\phi(\vec{x}',t),\phi(\vec{x},t)]\dot\phi(\vec{x}',t)\\
&\quad +\vec\nabla\phi(\vec{x}',t)\underbrace{[\vec\nabla\phi(\vec{x}',t),\phi(\vec{x},t)]}_{=0}+\underbrace{[\vec\nabla\phi(\vec{x}',t),\phi(\vec{x},t)]}_{=0}\vec\nabla\phi(\vec{x}',t)\Big)\Big\}
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$[Q_0,\phi(x)]=-i\dot\phi(x)=-i\frac{\partial}{\partial x^0}\phi(\vec{x},x^0).$$

$$\begin{aligned}
[Q_i,\phi] &= \int d^3x' \left\{\dot\phi(\vec{x}',t)\overbrace{[\vec\nabla\phi(\vec{x}',t),\phi(\vec{x},t)]}^{=0}+[\dot\phi(\vec{x}',t),\phi(\vec{x},t)]\vec\nabla\phi(\vec{x}',t)\right\},\\
&= -\int d^3x'\delta(\vec{x}-\vec{x}')\vec\nabla\phi(\vec{x}',t)=-i\vec\nabla\phi(\vec{x},t).
\end{aligned}$$

Somit erhält man:

$$[Q_\mu,\phi(x)]=-i\partial_\mu\phi(x).$$

$$\begin{aligned}
i[Q_\mu,\phi(x)] &= i\int d^3k\int d^3k'k_\mu[a^+(\vec{k})a(\vec{k}),a^+(\vec{k}')f^*_{k'}(x)+a(\vec{k}')f_{k'}(x)],\\
&= i\int d^3k\int d^3k'k_\mu(a^+(\vec{k})[a(\vec{k}),a^+(\vec{k}')]f^*_{k'}(x)+a(\vec{k})\underbrace{[a^+(\vec{k}),a^+(\vec{k}')]}_{=0}f^*_{k'}(x)\\
&\quad +a^+(\vec{k})\underbrace{[a(\vec{k}),a(\vec{k}')]}_{=0}f_{k'}(x)+[a^+(\vec{k}),a(\vec{k}')]a(\vec{k})f_{k'}(x),\\
&= \int d^3k\int d^3k'ik_\mu\left(a^+(\vec{k})f^*_{k'}(x)-a(\vec{k})f_{k'}(x)\right)\left[a(\vec{k}),a^+(\vec{k}')\right],\\
&\quad \left|i\partial_\mu\phi(x)=\int d^3kik_\mu\left(a^+(\vec{k})f^*_k(x)-a(\vec{k})f_k(x)\right)\right|.
\end{aligned}$$

Von dieser Beziehung schließt man auf

$$\left[a(\vec{k}),a^+(\vec{k})\right]=\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}').$$

A.3 Wiederholung: 3 Felder der freien Theorie

Zusammenfassung freie QFT (Klein-Gordon-Feld, Elektromagnetisches Feld, Dirac-Feld):

$$
\begin{aligned}
(\Box_x + m^2)\phi(x) = 0, &\qquad \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2\phi^2), \\
\partial^\mu F_{\mu\nu}, \quad \partial_\mu A^\mu = 0, &\qquad \mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \\
(i \not\nabla - m)_{\alpha\beta} \psi_\beta(x) = 0, &\qquad \mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i \not\nabla - m)\psi.
\end{aligned}
$$

Euler-Lagrange Gleichung

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Psi} = 0, \qquad \Psi = (\phi, A^\mu, \psi).
$$

$$
\delta W[\Psi] = \int d^4x \mathcal{L}(\Psi, \partial_\mu \Psi)
$$

Kommutatorbeziehungen der freien Theorie

$$
\begin{aligned}
\left[a(\vec{k}), a^+(\vec{k}')\right] = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'), &\qquad \left[a(\vec{k}), a(\vec{k}')\right] = \left[a^+(\vec{k}), a^+(\vec{k}')\right], \\
\left[a^-_\rho(\vec{k}), a^+_\lambda(\vec{k}')\right] = -g_{\rho\lambda}\delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'), & \\
\left\{b(\vec{k}, s), b^+(\vec{k}', s')\right\} = \delta_{ss'}\delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'), &\qquad \left\{d(\vec{k}, s), d^+(\vec{k}', s')\right\} = \delta_{ss'}\delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}').
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\phi(x), \phi(y)] &= i\Delta(x - y)\mathbb{1}, \\
[A_\mu(x), A_\nu(y)] &= -ig_{\mu\nu}\Delta(x - y), \\
\left\{\psi_\alpha(x), \psi^+_\beta(x')\right\} &= \delta_{\alpha\beta}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}').
\end{aligned}
$$

Literatur

[1] James D. Bjorken & Sidney D. Drell: *Relativistische Quantenmechanik*, BI HTB Band 98 (Mannheim, 1966)

[2] James D. Bjorken & Sidney D. Drell: *Relativistische Quantenfeldtheorie*, BI HTB Band 101 (Mannheim, 1978)

[3] N. Bogoliubov: *Introduction to the Theory of Quantized Fields*

[4] Hans Jörg Dirschmid, Wolfgang Kummer, Manfred Schweda: *Einführung in die mathematischen Methoden der Theoretischen Physik*, Vieweg (Wiesbaden, 1976)

[5] Albert Messiah: *Quantenmechanik Bd.2*, de Gruyter (Berlin, 1979)

[6] Max Päsler: *Prinzipe der Mechanik*, Vieweg (Berlin, 1968)

[7] Manfred Schweda: *Vorlesungsunterlagen zu Methoden der Theoretischen Physik*, (Wien)

[8] Manfred Schweda: *Skriptum Allgemeine Relativitätstheorie*,(Wien)

[9] Manfred Schweda: *Quantenfeldtheorie II*, (Wien)