

FOLIEN VON D. GRAU ZUR  
VORLESUNG "ELEKTRODYNAMIK  
UND RELATIVITÄTSTHEORIE"  
*nach dem Skriptum von H. Nowotny*

# I. EINLEITUNG

## I.1. Historische Entwicklung der Elektrodynamik <sup>†)</sup>

### I.1.A. Elektrizität

400 v.Chr. Reibungselektrizität (Kräfte, die von geriebenem Bernstein ausgehen).

1660 Elektriziermaschine (Otto von Guericke, 1602-1686).

1733 Charles-Francois de Cisternay Dufay (1698-1739) postuliert die Existenz von zwei Arten der Elektrizität: positive (glaselektrisch) und negative (harzelektrisch).

Elektrostatik

Influenz

1745 Pieter van Musschenbroek (1692-1761), Professor in Leyden, entdeckt die Möglichkeit der Akkumulierung von Ladung: Leydener Flasche.

1747 Benjamin Franklin (1706-1790): Gesetz von der Erhaltung der Ladung.

1767 Joseph Priestley (1733-1804) schließt aus dem Fehlen einer elektrostatischen Kraftwirkung im Innern eines Leiters auf ein Kraftgesetz, welches proportional  $\frac{1}{r^2}$  ist (gleiches Abstandsverhalten wie bei dem Gravitationsgesetz).

1785 Charles Augustin Coulomb (1736-1806, französischer Physiker) weist dieses Gesetz mittels einer Drehwaage experimentell nach.

Coulomb'sches Gesetz:  $\vec{F} = k_1 \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$

1785 Pierre Simon Laplace (1749-1827) stellt einen Zusammenhang zwischen der Gleichung  $\Delta V = 0$  im materiefreien Raum und der Kraft her:  $\vec{F} = \text{grad } V$ .

1813 Simeon Denis Poisson (1781-1840) erweitert Laplacegleichung zu  $\Delta V = -4\pi\rho$ .

<sup>†)</sup> Siehe W. Greiner, *Klassische Elektrodynamik*

1828 George Green (1793-1841) führt für  $V$  den Namen Potential ein.

1853 Georg Riemann (1826-1866) macht den Vorschlag, die Poissongleichung  $\Delta\phi + 4\pi\rho = 0$  folgendermaßen zu ändern:  $\Delta\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 4\pi\rho = 0$  (dieser Vorschlag wurde 1867 veröffentlicht, ist aber zu wenig für eine Theorie).

1857 Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) entdeckt, daß die Ausbreitung von elektrischen Störungen entlang eines Drahtleiters mit Lichtgeschwindigkeit erfolgt.

1862 James Clark Maxwell (1831-1879) führt den "Verschiebungsstrom" ein, d.h. er betrachtet in der Gleichung  $\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{s}$  den gesamten Strom  $\vec{s}$  als die Summe von Leitungsstrom und Verschiebungsstrom:  $\vec{s} = \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ . Maxwellgln., Möglichkeit

Elektromagne-  
tismus

1867 Ludwig Lorenz (1829-1891) entwirft eine elektromagnetische Theorie des Lichtes elm. Wellen

Übergang von  $\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{q(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$  auf  $\phi(\vec{r}, t) = \int d^3r' \frac{q(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

(dies ist eine zur Maxwell-Theorie äquivalente Theorie).

I-1

I-2

## I.1.B. Magnetismus, elektrische Ströme

400 v. Chr. Kenntnis der Kräfte von Magnetstein.

300 v. Chr. Ausnutzung des Erdmagnetfeldes zur Richtungsbestimmung (China): Kompaß

1600 William Gilbert (1544–1603) verwendet in seinem Buch über Magnetismus und Elektrizität erstmals die Namen elektrische Kraft und magnetische Kraft. Er stellt fest, daß positive und negative Magnetpole nicht getrennt werden können. Er deutet das Erdmagnetfeld als Feld einer magnetischen Kugel.

Experimente,  
Messungen  
Magnetostatik

1780 Luigi Galvani (1737–1798) stellt fest, daß Froschschenkel unter bestimmten Bedingungen zucken: 'tierische Elektrizität'.

1794 Alessandro Volta (1745–1827) stellt 'metallische Elektrizität' fest. Aus 'galvanischen Elementen' aufgebaute 'Voltasche Säulen' erlauben die Erzeugung von Dauerströmen.

Stationäre  
Ströme

1820 Im Juli 1820 beobachtet Hans Christian Oersted (1777–1851) die Ablenkung einer Magnetnadel in der Nähe eines stromdurchflossenen Leiters. Hiemit wird erstmalig eine Verbindung zwischen elektrischen und magnetischen Erscheinungen hergestellt (aber vorest nur in qualitativer Form).

E & M  
hängen  
zusammen

1820 Im Oktober 1820 geben Jean-Baptiste Biot (1774–1862) und Félix Savart (1791–1841) einen quantitativen Ausdruck für das von einem Leiterstück  $d\vec{s}$ , in dem ein Strom  $I$  fließt, an der Stelle  $\vec{r}$  erzeugte Magnetfeld an: 
$$d\vec{B} = k_3 \frac{I d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

1825 Andrè-Marie Ampère (1775–1836) führt den Namen 'Elektrodynamik' ein.

Quantitativer Ausdruck für die Kraft, die ein Magnetfeld  $\vec{B}$  auf ein von einem Strom  $I$  durchflossenes Leiterstück  $d\vec{s}$  ausübt: 
$$d\vec{F} = k_4 I d\vec{s} \times \vec{B}$$

Er zeigt, daß zwei parallele Leiter im Abstand  $d$ , die von den Strömen  $I_1$  und  $I_2$  durchflossen werden, sich anziehen: 
$$\frac{F}{l} = k_3 k_4 \frac{2I_1 I_2}{d}$$

1826 Georg Simon Ohm (1787–1854) findet die Proportionalität zwischen Spannung und Strom: 
$$U = RI$$
 (Ohmsches Gesetz).

1831 Michael Faraday (1791–1867) findet das elektromagnetische Induktionsgesetz: 
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -k_4 \frac{\partial}{\partial t} \int d^2f \cdot \vec{B}$$
 Er prägt den Begriff des magnetischen und des elektrischen Kraftfeldes sowie der Feldlinien.

Elektro-  
dynamik

In Analogie zur Kontinuitätsgleichung  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$  einer Flüssigkeit der Dichte  $\rho$  und der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  erfolgt die Aufstellung der elektrischen Kontinuitätsgleichung: 
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0 \quad (1843).$$

Ab nun erfolgt die Entwicklung gemeinsam mit der Elektrizitätslehre.

1862 Maxwell

## I.1.C. Optik

300 v.Chr. Reflexion: Einfallswinkel = Ausfallswinkel †)

1621 Willebrord Snellius (1580-1626) findet das Brechungsgesetz  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$  experimentell und informiert einige Personen (keine Publikation).

1637 René Descartes gibt eine Ableitung des Brechungsgesetzes im Teilchenbild an, wobei die Lichtteilchen im optisch dichteren Medium schneller sind, damit die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit bei der Brechung ungeändert bleibt (typisches Beispiel, wie mit falschen Voraussetzungen ein richtiges Ergebnis erhalten werden kann).

1665 Pierre de Fermat (1601-1665) erhält das Brechungsgesetz aus einem Extremalprinzip: der optische Weg bzw. die Zeit zum Durchlaufen zwischen zwei Punkten soll ein Minimum sein (Teilchengeschwindigkeit im dichteren Medium ist langsamer).

1666 Nach Isaak Newton (1642-1727) besteht das weiße Licht aus allen Farben. Er weist darauf hin, daß das Licht ein periodischer Vorgang ist, wobei verschiedene Perioden verschiedenen Farben entsprechen (Newtonsche Ringe), aber Teilchenvorstellung! ("Anwendungen")

1675 Olaus Roemer (1644-1710) stellt fest, daß die Umlaufdauer der Jupitermonde verschieden ist bei der Bewegung der Erde zum Jupiter hin oder vom Jupiter weg. Er schließt hieraus auf eine endliche Lichtgeschwindigkeit! (die Entfernung Sonne - Erde wird in 11 Minuten zurückgelegt, später auf 7 Minuten verkürzt).

1678 Christiaan Huygens (1629-1695) entwirft eine Wellentheorie des Lichtes und gibt systematische Erklärungen für die geradlinige Ausbreitung, die Reflexion und die Brechung aus der Wellenvorstellung, aber noch keine Interferenzerscheinungen!

†) 100 n. Chr. Ptolemäus tabelliert Brechungswinkel in Abhängigkeit vom Einfallswinkel

•) ~1600 Galilei: "Laternenversuch"

1801 Thomas Young (1773-1829) entdeckt das Interferenzprinzip.

1808 Etienne-Louis Malus (1775-1812) beobachtet, daß das unter einem Winkel von  $52^{\circ}45'$  an Wasser reflektierte Licht alle Eigenschaften eines der beiden Strahlen der Doppelbrechung zeigt. Diese Eigenschaften besitzen teilweise alle reflektierten Strahlen. Malus bezeichnet diese Eigenschaft mit Polarisation.

1815 David Brewster (1781-1868) findet, daß totale Polarisation immer dann vorliegt, wenn gebrochener und reflektierter Strahl zueinander normal sind.

1823 Augustin Fresnel (1788-1827) gibt eine Theorie der Brechung und der Reflexion an und findet die Fresnelschen Formeln. Fresnel behandelte auch das Problem der Brechung an bewegten Körpern und nahm eine teilweise Mitführung des Äthers an.

1851 Armand Hippolyte Louis Fizeau (1819-1896) verifizierte eine solche Mitführung, indem er Licht durch fließendes Wasser leitete und Interferenz mit dem ungestörten Normalstrahl beobachtete.

1888 Durch die Versuche von Heinrich Hertz (1857-1894) wurde gezeigt, daß Lichtwellen elektromagnetische Wellen sind.

1862 Maxwell

# I.1.D\* Vereinigung der fundamentalen Wechselwirkungen. Eichtheorien

vor 1831 (M. Faraday Induktionsgesetz) el. WW, magn. WW, Gravitation "getrennt"  
(schw. WW, starke WW noch unbekannt)

1862 J. C. Maxwell    Klassische Elektrodynamik    el. WW & magn. WW = elm. WW  
1892 H. A. Lorentz  
1905 A. Einstein    4dim. Raumzeit  
1909 H. Minkowski  
u.a.  
1929 W. Heisenberg    Quantenelektrodynamik    Elektronen und Positronen [Fermionen]  
W. Pauli    4dim. Raumzeit    elm. WW  
1946-49 S. Tomonaga    Träger:  $\gamma$  (Photon) [Boson]  
J. Schwinger  
R. P. Feynman  
F. J. Dyson  
u.a.

I-6'

1967 S. L. Glashow    Elektroschwache Theorie    elm. WW & schw. WW = elektroschw. WW  
A. Salam    4dim. Raumzeit    Träger:  $\gamma$      $W^\pm, Z^0$     [Bosonen]  
S. Weinberg

Suche nach GUTs (Grand Unified Theories), welche elektroschw. WW und  
starke WW "vereinigen".

1974 H. Georgi    Standardmodell    Leptonen (6 Arten) und Quarks (6 Arten)  
S. L. Glashow (Standardtheorie)    [Fermionen]  
A. Salam    4dim. Raumzeit    elm. WW & schw. WW & starke WW  
S. Weinberg  
u.a.  
Träger:  $\gamma$      $W^\pm, Z^0$     Gluonen (8 Arten)  
masselos    [Bosonen]    ~100 Protonmassen    masselos

Suche nach TOEs (Theories of Everything), welche zusätzlich die Gravitation  
"einbeziehen".

I-6'

1982 M.B. Green Superstringtheorien Fermionen und Bosonen =  
 J.H. Schwarz (5 "Stück") Eigenschwingungen von Strings (Saiten)  
 u.a. 10dim. Raumzeit bzw. von Membranen

seit 1996 Träger: elm. WW & schw. WW & starke WW & Gravitation  
 $\gamma$   $W^\pm, Z^0$  Gluonen Graviton  
 (hypothetisch)

J.H. Schwarz M-Theory = "letzte Inkarnation" der Superstringtheorien,  
 E. Witten vereinigt die 5 Stringtheorien in einem kohärenten Rahmen  
 C. Vafa (Mother of all Theories, Mastertheory)  
 A. Sen 11dim. Raumzeit  
 u.a.

M. Kaku 1999: "Very little is known about M-Theory..."

Möglicherweise muß man auf die "Mathematik des nächsten Jahrhunderts" warten ...

Experimentell erfolgt die Vereinigung der WW bei Energien von  $10^{19}$  GeV =  $10^{28}$  eV (entsprechend Abständen von  $10^{-33}$  cm).

LHC (Large Hadron Collider) [CERN]: Energien bis 1 TeV =  $10^3$  GeV.

M. Kaku 1999: "Thus, to experimentally verify superstring theory means recreating creation in the laboratory."

## I.2, I.3 Vektor- und Tensorrechnung im dreidimensionalen Euklidischen Raum

Aus Mathematik und Methoden der theoretischen Physik bekannt.

ZUR WIEDERHOLUNG ABSCHNITTE IM SKRIPTUM  
DURCHLESEN!

## I.4 Grundlegende Experimente der Elektrodynamik

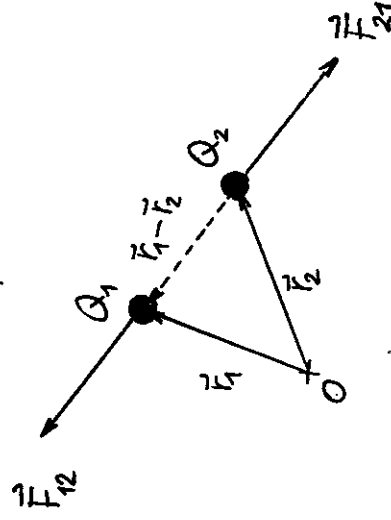
### I.4. A. Coulombsches Gesetz (Vakuum)

Kraft zwischen zwei ruhenden Punktladungen  $Q_1, Q_2$  an den Stellen  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ : Coulombkraft

$$\vec{F}_{12} = k_1 \frac{Q_1 Q_2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = -\vec{F}_{21} \quad (13)$$

$k_1$  maßsystemspezifische positive  
Konstante

Zeichnung für  $\text{sign } Q_2 = \text{sign } Q_1$



Bemerkungen:

- 1) Index 1 bei  $k_1$  hat nichts mit Ladung  $Q_1$  zu tun (unglückliche Bezeichnung)

2)  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$  ("actio = reactio") gilt nur in der Statik!

3)  $\vec{F}_1 = \vec{F}_{12}$ ,  $\vec{F}_2 = \vec{F}_{21}$  (keine Selbstkraft) gilt ebenfalls nur in der Statik!

- I-9
- 4) Experimenteller Stand um 1980 (s. D. Jackson, 1997) Klassische Elektrodynamik 1981:  $10^{-16}$  cm bis  $10^9$  cm
- a)  $\frac{1}{r^2}$ -Gesetz für Abstände von  $10^{-15}$  cm bis  $10^9$  cm (24 Größenordnungen) gesichert

b)  $\frac{1}{r^{2+\epsilon}}$ ,  $\epsilon < 10^{-15}$

Superpositionsprinzip:

N ruhende Punktladungen  $Q_i$  an den Stellen  $\vec{r}_i$

$$\vec{F}_1 = \sum_{i=2}^N \vec{F}_i = k_1 Q_1 \sum_{i=2}^N Q_i \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_1|^3} \quad (14)$$

Summe von Zweikörperkräften (keine Drei-, Vier-, ... Körperkräfte)

Feldbegriff

$Q_1, Q_2, \dots, Q_N$  an den Stellen  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$   
 ruhende Systemladungen (Quellen des betrachteten Systems)

Q Testladung zur Ausmessung des Systems an die Stelle  $\vec{r}$  gebracht,  $\vec{F}(\vec{r})$  Kraft auf die Testladung

$$\vec{E}(\vec{r}) := \frac{\vec{F}(\vec{r})}{Q} \quad (15)$$

von den Systemladungen  
 am Ort  $\vec{r}$  verursachte  
elektrische Feldstärke

I-10

$$\vec{F}(\vec{r}) = k_1 Q \sum_{j=1}^N Q_j \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} \Rightarrow$$

elektrisches Feld von N an den Stellen  $\vec{r}_j$  ruhenden Punktladungen  $Q_j$

$$\vec{E}(\vec{r}) = k_1 \sum_{j=1}^N Q_j \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} \quad (16a)$$

ANALOG:  
 elektrisches Feld einer vorgegebenen lokalisierten statischen Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r}')$

$$\vec{E}(\vec{r}) = k_1 \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (16b)$$

Coulombfeld

Bemerkungen:

- 1) In der Dynamik muss man von der Testladung Q verlangen, dass sie gegen die "felderzeugenden" Ladungen "klein" ist; formal  $\lim_{Q \rightarrow 0}$  (formal, da  $|Q| \geq e$ ).
- 2) Die Forderung, dass  $\rho(\vec{r}')$  lokalisiert ist, bedeutet  $\rho(\vec{r}') = 0$  für  $r' > R_0$ . Ist  $\rho(\vec{r}')$  lokalisiert, so ist die Existenz des Integrals in (16b) gesichert. Ist  $\rho(\vec{r}')$  nicht lokalisiert, so gilt die Formel (16b) ebenfalls, wofeme nur  $\rho(\vec{r}')$  im Unendlichen hinreichend rasch verschwindet. ●



$$\vec{E}(\vec{r}) = k_1 \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Mit Hilfe der Formel (Beweis folgt)

$$\oint_{F(V)} d^2\vec{f} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \begin{cases} 4\pi & \text{falls } \vec{r}' \text{ im Volumen } V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (*)$$

ergibt sich daraus: elektrischer Fluss durch  $F(V)$

$$\oint_{F(V)} d^2\vec{f} \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

$$= k_1 \int d^3r' \underbrace{\rho(\vec{r}') \oint_{F(V)} d^2\vec{f} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}_{\text{Ladung in } V} = k_1 4\pi \int_V d^3r' \rho(\vec{r}')$$

Coulombsches Gesetz

Integralform

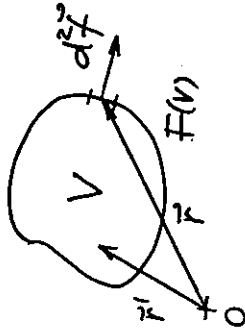
$$\oint_{F(V)} d^2\vec{f} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = k_1 4\pi \int_V d^3r' \rho(\vec{r}') \quad \forall V \quad (17)$$

differentielle Form<sup>†)</sup>

$$\text{div } \vec{E}(\vec{r}) = k_1 4\pi \rho(\vec{r})$$

<sup>†)</sup> Gaußscher Integralsatz

I-11



I-12

Ferner:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k_1 \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \Rightarrow (16b)$$

(Selbst zeigen<sup>†)</sup>)

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$$

Bemerkungen:

1) Die erhaltenen FG der Elektrostatik (Maxwellgln. der Elektrostatik)

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E}(\vec{r}) &= k_1 4\pi \rho(\vec{r}) \\ \text{rot } \vec{E}(\vec{r}) &= \vec{0} \end{aligned}$$

lineare partielle  
Dgln. 1. Ordnung

gelten auch

a) Wenn die Quellverteilung im Unendlichen nicht überall oder nicht hinreichend stark verschwindet und daher die Formel (16b) nicht anwendbar ist (z.B. unendlich langer homogener geladener Stab);

b) Wenn Formel (16b) nicht gilt, weil RB im Endlichen vorgegeben sind (z.B. lokalisierte Quellverteilung außerhalb einer Leiterkugel).

<sup>†)</sup> s. Jackson oder Greiner

Zusammenfassung:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k_1 \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

stellt die Lösung der FG  $\text{div } \vec{E}(\vec{r}) = k_1 4\pi \rho(\vec{r})$ ,

$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = 0$  für "natürliche RB" dar

(keine Quellen im Unendlichen, keine RB im Endlichen)

2) In der Dynamik bleibt die FG  $\text{div } \vec{E} = k_1 4\pi \rho$  \*)

"erhalten" (natürlich mit  $\rho(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ), hingegen

wird die FG  $\text{rot } \vec{E} = 0$  durch das Faradaysche

Induktionsgesetz  $\text{rot } \vec{E} = -k_4 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  "abgelöst".

Nachträglicher Beweis von (\*) I-11:

1) Zeige selbst:  $\text{div } \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = 0$  für  $\vec{r} \neq \vec{r}'$

2) Damit folgt:

a) liegt  $\vec{r}'$  nicht im Volumen  $V$ , so gilt

$$\oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \int_V d^3r \text{div} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = 0 \quad \checkmark$$

\*) Im Skriptum 1. Maxwellgl. genannt.

+1) Im Skriptum 4. Maxwellgl. genannt.

b) liegt  $\vec{r}'$  im Volumen  $V$ , so kann man

statt über  $F(V)$  über eine beliebige Kugelfläche mit Mittelpunkt in  $\vec{r}'$  integrieren, was bei

"Verlegung" des Ursprungs in den Kugelmittelpunkt

$$\oint_{\text{Kugelfläche}} d^2f \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \int_{[4\pi]} d\Omega r^2 \underbrace{\frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}}_1 = 4\pi \quad \checkmark$$

gibt. •

I.4.B. Gaußsche Methode zur Ausmessung von statischen Magnetfeldern

Ausmessung statischer elektrischer Felder "einfach":

1) Bestimmung der Ladung  $Q$  des feldaussendenden Teilchens (Testladung) mit Hilfe des Coulomb-Kraftgesetzes.

2) Ausmessung des elektrischen Feldes durch Bestimmung der Kraft  $\vec{F} = Q\vec{E}$  auf die Testladung.

Ausmessung statischer Magnetfelder "komplizierter":

Grund: Es gibt keine magnetischen Ladungen (Monopole).

## ⇒ Quellenfreiheit des Magnetfeldes

Integralform

$$\oint d^2f \cdot \vec{B}(F) = 0 \quad \forall V$$

differentielle Form

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B}(F) = 0}$$

(23)

Bemerkung: Die FG  $\operatorname{div} \vec{B} = 0^{+)}$  gilt auch in der Dynamik (natürlich mit  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ ). •

Feldaussmessung: Einfachstes Testobjekt:

magnetischer Punktdipol, im Experiment "kleine"

Magnethadel. Das Kraftgesetz zwischen magnetischen

(Punkt-)Dipolen ist aber sehr kompliziert!

Ausweg von Gauss (historisch: Erdmagnetfeldmessung):

Benützung des auf einen magnetischen Dipol mit

Moment  $\vec{m}$  in einem Magnetfeld  $\vec{B}_0$  wirkenden

Drehmomentes (Richtung von  $\vec{m} =$  Richtung der

Magnethadel,  $m = |\vec{m}|$  "Stärke" des Dipols)

$$\vec{N} = k_{2a} \vec{m} \times \vec{B}_0 \quad k_{2a} \text{ Maßsystem} = (19)$$

spezifische positive Konstante

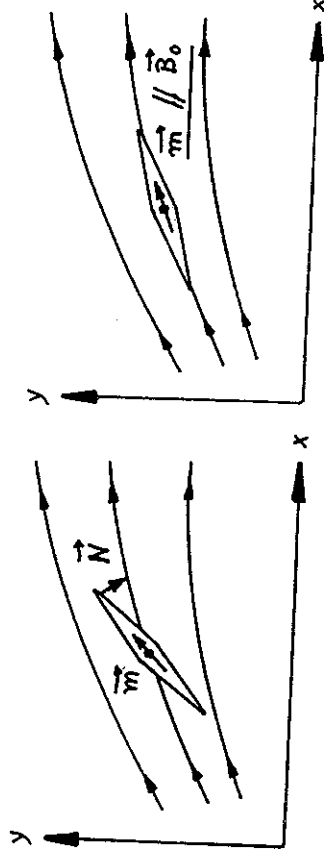
+1) Im Skriptum als 2. Maxwellgleichung bezeichnet.

I-16

Bemerkung: Index "0" bei  $\vec{B}_0$  soll nicht bedeuten, daß es sich um ein homogenes Feld handeln muß.  $\vec{B}_0$  soll die Feldstärke des auszumessenden Feldes am Ort des Dipols

sein. •

Ist der Dipol drehbar gelagert, so wird er vom Drehmoment  $\vec{N}$  in Richtung von  $\vec{B}_0$  ausgerichtet, womit die Richtung von  $\vec{B}_0$  bestimmt ist.



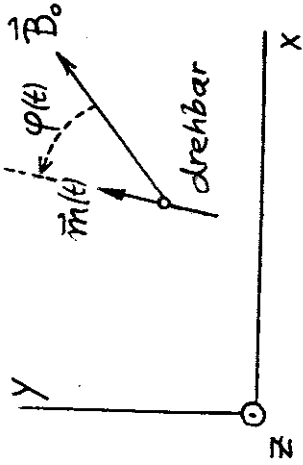
Zu bestimmen bleiben noch  $m = |\vec{m}|$ ,  $B_0 = |\vec{B}_0|$ .

1. Schritt: Bestimmung von  $m B_0$  aus

mechanischen Größen durch Untersuchung

der Schwingungen der frei drehbar

gelagerten Testmagnethadel



$\Theta$  mechan. Trägheitsmoment der Magnethöhle

$$\Theta \ddot{\varphi}(t) = N_z(t) = k_{2a} (\vec{m}(t) \times \vec{B}_0)_z \quad (20a)$$

$$= -k_{2a} m B_0 \sin \varphi(t)$$

Schwingungen um kleine Winkel untersucht:

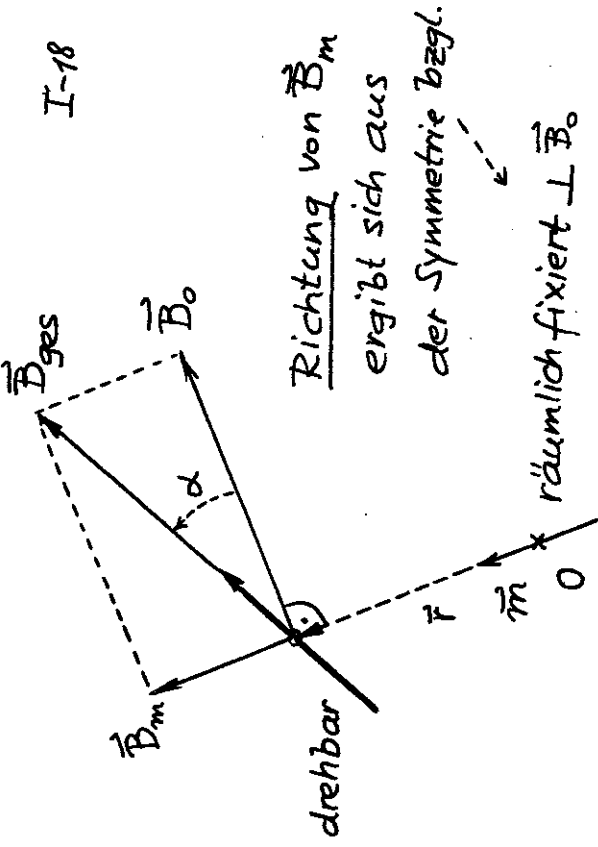
$$\sin \varphi(t) \approx \varphi(t), \quad \forall t$$

$$\ddot{\varphi}(t) + \omega^2 \varphi(t) = 0 \quad \text{mit} \quad \omega^2 = k_{2a} \frac{m B_0}{\Theta} \quad (20b)$$

$\Theta$  bekannt,  $\omega$  gemessen  
 $\Rightarrow m B_0$  bestimmt

2. Schritt: Bestimmung von  $\frac{m}{B_0}$  durch

Beobachtung der Einstellung der Richtung einer frei drehbaren weiteren Magnethöhle im Gesamtfeld  $\vec{B}_{\text{ges}} = \vec{B}_0 + \text{Dipolfeld } \vec{B}_m$  der räumlich fixierten Testmagnethöhle



Richtung von  $\vec{B}_m$  ergibt sich aus der Symmetrie bzgl.  $\vec{B}_0$

räumlich fixiert  $\perp \vec{B}_0$

a)  $\alpha$  für verschiedene Werte von  $r$  bestimmt; zeigt

$$\vec{B}_m = k_{2b} \frac{2\vec{m}}{r^3} \quad \text{Dipolfeld für } \vec{r} \parallel \vec{m} \quad (21)$$

Bemerkung: In Abschnitt IV.1.D wenden wir für einen Punktdipol im Ursprung

$$\vec{B}_m(\vec{r}) = k_{2b} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{m}}{r^5}, \quad r > 0$$

finden. •

b) Messung von  $\alpha$  für gegebenes  $r$  und Verwendung von (21):

$$\tan \alpha = \frac{B_m}{B_0} = k_{2b} \frac{2}{r^3} \frac{m}{B_0} \quad (22)$$

$\Rightarrow \frac{m}{B_0}$  bestimmt

I.4.C. Magnetfeld und Ströme

Experimente von Biot und Savart, Oersted und Ampère mit stromdurchflossenen Leitern, Spulen und drehbar aufgehängten Magnetnadeln.

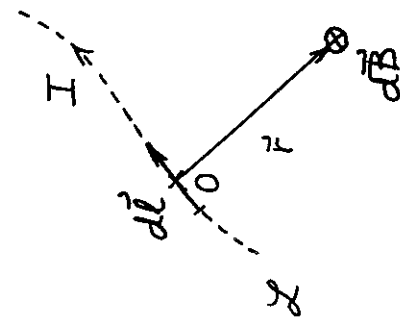
Ergebnisse in zwei Gesetzen zusammengefasst: 1. Gesetz

Biot-Savartsches Gesetz: Magnetfeld (beitrag)  
eines von einem Strom I durchflossenen  
Leiterelementes  $d\vec{l}$  im vektoriellen Abstand  $\vec{r}$

Vom Leiterelement:

$$d\vec{B} = k_3 \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (24)$$

$k_3$  maßsystemspezifische positive  
Konstante  
I zeitlich konstant

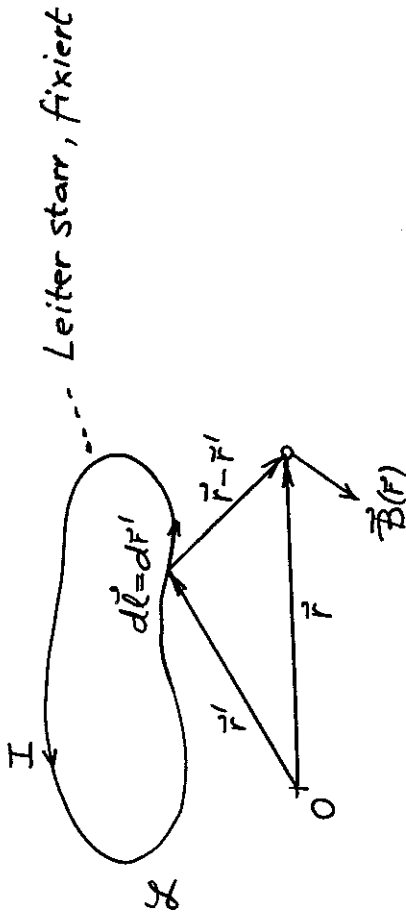


Bemerkung: Gedankliche "Anleihe"  
beim Coulombgesetz durch  
gedankliches "Zerlegen" des  
Leiters in "Elemente".  
Physikalisch tatsächlich zugänglich  
ist aber nur das vom Strom =  
durchflossenen Leiter L  
verursachte Gesamtfeld B.

Magnetfeld eines lokalisierten Strom =

durchflossenen Leiters L (zeitlich konstanter Strom I)

$$\vec{B}(\vec{r}) = k_3 \oint_L \frac{I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (24')$$



--- Leiter starr, fixiert

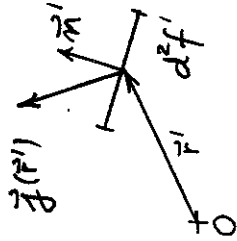
ANALOG:

Magnetfeld einer vorgegebenen lokalisierten

Stationären Stromverteilung J(F'), ... elektrische  
(Volumen) Stromdichte (24'')

$$\vec{B}(\vec{r}) = k_3 \int d^3r' \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Biot-Savart-Feld



$\vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{n}' d^2f'$  ... elektrische

Ladung, welche das Flächenelement  $d^2f'$  in der Zeiteinheit netto in der

Orientierung  
durch  $\vec{n}'$  gegeben; durchsetzt

$$\vec{B}(\vec{r}) = k_3 \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

⇒ (s. Bemerkungen)



Oersted'sches Gesetz (2. Ampèresches Gesetz)

Integralform ... magnetische Zirkulation längs  $\mathcal{C}(\mathcal{F})$

$$\oint_{\mathcal{C}(\mathcal{F})} d\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = k_3 4\pi \int_{\mathcal{F}} d^2f \cdot \vec{j}(\vec{r}) \quad \forall \mathcal{F} \quad (25)$$

differentielle Form<sup>†)</sup>

$$\text{rot } \vec{B}(\vec{r}) = k_3 4\pi \vec{j}(\vec{r}) \quad (26)$$

Der Beweis des Schrittes von (24'') zu (25) bzw. zu

(26) wird hier nicht vorgeführt. Er kann im Prinzip

Wie in der Elektrostatik beim Coulombgesetz durchgeführt werden, ist aber mathematisch verwickelter.

Bemerkungen:

1) Der Übergang von (24'') zu (25) gemäß

$$\oint_{\mathcal{C}(\mathcal{F})} d\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = k_3 \int_{\mathcal{C}(\mathcal{F})} d^3r' \oint d\vec{r} \cdot \underbrace{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}_{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \dots$$

†) Stokes'scher Integralsatz  $\left| \oint_{\mathcal{C}(\mathcal{F})} \vec{j}(\vec{r}') \cdot \underbrace{\oint_{\mathcal{C}(\mathcal{F})} \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times d\vec{r} \right]} \right.$

beinhaltet die Schwierigkeit, daß man über die Ausrechnung von

$$\oint_{\mathcal{C}(\mathcal{F})} \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times d\vec{r} \right]$$

von einem  $\int d^3r'$  zu einem  $\int_{\mathcal{F}} d^2r'$  gelangen

muß (während man im analogen elektrostatischen

Fall nur von einem  $\int d^3r'$  zu einem  $\int_V d^3r$  gelangen mußte).

2) Der Übergang von (24'') zu (26) ist zwar elementarer, wird hier aber aus Zeitgründen nicht gebracht; selbst probieren! †)

3) Leicht kann man verifizieren, daß die Divergenz von  $\vec{B}(\vec{r})$  Gl. (24'') verschwindet.

4) Bzgl. der Gültigkeit der erhaltenen FG der Magnetostatik (Maxwellgl. der Magnetostatik)

gelten analoge Bemerkungen wie in der Elektrostatik (s. I-12).

Der Ausdruck (24'') stellt die Lösung der FG der Magnetostatik für "natürliche RB" dar (keine Ströme im Unendlichen, keine RB im Endlichen).

†) s. Jackson oder Greiner

5) In der Dynamik bleibt die FG  $\text{div } \vec{B} = 0$  "erhalten" (natürlich mit  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ ), hingegen wird das Oersted'sche Gesetz  $\text{rot } \vec{B} = k_3 4\pi \vec{j}$  durch den Maxwellterm ergänzt, d.h. es wird  $\vec{j}$  durch  $\vec{j} + \frac{1}{k_1} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  ersetzt. Dies ist aus Gründen der mathematischen Konsistenz der Grundgl. nötig und eröffnet die Möglichkeit elm. Wellenfelder.

Abschnitt II.1.B: Ladungserhaltung:  
Kontinuitätsgleichung

$$\text{div } \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0$$

Zusammen mit  $\text{div } \vec{E}(\vec{r}, t) = k_1 4\pi \rho(\vec{r}, t)$  folgt

$$\text{div} \left[ \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{1}{k_1} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right] = 0 \quad (27)$$

und in der FG<sup>†)</sup> (Oersted'sches Gesetz mit Maxwell-Term)

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{B}(\vec{r}, t) &= k_3 4\pi \left[ \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{1}{k_1} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right] \\ &= k_3 4\pi \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{k_3}{k_1} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

herrscht mathematische Konsistenz ( $\text{div rot} \equiv 0$ ).

†) Im Skriptum 3. Maxwellgl. genannt.

2. Gesetz:

1. Ampèresches Gesetz: In einem statischen äußeren Magnetfeld  $\vec{B}$  wirkt auf ein von einem Strom  $I$  durchflossenes Leiterelement  $d\vec{\ell}$  die Kraft

$$d\vec{F} = k_4 I d\vec{\ell} \times \vec{B} \quad (29)$$

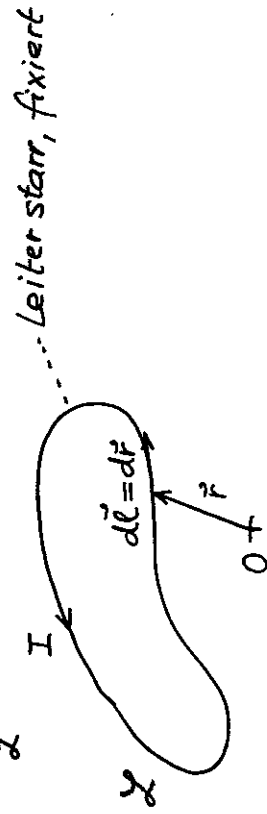
$k_4$  maßsystemspezifische positive Konstante

$I$  zeitlich konstant

Bemerkung: Physikalisch zugänglich ist nur die Gesamtkraft  $\vec{F}$  auf den stromdurchflossenen Leiter  $\mathcal{L}$ .

Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter  $\mathcal{L}$   
(zeitlich konstanter Strom  $I$ )

$$\vec{F} = k_4 \oint_{\mathcal{L}} [I d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r})]$$



Kraft auf eine lokalisierte stationäre Stromverteilung  $\vec{j}(\vec{r})$

$$\vec{F} = k_4 \int d^3r [\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})]$$

Bemerkung: In der Elektrostatik hatten wir

$$\vec{F} = \int d^3r \rho(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}).$$

In der Elektrodynamik muß man diese Formeln lediglich übernehmen und die Kräfte addieren:

Kraft auf eine lokalisierte Quellverteilung in der Dynamik

$$\vec{F}(t) = \int d^3r [\underbrace{\rho(\vec{r},t) \vec{E}(\vec{r},t) + k_4 \vec{j}(\vec{r},t) \times \vec{B}(\vec{r},t)}_{=: \vec{f}(\vec{r},t)}] \quad (31)$$

Lorentzkraftdichte •

I.4.C'. Faradaysches Induktionsgesetz

Experiment: Zeitliche Änderung des magnetischen Flusses durch eine Leiterschleife induziert in dieser einen elektrischen Strom.

Mathematische Formulierung als FG<sup>II</sup>:

Faradaysches Induktionsgesetz

Integralform elektrische Zirkulation längs  $\mathcal{C}(\mathcal{F})$

$$\oint_{\mathcal{C}(\mathcal{F})} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r},t) = -k_4 \frac{d}{dt} \underbrace{\int_{\mathcal{F}} d^2\vec{f} \cdot \vec{B}(\vec{r},t)}_{=: \Phi_m(t)} \quad (28a)$$

Extrapolation von Erfahrung!

differentielle Form

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r},t) = -k_4 \frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t} \quad (28b)$$

$k_4$  gleiche Konstante wie im 1. Ampèreschen Gesetz

I.4.D. Versuche zur Feststellung des

Äthers bzw. zur Mitführung des

Äthers durch bewegte Materie

Ätherhypothese: Elm. Felder, insbesondere elm. Wellenfelder haben eine Trägersubstanz, den Äther. Licht breitet sich im Äther außerhalb von Materie nach allen Richtungen mit der

+1) Im Skriptum als 4. Maxwellgl. bezeichnet.



Geschwindigkeit  $c$  aus. In einem materiellen Körper, der im Äther ruht, breitet sich Licht mit der Geschwindigkeit  $\frac{c}{n}$  aus ( $n$  Brechungsindex der Materie). Bewegt sich ein materieller Körper im Äther mit der Geschwindigkeit  $v$ , so hängt die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes in Bewegungsrichtung der Materie davon ab, ob der materielle Körper den Äther in seinem Inneren nicht, teilweise oder total

"mitführt":

$$\frac{c}{n} + \eta v, \quad \eta \text{ Mitführungskoeffizient}$$

$$\eta = 0 \text{ keine Mitführung}$$

$$\eta = 1 \text{ totale Mitführung}$$

$$0 < \eta < 1 \text{ teilweise Mitführung}$$

### Fizeauscher Mitführungsversuch

Wird in Abschnitt XVI.3.B ausführlich behandelt (s. Abb. 16.2).

Ergebnis: für ein transparentes Medium gilt

$$\eta = 1 - \frac{1}{n^2} + \frac{c}{n} \frac{dn}{dc}$$

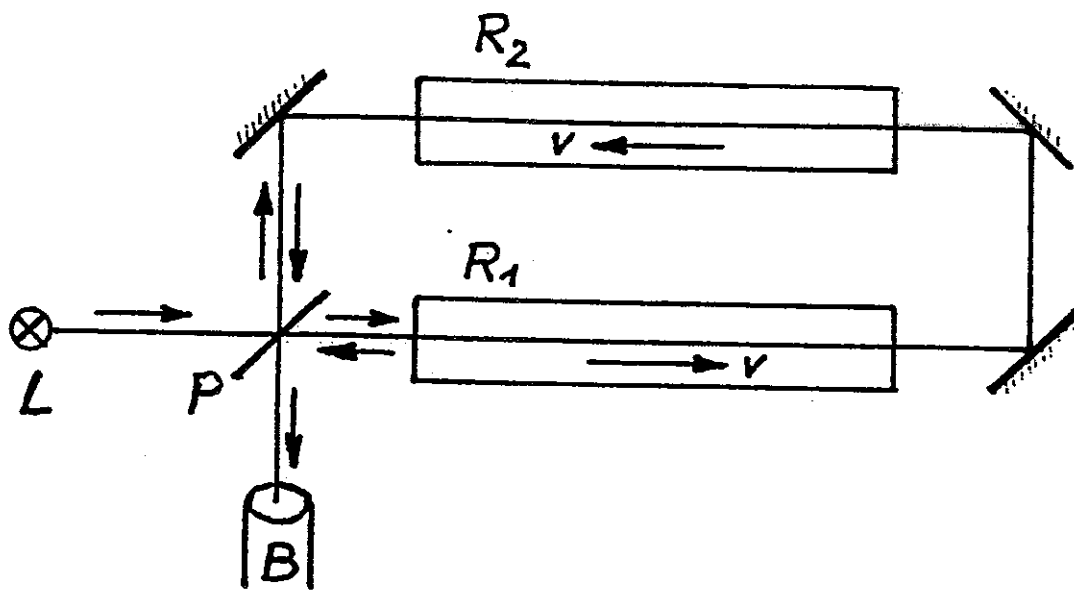


Fig. 16.2 Schematische Versuchsanordnung zur Messung des Mitführungskoeffizienten

$$\eta = 1 - \frac{1}{n^2} + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega} = \eta(\omega)$$

für Medium mit  
Dispersion!

"Der Äther müßte je nach der Farbe des Lichtes mit einer anderen Geschwindigkeit im materiellen Körper strömen. Es gäbe also so viele Äther wie Farben, und das ist doch unmöglich."  
(M. Born: Die Relativitätstheorie Einsteins)

### Michelson - Morley - Versuch

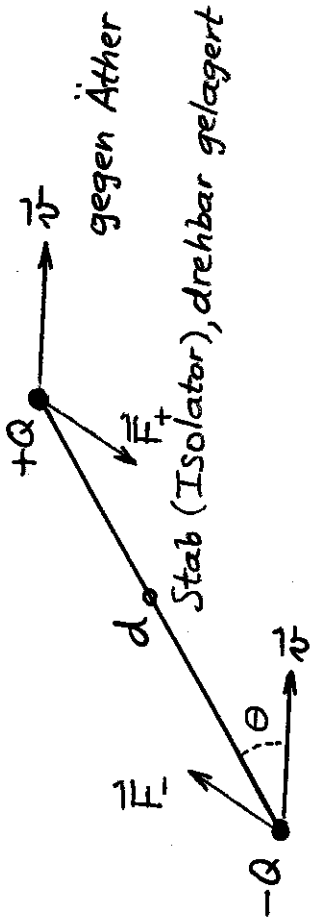
Wird in Abschnitt VIII.1.1.A ausführlich behandelt (s. Abb. 7.1).

Ergebnis (auf dem Boden der Ätherhypothesen und ohne ad-hoc-Lorentzkontraktionshypothese):

Erde "nimmt" den Äther in ihrer Umgebung total "mit".

## Trouton-Noble - Versuch

Prinzip:



gegen Äther

(In realen Experiment Plattenkondensator.)

Annahmen: Grundgleichungen der Maxwelltheorie

gelten in der bekannten Form im

Äthersystem, daher auch Lorentzkraft. ABER:

"mechanische" (elastische)

Kräfte im (fast starren) Stab

transformieren sich gemäß GT.

s. Abschnitt VI.1.C !

Drehmoment  $\vec{N}$  vom Betrag

$$N \propto \frac{Q^2 v^2 \sin \theta \cos \theta}{d}$$

müßte wirken und die Anordnung in Dreh-  
bewegung versetzen, falls  $v \neq 0$  und  $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}$ .

Ergebnis des Versuches: Unabhängig von

Tages- und Jahreszeit keine Drehbewegung.

Folgerung wie bei Michelson-Morley.

I-30

ABER:

Aberration der Fixsterne: Auf dem Boden der  
Ätherhypothese:

Könnte es nicht geben, wenn die Erde den

Äther in ihrer Umgebung "mitnimmt" !

EINSTEIN: ~~Äther~~ Vakuum (leerer Raum)

s. Spezielle Relativitätstheorie  
Kapitel VII

## I. 5 Maßsysteme in der Elektrodynamik (Vakuum)<sup>†)</sup>

Ein Beispiel:

Coulombgesetz: Man findet in der Literatur

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \epsilon^2 \rho$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Grund für diese Diskrepanzen?

Die Diskrepanzen stammen nicht – wie oft gesagt wird – von der verschiedenen Wahl der Einheiten, sondern davon, daß man verschiedene physikalische Größen gleich bezeichnet (z.B. elektrische Feldstärke) und dafür das gleiche Symbol verwendet (z.B.  $\vec{E}$ ).

<sup>†)</sup> Medium: s. Anhang B des Skriptums

physikalische Größe = Zahl mal Einheit  
gegebener Dimension

Beispiel:

Geschwindigkeit: Dimension Länge/Zeit ( $LT^{-1}$ )

$$v = 300 \text{ cm/s} = 3 \text{ m/s} = 196,8482 \text{ yard/min} = \dots$$

ABER: andere die Geschwindigkeit charakterisierende

Größe: Geschwindigkeit als

Vielfaches der Lichtgeschwindigkeit

( $3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}$ ) angegeben

andere Größe – andere Bezeichnung

anderes Symbol

"[RE]-Geschwindigkeit": dimensionslos

$$v = 300 \text{ cm/s} \text{ entspricht}$$

$$v_{[RE]} = 10^{-8}$$

physikalische Größengleichung  
= Beziehung zwischen physikalischen Größen

Beispiel: gleichförmig geradlinige Bewegung

$l$  Dimension Länge (L)

$t$  Dimension Zeit (T)

$v, v^{[RE]}$  wie zuvor

$$v = \frac{l}{t} \quad \text{ABER: } v^{[RE]} = \frac{1}{c} \frac{l}{t}$$

Zahlenbeispiel: verschiedene Formeln

$$l = 600 \text{ cm} = 6 \text{ m} = 6,5616 \text{ yard}$$

$$t = 2 \text{ s} = 0,03 \text{ min}$$

$$v = \frac{l}{t} = \frac{600 \text{ cm}}{2 \text{ s}} = 300 \text{ cm/s}$$

$$= \frac{6 \text{ m}}{2 \text{ s}} = 3 \text{ m/s}$$

$$= \frac{6,5616 \text{ yard}}{0,03 \text{ min}} = 196,8482 \text{ yard/min}$$

$$v^{[RE]} = \frac{1}{c} \frac{l}{t} = \frac{600 \text{ cm}}{3 \cdot 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 2 \text{ s}} = 10^{-8}$$

s. die weiteren Beispiele auf den Ergänzungsbildern

Analog in der Elektrodynamik

Beispiel:

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi \rho \quad \text{"Gaußsche" bzw. "[S]-Größen"}$$

$$\text{div } \vec{E}^{[m]} = 4\pi c^2 \rho^{[m]} \quad \text{"[m]-Größen"}$$

$$\text{div } \vec{E}^{[SI]} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho^{[SI]} \quad \text{"[SI]-Größen"}$$

Verschiedene Größen – verschiedene Formeln

Wahl der Einheiten

Maxwellgleichungen mit noch nicht festgelegten

Konstanten  $k_1, k_3, k_4$

$$\text{div } \vec{E} = k_1 4\pi \rho \quad (30a)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (30b)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -k_4 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (30c)$$

$$\text{rot } \vec{B} = k_3 4\pi \vec{j} + \frac{k_3}{k_1} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (30d)$$

Kraftgesetz: Lorentzkraftdichte

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + k_4 \vec{j} \times \vec{B} \quad (31)$$

Bei der Hinzunahme des Maxwellterms im Oerstedtschen Gesetz wurde die

Kontinuitätsgleichung

$$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

benützt. Wegen

$$\int_V d^3r \text{div } \vec{j} = - \frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho$$

$$\underbrace{\int_V d^3r \cdot \vec{j}}_{F(V)} = - \frac{d}{dt} \underbrace{\int_V d^3r \rho}_{\text{Ladung in } V}$$

Strom durch  $F(V)$  (nach außen)

bedeutet dies, daß wir Strom und Ladung bereits implizit durch die Größengleichung

$$\text{Strom} = \text{Ladung} / \text{Zeit} \tag{32}$$

(ohne zusätzliche Konstante) verknüpft haben.

Die Konstanten  $k_1, k_3, k_4$  (sowie  $k_{2a}, k_{2b}$ ) sind nicht völlig unabhängig wählbar.

Behauptung:

1. Schritt:  $k_1, k_3, k_4$  betrachtet

In Kapitel V werden wir sehen, daß

die Maxwellgleichungen mit  $\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -k_4 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{k_3}{k_1} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

die Ausbreitung elm. Wellen beschreiben.

$\vec{E}, \vec{B}$  genügen dann homogenen Wellengln., welche die experimentell als  $c$  bestimmte Lichtgeschwindigkeit als Wellenausbreitungsgeschwindigkeit enthalten müssen:

$$\text{rot rot } \vec{E} = -k_4 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B}$$

$$\text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = \frac{k_3}{k_1} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{k_3 k_4}{k_1} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \vec{0}$$

(analog Gl. für  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ )

⇒ Es muss  $\frac{k_1}{k_3 k_4} = c^2$  gelten.

2. Schritt:  $k_{2a}, k_{2b}$  einbezogen  
Wir stellen Dimensionsbetrachtungen an und wählen für die elektrische Ladung und das magnetische Dipolmoment dabei beliebige Einheiten  $Q_0, M_0$

Ziel: Zeigen, dass  $\left[ \frac{k_1 k_{2b}}{k_3^2 k_{2a}} \right] = L^2 T^{-2} = \text{Quadrat einer Geschwindigkeit}$  (unabh. von der Wahl der elm. Einheiten)

1)  $F = k_1 \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \Rightarrow [F] = [k_1] \frac{[Q_0^2]}{L^2} \cdot L$

Gl. (19):  $\vec{N} = k_{2a} \vec{m} \times \vec{B} \Rightarrow [F]L = [k_{2a} k_{2b}] \frac{[M_0^2]}{L^3}$

Gl. (21):  $\vec{B} = k_{2b} \frac{2\vec{m}}{r^3} \Rightarrow [k_1] \frac{[Q_0^2]}{L} = [k_{2a} k_{2b}] \frac{[M_0^2]}{L^3}$   
 $\left[ \frac{k_1}{k_{2a} k_{2b}} \right] = \left[ \frac{M_0^2}{Q_0^2} \right] \frac{1}{L^2}$

2)  $[I] = \frac{[Q_0]}{T} \Rightarrow [j] = \frac{[Q_0]}{L^2 T}$

$\text{rot } \vec{B} = k_3 4\pi \vec{j} + \dots \Rightarrow$

$\left[ \frac{[B]}{L} \right] = [k_3] \frac{[Q_0]}{L^2 T}$   
von 1):  $[B] = [k_{2b}] \frac{[M_0]}{L^3} = \left[ \frac{Q_0}{M_0} \right] \frac{L^2}{T}$

1) + 2):

$\left[ \frac{k_1}{k_{2a} k_{2b}} \right] = \left[ \frac{M_0^2}{Q_0^2} \right] \frac{1}{L^2}$   
 $\left[ \frac{k_{2b}^2}{k_3^2} \right] = \left[ \frac{Q_0^2}{M_0^2} \right] \frac{L^4}{T^2}$

$\left[ \frac{k_1 k_{2b}}{k_3^2 k_{2a}} \right] = \frac{L^2}{T^2} \checkmark$

unabhängig von Wahl der elm. Einheiten!

"Experiment":

$\frac{k_1 k_{2b}}{k_3^2 k_{2a}} = c^2$

(33')

(33), (33'): Satz:

Von den 5 Konstanten  $k_1, k_{2a}, k_{2b}, k_3, k_4$  können (und müssen) 3 Konstanten willkürlich gewählt werden, um ein Maßsystem festzulegen.

System der elektrostatischen Einheiten

(E.S.E.)

$$\text{Wahl: } k_1^{[s]} = k_{2b}^{[s]} = k_4^{[s]} = 1 \Rightarrow$$

$$k_{2a}^{[s]} = c^2, \quad k_3^{[s]} = \frac{1}{c^2}$$

(34)

 $\Rightarrow$ Maxwellgleichungen

$$\text{div } \vec{E}^{[s]} = 4\pi \rho^{[s]} \quad (35a)$$

$$\text{div } \vec{B}^{[s]} = 0 \quad (35b)$$

$$\text{rot } \vec{E}^{[s]} = - \frac{\partial \vec{B}^{[s]}}{\partial t} \quad (35d)$$

$$\text{rot } \vec{B}^{[s]} = \frac{4\pi}{c^2} \vec{j}^{[s]} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}^{[s]}}{\partial t} \quad (35c)$$

Lorentzkraftdichte

$$\vec{f} = \rho^{[s]} \vec{E}^{[s]} + \vec{j}^{[s]} \times \vec{B}^{[s]} \quad (35e)$$

Ungebräuchliches Maßsystem, deshalb nicht näher diskutiert.

System der elektromagnetischen Einheiten

(E.M.E.)

$$\text{Wahl: } k_{2a}^{[m]} = k_{2b}^{[m]} = k_4^{[m]} = 1 \Rightarrow$$

$$k_1^{[m]} = c^2, \quad k_3^{[m]} = 1$$

(36)

 $\Rightarrow$ Maxwellgleichungen

$$\text{div } \vec{E}^{[m]} = 4\pi c^2 \rho^{[m]} \quad (37a)$$

$$\text{div } \vec{B}^{[m]} = 0 \quad (37b)$$

$$\text{rot } \vec{E}^{[m]} = - \frac{\partial \vec{B}^{[m]}}{\partial t} \quad (37d)$$

$$\text{rot } \vec{B}^{[m]} = 4\pi \vec{j}^{[m]} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}^{[m]}}{\partial t} \quad (37c)$$

Lorentzkraftdichte

$$\vec{f} = \rho^{[m]} \vec{E}^{[m]} + \vec{j}^{[m]} \times \vec{B}^{[m]} \quad (37e)$$

\*

Ebenfalls ungebräuchlich.

\*1) Formal gleich wie im E.S.E.- (und SI-) System



Gaußsches System ("gemischte")

CGS-Einheiten

Elektrische Größen im E.S.E.-System und

magnetische Größen im E.M.E.-System

angegeben, d.h. \*)

Wahl:  $k_1 = k_{2a} = k_{2b} = 1 \Rightarrow$   
 $k_3 = k_4 = \frac{1}{c}$

$\Rightarrow$

<u>Maxwellgleichungen</u>	sehr "symmetrisch", $[E] = [B]$ , Relativitätstheorie FELD TENSOR!
$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho$	(41a)
$\text{div } \vec{B} = 0$	(41b)
$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	(41d)
$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	(41c)
<u>Lorentzkraftdichte</u>	(41e)
$\vec{f} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B}$	

\*) Keine eigene Kennzeichnung der Konstanten und physikalischen Größen, da "unser" System (System "des Theoretikers").

Internationales Einheitensystem (SI)

Neben den Grundeinheiten m, kg, s

(MKS-System) wird eine vierte Grundeinheit,

das Ampère (A) eingeführt, und zwar

als Einheit für den elektrischen Strom

(MKSA-System).

1 Ampère ist jene Strommenge, die beim Durchgang durch zwei unendlich lange, im Abstand von 1m parallel zueinander angeordnete, geradlinige Drähte vernachlässigbar dünnen Querschnittes zwischen den Leitern eine Kraft von  $2 \cdot 10^{-7}$  N je Meter der Doppelleitung hervorruft.

Damit sowie mit den FG  $\text{div } \vec{B}_2(\vec{r}) = 0$ ,

$\text{rot } \vec{B}_2(\vec{r}) = k_3 4\pi \vec{j}_2(\vec{r})$  und der entsprechen=

den asymptotischen Bdg. für  $\vec{B}(\vec{r})$  und

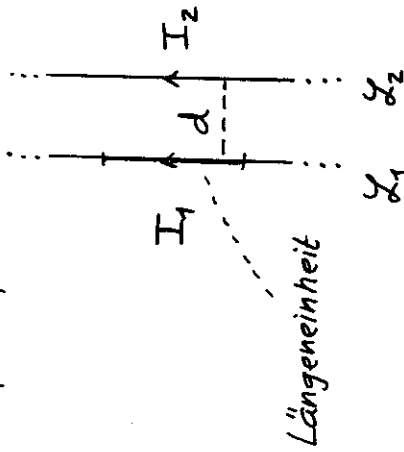
dem 1. Ampèreschen Gesetz

$$\vec{F}_{12} = k_4 \oint_{-\vec{T} \dots \vec{L}_1} [I_1 d\vec{r} \times \vec{B}_2(\vec{r})] \Rightarrow$$

$k_3 \cdot k_4$  festgelegt

I-43

liefert für den Fall



(Übungsbeispiel; s. auch Greiner) für die Kraft pro Längeneinheit

$$k_3 k_4 \frac{2 I_1 I_2}{d} \quad (39)$$

$I_1 = I_2 = 1 \text{ A}$ ,  $d = 1 \text{ m}$   
Kraft pro Längeneinheit  $2 \cdot 10^{-7} \text{ N/m}$

$$k_3 k_4 \frac{[SI]}{[SI]} = 10^{-7} \text{ N/A}^2$$

Definitionen:

$$\mu_0 := 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$$

$$\epsilon_0 := \frac{1}{c^2 \mu_0}$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

$$\Rightarrow k_3 k_4 \frac{[SI]}{[SI]} = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

I-44

Wahl:  $k_{2b} \frac{[SI]}{[SI]} = \frac{1}{4\pi}$ ,  $k_3 \frac{[SI]}{[SI]} = \frac{\mu_0}{4\pi}$ ,  $k_4 \frac{[SI]}{[SI]} = 1 \Rightarrow$   
 $k_1 \frac{[SI]}{[SI]} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0}$ ,  $k_{2a} \frac{[SI]}{[SI]} = \frac{1}{\mu_0}$

Maxwellgleichungen

$$\text{div } \vec{E} \frac{[SI]}{[SI]} = \rho \frac{[SI]}{\epsilon_0} \quad (40)$$

$$\text{div } \vec{B} \frac{[SI]}{[SI]} = 0 \quad (43a)$$

$$\text{rot } \vec{E} \frac{[SI]}{[SI]} = - \frac{\partial \vec{B} \frac{[SI]}{[SI]}}{\partial t} \quad (43b)$$

$$\text{rot } \vec{B} \frac{[SI]}{[SI]} = \mu_0 \vec{j} \frac{[SI]}{[SI]} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E} \frac{[SI]}{[SI]}}{\partial t} \quad (43c)$$

Lorentzkraftdichte

$$\vec{f} = \rho \frac{[SI]}{[SI]} \vec{E} \frac{[SI]}{[SI]} + \vec{j} \frac{[SI]}{[SI]} \times \vec{B} \frac{[SI]}{[SI]} \quad (43e)$$

Gesetzlich vorgeschriebenes Maßsystem in der Technik.

# I.5.B. Das Gaußsche System: Größen, Einheiten, Bezeichnungen

Größe	Symbol	Gaußsche Einheit	Bezeichnung
Länge	$l$	cm	Zentimeter (Basiseinheit)
Masse	$m$	g	Gramm (Basiseinheit)
Zeit	$t$	s	Sekunde (Basiseinheit)
Frequenz	$f, \nu$	s <sup>-1</sup>	Hertz (Hz)
Kraft	$\vec{F}$	g cm s <sup>-2</sup>	dyn
Kraftdichte	$\vec{f}$	g cm <sup>-2</sup> s <sup>-2</sup>	dyn/cm <sup>3</sup>
Arbeit, Energie	$W, U$	g cm <sup>2</sup> s <sup>-2</sup>	erg
Leistung	$P$	g cm <sup>2</sup> s <sup>-3</sup>	erg/s
Drehmoment	$\vec{N}$	g cm <sup>2</sup> s <sup>-2</sup>	dyn cm
elektrische Ladung	$q, Q$	g <sup>1/2</sup> cm <sup>3/2</sup> s <sup>-1</sup>	statcoulomb
elektrische Ladungsdichte	$\rho$	g <sup>1/2</sup> cm <sup>-3/2</sup> s <sup>-1</sup>	statcoulomb/cm <sup>3</sup>
elektrische Feldstärke	$\vec{E}$	g <sup>1/2</sup> cm <sup>-1/2</sup> s <sup>-1</sup>	statvolt/cm = dyn/statcoulomb
elektrisches Potential	$\phi, V$	g <sup>1/2</sup> cm <sup>1/2</sup> s <sup>-1</sup>	statvolt = statcoulomb/cm
elektrischer Strom	$I$	g <sup>1/2</sup> cm <sup>3/2</sup> s <sup>-2</sup>	statampere
elektrische Stromdichte	$\vec{j}$	g <sup>1/2</sup> cm <sup>-1/2</sup> s <sup>-2</sup>	statampere/cm <sup>2</sup>
magnetische Feldstärke	$\vec{B}$	g <sup>1/2</sup> cm <sup>-1/2</sup> s <sup>-1</sup>	Gauß (G) = dyn/statcoulomb
magnetisches Moment	$\vec{m}$	g <sup>1/2</sup> cm <sup>5/2</sup> s <sup>-1</sup>	erg/Gauß
magnetischer Fluß	$\Phi_m$	g <sup>1/2</sup> cm <sup>3/2</sup> s <sup>-1</sup>	Maxwell (Mx) = G cm <sup>2</sup>

}

aus  
Mechanik  
bekannt

Coulombgesetz  $F = \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$

I-45

## Zusammenhang zwischen einigen wichtigen Größen im Gaußschen, E.S.E.- und E.M.E.-System

Der Zusammenhang mit den Größen des E.S.E.-Systems und des E.M.E.-Systems ist durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$Q = Q^{[s]} = c Q^{[m]}, \quad \rho = \rho^{[s]} = c \rho^{[m]}, \quad \vec{E} = \vec{E}^{[s]} = \frac{1}{c} \vec{E}^{[m]}, \quad (42a)$$

$$\phi = \phi^{[s]} = \frac{1}{c} \phi^{[m]}, \quad I = I^{[s]} = c I^{[m]}, \quad \vec{j} = \vec{j}^{[s]} = c \vec{j}^{[m]}, \quad (42b)$$

$$\vec{B} = c \vec{B}^{[s]} = \vec{B}^{[m]}, \quad \vec{m} = c \vec{m}^{[s]} = \vec{m}^{[m]}, \quad \Phi_m = c \Phi_m^{[s]} = \Phi_m^{[m]}. \quad (42c)$$

I-46

# I.5.C. Das SI-System: Größen, Einheiten, Bezeichnungen

Größe	Symbol	SI Einheit	Bezeichnung
Länge	$l$	m	Meter ( <u>Grundeinheit</u> )
Masse	$m$	kg	Kilogramm ( <u>Grundeinheit</u> )
Zeit	$t$	s	Sekunde ( <u>Grundeinheit</u> )
Frequenz	$f, \nu$	$s^{-1}$	Hertz (Hz)
Kraft	$\vec{F}$	$kg\ m\ s^{-2}$	Newton (N)
Kraftdichte	$\vec{f}$	$kg\ m^{-2}\ s^{-2}$	$N/m^3$
Arbeit, Energie	$W, U$	$kg\ m^2\ s^{-2}$	Joule (J) = N m = W s
Leistung	$P$	$kg\ m^2\ s^{-3}$	Watt (W) = J/s = V A
Drehmoment	$\vec{N}$	$kg\ m^2\ s^{-2}$	N m
elektrische Ladung	$Q^{[SI]}, q^{[SI]}$	$s\ A$	Coulomb (C) = A s <span style="float: right;"><math>[Q^{[SI]}] = [I^{[SI]}] s</math></span>
elektrische Ladungsdichte	$\rho^{[SI]}$	$m^{-3}\ s\ A$	Coulomb/m <sup>3</sup>
elektrische Feldstärke	$\vec{E}^{[SI]}$	$kg\ m\ s^{-3}\ A^{-1}$	V/m = N/C
elektrisches Potential	$\phi^{[SI]}, V$	$kg\ m^2\ s^{-3}\ A^{-1}$	Volt (V) = W/A
elektrischer Strom	$I^{[SI]}$	A	Ampère ( <u>Grundeinheit</u> )
elektrische Stromdichte	$\vec{j}^{[SI]}$	$m^{-2}\ A$	Ampère/m <sup>2</sup>
magnetische Feldstärke	$\vec{B}^{[SI]}$	$kg\ s^{-2}\ A^{-1}$	Tesla (T) = N A <sup>-1</sup> m <sup>-1</sup>
magnetisches Moment	$\vec{m}^{[SI]}$	$m^2\ A$	J/T
magnetischer Fluß	$\Phi_m^{[SI]}$	$kg\ m^2\ s^{-2}\ A^{-1}$	Weber (Wb) = T m <sup>2</sup> = V s

Dimension  
ver=  
scheiden

I-47

## Zusammenhang zwischen einigen wichtigen Größen im Gaußschen und SI-System

Der Zusammenhang mit den Größen des Gaußschen Systems ist durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} Q^{[SI]}, \quad q = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} q^{[SI]}, \quad \vec{E} = \sqrt{4\pi\epsilon_0} \vec{E}^{[SI]}, \quad (44a)$$

$$\phi = \sqrt{4\pi\epsilon_0} \phi^{[SI]}, \quad I = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} I^{[SI]}, \quad \vec{j} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \vec{j}^{[SI]}, \quad (44b)$$

$$\vec{B} = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} \vec{B}^{[SI]}, \quad \vec{m} = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} \vec{m}^{[SI]}, \quad \Phi_m = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} \Phi_m^{[SI]}. \quad (44c)$$

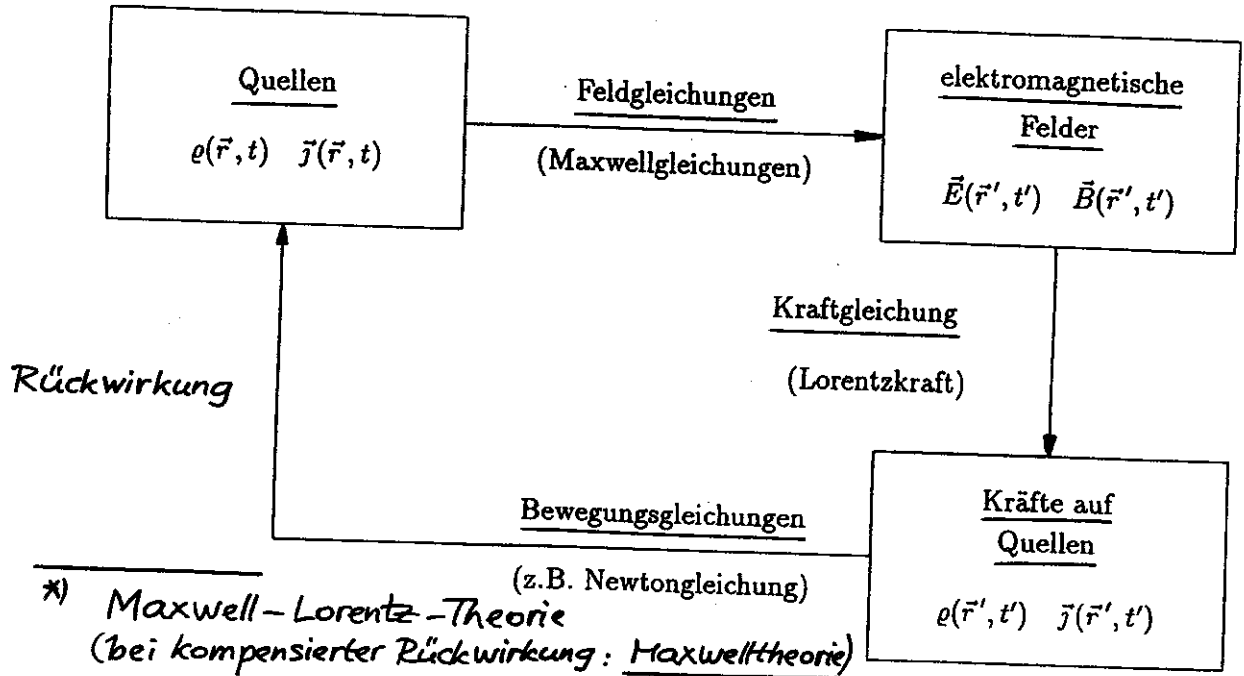
I-48

# ELEKTRODYNAMIK IM VAKUUM (MIKROSKOPISCHE ELEKTRODYNAMIK) \*

## II. GRUNDGLEICHUNGEN

### II.1. Feld-, Kraft- und Bewegungsgleichungen

#### II.1.A. Übersicht: Logisches Schema



AB  
RB

II-2

Feldgleichungen: Maxwellgleichungen

(1a)  $\text{div } \vec{E}(r, t) = 4\pi \rho(r, t)$

(1b)  $\text{div } \vec{B}(r, t) = 0$

(1d)  $\text{rot } \vec{E}(r, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(r, t)}{\partial t}$

(1c)  $\text{rot } \vec{B}(r, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(r, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(r, t)}{\partial t}$

Kraftgleichung: Lorentzkraftdichte

(2)  $\vec{f}(r, t) = \rho(r, t) \vec{E}(r, t) + \vec{j}(r, t) \times \vec{B}(r, t)$

Bewegungsgleichungen: Newtongleichungen  
(vorläufig)

(3)  $m_{(n)} \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_{(n)}(t) = \vec{F}_{(n)}(t)$

$n = 1, 2, \dots, N$

mit  $\vec{F}_{(n)}(t) = \int d^3r V(\vec{r}_{(n)}(t))$

Bemerkungen:

- 1) Die Feldstärken  $\vec{E}, \vec{B}$  lassen sich aus den Gleichungen nicht eliminieren, ein "Übergang zu einer "reinen Mechanik" ist nicht möglich (Grund: endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  der elm. Wirkungen, Abstrahlung).  
 Elektrodynamik ist eine echte Feldtheorie (Nahwirkungstheorie), das elm. Feld trägt Energie, Impuls und Drehimpuls (s. später).

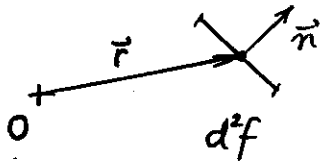
- 2) Später werden wir die Newtonschen Bewegungsgleichungen durch die relativistischen BG ersetzen (Einsteinsches Relativitätsprinzip, Spezielle Relativitätstheorie; s. Kapitel VII, VIII)

"Außer Konkurrenz" (in VO nicht behandelt)

- 3) Selbstkraftproblem! Kraftgesetze mus ebenfalls noch modifiziert werden.  
 S. F. Rohrlich: Classical Charged Particles

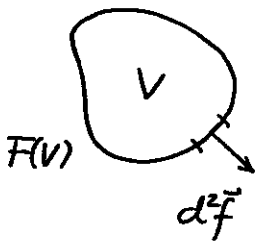
II.1.B. Maxwellgleichungen

Quellen: elektrische Ladungsdichte  $\rho(\vec{r}, t)$   
elektrische Stromdichte  $\vec{j}(\vec{r}, t)$



$\vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} d^2f \dots$  elektrische Ladung, welche zum Zeitpunkt  $t$  das Flächenelement  $d^2f$  in der Zeiteinheit netto durchsetzt

Ladungserhaltung  
 (empirische Tatsache)



$$-\frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho(\vec{r}, t) = \oint_{F(V)} d^2\vec{f} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) \Rightarrow \text{(Gauß)}$$

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \text{div} \vec{j}(\vec{r}, t) = 0$$

Kontinuitätsgleichung

(5)

II-5

Spezialfall: System mit N Punktladungen

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_{n=1}^N q_{(n)} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{(n)}(t)) \quad (6a)$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \sum_{n=1}^N q_{(n)} \vec{v}_{(n)}(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_{(n)}(t)) \quad (6b)$$

Verifiziere selbst, daß (6a,b) die KG erfüllen.

Felder: elektrisches Feld  $\vec{E}(\vec{r}, t)$   
(elektrische Feldstärke)

magnetisches Feld (Magnetfeld)  $\vec{B}(\vec{r}, t)$   
(magnetische Feldstärke, magnetische Induktion)

besser: e/m. Feld  $\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t)$   
(Spezielle Relativitätstheorie!)

Berechnung der Felder aus den Quellen  
(im Sinne des logischen Schemas) mit Hilfe  
der Feldgleichungen (Maxwellgleichungen).

Maxwellgleichungen in differentieller Form und in Integralform

II-6 Coulombsches Gesetz

$$\text{div } \vec{E}(\vec{r}, t) = 4\pi \rho(\vec{r}, t)$$

$$\oint_{F(V)} d^2\vec{f} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 4\pi \int_V d^3r \rho(\vec{r}, t) \quad (4a)$$

Quellenfreiheit des Magnetfeldes  
(Nichtexistenz magnetischer Monopole)

$$\text{div } \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$$

$$\oint_{F(V)} d^2\vec{f} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (4b)$$

Faradaysches Induktionsgesetz

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\oint_{\mathcal{F}} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}} d^2\vec{f} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (4c)$$

magnet. Fluß durch  $\mathcal{F}$

Verkettungsterm = Induktionsterm

Ampèresches Durchflutungsgesetz (Oerstedtsches Gesetz + Maxwellterm)

$$\text{rot } \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\oint_{\mathcal{F}} d\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \int_{\mathcal{F}} d^2\vec{f} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t)$$

Verkettungsterm = Maxwellterm  
(historisch:  $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$  "Verschiebungsstrom")

$$+ \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}} d^2\vec{f} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (4d) \quad \forall \mathcal{F}$$

(4a), (4c):

$$\underbrace{\text{div rot } \vec{B}}_0 = \frac{4\pi}{c} \text{div } \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\text{div } \vec{E}}_{4\pi\rho}$$

$$= \frac{4\pi}{c} \left( \text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$

Somit:

Mathematisch betrachtet ist die Kontinuitätsgl.  
Integrabilitätsbedingung der Maxwellgl.

### II.1.C. Lorentzkraft

Kraft auf eine Punktladung  $q$ , welche sich  
 mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$  längs der  
 Bahn  $\vec{r}(t)$  bewegt:

$$\vec{F}(t) = \int d^3r \vec{j}(\vec{r}, t)$$

$$V(\vec{r}(t))$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\vec{j}(\vec{r}, t)}{c} \times \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (7)$$

$$\rho(\vec{r}, t) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}(t)), \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{v}(t) \rho(\vec{r}, t)$$

$$\Rightarrow \text{Lorentzkraft}$$

$$\vec{F}(t) = q \left[ \vec{E}(\vec{r}(t), t) + \frac{\vec{v}(t)}{c} \times \vec{B}(\vec{r}(t), t) \right] \quad (8)$$

$$\vec{F}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t)$$

↑  
Selbstkraftproblem!

### II.1.D. Bewegungsgleichungen

Teilchenindex (m) weglassen

nichtrelativistische Näherung: Newtongleichungen

mit Lorentzkraft

$$m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(t) = \int d^3r \vec{j}(\vec{r}, t) \quad (9)$$

$$V(\vec{r}(t))$$

Für Punktteilchen

$$m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = q \left[ \vec{E}(\vec{r}(t), t) + \frac{\vec{v}(t)}{c} \times \vec{B}(\vec{r}(t), t) \right]$$

### II.2 Potentiale und Eichtransformationen

Maxwellgl.

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho \quad \text{rot } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Simultansystem von 8 linearen partiellen Dgl.

1. Ordnung für 6 Feldgrößen ( $E_x, E_y, E_z,$

$B_x, B_y, B_z$ )

Bemerkung: Terminologie homogene MX-Gln.

↓

inhomogene MX-Gln.

in der Literatur uneinheitlich.



Wichtig für das praktische Lösen (insbesondere bei gegebenen Quellen):

Die besondere mathematische Form der keine

Quellterme enthaltenden  $\text{Mx-Gln. (4a,d)}$ , d.h. der Gln.

$$\text{div } \vec{B}(\vec{r},t) = 0 \quad \text{rot } \vec{E}(\vec{r},t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t} = \vec{0},$$

gestaltet es, von den  $\text{Mx-Gln. (4a,b,c,d)}$

zu einem Simultansystem von 4 linearen partiellen

Dgln. 2. Ordnung für 4 Feldgrößen ("Potentiale")

überzugehen

oder

zu 4 untereinander nicht gekoppelten linearen

partiellen Dgl. 2. Ordnung für diese 4 Feldgrößen

und einer die Feldgrößen koppelnden

partiellen Dgl. 1. Ordnung ("Nebenbedingung")

überzugehen etc.

Bemerkung: Die  $\text{Mx-Gln. (4a,d)}$  sind mathematisch

teilweise redundant:

$$\text{div} \quad \left| \quad \text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \right.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{B}(\vec{r},t) = 0$$

$\Rightarrow$  statt  $\text{div } \vec{B}(\vec{r},t) = 0$  zu fordern,

würde es genügen zu verlangen, dass

$\text{div } \vec{B}(\vec{r},t_0) = 0$ ,  $t_0$  beliebig fest, gilt.

Einführung der elm. Potentiale

$\phi(\vec{r},t)$  skalares Potential

$\vec{A}(\vec{r},t)$  Vektorpotential

Ansatz:

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r},t)$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\text{grad } \phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

(11a)

(11b)

Damit (4a,d) identisch erfüllt ("gelöst"), d.h. man kann (4a,d) "vergessen":

$$\text{div } \vec{B} = \text{div rot } \vec{A} = 0 \quad \checkmark$$

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot grad } \phi$$

$$- \text{rot } \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A} = \vec{0} \quad \checkmark$$

Bestimmungsgleichungen für die Potentiale  $\phi, \vec{A}$ :

Einsetzen des Ansatzes in (4b,c)

$$(4b): \quad \text{div } \vec{E} = 4\pi \rho \quad (12a)$$

$$- \underbrace{\text{div grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A}}_{\Delta \phi} = 4\pi \rho$$

ABER:  $(\star \vec{a})_i = \Delta(a_i)$  "gewöhnlicher"  $\Delta$

für  $i = x, y, z$  kartesische Vektorkomponenten

(nicht z.B. für  $i = r, \vartheta, \varphi$ !)

Wir können also statt  $\star \vec{a}$  einfach  $\Delta \vec{a}$  schreiben und  $\Delta$  als "gewöhnlichen"

Laplaceoperator verstehen, wenn wir vereinbaren, Gln., in denen  $\Delta \vec{a}$  vorkommt, nur nach kartesischen Vektorkomponenten zu zerlegen.

$$-\text{rot rot } \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \text{grad } \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{4\pi \epsilon}{c} \vec{j}$$

$$\underline{\Delta \vec{A} - \text{grad div } \vec{A}}$$

$$\underline{\square \vec{A} - \text{grad} \left( \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi \epsilon}{c} \vec{j}}$$

SOMIT:

Feldgleichungen für die elm. Potentiale:

$$\square \phi(r,t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \text{div } \vec{A}(r,t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi(r,t)}{\partial t} \right) = -4\pi \rho(r,t)$$

$$\square \vec{A}(r,t) - \text{grad} \left( \text{div } \vec{A}(r,t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi(r,t)}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi \epsilon}{c} \vec{j}(r,t)$$

Simultansystem von 4 part. Dgl. 2. Ordnung für  $\phi, \vec{A}$ : auch "nicht berauschend einfach" (13a,b)

$$\Delta \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{div } \vec{A} = -4\pi \rho$$

Definition: Quablaoperator (d'Alembertoperator, Wellenoperator)

$$\square := \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (17)$$

Beachte: Wird oft (z.B. bei Landau/Lifschitz) mit umgekehrtem Vorzeichen definiert.

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -4\pi \rho$$

$$\square \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -4\pi \rho$$

(4c):  $\text{rot } \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi \epsilon}{c} \vec{j}$

$\text{rot } \vec{A} \quad \text{--- grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$$\text{rot rot } \vec{A} + \text{grad } \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi \epsilon}{c} \vec{j}$$

Formel aus Vektoranalysis:

$$\text{rot rot } \vec{a} = \text{grad div } \vec{a} - \Delta \vec{a}$$

Bemerkung: Vektorlaplace, auch  $\star \vec{a}$  geschrieben

$$\star := \text{grad div} - \text{rot rot}$$

Eichtransformationen

$\psi(\vec{r}, t)$  beliebige stetig differenzierbare Funktion  
von  $x, y, z, t$ : Eichfunktion

Satz: Die aus  $\phi, \vec{A}$  durch die Transformation

$$\begin{aligned} \vec{A}'(\vec{r}, t) &= \vec{A}(\vec{r}, t) - \text{grad} \psi(\vec{r}, t) \\ \phi'(\vec{r}, t) &= \phi(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

Eichtransformation  
(14a, b)

hervorgehenden Potentiale  $\phi', \vec{A}'$  liefern dieselben Feldstärken  $\vec{E}, \vec{B}$  wie die Potentiale  $\phi, \vec{A}$ .

Beweis:

$$\text{rot} \vec{A}' = \text{rot} \vec{A} - \underbrace{\text{rot grad} \psi}_{\vec{0}} = \vec{B} \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} -\text{grad} \phi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} &= -\text{grad} \phi - \text{grad} \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ &\quad - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad} \psi \\ &= \vec{E} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Resümee: Selbst wenn man die Lösung der Maxwell-Gln. durch Hinzunahme der der physikalischen Situation entsprechenden Anfangs- oder Randbedingungen für  $\vec{E}, \vec{B}$  eindeutig festlegt ( $\vec{E}, \vec{B}$  eindeutig bestimmt), sind die zugehörigen Potentiale unendlich unbestimmt.

$\Rightarrow$  Mathematischer Vorteil: Freiheit in der Wahl der Potentiale kann zur Vereinfachung der Bestimmungsgln. für die Potentiale genutzt werden, indem man eine  $\text{div} \vec{A}$  enthaltende Nebenbedingung vorschreibt.

Beachte:  $\text{rot} \vec{A} = \vec{B}$ , also  $\text{rot} \vec{A}$  bereits "fixiert" •

## II.2.B. Lorenzgleichung<sup>†)</sup> (Index L)

Nebenbedingung: Lorenzkonvention

$$\text{div} \vec{A}_L(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi_L(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (15)$$

<sup>†)</sup> Geht auf L. Lorenz (Däne), nicht auf H. A. Lorentz (Holländer) zurück!

(13a,b):

$$\begin{aligned} \square \phi_L + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{A}_L + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi_L}{\partial t}) &= -4\pi \rho \\ \square \vec{A}_L - \text{grad} (\text{div} \vec{A}_L + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi_L}{\partial t}) &= -\frac{4\pi \vec{j}}{c} \end{aligned}$$

Somit:

Feldgl. für die elm. Potentiale in Lorenzzeitung:

$$\square \phi_L(\vec{r}, t) = -4\pi \rho(\vec{r}, t) \quad (16a)$$

$$\square \vec{A}_L(\vec{r}, t) = -\frac{4\pi \vec{j}}{c}(\vec{r}, t) \quad (16b)$$

$$\text{div} \vec{A}_L(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi_L(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (15)$$

(16a) } inhomogene Wellengl., untereinander nicht  
 (16b) } gekoppelt

Man muss aber beim praktischen Lösen solche Partikulärintegrale von (16a,b) "kombinieren", welche die Nebenbedingung (15) erfüllen, d.h. man darf (15) nicht "vergessen"!

Satz 1: Sind  $\phi, \vec{A}$  irgendwelche Potentiale, welche die FG (13a,b) erfüllen, und ist die Eichfunktion Lösung der Wellengleichung

$$\square \psi(\vec{r}, t) = \text{div} \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (18)$$

so sind die Potentiale

$$\vec{A}'_L(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) - \text{grad} \psi(\vec{r}, t)$$

$$\phi'_L(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

Potentiale in Lorenzzeitung.

Beweis:

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{A}'_L + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi'_L}{\partial t} &= \text{div} \vec{A} - \Delta \psi \\ &+ \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \\ &= \text{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \square \psi = 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt auch der

Satz 2: Sind  $\phi, \vec{A}$  Potentiale in Lorenzzeitung,

so führt eine Eichtransformation mit einer Eichfunktion  $\psi$ , welche Lsg. von  $\square \psi(\vec{r}, t) = 0$  ist, wieder auf Potentiale in Lorenzzeitung.

Vorschreiben der Lorenzkonvention als Nebenbedingung führt also zu einer Einschränkung der allgemeinen Eichtransformationen ( $\psi$  beliebig) auf die residualen Eichtransformationen mit  $\square\psi = 0$ , die Potentiale sind aber nach wie vor unendlich unbestimmt (Eichklasse).

II.2.C. Coulombbeziehung (Strahlungseichung)

Potentiale mit  $\phi_c, \vec{A}_T$  bezeichnet

Coulomb transversal

(Gründe: s. später)

Nebenbedingung:

$$\text{div } \vec{A}_T(F,t) = 0 \tag{19}$$

(19a,b):

$$\square\phi_c + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{A}_T + \frac{1}{c} \frac{\partial\phi_c}{\partial t}) = -4\pi\rho$$

$$\square\vec{A}_T - \text{grad} (\underbrace{\text{div } \vec{A}_T + \frac{1}{c} \frac{\partial\phi_c}{\partial t}}_0) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$\Delta\phi_c$

Feldgl. für die elm. Potentiale in Coulombbeziehung:

$$\Delta\phi_c(F,t) = -4\pi\rho(F,t) \tag{20a}$$

$$\square\vec{A}_T(F,t) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_T(F,t) \tag{20b-1}$$

mit  $\vec{j}_T(F,t) = \vec{j}(F,t) - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \phi_c(F,t)$

$$\text{div } \vec{A}_T(F,t) = 0 \tag{19}$$

(20a) Poissongl. (inhomogene Laplacegl.) wie in der Elektrostatik; deshalb  $\phi_c$  ↑

(20b) inhomogene Wellengl. mit  $\vec{j}_T(F,t)$  als "Quelle": transversaler Strom; es gilt

$$\text{div } \vec{j}_T(F,t) = \text{div } \vec{j}(F,t) + \frac{\partial\rho(F,t)}{\partial t} = 0$$

Bevor man (20b) unter der Nebenbedingung (19) lösen kann, muss man (20a) gelöst haben.

$$\vec{E}(F,t) = \underbrace{-\text{grad } \phi_c(F,t)}_{=: \vec{E}_c(F,t)} - \frac{1}{c} \underbrace{\frac{\partial\vec{A}_T(F,t)}{\partial t}}_{=: \vec{E}_T(F,t)} \tag{22}$$

Coulombanteil      induzierter transversaler oder Anteil

II-19

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &= -\text{grad } \phi_C(\vec{r},t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_T(\vec{r},t)}{\partial t} \\ &= \vec{E}_C(\vec{r},t) + \vec{E}_T(\vec{r},t) \end{aligned}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \text{rot } \vec{A}_T(\vec{r},t)$$

Beachte: Max-Gln. für  $\vec{E}_C, \vec{E}_T, \vec{B}$

$$\text{div } \vec{E}_C(\vec{r},t) = 4\pi \rho(\vec{r},t)$$

$$\text{rot } \vec{E}_C(\vec{r},t) = \vec{0}$$

$$\text{div } \vec{E}_T(\vec{r},t) = 0$$

$$\text{rot } \vec{E}_T(\vec{r},t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B}(\vec{r},t) = 0$$

$$\text{rot } \vec{B}(\vec{r},t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r},t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

Rest analog wie im Abschnitt II.2.B, deshalb kurz gefasst (Beweise selbst ausführen!).

II-20  
Satz 1: Sind  $\phi, \vec{A}$  irgendwelche Potentiale, welche die FG (13a,b) erfüllen, und ist die Eichfunktion Lösung der Dgl.

$$\Delta \psi(\vec{r},t) = \text{div } \vec{A}(\vec{r},t), \quad (24)$$

So sind die Potentiale

$$\vec{A}_T(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) - \text{grad } \psi(\vec{r},t)$$

$$\phi_C(\vec{r},t) = \phi(\vec{r},t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi(\vec{r},t)}{\partial t}$$

Potentiale in Coulombbeziehung.

Satz 2: Sind  $\phi, \vec{A}$  Potentiale in Coulombbeziehung, so führt eine Eichtransformation mit einer Eichfunktion, welche Lsg. von  $\Delta \psi(\vec{r},t) = 0$  ist, wieder auf Potentiale in Coulombbeziehung.

Vorschreiben von  $\text{div } \vec{A} = 0$  als Nebenbedingung führt also zu einer Einschränkung der allgemeinen Eichtransformationen ( $\psi$  beliebig) auf die residualen Eichtransformationen mit  $\Delta \psi = 0$ , die Potentiale sind aber nach wie vor unendlich unbestimmt (Eichklasse).

Coulomb

transversal  
bzw.

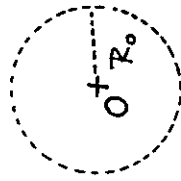
induziert

## II.3 Berechnung des elm. Feldes

einer vorgegebenen lokalisierten

Quellverteilung<sup>†</sup> (natürliche RB)

Lokalisierte Quellverteilung (im engeren Sinn):



$$\rho(\mathbf{r}', t') = 0$$

$$\text{für } r' > R_0, \forall t'$$

$$\vec{j}(\mathbf{r}', t') = \vec{0}$$

Das von einer solchen Quellverteilung physikalisch verursachte Feld ist gesucht.

Um die entsprechende Lösung der Maxwellgl. festzulegen, muß man zu den Maxwellgl.

eine geeignete asymptotische Bedingung

hinzunehmen:

Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung

Diese gewährleistet die Erfüllung der "natürlichen RB", daß die Feldstärken im Unendlichen verschwinden,

und asymptotisch nur auslaufende Wellen vorhanden sind.

Mathematisch kompliziert, hier nicht gebracht;  
s. H. Stumpf / W. Schuler: Elektrodynamik.

†) Maxwelltheorie für lokalisierte Quellen

HIER: Spezielle Partikulärlösungen der Maxwellgl.

betrachtet, eine davon "intuitiv" als

Lösung der gestellten Aufgabe "erkennt".

## II.3.A. Fouriertransformierte Maxwellgl'n.

Komplexes "vierdimensionales" Fourierintegral:

$$\vec{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^4} d^3\mathbf{k} d\omega e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\omega t} \vec{E}(\mathbf{k}, \omega) \quad (25)$$

$$\vec{E}(\mathbf{k}, \omega) = \int_{\mathbb{R}^4} d^3\mathbf{r} dt e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{i\omega t} \vec{E}(\mathbf{r}, t) \quad (26)$$

$\vec{B}, \rho, \vec{j}$  analog

$$(\vec{E}(\mathbf{r}, t))^* = \vec{E}(\mathbf{r}, t) \Rightarrow (\vec{E}(\mathbf{k}, \omega))^* = \vec{E}(-\mathbf{k}, -\omega) \quad (29)$$

$\Rightarrow$  Darstellung als Integral über positive

("physikalische") Frequenzen

$$\vec{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \vec{E}(\mathbf{k}, \omega) + \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^0 d\omega e^{-i\omega t} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \vec{E}(\mathbf{k}, \omega) + \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^{+\infty} d\omega e^{i\omega t} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \vec{E}(-\mathbf{k}, -\omega)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{E}(\vec{k}, \omega) + c.c. \quad (30)$$

Fouriertransformierte Maxwellgl'n.:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^4} d^3k d\omega e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \vec{E}(\vec{k}, \omega)$$

Somit:

$$\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$$

unter dem Integral

$\Rightarrow$

$$\text{div } \vec{E}(\vec{r}, t) = 4\pi \rho(\vec{r}, t), \text{ d.h. } \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 4\pi \rho(\vec{r}, t)$$

$$\rightarrow i\vec{k} \cdot \vec{E}(\vec{k}, \omega) = 4\pi \rho(\vec{k}, \omega)$$

$$\text{bzw. } \vec{k} \cdot \vec{E}(\vec{k}, \omega) = -i 4\pi \rho(\vec{k}, \omega)$$

$$\text{rot } \vec{B}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t), \text{ d.h.}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t)$$

$$\rightarrow i\vec{k} \times \vec{B}(\vec{k}, \omega) + i \frac{\omega}{c} \vec{E}(\vec{k}, \omega) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{k}, \omega)$$

$$\text{bzw. } \vec{k} \times \vec{B}(\vec{k}, \omega) + \frac{\omega}{c} \vec{E}(\vec{k}, \omega) = -i \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{k}, \omega)$$

Restliche Maxwell-Gln. analog.

Fouriertransformierte Maxwellgl'n.:

$$\vec{k} \cdot \vec{E}(\vec{k}, \omega) = -i 4\pi \rho(\vec{k}, \omega) \quad (27a)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B}(\vec{k}, \omega) = 0 \quad (27b)$$

$$\vec{k} \times \vec{E}(\vec{k}, \omega) - \frac{\omega}{c} \vec{B}(\vec{k}, \omega) = \vec{0} \quad (27d)$$

$$\vec{k} \times \vec{B}(\vec{k}, \omega) + \frac{\omega}{c} \vec{E}(\vec{k}, \omega) = -i \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{k}, \omega) \quad (27c)$$

KG:

$$\text{div } \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0 \rightarrow \vec{k} \cdot \vec{j}(\vec{k}, \omega) - \omega \rho(\vec{k}, \omega) = 0 \quad (28)$$

II.3.B. Spezielle Greensche Funktionen <sup>†)</sup>

des Quasiparators (d.h. für die inhomogene Wellengleichung)

$$\square D(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') \quad (31)$$

(31)

Sind keine AB und keine RB im Endlichen gegeben, so können die Lsgn. von (31) wegen der Homogenität und Isotropie des Raumes und der Homogenität der Zeit nur von

$$|\vec{r} - \vec{r}'|, \quad t - t'$$

†) George Green

abhängen. Solche Lsgn. interessieren uns!



Berechnung Greenscher Funktionen  $D(|\vec{r}-\vec{r}'|, t-t')$

$$D(|\vec{r}-\vec{r}'|, t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^4} d^3k d\omega e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} e^{-i\omega(t-t')} D(\vec{k}, \omega) \quad (34)$$

$$\delta(|\vec{r}-\vec{r}'|) \delta(t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^4} d^3k d\omega e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} e^{-i\omega(t-t')} \quad (35)$$

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow (i\vec{k})^2 - \frac{(-i\omega)^2}{c^2} = -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\square D(|\vec{r}-\vec{r}'|, t-t') = -4\pi \delta(\vec{r}-\vec{r}') \delta(t-t') \rightarrow$$

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) D(\vec{k}, \omega) = 4\pi \Rightarrow D(\vec{k}, \omega) = \frac{4\pi}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (36)$$

algebraische Gl. (!)

Bemerkung: Da die Lsg. für  $D(\vec{k}, \omega)$  eindeutig bestimmt ist, könnte man meinen, daß es auch die Lsg.  $D(|\vec{r}-\vec{r}'|, t-t')$  ist. Diese ist aber nur bis auf ein  $D_{\text{hom}}(|\vec{r}-\vec{r}'|, t-t')$  mit  $\square D_{\text{hom}} = 0$  bestimmt!

Woher kommt die scheinbare Diskrepanz?

$$D(|\vec{r}-\vec{r}'|, t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')} \frac{4\pi}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}}$$

Da der Integrand des  $\omega$ -Integrals als Funktion einer komplexen

Variablen  $\omega$  bis auf diese Pole

auf der reellen Achse im Endlichen

überall regulär ist, kann man durch

Deformation des Integrationsweges von

der reellen Achse weg in die komplexe

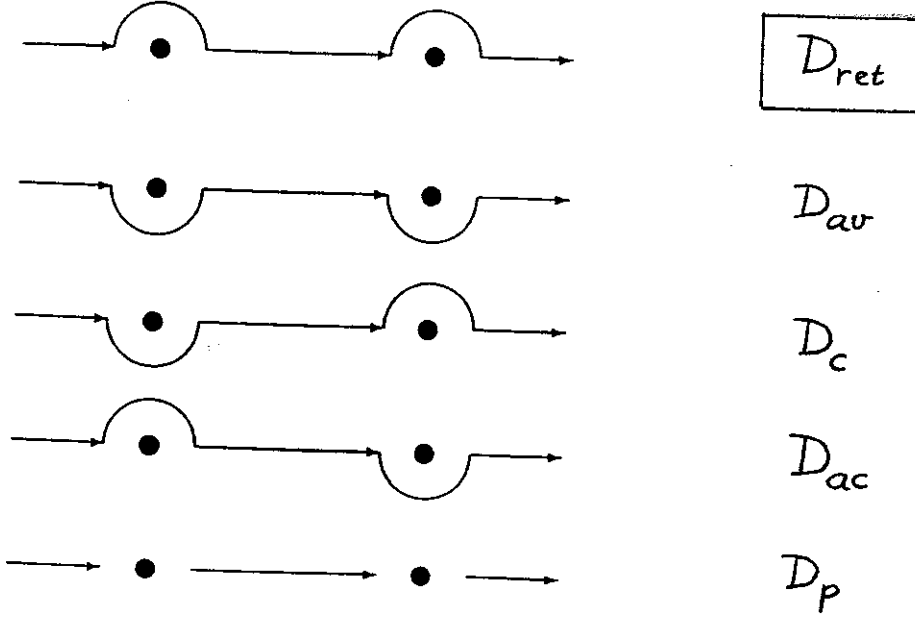
$\omega$ -Ebene ein eindeutiges Ergebnis erhalten,

das nur von der Topologie der Deformation

abhängt (Cauchyscher Integralsatz).

Pole des Integranden bei  $\omega = \pm ck = \pm c|\vec{k}|$  !

Mögliche Integrationswege für  $\omega$ -Integration:



Wir berechnen hier nur  $D_{ret}(|\mathbf{F}-\mathbf{F}'|, t-t')$ .

Grund: Im Rahmen der Lorenzgleichung wird

$D_{ret}(|\mathbf{F}-\mathbf{F}'|, t-t')$  gerade jene Lsg.

für die elm. Potentiale liefern (sog.

retardierte Potentiale  $\phi_{ret}(r|t), \mathbf{A}_{ret}(r|t)$ ),

welche die physikalisch richtige Lösung

für die gestellte Grundaufgabe

(elm. Feld vorgegebener Quellen) ergibt.

Bemerkungen:

1) Die Differenz zweier der oben angegebenen Greenschen Funktionen, z.B.  $D_{ret} - D_{av}$ , ist Lsg. der homogenen Wellengleichung.

$D_{ret} - D_{av}$  spielt bei der Berechnung der korrekten Selbstkraft eine Rolle, weshalb

auch  $D_{av}$  für die Elektrodynamik interessant ist!

2) Linearkombinationen der Form  $\alpha D_{ret} + (1-\alpha)D_{av}$ ,

$\alpha \in \mathbb{R}$ , stellen ebenfalls Greensche Funktionen

$D(|\mathbf{F}-\mathbf{F}'|, t-t')$  dar, womit man nicht abzähl=

bar unendlich viele derartige Greensche

Funktionen erhält. ●

# Retardierte Greenfunktion

$$D_{\text{ret}}(|\vec{r}-\vec{r}'|, t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} \int_{\text{nn} \rightarrow} d\omega e^{-i\omega(t-t')} \frac{4\pi}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (38)$$

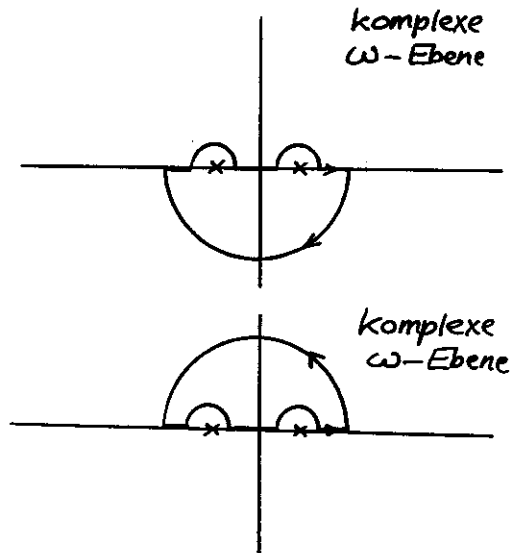
$$D_{\text{ret}}(r, t) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \int_{\text{nn} \rightarrow} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

$\omega = \omega_r + i\omega_i$   
komplexe Variable

$$e^{-i\omega t} = e^{-i\omega_r t} \underbrace{e^{\omega_i t}}_{=: F(k, t)}$$

$t > 0$ : strebt in der unteren Halbebene  
im Unendlichen gegen null  
( $\omega_i \rightarrow -\infty$ )

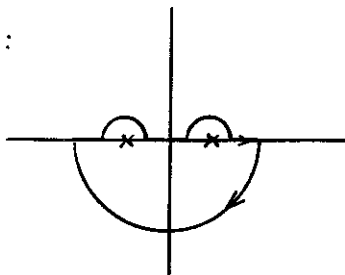
$t < 0$ : strebt in der oberen Halbebene  
im Unendlichen gegen null  
( $\omega_i \rightarrow +\infty$ )



II-29

$$F(k, t) = \int_{\text{nn} \rightarrow} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} =: f(k, t, \omega) \equiv f(\omega)$$

$t > 0$ :



$$\oint_{\text{nn} \rightarrow} d\omega f(\omega) = \int_{\text{nn} \rightarrow} d\omega f(\omega) = -2\pi i [\text{Res} f(\omega) + \text{Res} f(\omega)]$$

$\omega = -ck \quad \omega = +ck$

$$\text{Res} f(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow -ck} [(\omega + ck) \frac{e^{-i\omega t}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}] = \frac{c}{2k} e^{ickt}$$

Residuensatz

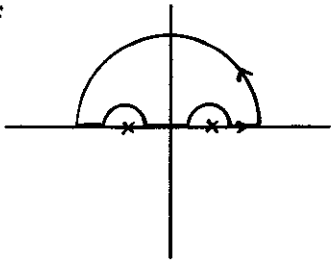
$$\text{Res} f(\omega) = -\frac{c}{2k} e^{-ickt}$$

$\omega = +ck$

$$\int_{\text{nn} \rightarrow} d\omega f(\omega) = -2\pi i \frac{c}{2k} [e^{ickt} - e^{-ickt}] \quad \text{für } t > 0$$

II-30

$t < 0$ :



$$\oint_{\text{nn}} d\omega f(\omega) = \int_{\text{nn}} d\omega f(\omega) = 0$$

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad (4c)$$

Somit:

$$F(k, t) = \int_{\text{nn}} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = -2\pi i \frac{c}{2k} \underbrace{[e^{ickt} - e^{-ickt}]}_{\dots} \Theta(t)$$

$$D_{\text{ret}}(r, t) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} F(k, t) = -\frac{i}{(2\pi)^2} c \Theta(t) \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \frac{1}{k} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} [\dots]$$

$\vec{k}$ -Integration: Polarachse in Richtung von  $\vec{r}$  gelegt:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = kr \cos \vartheta, \quad d^3k = 2\pi k^2 dk \sin \vartheta d\vartheta$$

$$D_{\text{ret}}(r, t) = -\frac{i}{2\pi} c \Theta(t) \int_0^{+\infty} dk k [\dots] \int_{-1}^{+1} d\xi e^{i k r \xi} \frac{e^{i k r} - e^{-i k r}}{i k r}$$

$$D_{\text{ret}}(r, t) = -\frac{1}{2\pi} \frac{c}{r} \Theta(t) \int_0^{+\infty} dk [e^{ickt} - e^{-ickt}] [e^{i k r} - e^{-i k r}]$$

$$\int_0^{+\infty} dk [e^{ik(r+ct)} - e^{ik(r-ct)}]$$

$$+ \int_0^{+\infty} dk [e^{-ik(r+ct)} - e^{-ik(r-ct)}]$$

2. Term:  $\int_{-\infty}^0 dk [e^{ik(r+ct)} - e^{ik(r-ct)}]$

$$D_{\text{ret}}(r, t) = -\frac{c}{r} \Theta(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk [e^{ik(r+ct)} - e^{ik(r-ct)}]$$

$$\delta(r+ct) - \delta(r-ct)$$

Formel:

$$\delta(a\xi) = \frac{\delta(\xi)}{|a|}$$

$$D_{\text{ret}}(r, t) = -\frac{c}{r} \underbrace{\Theta(t)}_0 \delta(r+ct) + \frac{c}{r} \underbrace{\Theta(t)}_{\delta(r-ct)} \delta(r-ct)$$

$$D_{\text{ret}}(r, t) = \frac{\delta(t - \frac{r}{c})}{r}$$

Retardierte Greenfunktion:

$$D_{\text{ret}}(|\vec{r}-\vec{r}'|, t-t') = \frac{\delta(t-t' - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

### III.3.C. Die retardierten Potentiale

(16a,b), (15): Feldgl. für die elm. Potentiale  
in Lorenzzeichnung (Index  $L$  weggelassen)

$$\square \phi(\vec{r}, t) = -4\pi \rho(\vec{r}, t) \quad (16a)$$

$$\square \vec{A}(\vec{r}, t) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) \quad (16b)$$

$$\text{div} \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (15)$$

$$\phi_{\text{ret}}(\vec{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' dt' D_{\text{ret}}(|\vec{r}-\vec{r}'|, t-t') \rho(\vec{r}', t') \quad (32)$$

$$\vec{A}_{\text{ret}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' dt' D_{\text{ret}}(|\vec{r}-\vec{r}'|, t-t') \vec{j}(\vec{r}', t') \quad (33)$$

sind Partikulärintegrale der inh. Wellengln. (16a,b).

Wie man durch Einsetzen verifizieren kann, erfüllen

$\phi_{\text{ret}}, \vec{A}_{\text{ret}}$  auch die Lorenzbedingung (15), sind

also Partikulärlösungen der Feldgleichungen

für die Potentiale in Lorenzzeichnung.

Bemerkung: Beweis selbst probieren!

Nach Einsetzen, geeigneten Umformungen, partieller Integration bzw. Gaußschem Satz und Benützen des räumlichen und zeitlichen asymptotischen Verhaltens von  $D_{\text{ret}}$  ergibt sich schließlich

$$\text{div} \vec{A}_{\text{ret}}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi_{\text{ret}}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \dots$$

$$= \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' dt' D_{\text{ret}}(|\vec{r}-\vec{r}'|, t-t') \underbrace{\left[ \text{div}' \vec{j}(\vec{r}', t') + \frac{\partial \rho(\vec{r}', t')}{\partial t'} \right]}_{= 0 \text{ wegen KG}} = 0$$

Einsetzen von  $D_{\text{ret}}$  in die Gln. für  $\phi_{\text{ret}}, \vec{A}_{\text{ret}}$ :

$$\begin{aligned} \phi_{\text{ret}}(\vec{r}, t) &= \int d^3r' \int dt' \frac{\delta(t-t' - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \rho(\vec{r}', t') \\ &= \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \end{aligned} \quad (41a)$$

Analog  $\vec{A}_{\text{ret}}$ .

Retardierte Potentiale:

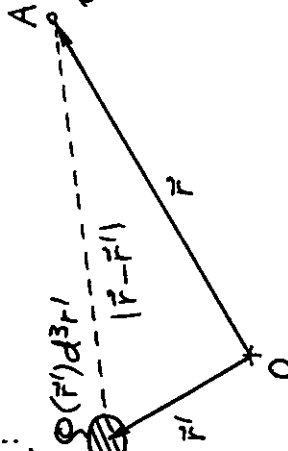
$$\phi_{\text{ret}}(\vec{r}, t) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (42a)$$

$$\vec{A}_{\text{ret}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (42b)$$

Die "Intuition" sagt uns, dass diese Partikulärlösung die Lösung der am Kapitelanfang formulierten Grundaufgabe (elm. Feld einer vorgegebenen lokalisierten Quellverteilung) darstellt.

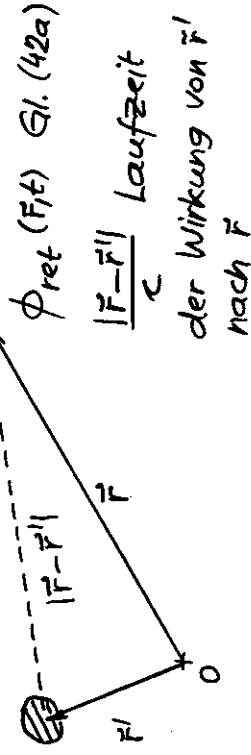
Elektrostatik:

$$dQ = \rho(\vec{r}') d^3r' \quad \phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$



Elektrodynamik:

$$dQ_{\text{ret}} = \rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}) d^3r'$$



Zeitargument "retardiert"

$\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$  Laufzeit der Wirkung von  $\vec{r}'$  nach  $\vec{r}$

Bemerkungen:

1) Während die Felder statischer lokalisierter Quellen im Unendlichen wie  $\frac{1}{r^2}$  verschwinden, verschwinden die Felder zeitabhängiger lokalisierter Quellen im Unendlichen nur wie  $\frac{1}{r}$ ,

wie man aus

$$\int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

sieht.

Diese  $\frac{1}{r}$ -Anteile beschreiben - wie im Kapitel VI gezeigt wird - die Abstrahlung elm. Wellen.

Wie wir im Kapitel VI sehen werden, liefert die retardierte Lösung tatsächlich asymptotisch auslaufende Wellen.

2) Mit der avancierten Greenfunktion würde man als weitere Partikulärlösung der FG (16a,b), (15) für die elm. Potentiale die avancierten Potentiale erhalten, welche sich von den retardierten Potentiale dadurch unterscheiden, dass anstelle des retardierten das avancierte Zeitargument

$$t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

auftritt.

Randbedingungen im Endlichen

(z.B. durch Anwesenheit idealer Leiter; s. Kapitel XV)  
erfüllbar durch

Ansatz:

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi_{\text{ret}}(\vec{r}, t) + \phi_{\text{hom}}(\vec{r}, t)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_{\text{ret}}(\vec{r}, t) + \vec{A}_{\text{hom}}(\vec{r}, t)$$

mit

$$\square \phi_{\text{hom}}(\vec{r}, t) = 0$$


$$\square \vec{A}_{\text{hom}}(\vec{r}, t) = \vec{0}$$

(43)

$$\text{div} \vec{A}_{\text{hom}}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi_{\text{hom}}(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0$$

II-38 II.4 Energie- und ImpulsbilanzII.4.A. Energiesatz der (mikroskopischen)Elektrodynamik

Vom Feld im Volumen  $V$  an den Quellen (Ladungen) zum Zeitpunkt  $t$  in der Zeiteinheit geleistete Arbeit

$$\frac{dA_V^{\text{mech}}(t)}{dt} = \int_V d^3r \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (44)$$


Bemerkungen:

1) Damit man die Bedeutung dieser Größe nicht "vergisst", ist es besser statt  $A^{\text{mech}}(t)$   $A_V^{\text{mech}}(t)$  zu schreiben.

2) Das Magnetfeld leistet an den Quellen keine Arbeit.

3) Da man sich beliebige (mikroskopische) Ladungs- und Stromverteilungen additiv aus den Beiträgen von Punktladungen zusammengesetzt denken kann, genügt es zu zeigen, daß Gl. (44) für eine einzelne im Volumen  $V$  befindliche Punktladung richtig ist.

Punktladung:

$$\vec{F}(t) = q [\vec{E}(F(t), t) + \vec{v}(t) \times \vec{B}(F(t), t)]$$

$$dA^{\text{mech}}(t) = \vec{F}(t) \cdot d\vec{F}(t) = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) dt$$

$$\Rightarrow \frac{dA^{\text{mech}}(t)}{dt} = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) = q \vec{v}(t) \cdot \vec{E}(F(t), t)$$

Andrerseits:

$$\vec{j}(F(t)) = q \vec{v}(t) \delta(F - F(t)), \quad \vec{F}(t) \text{ im Volumen } V$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_V d^3r \vec{j}(F(t)) \cdot \vec{E}(F(t)) &= q \vec{v}(t) \cdot \int_V d^3r \vec{E}(F(t)) \delta(F - F(t)) \\ &= q \vec{v}(t) \cdot \vec{E}(F(t)) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Maxwellgl. (4c), (4d):

II-40

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \vec{j} \cdot \vec{E} &= -\frac{1}{4\pi} (\vec{B} \cdot \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{B}) \\ &= \text{div}(\vec{E} \times \vec{B}) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \left( \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) - \text{div} \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) \\ &=: \omega_{\text{em}} \quad =: \vec{S} \end{aligned}$$

Zusammenfassung:

elm. Energiedichte (Feldenergiedichte) im Vakuum

$$\omega_{\text{em}}(\vec{r}, t) := \frac{1}{8\pi} [\vec{E}^2(\vec{r}, t) + \vec{B}^2(\vec{r}, t)] \quad (46)$$

elm. Energiestromdichte (Poyntingvektor<sup>†</sup>) im Vakuum

$$\vec{S}(\vec{r}, t) := \frac{1}{4\pi} [\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)] \quad (45)$$

†) eigentlich Vektorfeld



II-41

lokale Energiebilanz:

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} w_{em} - \operatorname{div} \mathbf{S}$$

 $\int_V d^3r \dots$ 
Energiebilanz für das Volumen V:

$$-\frac{d}{dt} W_V^{\text{feld}}(t) = \frac{d}{dt} A_V^{\text{mech}}(t) + \oint F_V^{\text{feld}} \cdot \mathbf{S}(r,t) \quad (47)$$

Zeitpunkt t:

Abnahme der Feldenergie im Volumen V,

$$W_V^{\text{feld}}(t) = \int_V d^3r w_{em}(r,t), \quad (48)$$

in der Zeiteinheit

= in der Zeiteinheit im Volumen V an den Quellen  
geleistete Arbeit

+

durch die Oberfläche F(V) in der Zeiteinheit  
ausströmende Feldenergie

Falls die Ladungen das Volumen V

nicht verlassen (und auch keine zusätzlichen Ladungen eintreten) wird keine mechanische Energie durch  $F(V)$  transportiert und es gilt

$$\frac{dA_V^{\text{mech}}(t)}{dt} = \frac{dW_V^{\text{mech}}(t)}{dt}$$

und somit

$$-\frac{d}{dt} [W_V^{\text{mech}}(t) + W_V^{\text{feld}}(t)] = \oint d^2\vec{f} \cdot \mathbf{S} \quad (49)$$

F(V)

Abnahme der gesamten im Volumen V vorhandenenEnergie (mechanische Energie + Feldenergie)  
in der Zeiteinheit= durch die Oberfläche F(V) in der Zeiteinheit  
ausströmende Feldenergie
 $\uparrow V \uparrow \mathbb{R}^3, F(V) \uparrow F_{\infty}$ : Man könnte meinen, daß
dann das Oberflächenintegral gegen null streben  
und

$$W^{\text{mech}}(t) + W^{\text{feld}}(t) = \text{zeitlich konstant}$$

gelten muß.

Bemerkung:

ABER:

Felder zeitabhängiger lokalisierter Quellen fallen nur wie  $\frac{1}{r}$  ab  $\Rightarrow \int \vec{S} \cdot d\vec{f}$  strebt nicht gegen null: Abstrahlung

$\sim \frac{1}{r^2} \sim r^2$

Für nichtrelativistische Ladungen allerdings ist die Abstrahlung vernachlässigbar gering.

## II.4.B. Impulssatz der (mikroskopischen) Elektrodynamik

Inhaltlich weitgehend analog (nur mathematisch komplizierter), deshalb nur kurz kommentiert.

Um zunächst eine lokale Impulsbilanz zu formulieren, gehen wir von der Lorentzkraftdichte

$$\vec{f}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{j}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)$$

aus.

Maxwellgl. (4a), (4b):

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \vec{E} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right\} \rho \vec{E} = \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + \vec{B} \operatorname{div} \vec{B})$$

Maxwellgl. (4c), (4d):

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right\} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi} (\operatorname{rot} \vec{E} \times \vec{E} + \operatorname{rot} \vec{B} \times \vec{B}) - \frac{1}{4\pi c} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \times \vec{E} \right)$$

$$\rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

$$= \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + \operatorname{rot} \vec{E} \times \vec{E} + \vec{B} \operatorname{div} \vec{B} + \operatorname{rot} \vec{B} \times \vec{B})$$

$$- \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi c} (\vec{E} \times \vec{B})$$

"gefällt uns schon"

Formel (Beweis später):

$$\begin{aligned} & (\vec{a} \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{rot} \vec{a} \times \vec{a})_k \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i a_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} a^2) \end{aligned}$$

"gefällt uns auch"

$$(\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B})_k = -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\frac{1}{4\pi c} (\vec{E} \times \vec{B})_k}_{=: g_{em,k}} + \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\frac{1}{4\pi} [E_i E_k + B_i B_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)]}_{=: T_{ik}} \quad (51)$$

Zusammenfassung:

elm. Impulsdichte (Feldimpulsdichte) im Vakuum

$$\vec{g}_{em}(\vec{r}, t) := \frac{1}{4\pi c} [\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)] = \frac{\vec{S}(\vec{r}, t)}{c^2} \quad (53)$$

Maxwellscher Spannungstensor (= - elm. Impulsstromdichte) im Vakuum

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{T}(\vec{r}, t) &:= \frac{1}{4\pi} [\vec{E}(\vec{r}, t) \circ \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{B}(\vec{r}, t) \circ \vec{B}(\vec{r}, t) \\ &\quad - \frac{1}{2} \vec{1} (\vec{E}^2(\vec{r}, t) + \vec{B}^2(\vec{r}, t))] \\ &= \frac{1}{4\pi} [\vec{E}(\vec{r}, t) \circ \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{B}(\vec{r}, t) \circ \vec{B}(\vec{r}, t)] - \vec{1} \omega_{em}(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (52)$$

lokale Impulsbilanz:

$$\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{g}_{em} - \nabla \cdot (-\overleftrightarrow{T}) \quad (54)$$

Vgle mit

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \omega_{em} - \nabla \cdot \vec{S} \quad !$$

Impulsbilanz für das Volumen V:

$$-\frac{d}{dt} \vec{P}_V^{feld}(t) = \int_V d^3r [\rho(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\vec{j}(\vec{r}, t)}{c} \times \vec{B}(\vec{r}, t)] + \oint_{F(V)} d^2\vec{f} \cdot (-\overleftrightarrow{T}(\vec{r}, t))$$

Zeitpunkt t:

Abnahme des Feldimpulses im Volumen V,

$$\vec{P}_V^{feld}(t) = \int_V d^3r \vec{g}_{em}(\vec{r}, t),$$

in der Zeiteinheit

= Gesamtkraft auf im Volumen V vorhandenen Quellen (Ladungs- und Stromverteilung)

+

durch die Oberfläche F(V) in der Zeiteinheit ausströmender Feldimpuls

Falls die Ladungen das Volumen  $V$  nicht verlassen (und auch keine zusätzlichen Ladungen eintreten) wird kein mechanischer Impuls durch  $F(V)$  transportiert und es gilt

$$\int_V d^3r \left[ \rho(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\vec{J}(\vec{r}, t)}{c} \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right] = \vec{F}_V^{\text{mech}}(t) = \frac{d}{dt} \vec{P}_V^{\text{mech}}(t) \quad (50)$$

und somit

$$-\frac{d}{dt} \left[ \vec{P}_V^{\text{mech}}(t) + \vec{P}_V^{\text{feld}}(t) \right] = \oint_{F(V)} d^2\vec{f} \cdot (-\vec{T}(\vec{r}, t))$$

Abnahme des gesamten im Volumen  $V$

Vorhandenen Impulses (mechanischer Impuls

+ Feldimpuls) in der Zeiteinheit

= durch die Oberfläche  $F(V)$  in der Zeiteinheit

ausströmender Feldimpuls

Warum heißt  $\vec{T}$  Spannungstensor?

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\left[ \vec{P}_V^{\text{mech}}(t) + \vec{P}_V^{\text{feld}}(t) \right]}_{\vec{P}_V^{\text{ges}}(t)} = \oint_{F(V)} d^2\vec{f} \cdot \vec{T}(\vec{r}, t) = \vec{F}_V^{\text{ges}}(t) \quad (56)$$

zeitliche Änderung des im Volumen  $V$  vorhandenen Gesamtimpulses

= Gesamtkraft auf das Volumen  $V$ ,

berechnet als eine auf die Oberfläche  $F(V)$

"einwirkende" Kraft (= Fläche mal Spannung)

Fehlender Beweisschritt:

$$(\vec{a} \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{rot} \vec{a} \times \vec{a})_k$$

$$= a_k \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \epsilon_{kij} (\operatorname{rot} \vec{a})_i a_j$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} \frac{\partial a_m}{\partial x_l}$$

$$= a_k \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + (\delta_{je} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{ke}) \frac{\partial a_m}{\partial x_e} a_j$$

$$a_j \frac{\partial a_k}{\partial x_j} - a_j \frac{\partial a_j}{\partial x_k}$$

II-49

$$\begin{aligned}
 & (\vec{a} \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{rot} \vec{a} \times \vec{a})_k \\
 &= a_k \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + a_j \frac{\partial a_k}{\partial x_j} - \underbrace{a_j \frac{\partial a_j}{\partial x_k}}_{\substack{\delta_{ik} a_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \\ \text{"überall} \\ \text{i "benötigt"}}} \\
 & \quad \underbrace{a_i \frac{\partial a_k}{\partial x_i}}_{\frac{\partial}{\partial x_i} (a_i a_k)} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i a_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \vec{a}^2) \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

III. ELEKTROSTATIK IM VAKUUM

Max-Gln. im Vakuum: Statik

$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho$

$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\text{div } \vec{B} = 0$

$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Elektrostatik

--- "getrennt" ---

Magnetostatik  
Kapitel IV

III. 1. A. Elektrische Felder bei natürlichen RB

$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \phi$

(5)

0 gesetzt  
(willkürlich)

1) (5) erfüllt (4):

(II. 42a)  $\phi_{\text{ret}}(\vec{r}, t) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

oder:

Beweis, daß

$G(|\vec{r} - \vec{r}'|) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$   
Greenfunktion des Laplaceoperators  
für natürliche RB

(6)

Partikulärintegral von

$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$

(6')

ist, womit

$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' G(|\vec{r} - \vec{r}'|) \rho(\vec{r}')$   
 $= \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$  folgt.

✓

III. 1 Randwertprobleme der Elektrostatik

$\text{div } \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r})$   
 $\text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$

(1)

(1):  $\text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \Rightarrow$

$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \phi(\vec{r})$

(3)

$\Rightarrow \text{div } \vec{E}(\vec{r}) = -\text{div grad } \phi(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r})$

$\Delta \phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r})$

Poissongleichung

(4)

FG

$$2) \vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \phi(\vec{r}) = - \int d^3r' \rho(\vec{r}') \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$- \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Halten wir schon  
in Kapitel I ...

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

verschwindet für eine lokalisierte Quellverteilung

( $\rho(\vec{r}') = 0$  für  $|\vec{r}'| > R_0$ ) im Unendlichen

(wie  $\frac{1}{r^2}$ ).

III.1.B. Randbedingungen auf geschlossenen Flächen (RWA der Potentialtheorie)

Für spezielle Randwertprobleme ist zur obigen

Lösung für  $\phi(\vec{r})$  (bzw.  $\vec{E}(\vec{r})$ ) eine geeignete

Lösung der homogenen Gl. (bzw. Gl.n.) zu

addieren:

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \phi_{\text{hom}}(\vec{r})$$

$$\text{mit } \Delta \phi_{\text{hom}}(\vec{r}) = 0 \quad (8)$$

Äquivalent dazu:

$$G_{\text{speziell}}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + G_{\text{hom}}(\vec{r}, \vec{r}') \quad (10)$$

$$\text{mit } \Delta G_{\text{hom}}(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad (9)$$

und

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' G_{\text{speziell}}(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') \quad (10')$$

Dirichletsche RWA:

$\phi(\vec{r})$  auf geschlossener Fläche vorgegeben

Physikalische Realisierung: System von (unterein=

ander isolierten) auf verschiedenen Potentialen

gehaltenen Leitern. (Bzgl. Leiter s. später.)

Satz: Durch Vorgabe von  $\phi(\vec{r})$  auf einer

geschlossenen Fläche  $F(V)$  ist das

Potential und damit die elektrische

Feldstärke in  $V$  eindeutig bestimmt.



Beweis:

1) Annahme:  $\exists$  2 Lösungen  $\phi_1(\vec{r}), \phi_2(\vec{r})$ ,  
d.h. mit

$$\chi(\vec{r}) := \phi_1(\vec{r}) - \phi_2(\vec{r})$$

gilt  $\Delta\chi(\vec{r}) = 0$  in  $V$ ,  $\chi(\vec{r}) = 0$  auf  $F(V)$  (H)

wobei

$$\chi(\vec{r}) \neq 0 \text{ in } V$$

2) 1. Greenscher Satz (I.12a) gibt

$$\int_V d^3r [(\text{grad}\chi)^2 + \chi\Delta\chi] = \int_{F(V)} d^2f \chi \frac{\partial\chi}{\partial n} \quad (12)$$

$$\Rightarrow \text{grad}\chi(\vec{r}) \equiv 0 \text{ in } V$$

$$\Rightarrow \chi(\vec{r}) = \chi_0 \text{ in } V$$

$$\text{RB: } \chi_0 = 0 \Rightarrow \chi(\vec{r}) = 0 \text{ in } V \text{ Widerspruch}$$

Neumannsche RWA:

$$\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial n} \equiv \vec{n}(\vec{r}) \cdot \text{grad}\phi(\vec{r}) \text{ auf}$$

geschlossener Fläche vorgegeben

$\vec{n}(\vec{r})$  ... Flächennormalenvektor im Flächenpunkt  $\vec{r}$

Physikalische Realisierung: ?

(Würde Vorgabe der Flächenladungsdichte  $\sigma(\vec{r})$  auf Leitoberfläche entsprechen. Im Experiment kann man aber nur die Gesamtladung auf einer Leitoberfläche vorgeben, wie sich diese verteilt ist a priori unbekannt und geometrie=abhängig.)

Satz: Durch Vorgabe von  $\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial n}$  auf einer geschlossenen Fläche  $F(V)$  ist das Potential in  $V$  bis auf eine additive Konstante und damit die elektrische Feldstärke in  $V$  eindeutig bestimmt.

Beweis: analog wie oben (Details selbst anschreiben)

1) Annahme:  $\chi(\vec{r}) := \phi_1(\vec{r}) - \phi_2(\vec{r}) \neq \text{konst.}$  in  $V$



2) 1. Grenzscher Satz gibt

$\chi(F) = \chi_0$  in  $V$  Widerspruch

Bemerkung: Man kann auch "gemischte" RB  
vorgeben ( $\phi(F)$  auf "Teil" von  $F(V)$ ,  $\frac{\partial \phi(F)}{\partial n}$   
auf "Rest" von  $F(V)$  vorgegeben).

Diese RWA wird aber im Folgenden nicht  
betrachtet. ●

Spezielle Greenfunktionen  $G_D(\vec{r}, \vec{r}')$ ,  $G_N(\vec{r}, \vec{r}')$

Anwendung des 2. Greenschen Satzes (I.12b)

$$\int_V d^3r' \left[ \underbrace{u(\vec{r}')}_{\phi(\vec{r}')} \Delta' v(\vec{r}') - \underbrace{v(\vec{r}')}_{\phi(\vec{r}')} \Delta' u(\vec{r}') \right]$$

$$= \oint_{F(V)} d^2f' \left[ u(\vec{r}') \frac{\partial v(\vec{r}')}{\partial n'} - v(\vec{r}') \frac{\partial u(\vec{r}')}{\partial n'} \right]$$

Beachte:  
 $G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}', \vec{r})$   
 $= G(\vec{r}', \vec{r})$

$$\int_V d^3r' \left[ \underbrace{G(\vec{r}, \vec{r}') \Delta' \phi(\vec{r}')}_{-4\pi \rho(\vec{r}')} - \phi(\vec{r}') \underbrace{\Delta' G(\vec{r}, \vec{r}')}_{-4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')} \right] \quad (13)$$

$$= \oint_{F(V)} d^2f' \left[ G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \phi(\vec{r}')}{\partial n'} - \phi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \right] \Rightarrow$$

Ist  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  eine beliebige Greenfunktion  
des Laplaceoperators, so gilt für Punkte

$\vec{r}$  in  $V$

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d^3r' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') + \frac{1}{4\pi} \oint_{F(V)} d^2f' \left[ G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \phi(\vec{r}')}{\partial n'} - \phi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \right] \quad (14)$$

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = G_D(\vec{r}, \vec{r}')$$

Dirichletsche Greenfunktion  
verwendet

RWA

$$\Delta G_D(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad \vec{r}, \vec{r}' \text{ in } V$$

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad \text{für } \vec{r}' \text{ auf } F(V)$$

lösen,  
(15a)

dann folgt für die Lösung der

Dirichletschen RWA

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d^3r' G_D(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') - \frac{1}{4\pi} \oint_{F(V)} d^2f' \phi(\vec{r}') \frac{\partial G_D(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'}$$

$\vec{r}$  in  $V$

Vorgegebene RB

Neumannsche RWA:

$$G(F, F') = G_N(F, F')$$

Neumannsche Greenfunktion

verwendet

ABER:

RWA

$$\Delta G_N(F, F') = -4\pi \delta(F - F'), \quad F, F' \text{ in } V$$

$$\frac{\partial G_N(F, F')}{\partial n'} = 0 \quad \text{für } F' \text{ auf } F(V)$$

besitzt keine Lösung (Widerspruch zwischen

Dgl. und RB!): Gauss

$$\int_V d^3r' \Delta' G_N(F, F') = \int_V d^2f' \underbrace{\frac{\partial G_N(F, F')}{\partial n'}}_{\text{kann nicht Null sein!}} = -4\pi$$

$-4\pi \delta(F - F')$   
 $F$  in  $V$

⇒ einfachste erlaubte RB für  $G_N$ : konstanter Wert

$$\frac{\partial G_N(F, F')}{\partial n'} = -\frac{4\pi}{|F|}, \quad |F| \text{ Flächeninhalt von } F(V)$$

Somit:

RWA

$$\Delta G_N(F, F') = -4\pi \delta(F - F'), \quad F, F' \text{ in } V$$

$$\frac{\partial G_N(F, F')}{\partial n'} = -\frac{4\pi}{|F|} \quad \text{für } F' \text{ auf } F(V)$$

lösen!

dann folgt für die Lösung der

Neumannschen RWA

$$\phi(F) = \int_V d^3r' G_N(F, F') \rho(F') + \frac{1}{4\pi} \int_{F(V)} d^2f' G_N(F, F') \frac{\partial \phi(F')}{\partial n'} + \text{konst.}$$

Vorgegebene RB

$$\text{aus: } -\frac{1}{4\pi} \int_{F(V)} d^2f' \phi(F') \underbrace{\frac{\partial G_N(F, F')}{\partial n'}}_{-\frac{4\pi}{|F|}}$$

$$= \frac{1}{|F|} \int_{F(V)} d^2f' \phi(F') = \text{konst.} = \text{Mittelwert von } \phi \text{ auf } F(V)$$

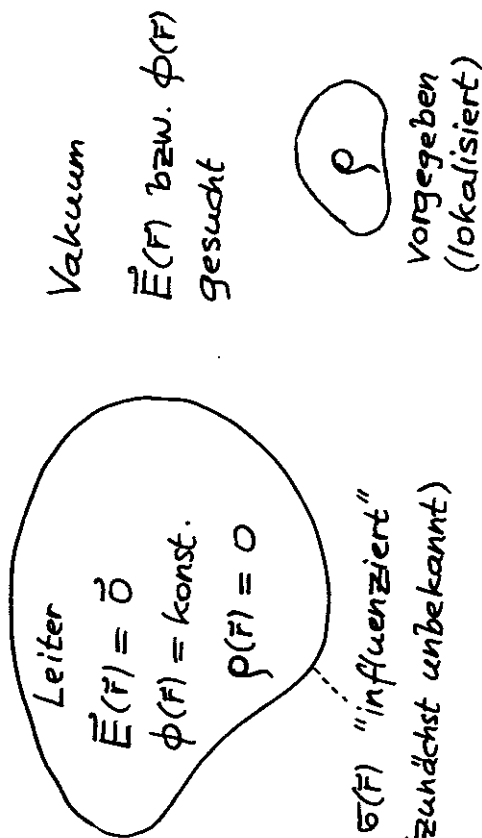
Bemerkungen:

- 1)  $G_D, G_N$  lassen sich nur für besonders einfache Geometrie von  $F(V)$  analytisch berechnen (z.B. Kugel).
- 2) Für  $|F| \rightarrow +\infty$  folgt konst. = 0, falls  $\int d^2f' \phi(F') \neq 0$ .

III.1.C. Randbedingungen bei Anwesenheit von Leitern

Leiter: frei bewegliche Ladungen, welche den Leiter (bei den üblichen Feldstärken) nicht verlassen können.

Situation nach Einbringen eines Leiters in das Feld einer vorgegebenen Ladungsverteilung und Abwarten des Einstellens eines zeitunabhängigen Zustandes:



Bestimmung von  $\vec{E}(\vec{r})$  bzw.  $\phi(\vec{r})$  im Außenraum der Leiter sowie Bestimmung von  $\sigma(\vec{r})$  auf den Leiteroberflächen:

III-12  
Lösen der FG der Elektrostatik im Außenraum der Leiter (Vakuum) unter Verwendung der

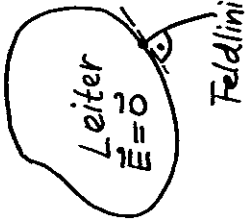
Randbedingungen

$\vec{E}_{\text{tg}}(\vec{r}) = \vec{0}$  bzw.  $\phi(\vec{r}) = \text{konst.}$

und

$E_n(\vec{r}) = 4\pi\sigma(\vec{r})$

auf den Leiteroberflächen



(20)

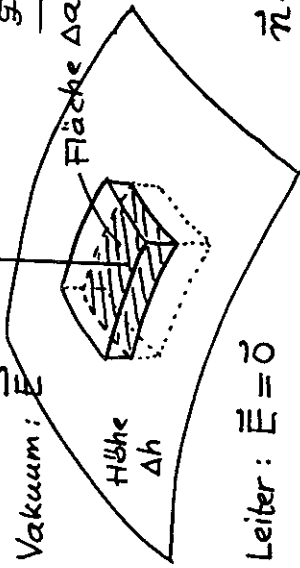
Physikalisch vorgeben kann man auf jeder der Leiteroberflächen

entweder die Gesamtladung  
oder den Wert des Potentials !

(der Potentialdifferenz gegen das Unendliche)

Beweis der RB: "skizziert"

1) 
$$\oint_{S(\sigma)} d^2\vec{f} \cdot \vec{E} = 4\pi \int_V d^3r \rho$$



Vakuum:  $\vec{E}$   
 Fläche  $\Delta a$   
 Höhe  $\Delta h$   
 Bis auf höhere Ordnungen in  $\Delta a, \Delta h$  gilt:

Leiter:  $\vec{E} = \vec{0}$

$$\vec{n} \cdot (\vec{E} - \vec{0}) \Delta a = 4\pi \int_{-\frac{\Delta h}{2}}^{+\frac{\Delta h}{2}} \rho dh \cdot \Delta a$$

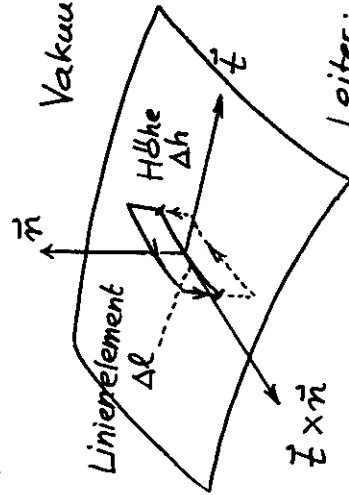
$\Delta a \rightarrow 0, \Delta h \rightarrow 0:$

$$\vec{n} \cdot \vec{E} \equiv E_n = 4\pi \sigma + \frac{\Delta h}{2}$$

mit 
$$G = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{-\frac{\Delta h}{2}}^{+\frac{\Delta h}{2}} \rho dh$$

(Physikalisch:  $\int \rho dh$  über dünne Oberflächenschicht)

2)



Vakuum:  $\vec{E}$   
 $\vec{z}$  Einheitsvektor in Tangentialebene  $\perp$  zu Linienelement  $\Delta l$

Leiter:  $\vec{E} = \vec{0}$   $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$

Bis auf höhere Ordnungen in  $\Delta l, \Delta h$  gilt:  $(\vec{z} \times \vec{n}) \cdot (\vec{E} - \vec{0}) \Delta l = 0$

$$(\vec{z} \times \vec{n}) \cdot \vec{E} = (\vec{n} \times \vec{E}) \cdot \vec{z} = 0$$

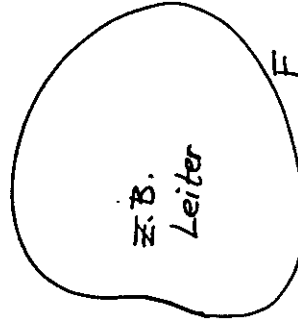
muß für beliebige Linienelemente durch den Flächenpunkt, also für beliebiges  $\vec{z}$ , gelten

$$\Rightarrow \vec{n} \times \vec{E} = \vec{n} \times \vec{E}_{tg} = \vec{0}$$

bzw.  $\vec{E}_{tg} = \vec{0}$

### III.1.D. Methode der Bild- (Spiegel-)ladungen

Prinzip der Methode: 1) zu lösendes Problem



$\rho(\vec{r})$  vorgegeben (lokalisiert)

V Vakuum

$$\vec{E}(\vec{r}) \text{ bzw. } \phi(\vec{r})$$

gesucht für  $\vec{r}$  in V

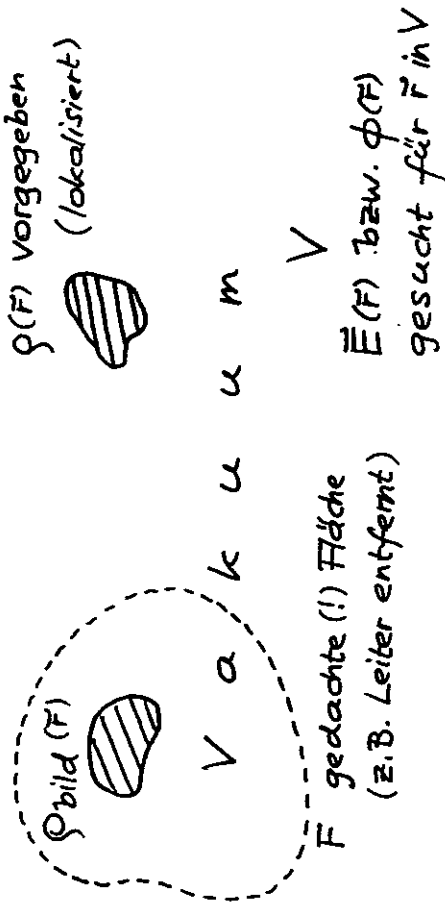
$$\Delta \phi_{\text{hom}}(\vec{r}) = 0 \text{ für } \vec{r} \text{ in } V \quad (21)$$

$$(22)$$

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \underbrace{\phi_{\text{hom}}(\vec{r})}_{\text{so zu bestimmen, das RB auf F (und im Unendlichen) erfüllt sind}}$$

so zu bestimmen, das RB auf F (und im Unendlichen) erfüllt sind

2) Ersatzproblem



$\rho_{\text{bild}}(F)$  fiktive Bild- (Spiegel-)ladungsverteilung

$\rho_{\text{bild}}(F) = 0$  für  $\vec{r}$  in V (24a)

$\Rightarrow \Delta \phi_{\text{bild}}(F) = -4\pi \rho_{\text{bild}}(F) = 0$  für  $\vec{r}$  in V (24b)

$\rho_{\text{bild}}(F)$  so zu wählen, dass

$$\phi(F) = \int_V d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \underbrace{\int_V d^3r' \frac{\rho_{\text{bild}}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{\phi_{\text{bild}}(F) = \phi_{\text{hom}}(F)}, \quad \vec{r} \text{ in } V$$

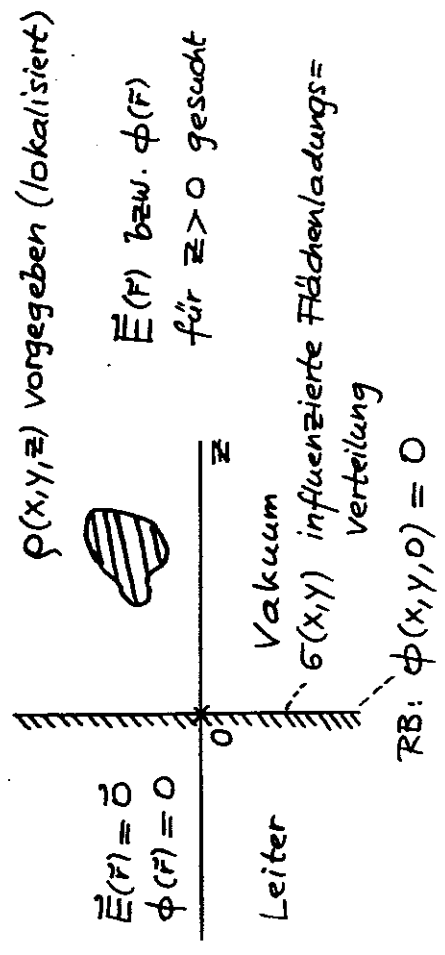
auf der gedachten Fläche F die RB des eigentlichen Problems erfüllt

Ein solches  $\rho_{\text{bild}}(F)$  zu finden, gelingt nur bei besonders einfacher Geometrie von F und einfachen RB (z.B. Leiter).

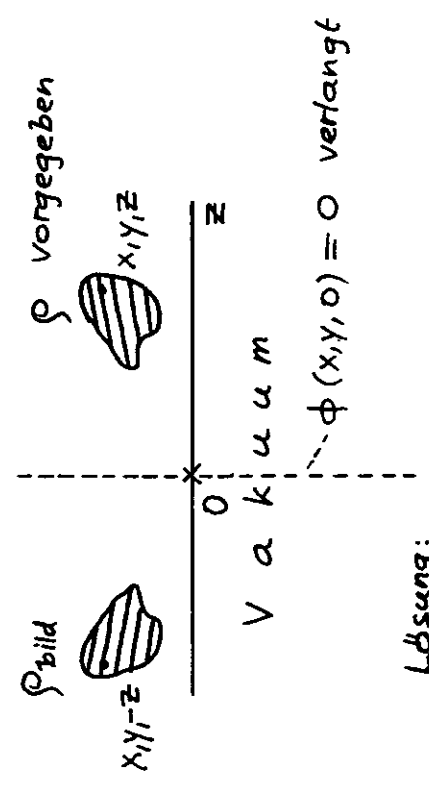
Beispiele:

a) Ebene Leiteroberfläche (unendlich ausgedehnt) auf dem Potential null ("geerdet")

Eigentliches Problem

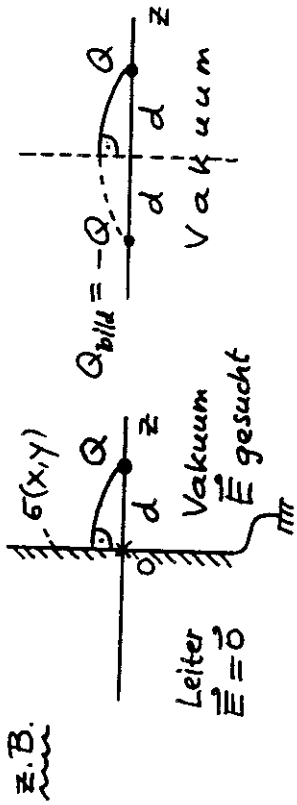


Ersatzproblem (für  $z > 0$ )



Lösung:

$\rho_{\text{bild}}(x,y,-z) = -\rho(x,y,z)$  (25)



Lösung: 
$$\phi(r) = \frac{Q}{|\vec{r} - d\vec{e}_z|} - \frac{Q}{|\vec{r} + d\vec{e}_z|}, \quad z \geq 0$$

$$\phi(x, y, 0) = \frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + d^2}} - \frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + d^2}} = 0 \quad \forall x, y$$

$$\vec{E}(r) = \frac{Q(\vec{r} - d\vec{e}_z)}{|\vec{r} - d\vec{e}_z|^3} - \frac{Q(\vec{r} + d\vec{e}_z)}{|\vec{r} + d\vec{e}_z|^3}, \quad z \geq 0$$

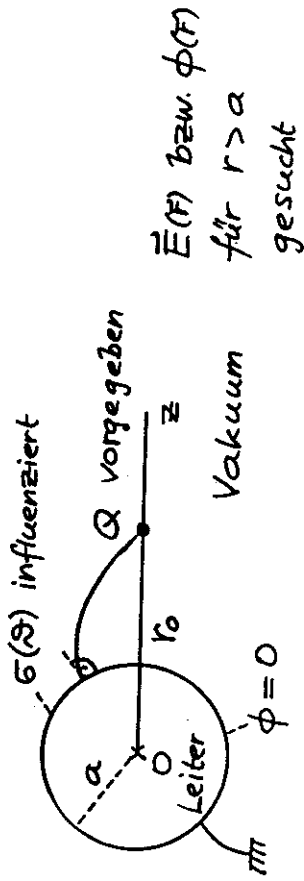
$$\sigma(x, y) = \frac{1}{4\pi} E_z(x, y, 0) = -\frac{1}{2\pi} \frac{Qd}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \sigma(x, y) = -Q = Q_{\text{bild}}$$

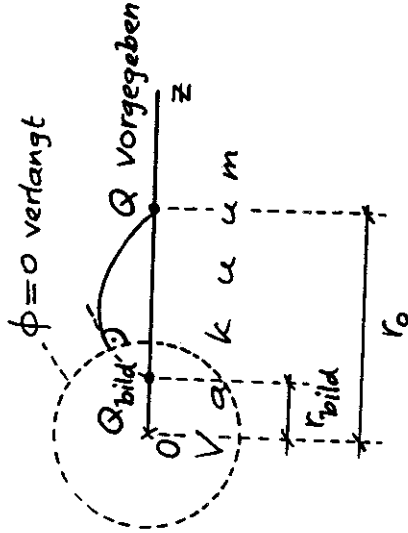
b) Kugelförmige Leiteroberfläche

b1) auf dem Potential null ("geerdet")

Eigentliches Problem



Ersatzproblem (für r > a): ANSATZ



Lösung:

$$Q_{\text{bild}} = -Q \frac{a}{r_0}$$

$$r_{\text{bild}} = \frac{a^2}{r_0}$$

$$|Q_{\text{bild}}| < |Q|$$

Gesamtladung auf Leiteroberfläche:

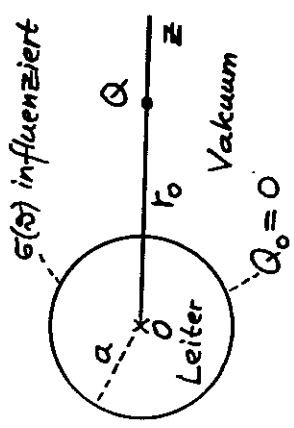
$$Q_{\text{bild}} = -Q \frac{a}{r_0}$$

Begründung:

integrale Form

des Coulombgesetzes!

b2) ungeladen

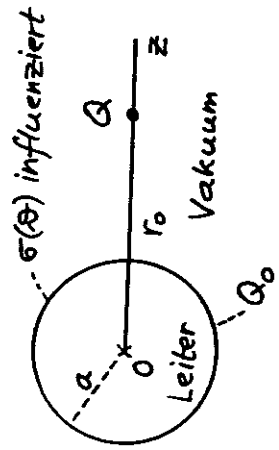


$Q_{\text{bild}}, r_{\text{bild}}$  wie zuvor

Potential auf Leiteroberfläche:

$$\phi(a, \vartheta, \varphi) = \phi_0 = -\frac{Q_{\text{bild}}}{a}$$

b3) mit der Gesamtladung  $Q_0 \neq 0$

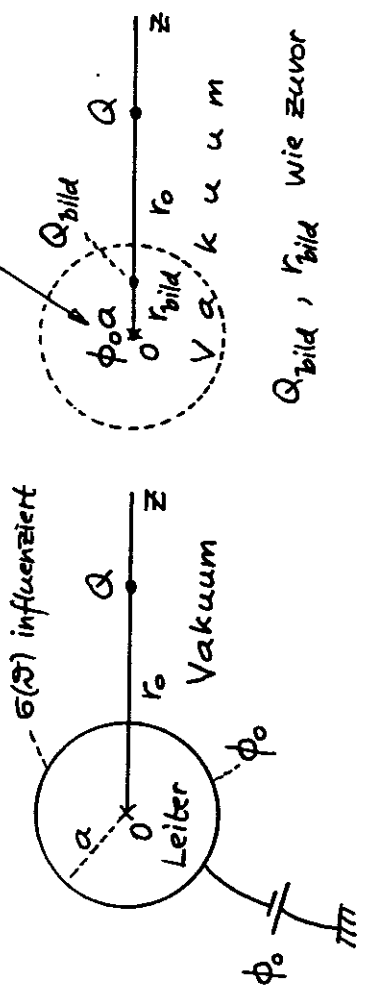


$Q_{\text{bild}}, r_{\text{bild}}$  wie zuvor

Potential auf Leiteroberfläche:

$$\phi(a, \vartheta, \varphi) = \phi_0 = \frac{Q_0}{a} - \frac{Q_{\text{bild}}}{a}$$

b4) auf dem Potential  $\phi_0 \neq 0$

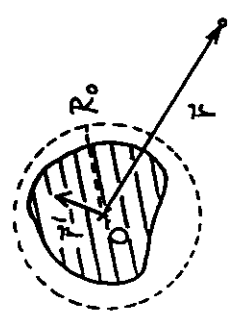


$Q_{\text{bild}}, r_{\text{bild}}$  wie zuvor

Gesamtladung auf der Leiteroberfläche:

$$\int_{\text{Leit}} d\Omega \sigma(\vartheta) = \phi_0 a + Q_{\text{bild}} = \phi_0 a - Q \frac{a}{r_0}$$

III.2 Elektrostatistische Multipolentwicklung.  
Elektrisches Feld in großer Entfernung  
einer lokalisierten Ladungsverteilung



Lokalisierte Ladungsverteilung  
 (im engeren Sinn):

$$\rho(F') = 0 \text{ für } r' > R_0 \quad (26)$$

$$\underline{(5)}: \phi(F) = \int d^3r' \frac{\rho(F')}{|F - F'|} \quad (27)$$



### III.2.A. Kartesische Multipolentwicklung

III-21

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$r > R_0$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}')^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2}}$$

$$= \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}}}$$

(28)

$$= \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - r'^2 r^2}{r^5} + \dots$$

$$\underline{\underline{\phi(\vec{r})}} = \frac{1}{r} \int d^3r' \rho(\vec{r}') + \frac{X_j}{r^3} \int d^3r' X_j' \rho(\vec{r}') + \dots$$

bereits "faktorisier"  $\Rightarrow$   $\underline{\underline{\phi_{\text{monopol}}(\vec{r})}}$  +  $\underline{\underline{\phi_{\text{dipol}}(\vec{r})}}$   $\leftarrow$  ... bereits "faktorisier"

$$+ \frac{1}{2r^5} \int d^3r' [3X_j X_k X_j' X_k' - X_j X_j X_k' X_k'] \rho(\vec{r}') + \dots$$

+  $\underline{\underline{\phi_{\text{quadrupol}}(\vec{r})}}$  + ...  
 "Zerlegung" ("Faktorisierung") der  $\vec{r}$ - und  $\vec{r}'$ -Abhängigkeit nicht eindeutig möglich

kartesische Multipolentwicklung für  $r > R_0$  (Koeffizienten evtl. numerisch berechnen!)

### Monopolbeitrag

III-22

$$\phi_{\text{monopol}}(\vec{r}) = \frac{1}{r} \int d^3r' \rho(\vec{r}')$$

$$\underline{\underline{Q}} := \int d^3r \rho(\vec{r})$$

unabhängig von Wahl des Koordinatensystems = Gesamtladung der Ladungsverteilung

kartesisches ELEKTRISCHES MONOPOLMOMENT (30a)

$$\underline{\underline{\phi_{\text{monopol}}(\vec{r})}} = \frac{Q}{r}$$

$$\underline{\underline{\vec{E}_{\text{monopol}}(\vec{r})}} = \frac{Q\vec{r}}{r^3}$$

$r > R_0$

(30b)

(30c)

### Dipolbeitrag

$$\phi_{\text{dipol}}(\vec{r}) = \frac{X_j}{r^3} \int d^3r' X_j' \rho(\vec{r}')$$

$$\underline{\underline{\vec{p}}} := \int d^3r \vec{r} \rho(\vec{r})$$

von der Wahl des Koordinatensystems nur dann unabhängig, falls  $Q = 0$  gilt

kartesisches ELEKTRISCHES DIPOLMOMENT (31a) der Ladungsverteilung

$$\phi_{\text{dipol}}(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{E}_{\text{dipol}}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{p}}{r^5}$$

(31b)

 $r > R_0$ 

(31c)

Quadrupolbeitrag

$$\phi_{\text{quadrupol}}(\vec{r}) = \frac{1}{2r^5} \int d^3r' [3x_j x_k x'_j x'_k - x_j x_j x'_k x'_k] \rho(\vec{r}') \quad [1]$$

"Faktorisierungsmöglichkeiten":

$$3x_j x_k x'_j x'_k - x_j x_j x'_k x'_k$$

$$= \underline{x_j x_k (3x'_j x'_k - \delta_{jk} r'^2)}$$

$$= (3x_j x_k - \delta_{jk} r^2) x'_j x'_k \quad [2]$$

$$= \frac{1}{3} (3x_j x_k - \delta_{jk} r^2) (3x'_j x'_k - \delta_{jk} r'^2) \quad [3]$$

Meist wird die Möglichkeit [1] (bzw. [3]) bevorzugt:

$$Q_{jk} := \int d^3r (3x_j x_k - r^2 \delta_{jk}) \rho(\vec{r}) \quad (32a)$$

 $\vec{Q} = (Q_{jk})$  kartesisches
ELEKTRISCHES QUADRUPOLE  
MOMENT

$\vec{Q}$  von der Wahl des Koordinatensystems  
nur dann unabhängig, falls  $q=0$  und  $\vec{p}=\vec{0}$   
gilt

$$\phi_{\text{quadrupol}}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \frac{x_j x_k}{r^5} Q_{jk} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{Q} \cdot \vec{r}}{2r^5} \quad (32b) \quad [1]$$

$$= \frac{1}{6} \frac{3x_j x_k - r^2 \delta_{jk}}{r^5} Q_{jk} \quad [3]$$

$$\vec{E}_{\text{quadrupol}}(\vec{r}) = \frac{5(\vec{r} \cdot \vec{Q} \cdot \vec{r})\vec{r} - 2r^2 \vec{Q} \cdot \vec{r}}{2r^7} \quad (32c)$$

Beachte:  $\vec{Q}$  ist symmetrisch  
 $r > R_0$

und besitzt die Spur null:

$$\underline{Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0}$$

Bemerkung:  $\vec{Q}$  stellt deshalb einen irreduziblen  
Tensor vom Rang 2 bzgl. Drehungen  
dar (Transformation gemäß  $D^{(2)}$ )  
"außer Konkurrenz"

Vielfach wird in der Literatur gemäß Faktorisierung [2]

$$\vec{Q}_{jk} := \int d^3r \downarrow 3x_j x_k \rho(\vec{r}) \quad \text{--- s. auch VI.3.D!}$$

verwendet (und dann ohne Querbalke geschrieben):

$$\Rightarrow \phi_{\text{quadrupol}}(\vec{r}) = \frac{1}{6} \frac{3x_j x_k - r^2 \delta_{jk}}{r^5} \vec{Q}_{jk} \quad (32b') \quad [2]$$

Bemerkung: Die von null verschiedene Spur von  $\vec{Q}$  ist eine Drehinvariante (Konkurrenz!) (Transformation gemäß  $D^{(0)} = 1$ )

III. 2. B. Sphärische Multipolentwicklung

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$r > R_0$

Bemerkung:  
für  $r > r'$   
reguläre  
Partikulärlsgn.  
der Laplacegl.  $\square$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{\ell m} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{r'^{\ell}}{r^{\ell+1}} Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) Y_{\ell m}^*(\vartheta', \varphi') \quad (33)$$

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{\ell m} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)}{r^{\ell+1}} \int d^3r' r'^{\ell} Y_{\ell m}^*(\vartheta', \varphi') \rho(\vec{r}') \quad (34)$$

$$Q_{\ell m} := \int d^3r r^{\ell} Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) \rho(\vec{r}) \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (35)$$

$m = -\ell, \dots, +\ell$

Sphärische ELEKTRISCHE MULTIPOLMOMENTE

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{\ell m} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)}{r^{\ell+1}} Q_{\ell m}^* \quad (34')$$

Bemerkung: Manche Autoren (z.B. Landau/Lifschitz) "Spalten"  $\frac{4\pi}{2\ell+1}$  "symmetrisch auf", nehmen also den Faktor  $\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}$  in die Definition der  $Q_{\ell m}$  auf.

sphärisches  $2^{\ell}$ -polmoment

$Q_{\ell m}, m = -\ell, -\ell+1, \dots, +\ell$

$2\ell+1$  Komponenten

$\ell=0$ : Monopolmoment

$$Q_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} Q$$

$\ell=1$ : Dipolmoment

$$Q_{1, \pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (\rho_x \mp i \rho_y)$$

$$Q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \rho_z$$

$\ell=2$ : Quadrupolmoment

$$Q_{2, \pm 2} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{32\pi}} (Q_{xx} - Q_{yy} \mp 2i Q_{xy})$$

$$Q_{2, \pm 1} = \mp \frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (Q_{xz} \mp i Q_{yz})$$

$$Q_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} Q_{zz}$$

(5 Komponenten  $\leftrightarrow Q_{jk} = Q_{kj}, \sum_i Q_{ii} = 0$  !)

$\ell=3$ : Oktupolmoment

⋮

$$\begin{aligned}
 q_{\ell m} &= \int d^3r r^{\ell} Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) \rho(r) \\
 q_{\ell m}^* &= \int d^3r r^{\ell} \underbrace{Y_{\ell m}^*(\vartheta, \varphi)}_{(-1)^m Y_{\ell, -m}(\vartheta, \varphi)} \rho(r) \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$q_{\ell m}^* = (-1)^m q_{\ell, -m} \quad (36)$$

Wir hätten bei den Beispielen also nur die  $\ell+1$  Komponenten  $q_{\ell m}$ ,  $m=0, 1, \dots, \ell$ , angeben müssen.

Definition: Betrag des  $2^{\ell}$ -Polmomentes

$$|q_{\ell}| := \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_m |q_{\ell m}|^2} \quad (37)$$

$\ell=1$ :

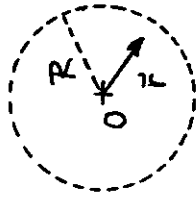
$$|q_1| = \sqrt{p^2}$$

### III.2.C. Mittelwert des elektrischen Feldes (Kugelbereich) bei natürlichen RB

VS: Natürliche RB:

$$\phi(r) = \int d^3r' \frac{\rho(r')}{|r-r'|}$$

Koo-Ursprung in Mittelpunkt der Mittelungskugel gelegt:



Arithmetisches Mittel gebildet

$$\langle \vec{E} \rangle_R = \frac{3}{4\pi R^3} \int_{r < R} d^3r \vec{E}(r) = -\frac{3}{4\pi R^3} \int_{r < R} d^3r \text{grad} \phi(r)$$

= (verallg. Gaußscher Satz)

$$= -\frac{3}{4\pi R^3} \oint_{r=R} d^2\vec{f} \phi(r) \quad (38)$$

$$= -\frac{3}{4\pi R^3} \oint_{r=R} d^2\vec{f} \int_{r=R} d^3r' \frac{\rho(r')}{|r-r'|}$$

$$= -\int_{r=R} d^3r' \rho(r') \frac{3}{4\pi R^3} \oint d^2\vec{f} \frac{1}{|r-r'|} \quad (39)$$

$$\langle \vec{E} \rangle_R = - \int d^3r' \rho(\vec{r}') \underbrace{\frac{3}{4\pi R^3} \oint_{r=R} d^2\vec{f} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{r=R}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{r'}{R^3}, r' \geq R \\ \frac{r'}{R^3}, r' \leq R \end{array} \right.$

Beweis  
später (40)

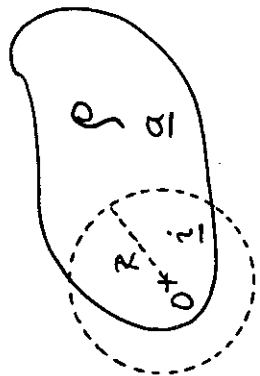
$$\langle \vec{E} \rangle_R = \int_{r' > R} d^3r' \frac{\rho(\vec{r}') (-\vec{r}')}{r'^3} \quad \text{---} \quad \vec{E}_a(\vec{0}) \quad (41)$$

$$- \frac{1}{R^3} \int_{r' < R} d^3r' r' \rho(\vec{r}') \quad \text{---} \quad - \frac{\bar{\rho}}{R^3}$$

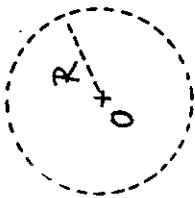
Beachte:  $\vec{0}$

$$\vec{E}(\vec{r}') = \int d^3r'' \frac{\rho(\vec{r}'') (\vec{r}' - \vec{r}'')}{|\vec{r}' - \vec{r}''|^3}$$

$$\bar{\rho} = \int d^3r' r' \rho(\vec{r}')$$

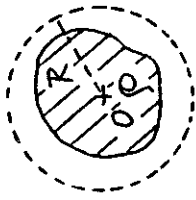


Spezialfälle:



$$\langle \vec{E} \rangle_R = \vec{E}(\vec{0})$$

unabhängig von R  
(solange  $\rho(\vec{r}') = 0$   
für  $r' < R$ )



$$\langle \vec{E} \rangle_R = - \frac{\bar{\rho}}{R^3}$$

proportional  $\frac{1}{\text{Volumen}}$   
der Mittelungskugel

Beweis von

$$\vec{I}(\vec{r}') \equiv \frac{3}{4\pi R^3} \oint_{r=R} d^2\vec{f} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \begin{cases} \frac{r'}{r'^3} & \text{für } r' \geq R \\ \frac{r'}{R^3} & \text{für } r' \leq R \end{cases} \quad (40)$$

$\vec{r}'$  ist für die Integration fest, für Integration wird  $\frac{\vec{r}'}{r'} = \vec{e}_z$  gewählt (Wahl der z-Achse):

$$\vec{I}(\vec{r}') = \frac{3}{4\pi R^3} R^2 \int_{[4\pi]} d\Omega (\sin\vartheta \cos\varphi \vec{e}_x + \sin\vartheta \sin\varphi \vec{e}_y + \cos\vartheta \vec{e}_z) \frac{1}{|\vec{r}-r'\vec{e}_z|} \quad \text{für } |\vec{r}|=R$$

*nur von  $\vartheta$  abhängig;*

$\varphi$ -Integral null

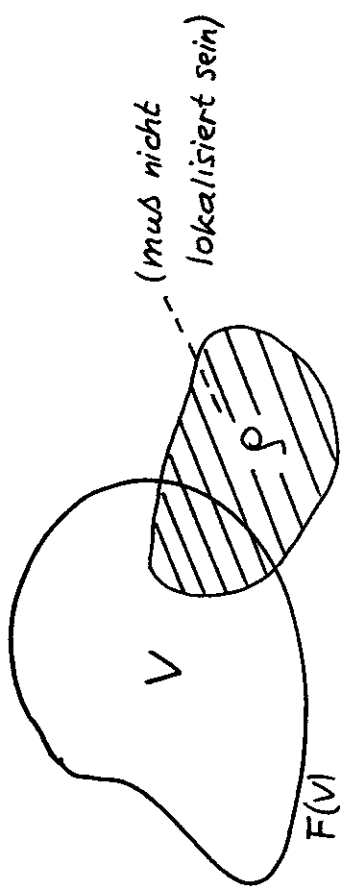
$$\vec{I}(\vec{r}') = \frac{3}{2R} \frac{r'}{r'} \sum_{\ell} \int_{-1}^{+1} d\vartheta P_{\ell}(\frac{r}{r'}) P_{\ell}(\frac{r'}{r}) \cdot \begin{cases} \frac{R^{\ell}}{r'^{\ell+1}}, & r' > R \\ \frac{r^{\ell}}{R^{\ell+1}}, & r' < R \end{cases}$$

$$\sum_{\ell} P_{\ell}(\cos\vartheta) \cdot \begin{cases} \frac{R^{\ell}}{r'^{\ell+1}}, & r' > R \\ \frac{r^{\ell}}{R^{\ell+1}}, & r' < R \end{cases}$$

(erzeugende Funktion der Legendrepolynome)

$$\vec{I}(\vec{r}') = \begin{cases} \frac{1}{R} \frac{r'}{r'} \frac{R}{r'^2} \cdot \frac{2}{3} \delta_{21} & , r' \geq R \\ \frac{1}{R} \frac{r'}{R} \frac{R}{R^2} & , r' \leq R \end{cases} \checkmark$$

III.3 Elektrostatische Energie  
III.3.A: Selbstenergie und Wechselwirkungsenergie



Gesamtenergie im Volumen V

$$W_V = \frac{1}{8\pi} \int_V d^3r \vec{E}^2(\vec{r}) \quad (42)$$

$$\vec{E}^2(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}(\phi(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})) + \phi(\vec{r})\vec{\nabla}\vec{E}(\vec{r}) \quad 4\pi\rho(\vec{r})$$

$$\frac{1}{8\pi} \vec{E}^2(\vec{r}) = \frac{1}{2} \rho(\vec{r})\phi(\vec{r}) + \frac{1}{8\pi} \vec{\nabla}(\phi(\vec{r})\vec{\nabla}\phi(\vec{r}))$$

$$W_V = \frac{1}{2} \int_V d^3r \rho(\vec{r})\phi(\vec{r}) + \frac{1}{8\pi} \oint_{F(V)} d^2\vec{f} \cdot \phi(\vec{r}) \text{grad} \phi(\vec{r}) \quad (43)$$

$$W_V = \frac{1}{2} \int_V d^3r \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) + \frac{1}{8\pi} \int_{F(V)} d^2\vec{f} \cdot \phi(\vec{r}) \cdot \text{grad} \phi(\vec{r})$$

Beachte:  $V \uparrow \mathbb{R}^3$ :  $\oint_{F(V)}$  muß nicht gegen null streben

Aber:

Gesamte elektrostatische Feldenergie im ganzen Raum bei natürlichen RB

$$W = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) = \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (44)$$

Bei Aufteilung der Quellen in "Komplexe"

$$\rho(\vec{r}) = \sum_n \rho_n(\vec{r}) \quad (45)$$

folgt daraus

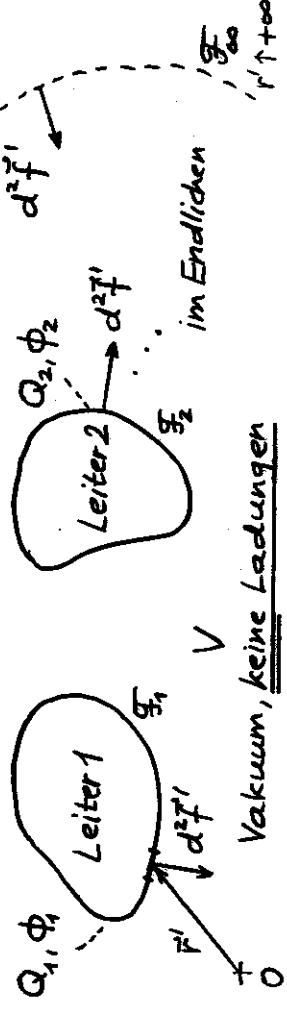
$$W = \sum_{mn} \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho_m(\vec{r}) \rho_n(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (48)$$

$$= W^{\text{selbst}} + W^{\text{WW}} > 0 \quad W_n^{\text{selbst}} > 0$$

$$W^{\text{selbst}} = \sum_n \left( \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho_n(\vec{r}) \rho_n(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \quad (49a)$$

$$W^{\text{WW}} = \sum_{\substack{mn \\ m < n}} \left( \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho_m(\vec{r}) \rho_n(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) W_{mn}^{\text{WW}} \quad (49b)$$

III.3.B. Kapazitätskoeffizienten für eine Anordnung von Leitern



Zusammenhang zwischen den Ladungen  $Q_m$  und den Potentialen  $\phi_n$  gesucht. (Vorgegeben für jeden der Leiter Ladung oder Potential [gegen das "Unendliche"])

Dirichletsche Greenfunktion  $G_D(\vec{r}, \vec{r}')$  des Problems:  
 $G_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0$  für  $\vec{r}'$  auf  $F(V) = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \dots \cup \mathcal{F}_\infty$

Abschnitt III.1.B (s. Seite III-8; dabei ist zu beachten, daß wir hier  $d^2\vec{f}'$  entgegen der üblichen Konvention beim Greenschen Satz nach  $V$  "hinein" gewählt haben, was einen Vorzeichenwechsel in  $\oint d^2\vec{f}'$  bewirkt)

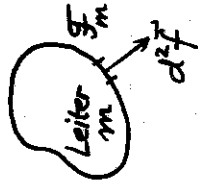
$$\phi(\vec{r}) = \int_V d^3r' G_D(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') + \frac{1}{4\pi} \oint_{F(V)} d^2\vec{f}' \cdot \phi(\vec{r}') \vec{\nabla}' G_D(\vec{r}, \vec{r}')$$

$\vec{r}$  in  $V$  hier: 0

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_n \phi_n \oint_{\mathcal{F}_n} d^2\vec{f}' \cdot \vec{\nabla}' G_D(\vec{r}, \vec{r}'), \quad \vec{r} \text{ in } V \quad (50)$$

\*1) Damit  $d^2\vec{f}'$  wie "gewohnt" bzgl. Leiter nach "außen".

$$\phi(F) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_n \phi_n \oint_{\mathcal{F}_n} d^2\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}' G_D(F, F')$$



$$Q_m = \oint_{\mathcal{F}_m} d^2\vec{r} \sigma(F) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \oint_{\mathcal{F}_m} d^2\vec{r} \cdot \vec{E}(F)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon} \oint_{\mathcal{F}_m} d^2\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \phi(F)$$

(51)

$$= -\sum_n \phi_n \frac{1}{(4\pi\epsilon)^2} \oint_{\mathcal{F}_m} \oint_{\mathcal{F}_n} (d^2\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \phi (d^2\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}') G_D(F, F')$$

$$Q_m = \sum_n C_{mn} \phi_n$$

linearer

Zusammenhang

(52)

mit

$$C_{mn} = C_{nm} = -\frac{1}{(4\pi\epsilon)^2} \oint_{\mathcal{F}_m} \oint_{\mathcal{F}_n} (d^2\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \phi (d^2\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}') G_D(F, F')$$

(51')

Kapazitätskoeffizienten der Anordnung von Leitern

Nur abhängig von Form und gegenseitiger Lage der Leiter.

Beachte: Wegen der Komplexiertheit der RWA für

$G_D(F, F')$  wird man i.a.  $G_D(F, F)$  gar nicht

berechnen können. Die Beziehungen (52) und

(53) (s. Folie III-36') behalten auch dann ihre Nützlichkeit. ●

Spezialfall: Zwei Leiter

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(C_{mn})} \begin{pmatrix} C_{22} - C_{12} & C_{11} \\ -C_{21} & C_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

Technik: Kondensator

$$Q_1 = -Q_2 = Q$$

(54)

$$C = \frac{Q}{\phi_1 - \phi_2}$$

Kapazität des Kondensators

Aus obigen Formeln folgt für  $Q_1 = -Q_2 = Q$

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{1}{\det(C_{mn})} (C_{22} + C_{12} + C_{21} + C_{11}) Q$$

$$\Rightarrow C = \frac{C_{11} C_{22} - C_{12} C_{21}}{C_{11} + C_{22} + C_{12} + C_{21}} \quad (55)$$



Gesamte elektrostatische Energie der

Anordnung von III-34:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{E}^2(r) = (\text{da feldfreier Raum in den Leitern})$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int_V d^3r \vec{E}^2(r) = (\text{s. (43)})$$

$$= \frac{1}{2} \int_V d^3r \underbrace{\rho(r) \phi(r)}_0 \neq \frac{1}{8\pi} \int_{F(V)} d^2\vec{f} \cdot \phi(r) \nabla \phi(r)$$

----- da hier  $d^2\vec{f}$  nach  $V$  hinein orientiert

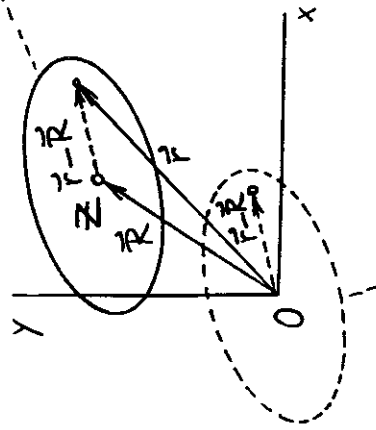
$$= \frac{1}{8\pi} \sum_m \phi_m \underbrace{\left( \int d^2\vec{f} \cdot \nabla \phi(r) \right)}_{\mathcal{Q}_m}$$

(51):  $4\pi Q_m$ 

$$W = \frac{1}{2} \sum_m Q_m \phi_m = \frac{1}{2} \sum_{mn} C_{mn} \phi_m \phi_n \quad (53)$$

III.3.C. Lokalisierte Ladungsverteilung  
in einem über dieselbe "quasihomogenen"  
äußeren elektrischen Feld

Versobene Ladungs=  
 Verteilung: Dichte mit  
 $\rho_{\vec{R}}(\vec{r})$  bezeichnet  
 Es gilt dann

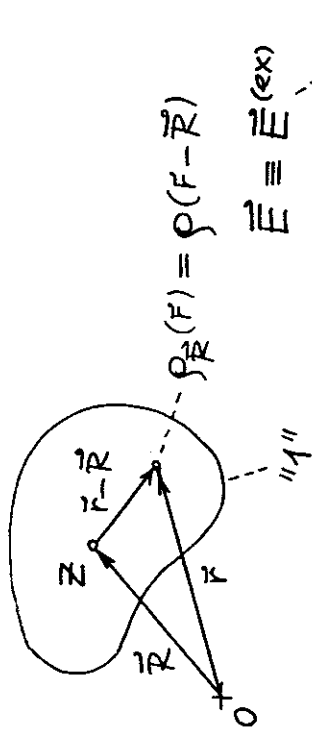


Ladungsdichte mit

$\rho_0(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$  bezeichnet  
 vorgegebene Funktion

Zentrum in 0

$$\rho_{\vec{R}}(\vec{r}) = \rho(\vec{r} - \vec{R})$$



$$\rho_{\vec{R}}(\vec{r}) = \rho(\vec{r} - \vec{R})$$

$$\vec{E} \equiv \vec{E}^{(ex)}$$

"1"

$$W_{12}^{ww} = \int d^3r \rho_1(\vec{r}) \phi_2(\vec{r}) \quad (\text{kein Faktor } \frac{1}{2}!)$$

$$W^{ww}(\vec{R}) = \int d^3r \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) \equiv \phi^{(ex)}(\vec{r})$$

$$W^{ww}(\vec{R}) = \int d^3r \rho(\vec{r} - \vec{R}) \phi(\vec{r}) \quad (56)$$

$$W^{ww}(\vec{R}) = \int d^3r \rho(\vec{r}) \phi(\vec{R} + \vec{r})$$

$$\phi(\vec{R} + \vec{r}) = \phi(\vec{R}) + \vec{\nabla}_{\vec{R}} \phi(\vec{R}) \cdot \vec{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi(\vec{R})}{\partial R_j \partial R_k} x_j x_k + \dots \quad (57)$$

$$W^{ww}(\vec{R}) = \underbrace{\int d^3r \rho(\vec{r})}_{Q} + \underbrace{\vec{\nabla}_{\vec{R}} \phi(\vec{R}) \cdot \int d^3r \vec{r} \rho(\vec{r})}_{-\vec{E}(\vec{R})} \underbrace{\int d^3r \vec{r} \rho(\vec{r})}_{\vec{p}}$$

$$+ \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \phi(\vec{R})}{\partial R_j \partial R_k \partial R_l} \int d^3r 3x_j x_k x_l \rho(\vec{r}) + \dots$$

$$- \frac{\partial E_j(\vec{R})}{\partial R_k} \underbrace{\int d^3r 3x_j x_k x_l \rho(\vec{r})}_{Q_{jkl}}$$

Multipolmomente bezgl.  
 Zentrum

$$W^{WW}(\vec{R}) = q\phi(\vec{R}) - \vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{R}) - \frac{1}{6} \bar{Q}_{jk} \frac{\partial E_j(\vec{R})}{\partial R_k} + \dots$$

Monopol- Dipol- Quadrupol- ...

Im Quadrupolbeitrag kann man  
Wegen  $\text{div } \vec{E}(\vec{r}) \equiv \text{div } \vec{E}^{(ex)}(\vec{r}) = 0$  im  
betrachteten Raumbereich, insbesondere am Ort  $\vec{r} = \vec{R}$ ,  
statt  $\bar{Q}_{jk}$  auch  $Q_{jk}$  einsetzen:

$$-\frac{1}{6} \frac{\partial E_j(\vec{R})}{\partial R_k} \underbrace{\int d^3r (3x_j x_k - r^2 \delta_{jk}) \rho(\vec{r})}_{Q_{jk}}$$

$$= -\frac{1}{6} \frac{\partial E_j(\vec{R})}{\partial R_k} Q_{jk} + \frac{1}{6} \frac{\partial E_j(\vec{R})}{\partial R_j} \underbrace{\int d^3r r^2 \rho(\vec{r})}_0 \quad \exists$$

Somit gilt auch

$$W^{WW}(\vec{R}) = q\phi(\vec{R}) - \vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{R}) - \frac{1}{6} Q_{jk} \frac{\partial E_j(\vec{R})}{\partial R_k} + \dots \quad (58)$$

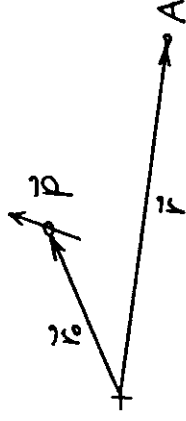
### III.3.D. Wechselwirkungsenergie zweier elektrischer Punktdipole

Elektrischer Punktdipol (mathematischer

elektrischer Dipol): Gesamtladung null,

$\vec{p} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{Q}$  und alle höheren Multipolmomente  
null

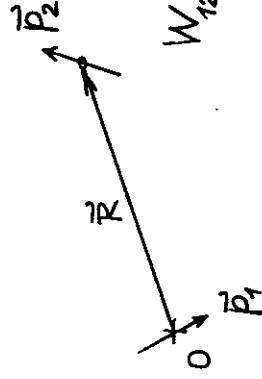
Näheres dazu in Abschnitt IV.1.D.



$$(31c): \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{3[\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)](\vec{r} - \vec{r}_0) - (r - r_0)^2 \vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^5}, \quad (60)$$

Anwendung:

$$|\vec{r} - \vec{r}_0| > 0$$



$$W_{12}^{WW}(\vec{R}) = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1(\vec{R})$$

$$= -\vec{p}_1 \cdot \vec{E}_2(\vec{0})$$

gibt

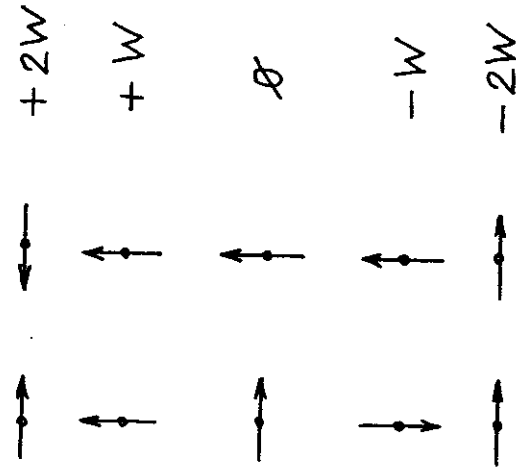
$$W_{12}^{WW}(\vec{R}) = \frac{R^2 \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 3(\vec{p}_1 \cdot \vec{R})(\vec{p}_2 \cdot \vec{R})}{R^5} \quad (61)$$

$$W_{12}^{ww}(\vec{R}) = \frac{R^2(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) - 3(\vec{p}_1 \cdot \vec{R})(\vec{p}_2 \cdot \vec{R})}{R^5}$$

gibt speziell mit

$$W = \frac{|\vec{p}_1| |\vec{p}_2|}{R^3}$$

$$W_{12}^{ww}$$



III. 4. Kräfte in elektrischen Feldern

III. 4.A. Kraft auf eine lokalisierte

Ladungsverteilung in einem über dieselbe

"quasihomogenen" äußeren elektrischen Feld

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \int d^3r \rho_1(\vec{r}) \vec{E}_2(\vec{r})$$

$$\vdots$$

$$\vec{F}(\vec{R}) = \int d^3r \rho(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}^{(ex)}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r})$$

$$\rho_{\vec{R}}(\vec{r}) = \rho(\vec{r} - \vec{R})$$

Gesamtkraft auf die Ladungsverteilung  
(mit Zentrum am Ort  $\vec{R}$ )

$$\vec{F}(\vec{R}) = \int d^3r \rho(\vec{r} - \vec{R}) \vec{E}(\vec{r}) \tag{63}$$

$$\vec{F}(\vec{R}) = \int d^3r \rho(\vec{r}) \vec{E}(\vec{R} + \vec{r})$$

$$\vec{E}(\vec{R} + \vec{r}) = \vec{E}(\vec{R}) + (\vec{r} \cdot \nabla_{\vec{R}}) \vec{E}(\vec{R}) + \dots$$

$$\vec{F}(\vec{R}) = \underbrace{\int d^3r \rho(\vec{r}) \vec{E}(\vec{R})}_{Q} + \underbrace{\int d^3r \rho(\vec{r}) (\vec{r} \cdot \nabla_{\vec{R}}) \vec{E}(\vec{R})}_{\vec{p} \cdot \nabla_{\vec{R}}} + \dots \tag{64}$$

$$\vec{F}(\vec{R}) = q \vec{E}(\vec{R}) + (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}}) \vec{E}(\vec{R}) + \dots$$

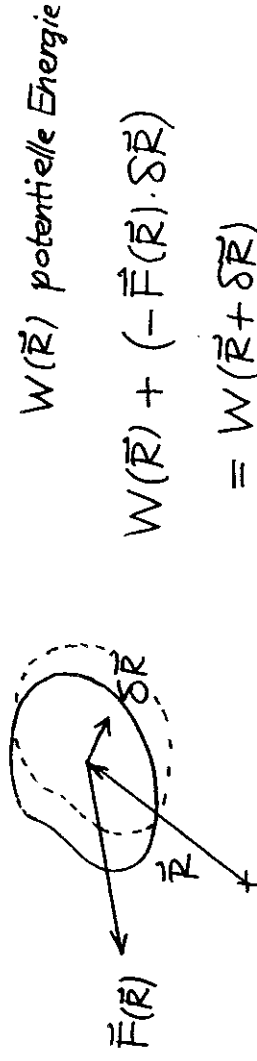
$$\underbrace{\vec{p} \times (\vec{\nabla}_{\vec{R}} \times \vec{E}(\vec{R}))}_{\vec{0}} = \vec{0} = \frac{\vec{\nabla}_{\vec{R}} (\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{R}))}{(65)} - \frac{(\vec{p} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}}) \vec{E}(\vec{R})}{(66)}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{R}) &= q \vec{E}(\vec{R}) + \vec{\nabla}_{\vec{R}} (\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{R})) + \dots \\ &= -\vec{\nabla}_{\vec{R}} (q \phi(\vec{R})) - \vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{R}) + \dots \\ &= -\vec{\nabla}_{\vec{R}} W^{WW}(\vec{R}) \end{aligned} \quad (67)$$

Die elektrostatische WW-Energie, welche die als Feldenergie gespeicherte WW-Energie darstellt, kann also als Potential der Kraft des äußeren elektrischen Feldes auf die feste Ladungsverteilung und somit auch als potentielle Energie der Ladungsverteilung im äußeren elektrischen Feld angesehen werden.

**UNTERSCHIED zur Magnetostatik!** (s. später)

### Energiebilanz bei Verschiebung um $\delta \vec{R}$ :

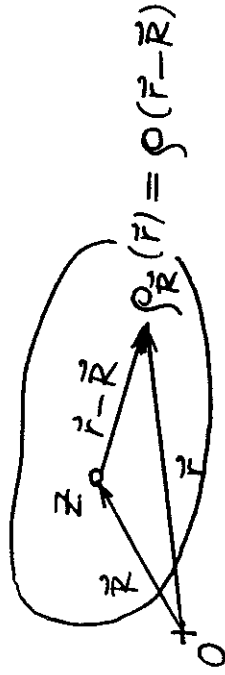


$$\begin{aligned} W(\vec{R}) + (-\vec{F}(\vec{R}) \cdot \delta \vec{R}) \\ = W(\vec{R} + \delta \vec{R}) \end{aligned}$$

$$W(\vec{R}) - \vec{F}(\vec{R}) \cdot \delta \vec{R} = W(\vec{R}) + \delta \vec{R} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}} W(\vec{R})$$

$$\underline{\vec{F}(\vec{R}) = -\vec{\nabla}_{\vec{R}} W(\vec{R})}$$

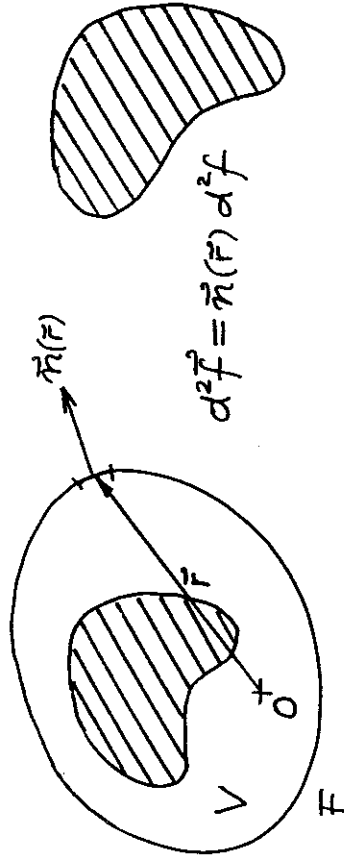
Gesamtes auf die Ladungsverteilung (mit Zentrum am Ort  $\vec{R}$ ) bzgl. des Zentrums wirkendes Drehmoment



$$\vec{N}(\vec{R}) = \int d^3r [(\vec{r} - \vec{R}) \times \rho(\vec{r} - \vec{R}) \vec{E}(\vec{r})] \quad (68)$$

$$\vec{N}(\vec{R}) = \vec{p} \times \vec{E}(\vec{R}) + \dots \quad (69)$$

III.4.B. Maxwell'scher Spannungstensor



$$(II.56): \frac{d}{dt} (\vec{P}^{mech}(t) + \vec{P}^{field}(V;t)) = \oint_F d^2\vec{f} \cdot \vec{T}(\vec{r},t)$$

Elektrostatik

Gesamtkraft auf die im Volumbereich V befindliche Ladungsverteilung

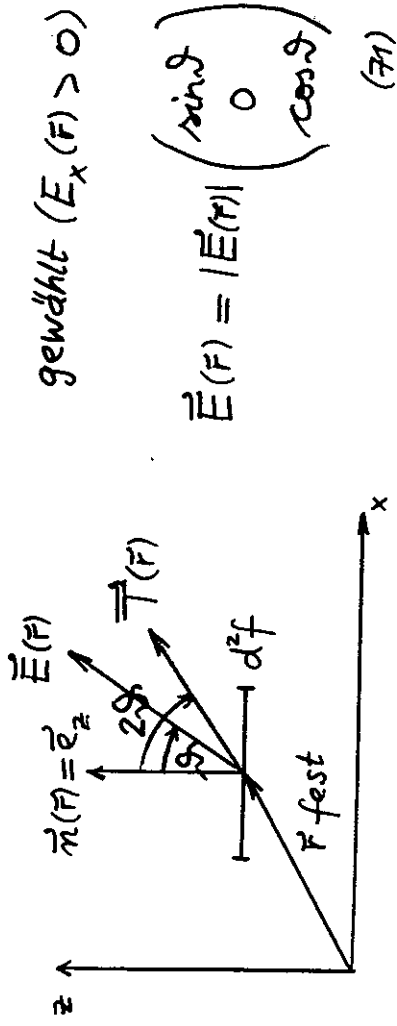
$$\vec{F} = \oint_F d^2\vec{f} \cdot \vec{T}(\vec{r}) = \oint_F d^2\vec{f} \underbrace{\vec{n}(\vec{r}) \cdot \vec{T}(\vec{r})}_{=: \vec{T}(\vec{r}) \text{ Flächenelement}}$$

mit dem Mx-schen Spannungstensor (s. (II.52))

$$\hat{=} \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 & E_x E_y & E_x E_z \\ E_y^2 - \frac{1}{2} E^2 & E_y E_z & E_z^2 - \frac{1}{2} E^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{E} \text{ Gesamtfeld} \\ \text{aller Quellen!} \\ (70) \end{matrix}$$

Richtung und Betrag der Flächenkraft

- 1) Richtung von  $d^2\vec{f}$  als z-Richtung gewählt
- 2) Ebene von  $d^2\vec{f}$  und  $\vec{E}(\vec{r})$  als  $z_x$ -Ebene gewählt ( $E_x(\vec{r}) > 0$ )



$$\vec{E}(\vec{r}) = |\vec{E}(\vec{r})| \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \quad (71)$$

$$E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 = E^2 \frac{1}{2} (2 \sin^2\alpha - 1) = -\cos 2\alpha$$

$$E_y^2 - \frac{1}{2} E^2 = -\frac{1}{2} E^2$$

$$E_z^2 - \frac{1}{2} E^2 = E^2 \frac{1}{2} (2 \cos^2\alpha - 1) = \cos 2\alpha$$

$$E_x E_z = E^2 \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$\vec{T} = \frac{E^2}{8\pi} \begin{pmatrix} -\cos 2\alpha & 0 & \sin 2\alpha \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin 2\alpha & 0 & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{T} = \vec{e}_z \cdot \vec{T}$$

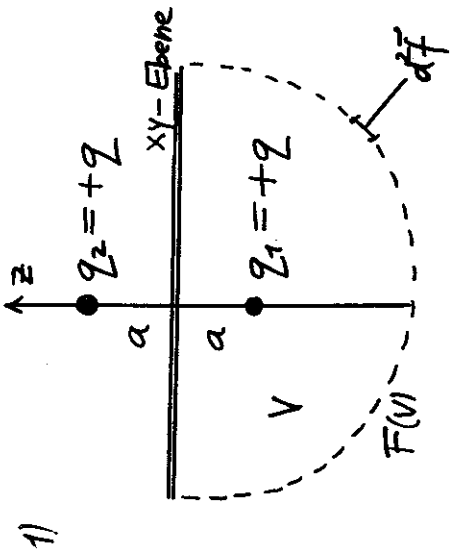
$$= \frac{\vec{E}^2}{8\pi} \begin{pmatrix} -\cos 2\sigma & 0 & \sin 2\sigma \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin 2\sigma & 0 & \cos 2\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{T}(\vec{r}) = \frac{\vec{E}^2(\vec{r})}{8\pi} \begin{pmatrix} \sin 2\sigma \\ 0 \\ \cos 2\sigma \end{pmatrix} \quad \text{Flächenkraft} \quad (72)$$

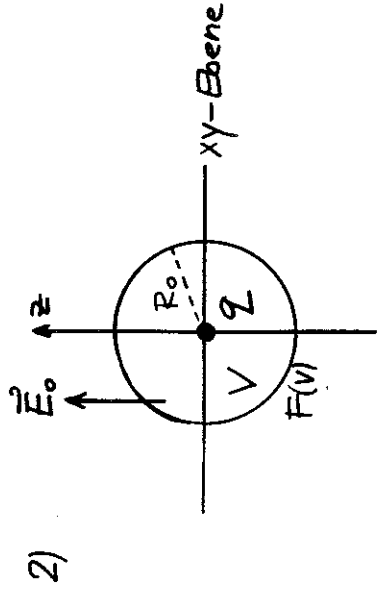
$$|\vec{T}(\vec{r})| = \frac{\vec{E}^2(\vec{r})}{8\pi}$$

$\vec{T}(\vec{r})$  liegt in der von  $d^2\vec{f}$  und  $\vec{E}(\vec{r})$  aufgespannten Ebene und schließt mit  $\vec{E}(\vec{r})$  denselben Winkel ein wie  $\vec{E}(\vec{r})$  mit  $d\vec{f}$

Beispiele zum Selbstrechnen:



Kraft auf  $q_1$  zu berechnen  
 (= Kraft von  $q_2$  auf  $q_1$ )



Kraft auf Punktladung  $z$  im homogenen Feld  $\vec{E}_0$  zu berechnen.

III. 4. C. Bewegung eines geladenen Teilchens  
 (nichtrelativistisch) in einem vorgegebenen statischen  $\vec{E}$ -Feld (73)

BG:  $m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(t) = q \vec{E}(\vec{r}(t))$  (73)

AB:  $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$   
 $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$

homogenes Feld

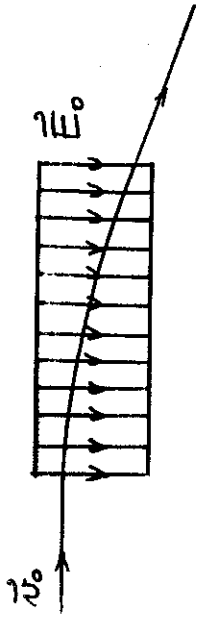
$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0$$

$\Rightarrow$

$$\vec{r}(t) = \frac{q}{m} \vec{E}_0 \frac{t^2}{2} + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \quad (74)$$

1)  $\vec{v}_0 \parallel \vec{E}_0$  : longitudinaler Fall  
gleichförmig beschleunigte geradlinige  
Bewegung (Linearbeschleuniger)

2)  $\vec{v}_0 \parallel \vec{E}_0$  : beschleunigte Bewegung /  $\text{cm/s}$   
Parabelbahn (z.B. Plattenkondensator)



(ohne Randeffekte)

Unterschiede zu spezieller Relativitätstheorie?  
 ( $c$  Grenzggeschwindigkeit; Selbstkraft)

IV. MAGNETOSTATIK IM VAKUUM

IV.1 Stationäre Ströme. Magnetostatik

$$\text{div } \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

$$\text{rot } \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r})$$

(III.2)

mit  
 KG

$\text{div } \vec{j}(\vec{r}) = 0$

(II.5)

mathematisch: Integrabilitätsbedingung

physikalisch: Ladungserhaltung

(III.2):  $\text{div } \vec{B}(\vec{r}) = 0 \implies$

$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r})$

(1)

$$\begin{aligned} \implies \text{rot } \vec{B}(\vec{r}) &= \text{rot rot } \vec{A}(\vec{r}) \quad \nabla \times \\ &= \text{grad div } \vec{A}(\vec{r}) - \Delta \vec{A}(\vec{r}) \\ &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}) \end{aligned}$$

0 verlangt:

Coulombgleichung (= Lorenzgleichung)



IV-2

Also:

$$\text{Eichung} \quad \underline{\text{div } \vec{A}(\vec{r}) = 0} \quad (2)$$

FG

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \vec{j}(\vec{r}) \quad (3)$$

#### IV.1.A. Magnetfelder bei natürlichen RB

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (4)$$

(4) erfüllt (3) ✓ (Elektrostatik!)

$$(4) \text{ erfüllt (2):} \quad -\vec{\nabla}' \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{(II.5)}$$

$$= -\frac{1}{c} \int d^3r' \vec{\nabla}' \cdot \left( \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) + \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \underbrace{\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}')}_{(II.5): 0}$$

Gauß

(II.5): 0

$$= -\frac{1}{c} \oint d^2f' \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 0 \quad \checkmark$$

IV-3

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \vec{\nabla} \times \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

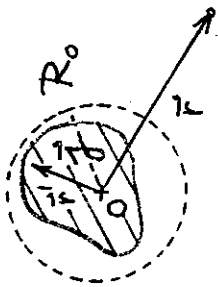
$$= -\frac{1}{c} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \times \underbrace{\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{-\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}} \quad (6)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (7)$$

Für spezielle Randwertprobleme ist zur obigen Lösung für  $\vec{A}(\vec{r})$  bzw. für  $\vec{B}(\vec{r})$  eine geeignete Lösung der homogenen Gl'n. zu addieren.

#### IV-4 IV.1.B. Magnetisches Dipolmoment.

Magnetfeld einer lokalisierten Stromverteilung



Lokalisierte Stromverteilung

(im engeren Sinn):

$$\vec{j}(\vec{r}') = \vec{0} \quad \text{für } r' > R_0 \quad (8)$$

$$(4): \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$(III.28b): \quad \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \dots$$

$r > R_0$ :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{1}{cr} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}')}_{\vec{A}_{\text{monopol}}(\vec{r})} + \underbrace{\frac{1}{cr^3} \int d^3r' (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}')}_{\vec{A}_{\text{dipol}}(\vec{r})} + \dots \quad (9)$$

$\parallel \vec{0}$ , da

$$\int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') = \vec{0} \quad (12)$$

(s. nächste Folie)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (j_i(\vec{r}') x'_k) = \frac{\partial j_i(\vec{r}')}{\partial x_i} x'_k + j_i(\vec{r}') \delta_{ik}$$

$$\underbrace{\text{div}' \vec{j}(\vec{r}') = 0}_{(10)} \quad (10)$$

$= j_k(\vec{r}')$ , symbolisch

$$\underbrace{(\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}')) \vec{r}'}_{(11a)} = \vec{j}(\vec{r}') \quad (11a)$$

$$\Rightarrow \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') = \int d^3r' (\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}')) \vec{r}'$$

$$= (\text{Gauß}) = \oint (d^2\vec{r}' \cdot \vec{j}(\vec{r}')) \vec{r}' = 0$$

Es bleibt also

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}_{\text{dipol}}(\vec{r}) + \dots} \quad r > R_0$$

mit

$$\vec{A}_{\text{dipol}}(\vec{r}) = \frac{1}{cr^3} \int d^3r' (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}')$$

Wird umgeformt



$$\vec{B}_{\text{dipol}}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}_{\text{dipol}}(\vec{r})$$

$$= \vec{\nabla} \times \left( \vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right)$$

$$\vec{\nabla} \times \left( \vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \vec{m} \left( \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \right) - (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{x_i}{r^3} = \frac{1}{r^3} \frac{\partial x_i}{\partial x_i} + \underbrace{x_i \frac{\partial}{\partial x_i}}_3 \frac{1}{r^3} = 0 - 3 \frac{x_i}{r^5}$$

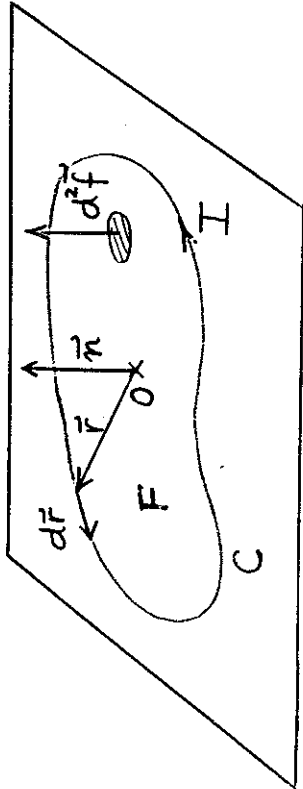
$$[(\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{r}}{r^3}]_i = m_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_i}{r^3}$$

$$= m_j \frac{\delta_{ij}}{r^3} - m_j x_i \frac{3x_j}{r^5}$$

$$= \frac{m_i}{r^3} - \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r}) x_i}{r^5}$$

$$\vec{B}_{\text{dipol}}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{m}}{r^5} \quad \checkmark$$

### Ebene Leiterschleife C



dünner  
geschlossener  
Linienstrom  
in einer Ebene

$$\text{Allgemeine Formel} \quad \vec{m} = \frac{1}{2c} \int d^3r (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}))$$

$$\vec{j}(\vec{r}) d^3r \rightarrow I d\vec{r} \quad (18a)$$

$$\text{gibt} \quad \vec{m} = \frac{I}{c} \frac{1}{2} \oint_C (\vec{r} \times d\vec{r})$$

Mathematik:  $|\vec{r}| \vec{n}$

( $|\vec{r}|$  Flächeninhalt von F)

Falls "vergessen":

$$\frac{1}{2} \oint_C (\vec{r} \times d\vec{r})_l = \frac{1}{2} \oint_C \varepsilon_{lmk} x_m dx_k$$

$$= \oint_C dx_k \frac{1}{2} \varepsilon_{lmk} x_m = (\text{Stokes, (I.17b)})$$

$$= \int_F d^2f_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{lmk} x_m \right) = \int_F \underbrace{d^2f_i}_{d^2f_i} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{lmk} x_m \right)}_{\frac{1}{2} \varepsilon_{ilmk} \varepsilon_{lm}} = \int_F \frac{1}{2} \varepsilon_{ilmk} \varepsilon_{lm} \delta_{il} \quad (\text{A.6a})$$

IV-10

$$\vec{m} = \frac{I}{c} \cdot \frac{1}{2} \oint_C (\vec{r} \times d\vec{r}) = \frac{I}{c} \int_F d^2\vec{f} = \frac{I}{c} |F| \vec{n}$$

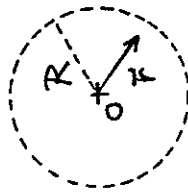
(10a, b)

IV.1.C. Mittelwert des Magnetfeldes  
(Kugelbereich) bei natürlichen RB

Natürliche RB:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Koo-Ursprung in Mittelpunkt der Mittelungskugel  
gelegt:



arithmetisches  
Mittel gebildet

$$\langle \vec{B} \rangle_R = \frac{3}{4\pi R^3} \int_{r < R} d^3r \vec{B}(\vec{r}) = \frac{3}{4\pi R^3} \int_{r < R} d^3r (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}))$$

$$= (\text{Gauß}) = \frac{3}{4\pi R^3} \oint_{r=R} (d^2\vec{f} \times \vec{A}(\vec{r}))$$

(19)

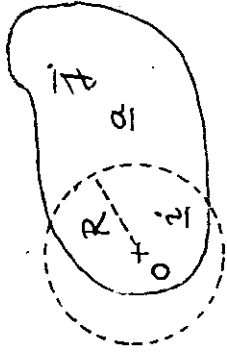
$$= \frac{3}{4\pi R^3} \oint_{r=R} (d^2\vec{f} \times \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|})$$

IV-11

$$\langle \vec{B} \rangle_R = \frac{3}{4\pi R^3} \oint_{r=R} (d^2\vec{f} \times \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|})$$

(20)

$$= -\frac{1}{c} \int d^3r' \left[ \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{3}{4\pi R^3} \oint_{r=R} d^2\vec{f} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]$$



$$(40): \left\{ \begin{array}{l} \frac{\vec{r}'}{r'^3}, \quad r' \geq R \\ \frac{\vec{r}'}{R^3}, \quad r' \leq R \end{array} \right.$$

$$\langle \vec{B} \rangle_R = \frac{1}{c} \int_{r' > R} d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (-\vec{r}')}{r'^3} - \frac{2\vec{m}_z}{R^3}$$

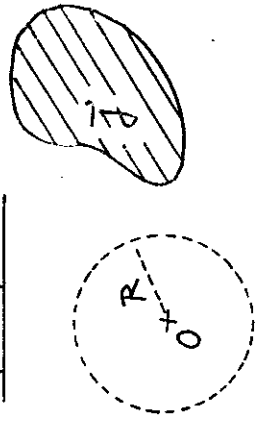
(21)

Beachte:

$$\vec{B}(\vec{r}) \parallel \vec{0} = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r}' - \vec{r})}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3}$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int d^3r' (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}'))$$

Spezialfälle:



$$\langle \vec{B} \rangle_R = \vec{B}(0)$$

unabhängig von R  
(solange  $\vec{j}(r) = 0$   
für  $r' < R$ )



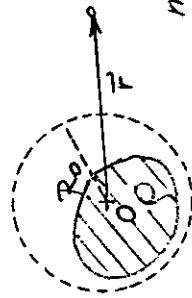
$$\langle \vec{B} \rangle_R = \frac{2m}{R^3}$$

proportional  $\frac{1}{\text{Volumen}}$   
der Mittelungskugel

IV.1.D. Vergleich: elektrischer und magnetischer Dipol

Elektrischer Dipol

$r > R_0$ :



$$\vec{E}(r) = \vec{E}_{\text{dipol}}(r) + \dots$$

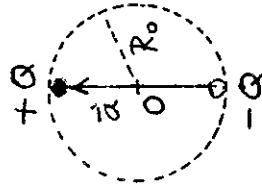
mit

$$\vec{E}_{\text{dipol}}(r) = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$$

$$\text{für } Q = \int d^3r' \rho(r') = 0$$

$$\vec{p} = \int d^3r' r' \rho(r') \neq 0$$

Beispiel:



$$\vec{p} = Q\vec{a}$$

Mathematischer elektrischer Dipol  
(elektrischer Punktdipol): = elektrischer Dipol  
dessen höhere Multipolmomente alle null sind  
(räumliche Ausdehnung  $\downarrow$  null bei festem Dipolmoment)

im Beispiel: Grenzübergang  $Q \uparrow \infty$ ,  $a \downarrow 0$   
 $Qa = p$  fest

$$\vec{E}(r) = \vec{E}_{\text{dipol}}(r) = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}, \quad r > 0$$

für Punktdipol im Ursprung

Die Information über das "Außenbereich" des Punktdipols geht nur in die Feldstärke im Ursprung (am Ort des Dipols) ein:

$$- \frac{4\pi}{3} \vec{p} \delta(r) \quad \text{Kontaktterm}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_{\text{dipol}}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{p}}{r^5} - \frac{4\pi}{3} \vec{p} \delta(\vec{r}) \quad (22)$$

für Punktdipol im Ursprung

Damit ist für beliebiges  $R > 0$

$$\int_{r < R} d^3r \vec{E}(\vec{r}) = \frac{4\pi R^3}{3} \langle \vec{E} \rangle_R = \frac{4\pi R^3}{3} \underbrace{\left( -\frac{\vec{p}}{R^3} \right)}_{(III.41)}$$

gesichert.

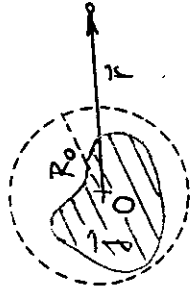
Bemerkung 1: Das Winkelintegral über den ersten Term in (22) ist null, das Radialintegral besitzt allerdings keinen definierten Wert.

Bemerkung 2: "Außer Konkurrenz": Für einen elektrischen Punktdipol im Ursprung gilt

$$\rho(\vec{r}) = -\vec{p} \cdot \text{grad} \delta(\vec{r}) = -\text{div} [\vec{p} \delta(\vec{r})]$$

Analog:  
Magnetischer Dipol

$r > R_0$ :



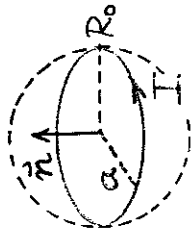
$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_{\text{dipol}}(\vec{r}) + \dots$$

mit

$$\vec{B}_{\text{dipol}}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{m}}{r^5}$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int d^3r' (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')) \neq \vec{0}$$

Beispiel: Kreisstrom



$$\vec{m} = \frac{I}{c} \pi a^2 \vec{n}$$

Mathematischer magnetischer Dipol

(magnetischer Punktdipol) := magnetischer

Dipol dessen höhere Multipolmomente alle null sind

(räumliche Ausdehnung  $\downarrow$  null bei festem Dipolmoment)

im Beispiel: Grenzübergang  $I \uparrow \infty$ ,  $a \downarrow 0$

$$\frac{I}{c} \pi a^2 = m \quad \text{fest} \quad |FI$$

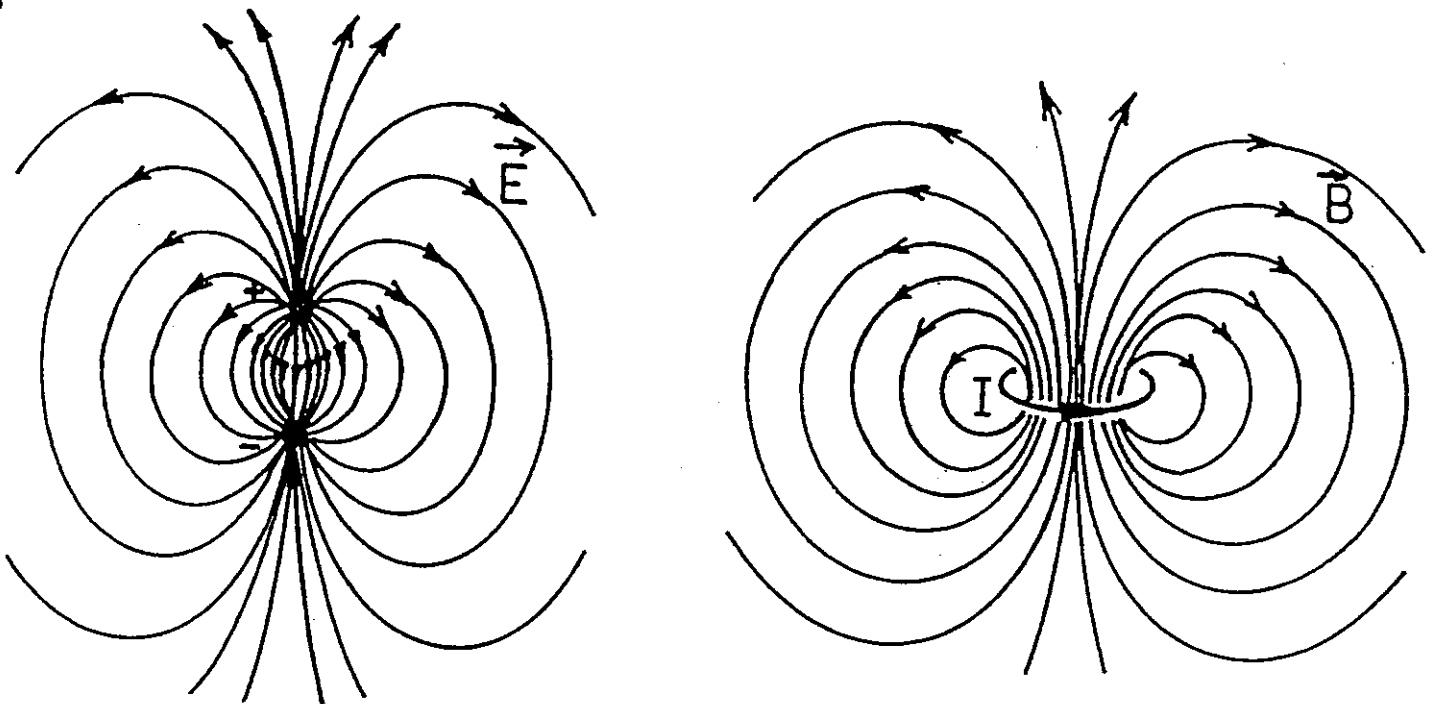


Fig. 4.1 Vergleich des Feldlinienverlaufes: elektrischer Dipol und magnetischer Dipol

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_{\text{dipol}}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{m}}{r^5} + \frac{8\pi}{3} \vec{m} \delta(\vec{r})$$

für Punktdipol im Ursprung

1) Ohne Kontaktterm gilt die Formel (23) nur für  $r > 0$ . Kontaktterm

2) Der Kontaktterm gewährleistet, daß für beliebiges  $R > 0$

$$\int_{r < R} d^3r \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi R^3}{3} \langle \vec{B} \rangle = \frac{4\pi R^3}{3} \frac{2\vec{m}}{R^3} \quad \text{gilt.} \quad (21)$$

"Außer Konkurrenz"

Bemerkung 1: Obigen Kontaktterm benötigt man in der QM für die Hyperfeinaufspaltung von S-Niveaus in Atomen.

Bemerkung 2: Für einen magnetischen Punktdipol im Ursprung gilt

$$\vec{j}(\vec{r}) = -c \vec{m} \times \text{grad} \delta(\vec{r}) = c \text{rot} [\vec{m} \delta(\vec{r})]$$



## IV.2 Magnetische sphärische Multipolentwicklung

### IV.2.A. Skalares magnetisches Potential

#### Lokalisierte Stromverteilung

$$\vec{J}(\vec{r}') = \vec{0} \quad \text{für } r' > R_0$$

$r > R_0$ :

$$\text{div } \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

$$\text{rot } \vec{B}(\vec{r}) = \vec{0}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\text{grad } \phi_M(\vec{r})$$

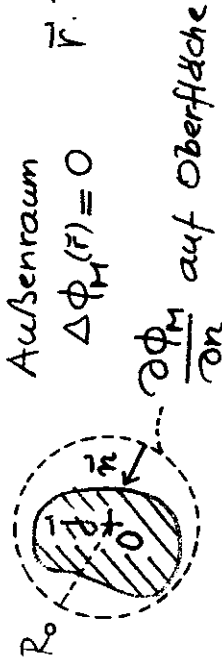
$$\Delta \phi_M(\vec{r}) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = -(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \phi_M(\vec{r}) = -r \frac{\partial \phi_M(\vec{r})}{\partial r} \quad (24)$$

$$\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) \Big|_{r \downarrow R_0} = -r \frac{\partial \phi_M(\vec{r})}{\partial r} \Big|_{r \downarrow R_0} \quad (25)$$

$$\text{Außenraum} \quad \Delta \phi_M(\vec{r}) = 0 \quad \vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) \Big|_{r \downarrow R_0} = R_0 \frac{\partial \phi_M}{\partial r}$$



Aus Elektrostatik ist bekannt:

Die Lösung der Laplacegleichung für den

Außenraum ist durch die Vorgabe der

Normalableitung auf der Kugeloberfläche

und die Regularitätsforderung im Unendlichen

(bis auf eine bedeutungslose additive Konstante)

EINDEUTIG BESTIMMT.

Folge: reguläre

Gelingt es uns, eine Lösung  $\phi_M(\vec{r})$  der Laplacegleichung für den Außenraum ( $r > R_0$ ) anzugeben, welche für  $r \downarrow R_0$

$$\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = -r \frac{\partial \phi_M(\vec{r})}{\partial r}$$

erfüllt, so stellt diese das gesuchte

Potential dar, welche die magnetische

Feldstärke der lokalisierten Stromverteilung

im Außenraum liefert.

Dies gelingt in den folgenden Schritten:

IV-20  
1. Schritt: Ableitung einer im ganzen  
Raum gültigen Poissonsgleichung für  $\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r})$

$$\begin{aligned} \Delta(\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r})) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (x_k B_k) \\ &= \underbrace{\frac{\partial B_i}{\partial x_i}}_0 + \underbrace{\frac{\partial B_i}{\partial x_i}}_0 + x_k \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial B_k}{\partial x_i}}_{B_i + x_k \frac{\partial B_k}{\partial x_i}} \\ &= \vec{r} \cdot \Delta \vec{B}(\vec{r}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{B}(\vec{r}) &= \underbrace{\text{grad div } \vec{B}(\vec{r})}_0 - \underbrace{\text{rot rot } \vec{B}(\vec{r})}_{\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r})} \\ &= -\frac{4\pi}{c} \text{rot } \vec{j}(\vec{r}) \\ \Rightarrow \Delta(\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r})) &= -\frac{4\pi}{c} \vec{r} \cdot \text{rot } \vec{j}(\vec{r}) \end{aligned}$$

IV-21

$$\Delta(\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r})) = -\frac{4\pi}{c} \vec{r} \cdot \text{rot } \vec{j}(\vec{r})$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\epsilon_{ikl} x_k j_l) \\ &= \underbrace{\epsilon_{ikl} \delta_{ik} j_l}_0 + \underbrace{\epsilon_{ikl} x_k}_{-\epsilon_{kil}} \frac{\partial j_l}{\partial x_i} \\ &= -x_k \epsilon_{kil} \frac{\partial j_l}{\partial x_i} = -\vec{r} \cdot \text{rot } \vec{j}(\vec{r}) \end{aligned}$$

$$\Delta(\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r})) = \frac{4\pi}{c} \nabla \cdot (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) \quad (28)$$

$\Rightarrow$  (Greenfunktion von  $\Delta$   
für natürliche RB)  
gültig im ganzen Raum

$$\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = -\frac{1}{c} \int d^3r' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \nabla' \cdot (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}'))$$

gültig im ganzen Raum (29)

IV. 2.B Sphärische magnetische Multipolmomente

2. Schritt: Multipolentwicklung von  $\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r})$  für  $r > R_0$ .

$$\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = -\frac{1}{c} \int d^3r' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{\nabla}' \cdot (\vec{F}' \times \vec{J}(\vec{r}'))$$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{\ell m} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{r'^{\ell}}{r^{\ell+1}} Y_{\ell m}(\vartheta', \varphi') Y_{\ell m}^*(\vartheta, \varphi)$$

für  $r' < r$

$r > R_0$ :

$$\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = - \sum_{\ell m} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)}{r^{\ell+1}} \frac{1}{c} \int d^3r' r'^{\ell} Y_{\ell m}^*(\vartheta', \varphi') \cdot$$

$$\cdot \vec{\nabla}' \cdot (\vec{F}' \times \vec{J}(\vec{r}'))$$

(30)

$$\frac{1}{r^{\ell+1}} = -r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^{\ell+1}} \frac{1}{\ell+1}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = -r \frac{\partial}{\partial r} \phi_M(\vec{r})$$

$$= -r \frac{\partial}{\partial r} \sum_{\ell m} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)}{r^{\ell+1}} M_{\ell m}^*$$

$$\int d^3r' r'^{\ell} Y_{\ell m}^*(\vartheta', \varphi') \cdot \vec{\nabla}' \cdot (\vec{F}' \times \vec{J}(\vec{r}'))$$

3. Schritt: "Ablese" von  $\phi_M(\vec{r})$

$$M_{\ell m}^* := -\frac{1}{(\ell+1)c} \int d^3r' r'^{\ell} Y_{\ell m}^*(\vartheta', \varphi') \vec{\nabla}' \cdot (\vec{F}' \times \vec{J}(\vec{r}'))$$

(33)

Sphärische magnetische Multipolmomente

$r > R_0$ :  $M_{00} = 0$  s. später

$$\phi_M(\vec{r}) = \sum_{\ell m} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)}{r^{\ell+1}} M_{\ell m}^*$$

(32)

reguläre

1) Ist: Lsg. von  $\Delta \phi_M(\vec{r}) = 0$  für  $r > R_0$ .

2) Erfüllt für  $(r > R_0$  und)  $r \downarrow R_0$

$$\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = -r \frac{\partial \phi_M(\vec{r})}{\partial r} \quad \checkmark$$

$\phi_M(\vec{r})$  stellt also das gesuchte Potential dar, welches gemäß

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\text{grad } \phi_M(\vec{r})$$

die Multipolentwicklung von  $\vec{B}(\vec{r})$  für  $r > R_0$  liefert.

IV.2.C. Vektorkugelflächenfunktionen

$$\vec{L} := -i(\vec{r} \times \vec{\nabla})$$

$$\vec{X}_{lm}(\vartheta, \varphi) := \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \vec{L} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

$\vec{L}$  in QM Drehimpulsoperator (in Einheiten  $\hbar$ ), hier formaler Differentialoperator.

Eigenschaften aus QM bekannt, z.B.

- 1)  $L_x, L_y, L_z$  wirken nur auf  $\vartheta, \varphi$  (nicht auf  $r$ ); z.B.  $L_z = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}$
- 2)  $\vec{r} \cdot \vec{L} = 0$  (Nulloperator)

Weitere Eigenschaften: s. Skriptum ANHANG A

Eigenschaften der  $\vec{X}_{lm}(\vartheta, \varphi)$ :

- 1)  $\vec{X}_{00}(\vartheta, \varphi) = \vec{0}$
- 2)  $\vec{r} \cdot \vec{X}_{lm}(\vartheta, \varphi) = 0$
- 3)  $\{ \vec{X}_{lm}(\vartheta, \varphi), \vec{r} \times \vec{X}_{lm}(\vartheta, \varphi); l=(0,1,2,\dots) \}$   
 $m=-l, \dots, +l$

Bilden VON für Entwicklung beliebiger  $\vec{f}(\vartheta, \varphi)$  mit  $\vec{r} \cdot \vec{f}(\vartheta, \varphi) = 0$

Formel zur Berechnung aller  $\vec{X}_{lm}$ , weitere Eigenschaften sowie explizite Ausdrücke für die  $\vec{X}_{lm}$ ,  $m=0, \pm 1$ , s. Skriptum ANHANG A  
 $M_{lm}$  durch die  $\vec{X}_{lm}$  "ausdrücken":

$$M_{lm} = -\frac{1}{(l+1)\epsilon} \int d^3r \underbrace{r^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}_{\mu} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{r} \times \vec{f}(\vec{r}))}_{\vec{a}} = \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{a}) - \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \mu$$

$$= 0 + \frac{1}{(l+1)\epsilon} \int d^3r \underbrace{(\vec{r} \times \vec{f}(\vec{r})) \cdot \vec{\nabla}}_{-\vec{f}(\vec{r}) \cdot (\vec{r} \times \vec{\nabla})} (r^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi))$$

Beachte:  $\vec{L} := -i(\vec{r} \times \vec{\nabla})$

$$= -\frac{i}{(l+1)\epsilon} \int d^3r \underbrace{\vec{f}(\vec{r}) \cdot \vec{L}}_{r^l \vec{L} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)} (r^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi))$$

$$= -i \sqrt{\frac{\epsilon}{l+1}} \int d^3r r^l \vec{X}_{lm}(\vartheta, \varphi) \cdot \frac{\vec{f}(\vec{r})}{\epsilon}$$

$$M_{lm} = -i \sqrt{\frac{\epsilon}{l+1}} \int d^3r r^l \vec{X}_{lm}(\vartheta, \varphi) \cdot \frac{\vec{f}(\vec{r})}{\epsilon}$$

## Vergleich Elektrostatik — Magnetostatik

$r > R_0$ :

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \phi(\vec{r})$$

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{\ell m} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)}{r^{\ell+1}} q_{\ell m}^*$$

$$q_{\ell m} = \int d^3r r^\ell Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) \rho(\vec{r})$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\text{grad } \phi_M(\vec{r})$$

$$\phi_M(\vec{r}) = \sum_{\ell m} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)}{r^{\ell+1}} M_{\ell m}^*$$

$$M_{\ell m} = -i\sqrt{\frac{\ell}{\ell+1}} \int d^3r r^\ell \bar{X}_{\ell m}(\vartheta, \varphi) \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r})}{c}$$

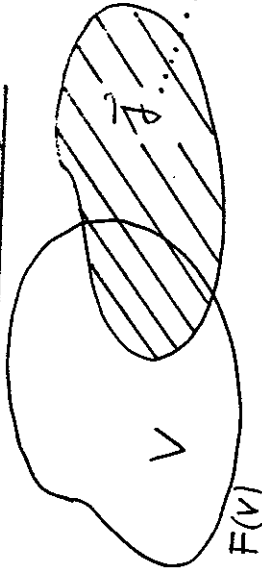
$$1) \vec{X}_{00}^*(\Omega) = \vec{0} \Rightarrow M_{00}^* = 0$$

2)  $\vec{X}_{1m}^*(\Omega)$  Skriptum Anhang A  $\Rightarrow$

$$M_{10}^* = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} m_z, \quad M_{1\pm 1}^* = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (m_x \mp im_y)$$

### IV.3 Magnetostatische Energie

#### IV.3.A. Selbstenergie und Wechselwirkungsenergie



(muss nicht lokalisiert sein)

Gesamtenergie im Volumen  $V$

$$W_V = \frac{1}{8\pi} \int_V d^3r \vec{B}^2(\vec{r}) \quad (40)$$

$$\vec{B}^2(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r}) \cdot (\nabla \times \vec{A}(\vec{r}))$$

$$= \nabla \cdot (\vec{A}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})) + \vec{A}(\vec{r}) \cdot \underbrace{(\nabla \times \vec{B}(\vec{r}))}_{\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r})}$$

$$\frac{1}{8\pi} \vec{B}^2(\vec{r}) = \frac{1}{2c} \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}) + \frac{1}{8\pi} \nabla \cdot (\vec{A}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}))$$

$$W_V = \frac{1}{2c} \int_V d^3r \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}) \quad (41)$$

$$+ \frac{1}{8\pi} \oint_{F(V)} d^2\vec{f} \cdot (\vec{A}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}))$$

Beachte:  $V \uparrow \mathbb{R}^3$  :  $\oint_{F(V)} d^2\vec{f}$  muss nicht gegen null streben  
 $V \uparrow \mathbb{R}^3$

Aber:

Gesamte magnetische Feldenergie im ganzen Raum bei natürlichen RB

$$W = \frac{1}{2c} \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2c^2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (42)$$

Beitrag nur vom Raumbereich mit  $\vec{j}(\vec{r}) \neq 0$ !

Bei Aufteilung der Quellen in "Komplexe"

$$\vec{J}(\vec{r}) = \sum_n \vec{J}_n(\vec{r}) \quad (43)$$

folgt daraus

$$W = \sum_{mn} \frac{1}{2c^2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\vec{J}_m(\vec{r}) \cdot \vec{J}_n(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$= W_{\text{selbst}} + W_{\text{ww}}$$

$W_n^{\text{selbst}}$

mit

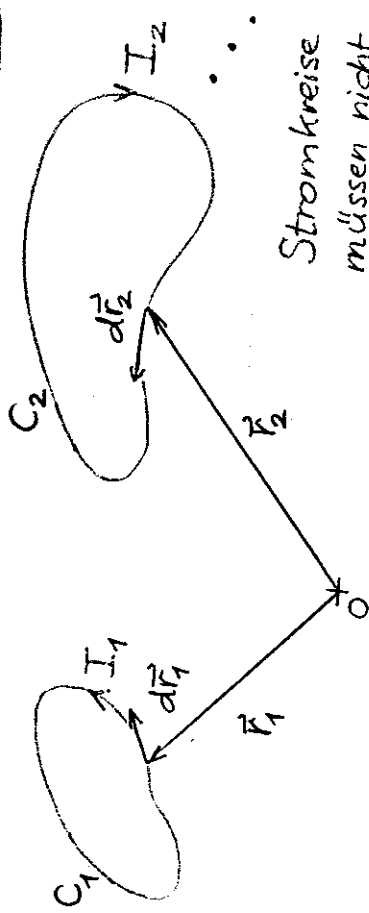
$$W_{\text{selbst}} = \sum_n \frac{1}{2c^2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\vec{J}_n(\vec{r}) \cdot \vec{J}_n(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (44a)$$

$$W_{\text{ww}} = \sum_{\substack{mn \\ n < m}} \frac{1}{c^2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\vec{J}_m(\vec{r}) \cdot \vec{J}_n(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (44b)$$

$W_{mn}^{\text{ww}}$

IV.3.B. Induktionskoeffizienten

für ein System geschlossener Linienstromkreise



Stromkreise  
müssen nicht  
eben sein;  
Anordnung  
lokalisiert.

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \sum_m \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{J}_m(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_m \frac{I_m}{c} \oint_{C_m} \frac{d\vec{r}_m}{|\vec{r} - \vec{r}_m|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2c} \int d^3r \vec{J}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \sum_n \frac{I_n}{2c} \oint_{C_n} d\vec{r}_n \cdot \vec{A}(\vec{r}_n) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{mn} I_n I_m \frac{1}{c^2} \oint_{C_n} \oint_{C_m} \frac{d\vec{r}_n \cdot d\vec{r}_m}{|\vec{r}_n - \vec{r}_m|} \end{aligned} \quad (46)$$

$\equiv: L_{nm}$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{mn} L_{mn} I_m I_n$$

mit

$$L_{mn} = L_{nm} = \frac{1}{c^2} \oint_{C_m} \oint_{C_n} \frac{d\vec{r}'_m \cdot d\vec{r}'_n}{|\vec{r}_m - \vec{r}'_n|} \quad (48)$$

Induktionskoeffizienten der Anordnung von Stromkreisen

Nur abhängig von Form und (für  $m \neq n$ ) gegenseitiger Lage der Stromkreise.

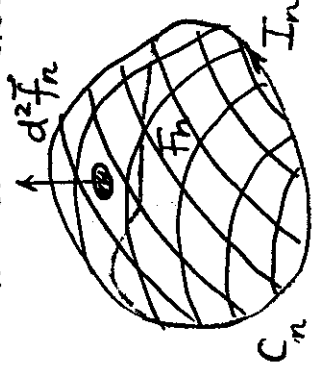
$L_{nn}$  Selbst-<sup>\*</sup>induktionskoeff.

$L_{mn}, n \neq m$ , Gegen-<sup>\*</sup>

Zusammenhang zwischen den Strömen und den magnetischen Flüssen durch

die Stromkreise:

$$\begin{aligned} \Phi_n &= \int_{F_n} d^2\vec{r}'_n \cdot \vec{B}(\vec{r}) \\ &= \int_{F_n} d^2\vec{r}'_n \cdot \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (49)$$



$$= (\text{Stokes}) = \oint_{C_n} d\vec{r}'_n \cdot \vec{A}(\vec{r}_n) \quad [\text{Forts. IV-31}]$$

Bemerkung zu den  $L_{mn}$ :

Die in (47) gegebene Definition liefert für  $m=n$

$$L_{nn} = \frac{1}{c^2} \oint_{C_n} \oint_{C_n} \frac{d\vec{r}'_n \cdot d\vec{r}'_n}{|\vec{r}_n - \vec{r}'_n|} \neq$$

Zur Berechnung von  $L_{nn}$  ( $n$  fest) muß man die Idealisierung des Leiters  $\mathcal{L}_n$  als Linienstrom (Linie  $C_n$ ) "rückgängig" machen:

$$I_n d\vec{r}'_n \rightarrow \vec{j}_n(\vec{r}) d^3r.$$

Nimmt man an, daß der Leiter  $\mathcal{L}_n$  die endliche Querschnittsfläche  $f_n$  besitzt durch die (gleich verteilt über den Querschnitt) der Gesamtstrom  $I_n$  fließt, so hat man dann

$$L_{nn} = \frac{1}{c^2} \int_{\mathcal{L}_n} d^3r' \int_{\mathcal{L}_n} d^3r'' \frac{\vec{j}_n(\vec{r}') \cdot \vec{j}_n(\vec{r}'')}{|\vec{r}' - \vec{r}''|} \quad (47')$$

$\exists$ , unabhängig von  $I_n$ , abhängig von  $f_n$

Dabei gilt natürlich  $L_{nn} \uparrow +\infty$  für  $f_n \downarrow 0$  (logarithmische Divergenz).



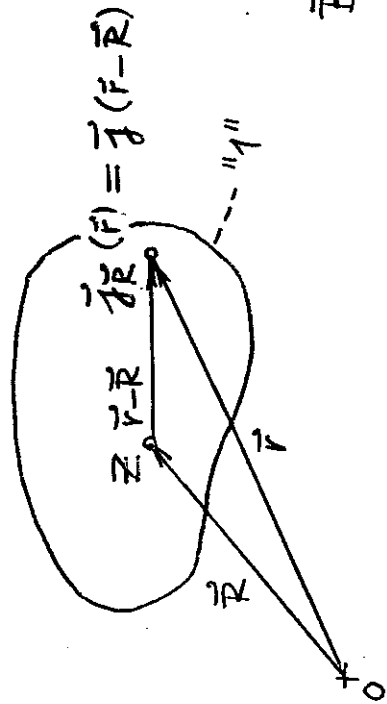
$$\frac{1}{c} \Phi_n = \frac{1}{c} \oint_{C_n} d\vec{r}_n \cdot \vec{A}(\vec{r}_n)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_m \frac{I_m}{c} \oint_{C_m} \frac{d\vec{r}_m}{|\vec{r} - \vec{r}_m|}$$

$$\frac{1}{c} \Phi_n = \sum_m I_m \frac{1}{c^2} \oint \oint \frac{d\vec{r}_n \cdot d\vec{r}_m}{|\vec{r}_n - \vec{r}_m|}$$

$$\frac{1}{c} \Phi_n = \sum_m L_{nm} I_m \quad (50)$$

IV.3.C. Lokalisierte Stromverteilung in einem über dieselbe "quasihomogenen" äußeren Magnetfeld



$$\vec{B} \equiv \vec{B}^{(ex)} \quad \text{--- "2"}$$

$$W_{12}^{WW} = \frac{1}{\epsilon} \int d^3r \underbrace{\vec{j}_1(\vec{r}) \cdot \vec{A}_2(\vec{r})}_{\vec{A}^{(ex)}(\vec{r}) \equiv \vec{A}(\vec{r})}$$

$$W^{WW}(\vec{R}) \quad \vec{j}_{\vec{R}}(\vec{r}) = \vec{j}(\vec{r} - \vec{R})$$

$$W^{WW}(\vec{R}) = \frac{1}{\epsilon} \int d^3r \vec{j}(\vec{r} - \vec{R}) \cdot \vec{A}(\vec{r}) \quad (51)$$

$$W^{WW}(\vec{R}) = \frac{1}{\epsilon} \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{R} + \vec{r})$$

$$\vec{A}(\vec{R} + \vec{r}) = \vec{A}(\vec{R}) + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}}) \vec{A}(\vec{R}) + \dots \quad (52)$$

$$W^{WW}(\vec{R}) = \frac{1}{\epsilon} \int d^3r \underbrace{\vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{R})}_{(12): \vec{0} \text{ Monopolbeitrag}}$$

$$+ \frac{1}{\epsilon} \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \cdot \underbrace{[(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}}) \vec{A}(\vec{R})]}_{(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}})(\vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{R}))} + \dots$$

Dipolbeitrag

Elektrostatik:

$$W^{WW}(\vec{R}) = q\phi(\vec{R}) - \vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{R}) + \dots$$

$$\underline{(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}}) \vec{j}(\vec{r})}$$

$$\underline{(13):} \quad (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') = -\frac{1}{2} \vec{r} \times (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')) + \frac{1}{2} (\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}')) (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{r}'$$

$$\Rightarrow \quad (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}) = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) \times \vec{r}' + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r})) (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{r}$$

$$\Rightarrow \text{Formel} \quad \underline{(\vec{r} \cdot \vec{a}) \vec{j}(\vec{r}) = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) \times \vec{a} + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r})) (\vec{r} \cdot \vec{a}) \vec{r}} \quad (F)$$

$\vec{a}$  beliebig von  $\vec{r}$  unabhängiger Vektor  
oder Vektoroperator

$$\text{HIER:} \quad \underline{(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}}) \vec{j}(\vec{r}) = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) \times \vec{\nabla}_{\vec{R}} + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r})) (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}}) \vec{r}} \quad (53)$$

$$W^{ww}(\vec{R}) = \frac{1}{c} \int d^3r \underbrace{(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}})}_{\left[ \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) \times \vec{\nabla}_{\vec{R}} \right] \cdot \vec{A}(\vec{R})} + \dots$$

$$+ \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r})) (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}}) (\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{R}))$$

$$W^{ww}(\vec{R}) = \frac{1}{2c} \int d^3r \underbrace{[(\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) \times \vec{\nabla}_{\vec{R}}] \cdot \vec{A}(\vec{R})}_{\vec{b}(\vec{r})} + \dots$$

$$= \underbrace{(\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) \cdot (\vec{\nabla}_{\vec{R}} \times \vec{A}(\vec{R}))}_{\vec{b}(\vec{r})}$$

$$= \underline{(\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) \cdot \vec{B}(\vec{R})}$$

$$W^{ww}(\vec{R}) = \frac{1}{2c} \int d^3r \underbrace{(\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) \cdot \vec{B}(\vec{R})}_{\vec{m}} + \dots \quad (54)$$

$$W^{ww}(\vec{R}) = \vec{m} \cdot \vec{B}(\vec{R}) + \dots \quad (55)$$

Beachte:

Elektrostatik:

$$W^{ww}(\vec{R}) = q \phi(\vec{R}) - \vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{R}) + \dots$$

#### IV. 4. Kräfte in Magnetfeldern

IV. 4. A. Kraft auf eine lokalisierte Stromverteilung in einem über dieselbe

"quasihomogenen" äußeren Magnetfeld

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{c} \int d^3r \underbrace{[\vec{j}_1(\vec{r}) \times \vec{B}_2(\vec{r})]}_{\vec{B}^{(ex)}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r})}$$

$$\vdots$$

$$\vec{F}(\vec{R}) = \vec{j}(\vec{r} - \vec{R})$$

Gesamtkraft auf die Stromverteilung  
(mit Zentrum am Ort  $\vec{R}$ )

$$\vec{F}(\vec{R}) = \frac{1}{c} \int d^3r [\vec{j}(\vec{r} - \vec{R}) \times \vec{B}(\vec{r})] \quad (56)$$

$$\vec{F}(\vec{R}) = \frac{1}{c} \int d^3r [\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{R} + \vec{r})]$$

$$\vec{B}(\vec{R} + \vec{r}) = \vec{B}(\vec{R}) + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}}) \vec{B}(\vec{R}) + \dots$$

$$\vec{F}(\vec{R}) = \frac{1}{c} \int d^3r \underbrace{\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{R})}_{(12) \quad \vec{0}}$$

$$+ \frac{1}{c} \int d^3r [\vec{j}(\vec{r}) \times (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}}) \vec{B}(\vec{R})] + \dots \quad (57)$$

$$\vec{F}(\vec{R}) = \frac{1}{c} \int d^3r [\vec{j}(\vec{r}) \times (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}}) \vec{B}(\vec{R})] + \dots$$

$$\underline{\vec{j}(\vec{r}) \times (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}}) \vec{B}(\vec{R}) = (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}}) \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{R})}$$

$$\begin{aligned} \underline{(53):} \quad & \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) \times \vec{\nabla}_{\vec{R}} + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r})) (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}}) \vec{r} \\ & = \frac{1}{2} [(\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) \times \vec{\nabla}_{\vec{R}}] \times \vec{B}(\vec{R}) \\ & \quad + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r})) (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}}) \vec{r} \times \vec{B}(\vec{R}) \end{aligned}$$

$$\vec{F}(\vec{R}) = \left[ \frac{1}{2c} \int d^3r (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) \times \vec{\nabla}_{\vec{R}} \right] \times \vec{B}(\vec{R}) + \dots \quad (58)$$

$$(\vec{m} \times \vec{\nabla}_{\vec{R}}) \times \vec{B}(\vec{R}) = \vec{\nabla}_{\vec{R}} (\vec{m} \cdot \vec{B}(\vec{R})) - \vec{m} \underbrace{(\vec{\nabla}_{\vec{R}} \cdot \vec{B}(\vec{R}))}_0$$

$$\underline{\vec{F}(\vec{R}) = \vec{\nabla}_{\vec{R}} (\vec{m} \cdot \vec{B}(\vec{R})) + \dots} \quad (59)$$

$$= \vec{\nabla}_{\vec{R}} W^{WW}(\vec{R}) = -\vec{\nabla}_{\vec{R}} (-W^{WW}(\vec{R}))$$

Es fungiert also  $-W^{WW}(\vec{R})$  (und nicht  $W^{WW}(\vec{R})$ ) als mechanisches Potential -

im Gegensatz zur Elektrostatik

$$\vec{F}(\vec{R}) = q \vec{E}(\vec{R}) + \vec{\nabla}_{\vec{R}} (p \cdot \vec{E}(\vec{R})) + \dots = -\vec{\nabla}_{\vec{R}} W^{WW}(\vec{R})$$

Die magnetostatische WW-Energie  $W^{WW}(\vec{R})$ , welche die als Feldenergie gespeicherte magnetische WW-Energie darstellt, kann nicht als mechanisches Potential der Kraft des äußeren Magnetfeldes auf die bzgl. Z fest

Stromverteilung  $\vec{j}(\vec{r})$  angesehen werden.

Grund: Bei "starrer Bewegung" der Stromverteilung im äußeren Feld muß

zur Aufrechterhaltung der Ströme

Energie von außen nachgeliefert

werden; andernfalls würden die

bei der Bewegung auftretenden

Induktionsspannungen die Ströme ändern

(Faradaysches Induktionsgesetz).

(Diese nachzuliefernde Energie beträgt

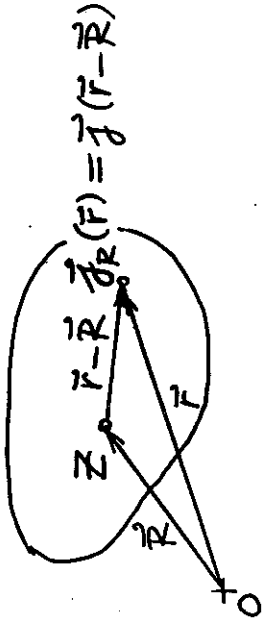
für einen magnetischen Punktdipol  $\vec{m}$

gerade  $+2(\vec{m} \cdot \vec{B})$ , sodaß sich als WW-Energie

$-\vec{m} \cdot \vec{B} + 2(\vec{m} \cdot \vec{B}) = +\vec{m} \cdot \vec{B}$  ergibt.)

**UNTERSCHIED zur Elektrostatik!**

Gesamtes auf die Stromverteilung  
(mit Zentrum am Ort  $\vec{R}$ ) bzgl. des  
Zentrums Wirkendes Drehmoment



$$\vec{N}(\vec{R}) = \frac{1}{c} \int d^3r [(\vec{r} - \vec{R}) \times (\vec{j}(\vec{r} - \vec{R}) \times \vec{B}(\vec{r}))]$$

$$\vec{N}(\vec{R}) = \frac{1}{c} \int d^3r [\vec{r} \times (\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{R} + \vec{r}))]$$

(60)

$$\vec{B}(\vec{R} + \vec{r}) = \vec{B}(\vec{R}) + \dots$$

$$\vec{N}(\vec{R}) = \frac{1}{c} \int d^3r [\vec{r} \times (\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{R}))] + \dots$$

$$= \frac{1}{c} \int d^3r (\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{R})) \vec{j}(\vec{r})$$

$$- \frac{1}{c} \int d^3r (\vec{r} \cdot \vec{j}(\vec{r})) \vec{B}(\vec{R}) + \dots$$

0, denn:  $\frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{V} \cdot \vec{j}(\vec{r})) \frac{1}{2} r^2 = \frac{\partial}{\partial x_i} (\frac{1}{2} r^2 \vec{j}_i(\vec{r}))$

$$= \cancel{\vec{j}_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} r^2 \frac{\partial \vec{j}_i}{\partial x_i} = \vec{r} \cdot \vec{j}(\vec{r})$$

$$\vec{N}(\vec{R}) = \frac{1}{c} \int d^3r (\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{R})) \vec{j}(\vec{r}) + \dots$$

IV-33:  $\vec{a} \equiv \vec{B}(\vec{R})$ :

$$\frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) \times \vec{B}(\vec{R}) + \frac{1}{2} (\vec{V} \cdot \vec{j}(\vec{r})) (\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{R})) \vec{r}$$

$$\vec{N}(\vec{R}) = \vec{m} \times \vec{B}(\vec{R}) + \dots \quad (61)$$

Elektrostatik:  $\vec{N}(\vec{R}) = \vec{p} \times \vec{E}(\vec{R}) + \dots$

IV.4.B. Bewegung eines geladenen Teilchens

(nichtrelativistisch)

BG:

$$m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(t) = q \frac{\vec{v}(t)}{c} \times \vec{B}(\vec{r}(t)) \quad (62)$$

AB:  $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$   
 $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$

$\Rightarrow$  (Arbeitssatz)

$$\frac{d}{dt} \frac{m \vec{v}^2(t)}{2} = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) = 0$$

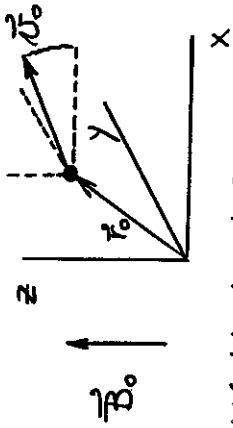
$\Rightarrow |\vec{v}(t)| = |\vec{v}_0|$  in beliebigen magnetischen Feldern

# Homogenes Magnetfeld $\vec{B}_0$

IV-40

$$\vec{\omega}_B = \frac{q}{mc} \vec{B}_0 \quad (63)$$

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{v}(t) \times \vec{\omega}_B \quad (64)$$



$$\omega_B = \frac{qB_0}{mc} \quad (> 0 \text{ falls } z > 0)$$

$$\vec{\omega}_B = (0, 0, \omega_B)$$

$$\vec{v}_0 = (v_{0x}, 0, v_{0z}), \quad v_{0x} \geq 0$$

Wahl des KS

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_B v_y(t) \\ -\omega_B v_x(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (65)$$

Integration gibt (selbst rechnen):

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_{0x} \cos \omega_B t \\ -v_{0x} \sin \omega_B t \\ v_{0z} \end{pmatrix} \quad (66a)$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{v_{0x}}{\omega_B} \sin \omega_B t \\ \frac{v_{0x}}{\omega_B} [\cos \omega_B t - 1] \\ v_{0z} t \end{pmatrix} + \vec{r}_0 \quad (66b)$$

IV-41

$$a := \frac{v_{0x}}{\omega_B} \quad [\text{Länge}] \quad (q > 0 \text{ betrachtet})$$

1)  $v_{0x} = 0$ : longitudinales Feld

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_{0z} \end{pmatrix}, \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_{0z} t \end{pmatrix} + \vec{r}_0$$

gleichförmig geradlinige Bewegung  
in Feldrichtung

2)  $v_{0x} > 0$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_{0x} \cos \omega_B t \\ -v_{0x} \sin \omega_B t \\ v_{0z} \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \sin \omega_B t + x_0 \\ a [\cos \omega_B t - 1] + y_0 \\ v_{0z} t + z_0 \end{pmatrix}$$

Überlagerung einer gleichförmig geradlinigen  
Bewegung in z-Richtung und einer  
dazu senkrechten Kreisbewegung

$$= \text{Bewegung längs Spirale mit } |\dot{\vec{r}}(t)| = |v_0|$$

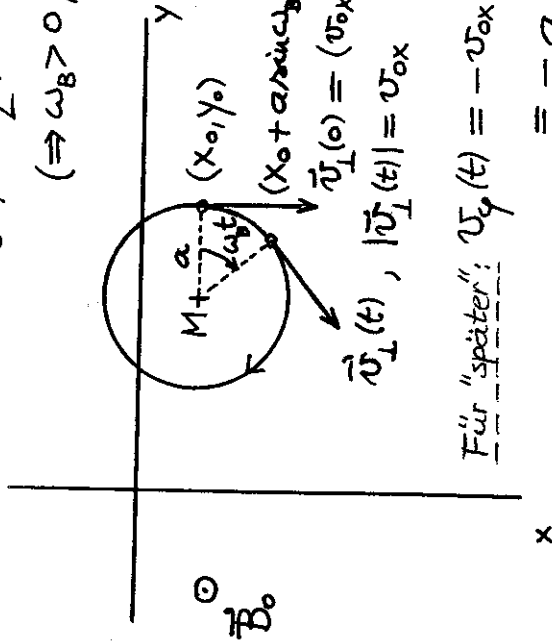
Projektion der Bahnkurve auf die xy-Ebene:

$$a = \frac{v_{0x}}{\omega_B}$$

Zeichnung für  $q > 0$

$$(\Rightarrow \omega_B > 0, a > 0)$$

$$M \dots (x_0, y_0 - a)$$



Für "später":  $v_y(t) = -v_{0x} = -a\omega_B$

$$= -a \frac{q}{mc} B_0$$

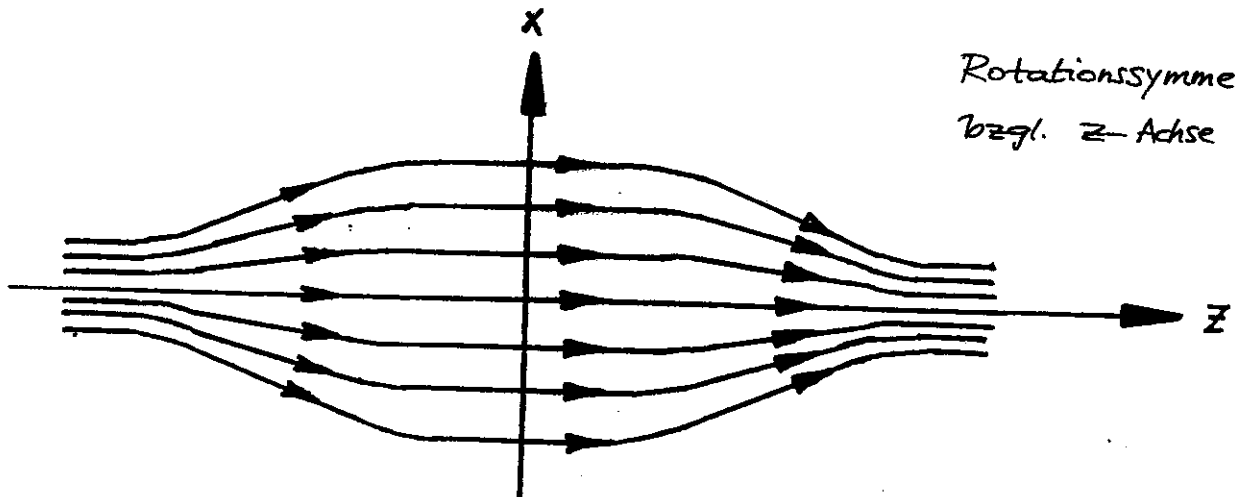
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + a \sin \omega_B t \\ y_0 - a + a \cos \omega_B t \\ z_0 + v_{0z} t \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow (x-x_0)^2 \\ \leftarrow + (y-y_0+a)^2 = a^2 \\ \text{Kreislinie} \end{matrix}$$

Unterschiede zu spezieller Relativitätstheorie?

(In  $\omega_B \rightarrow \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}$ ; Selbstkraft.)

IV.4.C. Magnetische Flasche

$$\vec{B}(\rho, \varphi, z) = B_\rho(\rho, z) \vec{e}_\rho + B_z(z) \vec{e}_z \quad (67)$$



Rotationssymmetrie  
bzgl. z-Achse

Fig. 4.3 Prinzipieller magnetischer Feldlinienverlauf für eine magnetische Flasche

$$\text{div } \vec{B} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} B_\varphi + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (68)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho(\rho, z)) = - \frac{dB_z(z)}{dz}, \quad B_\rho(\rho, z) = -\frac{\rho}{2} \frac{dB_z(z)}{dz} \quad (69)$$

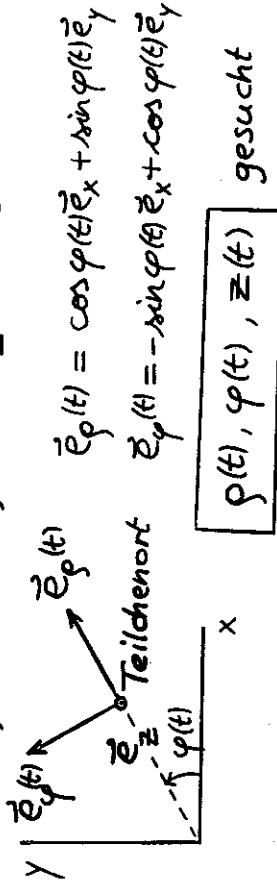
und  $B_\rho(0, z) = 0$

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{q}{mc} \vec{v}(t) \times \vec{B}(F(t))$$

Zylinderkoordinat - Komponenten:

$$\vec{v}(t) = v_\varphi(t) \vec{e}_\varphi(t) + v_z(t) \vec{e}_z$$

$$\vec{B}(F(t)) = B_\varphi(\rho(t), z(t)) \vec{e}_\varphi(t) + B_z(z(t)) \vec{e}_z$$



$$\vec{e}_\varphi(t) = \cos \varphi(t) \vec{e}_x + \sin \varphi(t) \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\rho(t) = -\sin \varphi(t) \vec{e}_x + \cos \varphi(t) \vec{e}_y$$

$\rho(t), \varphi(t), z(t)$  gesucht

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (v_\varphi(t) \vec{e}_\varphi(t) + v_z(t) \vec{e}_z) &= \frac{q}{mc} [v_\varphi(t) B_z(z(t)) \vec{e}_\varphi(t) \\ &+ (v_z(t) B_\varphi(\rho(t), z(t)) - v_\varphi(t) B_z(z(t))) \vec{e}_\varphi(t) \\ &- v_\varphi(t) B_\rho(\rho(t), z(t)) \vec{e}_z] \end{aligned} \quad (70)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} v_z(t) = -\frac{q}{mc} v_\varphi(t) B_\rho(\rho(t), z(t))$$

Näherung zur qualitativen Abschätzung:

$$v_\varphi(t) = -v_{0x} = -\omega_B = -\omega \frac{r}{c} B_0 \quad \text{im homogenen Feld } B_0 \vec{e}_z$$

hier:  $v_\varphi(t) \approx -\rho(t) \frac{q}{mc} B_z(z(t)) \quad (71)$

$$\frac{d}{dt} v_z(t) = -\frac{q}{mc} v_\varphi(t) B_\rho(\rho(t), z(t)) \left| \frac{v_\varphi(t)}{v_\varphi(t)} \right|$$

$$v_\varphi(t) \approx -\frac{q}{mc} \rho(t) B_z(z(t))$$

$$B_\rho(\rho, z) = -\frac{q}{2} \frac{dB_z(z)}{dz}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_z(t) &= -\frac{q}{mc} v_\varphi^2(t) \frac{B_\rho(\rho(t), z(t))}{v_\varphi(t)} \\ &\approx \frac{B_\rho(\rho(t), z(t))}{-\frac{q}{mc} \rho(t) B_z(z(t))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_z(t) &\approx -v_\varphi^2(t) \cdot \frac{-B_\rho(\rho(t), z(t))}{\rho(t) B_z(z(t))} \\ &= \left[ \frac{1}{2 B_z(z)} \frac{dB_z(z)}{dz} \right]_{z=z(t)} \end{aligned}$$

$$a_z(t) \approx -v_\varphi^2(t) \left[ \frac{1}{2 B_z(z)} \frac{dB_z(z)}{dz} \right]_{z=z(t)} \quad (72)$$

Raubereich mit  $\frac{dB_z(z)}{dz} \gtrsim 0$

$\Rightarrow a_z(t) \lesssim 0$  (unabhängig vom Vorzeichen von  $v_\varphi(t)$ , also vom Vorzeichen Flachsenenden ( $|v_\varphi(t)|$  konstant!) von  $z$ !)



V. ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN

IM VAKUUM

V.1 Ebene Wellen

V.1. A. Allgemeine (i.a. aperiodische) ebene Wellen

Homogene Maxwellgleichungen

(2a,b)

$$\text{div } \vec{E}(\vec{r},t) = 0, \quad \text{rot } \vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B}(\vec{r},t) = 0, \quad \text{rot } \vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

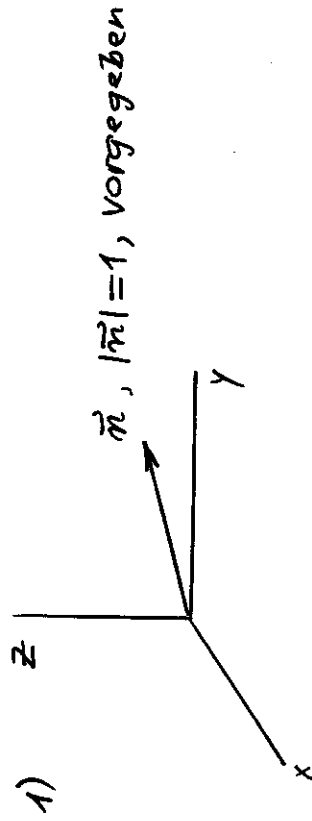
Wir betrachten zeitabhängige Felder, welche diese Gln. im ganzen Raum erfüllen. Diese beschreiben elm. Wellenfelder, das sind die Felder in großen Entfernungen von zeitabhängigen Quellen (s. Abstrahlung in Kapitel VI).

(2a,b)  $\Rightarrow$  (Rotorbildung in den Rotorgln.)

$$\boxed{\square \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{0}, \quad \square \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{0}} \quad (3)$$

(notwendige Bedgn. für Erfüllung der Maxwell-Gln.)

Spezielle Partikulärlösungen:



2)  $f(\vec{r})$  beliebige (2-mal stetig diffb.) reellwertige Funktion einer reellen Variablen  $\xi$  \*)

Dann gilt: "von"

$$u(\vec{r},t) = f(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct)$$

ist Partikulärintegral von

$$\square u(\vec{r},t) = 0.$$

Beweis:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = n_x f' \Rightarrow \Delta u = \underbrace{n^2}_{=1} f'' = f''$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = -f' \Rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f'' = f''$$

\*) Die Aussage gilt natürlich auch für eine konstante Funktion  $f(\xi) = \text{konst.}$ , im Zusammenhang mit der Wellenausbreitung interessieren uns aber nur nicht konstante Fktn.

Somit:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 f(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 f(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct)$$

sind für beliebige reelle konstante Vektoren  $\vec{E}_0, \vec{B}_0$ .  
Partikulärlösungen von  $\square \vec{E} = 0, \square \vec{B} = 0$

Damit diese Ausdrücke aber auch Partikulärlösungen der Maxwell-Gln. sind, muß

$$\text{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad (5)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{B}_0 = 0$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{n} \times \vec{E}_0 = \vec{B}_0 \quad (6)$$

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{n} \times \vec{B}_0 = -\vec{E}_0$$

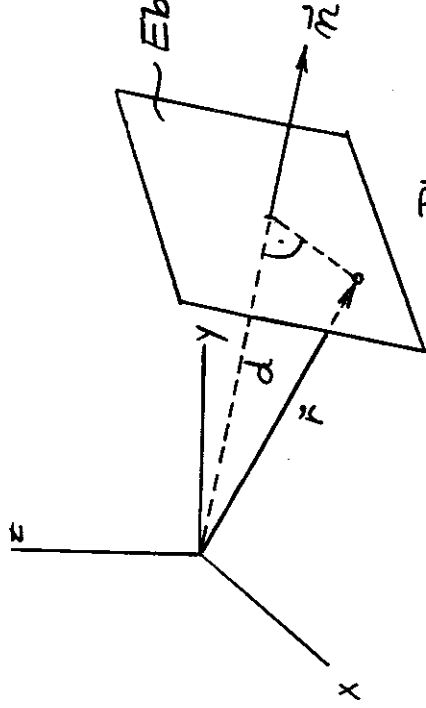
$\vec{n}, \vec{E}_0, \vec{B}_0$  orthogonales Dreibein  
 (Rechtssystem)

$$|\vec{E}_0| = |\vec{B}_0|$$

In Richtung  $\vec{n}$  mit der Geschwindigkeit  $c$   
 fortschreitende (i.a. aperiodische) ebene Welle.

V-3

(4)



Phase

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 f(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = (\vec{n} \times \vec{E}_0) f(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct) = \vec{n} \times \vec{E}(\vec{r}, t)$$

1) Ebene  $\vec{n} \cdot \vec{r} = d, t$  fest:

$$\vec{n} \cdot \vec{r} - ct = d - ct \text{ fest}$$

$\Rightarrow \vec{E}, \vec{B}$  in allen Punkten der Ebene  
 gleiche Werte  
 ebene Welle

2) Werte von  $\vec{E}, \vec{B}$ , welche zum Zeitpunkt  $t$  in  
 Ebene  $\vec{n} \cdot \vec{r} = d$  vorliegen, liegen zum

Zeitpunkt  $t + \Delta t$  in Ebene  $\vec{n} \cdot \vec{r} = d + c\Delta t$   
 Vor:  $d + c\Delta t - c(t + \Delta t) = d - ct$   
 Ausbreitung der Welle in Richtung  $\vec{n}$  mit  
 der Geschwindigkeit (PHASENGESCHWINDIGKEIT)  $c$

V-4

Bemerkung: "außer Konkurrenz"

allgemeinste in Richtung  $\vec{n}$  fortschreitende ebene Welle:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_{01} f_1(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct) + \vec{E}_{02} f_2(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{n} \times \vec{E}(\vec{r}, t)$$

$$\text{mit } \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{E}_{01} = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{E}_{02} = 0$$

V.1.B. Monochromatische (zeitlich harmonische)

ebene Wellen mit Kreisfrequenz  $\omega$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.} \quad (7a)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.} \quad (7b)$$

HIER:  $\vec{E}_0, \vec{B}_0$  konstante komplexe Amplituden=  
Vektoren

Entspricht einer Fourierkomponente.

(II.27a-d) (fouriertransformierte homogene Maxwell-Gln.)

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0, \quad \vec{k} \times \vec{E}_0 = \frac{\omega}{c} \vec{B}_0 \quad (8a)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0, \quad \vec{k} \times \vec{B}_0 = -\frac{\omega}{c} \vec{E}_0 \quad (8b)$$

Gln.

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0, \quad \vec{k} \times \vec{E}_0 = \frac{\omega}{c} \vec{B}_0$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0, \quad \vec{k} \times \vec{B}_0 = -\frac{\omega}{c} \vec{E}_0$$

dann und nur dann widerspruchsfrei, wenn

$$\boxed{\omega = \omega(k) = ck}$$

DISPERSIONS=  
BEZIEHUNG (9)

gilt ( $k = |\vec{k}|$ )

Bemerkung: Dann ist auch die Wellengleichung für  $\vec{E}, \vec{B}$  erfüllt. ●

Mit  $\vec{k} = k \vec{n} = \frac{\omega}{c} \vec{n}$

folgt dann wieder

$$\vec{n} \cdot \vec{E}_0 = 0, \quad \vec{n} \times \vec{E}_0 = \vec{B}_0$$

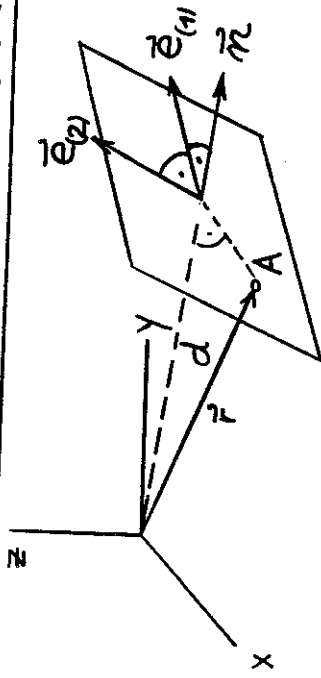
$$[\vec{n} \cdot \vec{B}_0 = 0, \quad \vec{n} \times \vec{B}_0 = -\vec{E}_0 \text{ redundant}]$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.}$$

$$= \vec{E}_0 e^{ik(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct)} + \text{c.c.}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{n} \times \vec{E}(\vec{r}, t)$$

V.2. Polarisationszustand einer monochromatischen ebenen Welle



$\vec{n}, \vec{e}_{(1)}, \vec{e}_{(2)}$  Orthonormalsystem (Rechtssystem)  
 Polarisationsektoren  
 Ausbreitungsvektor

V.2.A. Lineare, zirkulare, elliptische Polarisation

$\vec{E}(F,t)$  für festes  $\vec{r}$  periodische Funktion der Zeit mit Periode  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Frage: Welchen geometrischen Ort beschreibt die Spitze des  $\vec{E}$ -vektors im Aufpunkt  $\vec{r}$  im Laufe der Zeit in der Ebene  $\vec{n} \cdot \vec{r} = d$  ?

Antwort: I.a. eine Ellipse, in speziellen Fällen eine gerade Strecke oder einen Kreis.

$$\vec{E}(F,t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.}$$

$$\vec{B}(F,t) = \vec{n} \times \vec{E}(F,t)$$

mit  $\vec{k} = k \vec{n} = \frac{\omega}{c} \vec{n}$   
 $\vec{n} \cdot \vec{E}_0 = 0$

$$\Rightarrow \vec{E}_0 = E_{(1)} \vec{e}_{(1)} + E_{(2)} \vec{e}_{(2)} \quad (11)$$

$$E_{(\alpha)} = |E_{(\alpha)}| e^{i\varphi_{(\alpha)}}, \quad \alpha=1,2$$

$$\vec{E}(F,t) = |E_{(1)}| \left( \vec{e}_{(1)} + \frac{|E_{(2)}|}{|E_{(1)}|} e^{i(\varphi_{(2)} - \varphi_{(1)})} \vec{e}_{(2)} \right) \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_{(1)})} + \text{c.c.} \quad (13)$$

maßgebend für Polarisationszustand

$$\frac{|E_{(2)}|}{|E_{(1)}|}, \quad \Delta\varphi = \varphi_{(2)} - \varphi_{(1)}$$

(Annahme:  $|E_{(1)}| \neq 0$ )

Graphische Darstellung: s. Abb.

Durch die Zerlegung (11) wurde die allgemeine monochromatische ebene Welle, als Überlagerung zweier (i.a. phasenverschobener) linear polarisierter Wellen dargestellt

Darstellung als Überlagerung zweier gegenläufig zirkular polarisierter Wellen

Komplexe Einheitsvektoren definiert:

$$\vec{e}_{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_{(1)} \pm i \vec{e}_{(2)}) \quad (14)$$

$$\Rightarrow \vec{e}_{(\pm)}^* \cdot \vec{e}_{(\pm)} = 1, \quad \vec{e}_{(\pm)}^* \cdot \vec{e}_{(\mp)} = 0 \quad (15)$$

$$\vec{e}_{(\pm)} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\vec{E}_0 = E_{(+)} \vec{e}_{(+)} + E_{(-)} \vec{e}_{(-)}$$

⋮  
linkszirkulare\* rechtszirkulare Teilwelle

Zusammenhang  $E_{(+)}, E_{(-)} \leftrightarrow E_{(1)}, E_{(2)}$  s. Skriptum

\*1) Grund für Bezeichnung:

$$\vec{E}_{(+)}(r,t) = E_{(+)} \vec{e}_{(+)} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c.$$

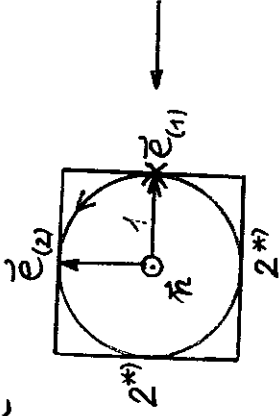
hier  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  gesetzt

$$= \frac{1}{2} (\vec{e}_{(1)} + i \vec{e}_{(2)}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \frac{1}{2} (\vec{e}_{(1)} - i \vec{e}_{(2)}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{E}_{(+)}(r,t) = \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \vec{e}_{(1)} - \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \vec{e}_{(2)} \quad (19)$$

V.2.B. Graphische Darstellung der Polarisation

Welle Gl. (19):



\*1) rührt von Wahl für  $|E_{(+)}|$  her; allgemein  $2 \cdot \sqrt{2} |E_{(+)}|$

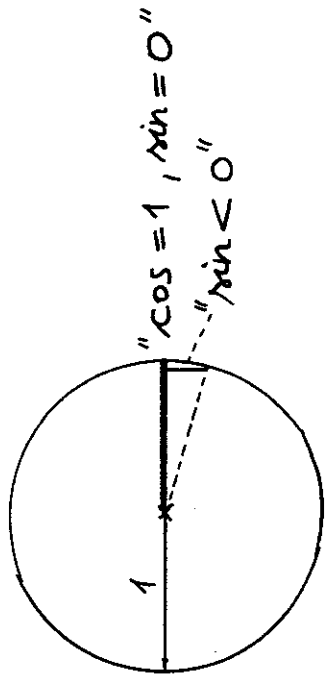
linkszirkular: "links"-Umlauf (Gegenuhrzeigersinn)

(+) positive Helizität (Projektion des DI auf Richtung  $\vec{n}$ )  
Allgemeine monochromatische ebene Welle:

$$\vec{E}(r,t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c.$$

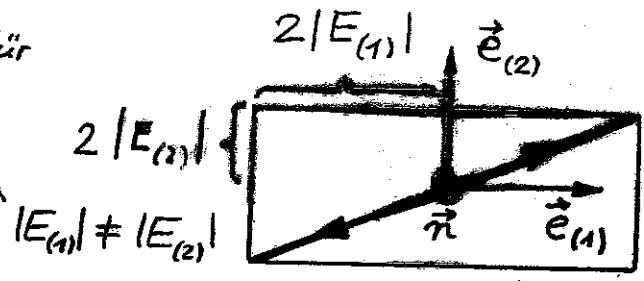
$$\vec{E}_0 = \sum_{\alpha=1,2} E_{(\alpha)} \vec{e}_{(\alpha)}$$

+1) Einheitskreis



V-11 Zeichnung für

$$\left. \begin{array}{l} |E_{(1)}| \neq 0 \\ |E_{(2)}| \neq 0 \end{array} \right\}$$



$$\Delta\varphi = \varphi_{(2)} - \varphi_{(1)} = 0$$

$$\vec{e} = \frac{|E_{(1)}|\vec{e}_{(1)} + |E_{(2)}|\vec{e}_{(2)}}{\sqrt{|E_{(1)}|^2 + |E_{(2)}|^2}}$$

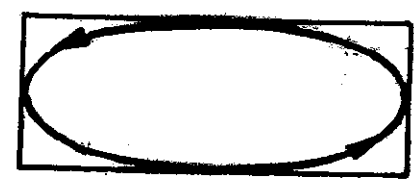
$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$$

links-

Sonderfälle:

1)  $|E_{(1)}|$  oder  $|E_{(2)}|$  null

2)  $|E_{(1)}| = |E_{(2)}|$



Was ist, wenn

$\Delta\varphi$

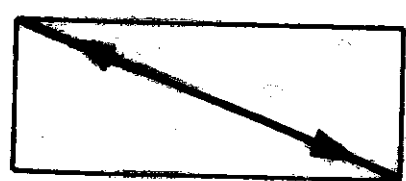
zwischen 0 und  $\frac{\pi}{2}$

zwischen  $\frac{\pi}{2}$  und  $\pi$

zwischen  $\pi$  und  $\frac{3\pi}{2}$

zwischen  $\frac{3\pi}{2}$  und  $2\pi$

liegt?



$$\Delta\varphi = \pi \hat{=} -\pi$$

$$\vec{e} = \frac{|E_{(1)}|\vec{e}_{(1)} - |E_{(2)}|\vec{e}_{(2)}}{\sqrt{|E_{(1)}|^2 + |E_{(2)}|^2}}$$

$$\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2} \hat{=} -\frac{\pi}{2}$$

rechts-

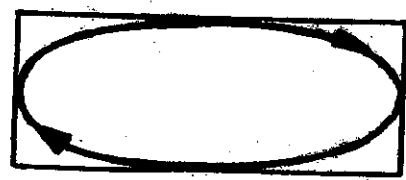


Fig. 5.2 Zusammenhang zwischen Polarisation und Phasenverschiebung

V-12

V. 3. Energie und Impuls ebener Wellen

V. 3. A. Energiedichte und Energiestromdichte (Poyntingvektor)

[Anderer Weg als Skriptum] Für beliebige ebene Welle gilt:

$$\omega_{em}(\vec{r}, t) = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2(\vec{r}, t) + \vec{B}^2(\vec{r}, t)) = \frac{\vec{E}^2(\vec{r}, t)}{4\pi}$$

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{c}{4\pi} (\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)) = \frac{\vec{E}^2(\vec{r}, t)}{4\pi} c \vec{n}$$

Spezialfall: monochromatische Wellen

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{E}_0^* e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{E}^2(\vec{r}, t) = \vec{E}_0^2 e^{2i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0 + c.c. = |\vec{E}_0|^2$$

$$\omega_{em}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} (|\vec{E}_0|^2 + \vec{E}_0^2 e^{2i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}) + c.c. \quad (24)$$

V.3.B. Impulsdichte und Impulsstrom = dichte (= - Mx-scher Spannungstensor) für eine ebene Welle

(II.53): 
$$\vec{g}_{em}(r,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\vec{E}(r,t) \times \vec{B}(r,t)) = \frac{\vec{S}(r,t)}{c^2} = \frac{1}{c} \omega_{em}(r,t) \vec{n} \quad (30)$$

Bemerkung: Photon  $|\vec{p}| = \frac{E}{c}$

Kraftwirkung einer ebenen Welle auf ein dünnes Absorberplättchen bei senkrechtem Einfall

Beachte: In der Ebene  $\vec{n} \cdot \vec{r} = d$  hängen  $\vec{E}, \vec{B}$  nur von  $t$  ab!

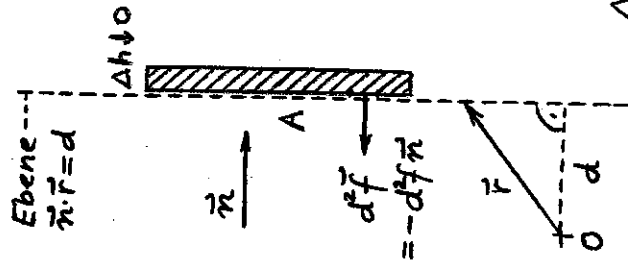
Impulserhaltungssatz (s. Folie II-47) für ein das Absorberplättchen direkt umschließendes Volumen  $V$  angeschrieben:

Kraft auf das Absorberplättchen  $\vec{F}_{mech}(t)$ :

$$\vec{F}_{mech}(t) = \vec{F}_V^{mech}(t) = \frac{d\vec{P}_V^{mech}(t)}{dt} = \underbrace{\oint_{\partial V} d^2\vec{r} \cdot \vec{T}(r,t)}_{\Delta h \downarrow} - \frac{d}{dt} \int_V d^3r \vec{g}_{em}(r,t)$$

↓  
0  
"Vorderfläche"  
("knapp außerhalb")

\*) Absorber = "schwarzer Körper" ("knapp außerhalb")



$$\vec{F}_{mech}(t) = - \int d^2f \vec{n} \cdot \vec{T}(r,t)$$
 "Vorderfläche" --- Integrand auf "Vorderfläche" des Absorbers nicht vom Ort abhängig! (Ebene  $\vec{n} \cdot \vec{r} = d$ )

$$\vec{F}_{mech}(t) = - A \vec{n} \cdot \vec{T}(r,t) \Big|_{\vec{n} \cdot \vec{r} = d}$$

(A Flächeninhalt der "Vorderfläche")

(II.52): 
$$\vec{T}(r,t) = \frac{1}{4\pi} [\vec{E}(r,t) \circ \vec{E}(r,t) + \vec{B}(r,t) \circ \vec{B}(r,t)] - \vec{I} \omega_{em}(r,t) \Rightarrow$$

$$\vec{n} \cdot \vec{T}(r,t) = \frac{1}{4\pi} [ \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{E}(r,t)) \vec{E}(r,t)}_0 + \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{B}(r,t)) \vec{B}(r,t)}_0 ] = \frac{1}{4\pi} \omega_{em}(r,t) \vec{n} = - \omega_{em}(r,t) \vec{n} \quad (30)$$

ebene Welle!

Kraft auf das Absorberplättchen:

$$\vec{F}_{mech}(t) = A \omega_{em}(r,t) \vec{n} \Big|_{\vec{n} \cdot \vec{r} = d} = A c \vec{g}_{em}(r,t) \Big|_{\vec{n} \cdot \vec{r} = d} \quad (31)$$

Interpretation! nur von  $t$  abhängig!

V-15

Zeitabhängigkeit von  $\omega_{em}$ ,  $\vec{S}$  und  $\vec{g}_{em}$   
für eine monochromatische ebene Welle

$$\vec{g}_{em}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{S}(\vec{r}, t)}{c^2} = \frac{1}{c} \omega_{em}(\vec{r}, t) \vec{n}$$

mit

$$\omega_{em}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \vec{E}^2(\vec{r}, t)$$

$$\vec{E}^2(\vec{r}, t) = (|\vec{E}_0|^2 + \vec{E}_0^2 e^{2i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + c.c.)$$

Beispiele:

1) Linear polarisierte Welle mit  $E_{(2)} = 0$

$$\begin{aligned} \vec{E}_{(1)}(\vec{r}, t) &= E_{(1)} \vec{e}_{(1)} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + c.c. \\ &= \underbrace{|E_{(1)}|}_{2 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_{(1)})} \underbrace{\left( e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_{(1)})} + c.c. \right)}_{\vec{e}_{(1)}} \end{aligned}$$

$$\vec{E}_{(1)}^2(\vec{r}, t) = 4 |E_{(1)}|^2 \cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_{(1)}) \quad (32)$$

$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$  periodisch mit  
Frequenz  $2\omega$

um zeitlichen Mittelwert schwankend

V-16

2) Linkszirkular polarisierte Welle ( $E_{(2)} = 0$ )

$$\vec{E}_{(1)}(\vec{r}, t) = E_{(1)} \vec{e}_{(1)} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + c.c.$$

$$|E_{(1)}| e^{i\varphi_{(1)}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_{(1)} + i\vec{e}_{(2)})$$

$\vec{E}_{(1)}(\vec{r}, t) = \dots$  (schon einmal berechnet)

$$= |E_{(1)}| \sqrt{2} \left[ \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_{(1)}) \vec{e}_{(1)} - \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_{(1)}) \vec{e}_{(2)} \right]$$

$$\vec{E}_{(1)}^2(\vec{r}, t) = 2 |E_{(1)}|^2 \quad \text{zeitunabhängig} \quad (33)$$



V.4. Wellen in Hohlleitern (Wellenleitern)

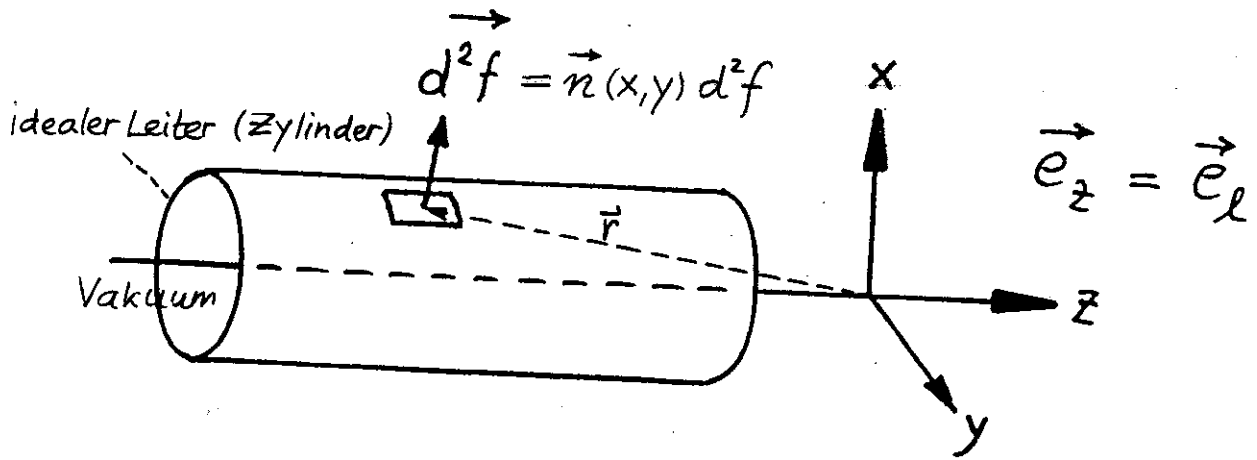
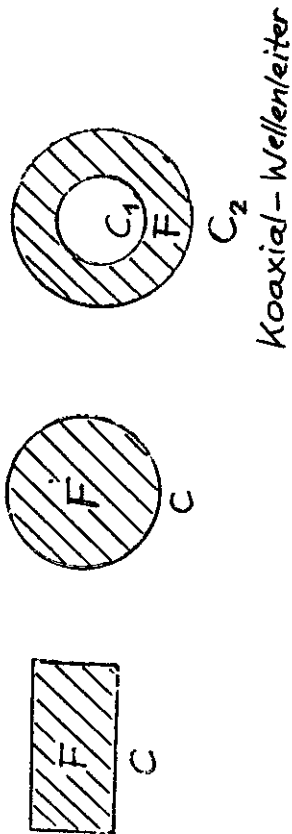


Fig. 5.3 Zylinderförmiger Hohlleiter

$$\begin{aligned} \vec{a}_L &= \vec{a}_z = a_z \vec{e}_z & \text{bzw. } a_L &= a_z \\ \vec{a}_t &= \vec{a} - \vec{a}_L = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y \end{aligned} \quad (34)$$

Beispiele für mögliche Querschnitte:



V.4.A. Randbedingungen auf der Leiteroberfläche

$$\begin{aligned} \vec{E}_{tg}(\vec{r}, t) &= \vec{0} \\ \vec{B}_{normal}(\vec{r}, t) &= \vec{0} \end{aligned} \quad \vec{r} \in \text{Leiteroberfläche, } \forall t \quad (35)$$

V.4.B. Zerlegung der Maxwell-Gln. in Transversal- und Longitudinal-Komponenten

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_t(\vec{r}, t) + \vec{E}_L(\vec{r}, t) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{B}_t(\vec{r}, t) + \vec{B}_L(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} = \underbrace{\hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y}}_{\vec{\nabla}_t} + \underbrace{\hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}}_{\vec{\nabla}_\ell}$$

$$\Delta = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}}_{\Delta_t} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial z^2}}_{\Delta_\ell}$$

homogene  
Max-Gln.: Argumente  $r, t$  vorübergehend  
weggelassen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}_t \cdot \vec{E}_t = -\vec{\nabla}_\ell \cdot \vec{E}_\ell}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}_t \cdot \vec{B}_t = -\vec{\nabla}_\ell \cdot \vec{B}_\ell}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_\ell}$$

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_\ell + \vec{\nabla}_\ell \times \vec{E}_t = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_t$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\nabla}_t \times \vec{B}_t = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_\ell}$$

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{B}_\ell + \vec{\nabla}_\ell \times \vec{B}_t = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_t$$

(36)  
+ (37)

homogene Wellengleichungen:  
(notwendige Bdggn.)

$$\square \vec{E} = \vec{0}, \quad \square \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\boxed{\left(\Delta_t + \Delta_\ell - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{E}_t = \vec{0}}$$

$$\boxed{\left(\Delta_t + \Delta_\ell - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{B}_t = \vec{0}}$$

(38)

Ansatz: monochromatische Wellen, welche  
sich in longitudinaler Richtung  
ungedämpft fortpflanzen

$$\boxed{\vec{E}(r, t) = \vec{E}(x, y) e^{i(kz - \omega t)} + \text{c.c.}}$$

$$\boxed{\vec{B}(r, t) = \vec{B}(x, y) e^{i(kz - \omega t)} + \text{c.c.}}$$

Beachte:  $k$  reell  $> 0$  (42)

$$1) \quad \underline{\vec{E}(x, y) = \vec{E}_t(x, y) + \vec{E}_\ell(x, y)}$$

$$\underline{\vec{B}(x, y) = \vec{B}_t(x, y) + \vec{B}_\ell(x, y)}$$

komplexwertig

2)  $\omega = \omega(k)$  noch nicht bestimmt

3) Der Ansatz führt auf partielle Dgln.  
für  $\vec{E}(x, y), \vec{B}(x, y)$  (nur mehr Variable  $x, y$ )

V-21

Gleichungen für die longitudinalen Komponenten von  $\vec{E}(x,y)$ ,  $\vec{B}(x,y)$

$$(38): \quad \underbrace{\left( \Delta_t + \Delta_l - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)}_{\substack{\text{Vektor-} \\ \text{Laplace}}} E_l(\vec{r}, t) = 0 \quad (40)$$

$$\frac{E_l(x,y)}{z} e^{i(kz - \omega t)} + \text{c.c.}$$

$$\begin{aligned} -\Delta_t E_z(x,y) &= (\frac{\omega^2}{c^2} - k^2) E_z(x,y) \\ -\Delta_t B_z(x,y) &= (\frac{\omega^2}{c^2} - k^2) B_z(x,y) \end{aligned} \quad (41)$$

analog

Gleichungen für die transversalen Komponenten von  $\vec{E}(x,y)$ ,  $\vec{B}(x,y)$

$$(38): \quad \left( \Delta_t + \Delta_l - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E}_t(\vec{r}, t) = \vec{0}$$

$$\left( \Delta_l - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E}_t(\vec{r}, t) = -\Delta_t \vec{E}_t(\vec{r}, t)$$

$$\left( \Delta_l - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E}_t(\vec{r}, t) = -\Delta_t \vec{E}_t(\vec{r}, t)$$

V-22

$$\Delta_t \vec{E}_t = \underbrace{\vec{\nabla}_t (\vec{\nabla}_t \cdot \vec{E}_t)}_{\substack{\text{"Vektor-} \\ \text{Laplace}}} - \underbrace{\vec{\nabla}_t \times (\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t)}_{-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_l \uparrow} \quad (40)$$

$$\left( \Delta_l - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E}_t(\vec{r}, t) = \vec{\nabla}_t (\vec{\nabla}_t \cdot \vec{E}_t)$$

$B_z \vec{e}_z$

$$\begin{aligned} \left( \Delta_l - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{B}_t(\vec{r}, t) &= \vec{\nabla}_t (\vec{\nabla}_t \cdot \vec{B}_t) \\ &\quad - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla}_t \times \vec{B}_l) \\ \left( \Delta_l - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{B}_t(\vec{r}, t) &= \vec{\nabla}_t (\vec{\nabla}_t \cdot \vec{B}_t) \\ &\quad + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_l) \end{aligned} \quad (41)$$

$\Rightarrow$

$$\left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \vec{E}_t(x,y) = ik \vec{\nabla}_t E_z(x,y)$$

$$+ i \frac{\omega}{c} \vec{\nabla}_t B_z(x,y) \times \vec{e}_z$$

$$\left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \vec{B}_t(x,y) = ik \vec{\nabla}_t B_z(x,y)$$

$$- i \frac{\omega}{c} \vec{\nabla}_t E_z(x,y) \times \vec{e}_z \quad (43)$$

# V. 4. C. TEM-Wellen

(A)  $-\Delta_t E_z(x,y) = (\frac{\omega^2}{c^2} - k^2) E_z(x,y)$

(B)  $-\Delta_t B_z(x,y) = (\frac{\omega^2}{c^2} - k^2) B_z(x,y)$

(C)  $(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2) E_t(x,y) = ik \nabla_t E_z(x,y) + i \frac{\omega}{c} \nabla_t B_z(x,y) \times \vec{e}_z$

(D)  $(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2) B_t(x,y) = ik \nabla_t B_z(x,y) - i \frac{\omega}{c} \nabla_t E_z(x,y) \times \vec{e}_z$

Ansatz: weitere Spezifikation

$E_z(x,y) = B_z(x,y) = 0$  (45)

TEM-Wellen

(A): ✓

(B): ✓

(C), (D):  $(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2) E_t(x,y) = \vec{0}$   $\neq \vec{0}$  (sonst  $E(r,t) \equiv \vec{0}$ )

$(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2) B_t(x,y) = \vec{0}$   $\neq \vec{0}$  (sonst  $B(r,t) \equiv \vec{0}$ )

$\omega = \omega(k) = ck$

Dispersionsbeziehung (Ergebnis der Wellengl.) (46)

$E_t(x,y), B_t(x,y)$ : Mit  $E_z \equiv 0, B_z \equiv 0$  folgt

aus den homogenen Maxwell-Gln. (s. Folie V-19):

$\nabla_t \cdot E_t(x,y) = 0$   
 $\nabla_t \times E_t(x,y) = \vec{0}$

RB:  $E_{tz} = 0$  auf C

$\frac{\partial}{\partial z} \dots \nabla_t \times E_t(r,t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} B_t(r,t) \Rightarrow$   
 $ik \vec{e}_z \times E_t(x,y) = i \frac{\omega}{c} B_t(x,y)$  (da  $k = \frac{\omega}{c}$ )

$B_t(x,y) = \vec{e}_z \times E_t(x,y)$

$\nabla_t \cdot B_t(x,y) = 0$   
 $\nabla_t \times B_t(x,y) = \vec{0}$   
 $-E_t(x,y) = \vec{e}_z \times B_t(x,y)$

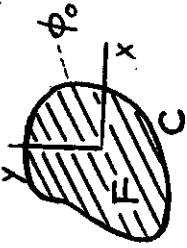
RB:  $B_{tz} = 0$  auf C

Aus den FG für  $E_t(x,y)$  und der zugehörigen RB folgt:

TEM-Wellen können nur bei mehrfach zusammenhängenden Querschnitten existieren.

Beweis:  $E_t(x,y) = -\nabla_t \phi(x,y)$   
 $\Delta_t \phi(x,y) = 0$   
 $\phi(x,y)$  regulär  
 $\phi(x,y) = \text{konstant}$  auf C

Querschnitt F einfach zusammenhängend:

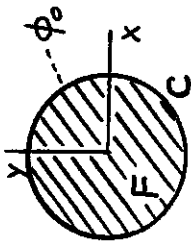


$$\phi(x, y) = \phi_0 \text{ in } F$$

$$\Rightarrow \vec{E}_t(x, y) \equiv \vec{0} \text{ in } F$$

(damit auch  $\vec{B}_t \equiv \vec{0}$ )

z.B.: Kreisquerschnitt



$\rho, \varphi$  Polarkoordinaten

Lsgs-Basis für Entwicklung von

$$\phi(\rho, \varphi):$$

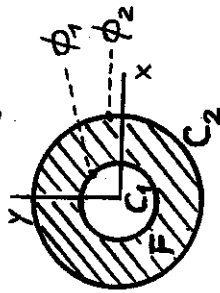
Konstante,  $\ln \rho$

$$\rho^m \cos m\varphi, \rho^m \sin m\varphi, m=1, 2, 3, \dots$$

$$\frac{1}{\rho^m} \cos m\varphi, \frac{1}{\rho^m} \sin m\varphi, m=1, 2, 3, \dots$$

Wegen RB  $\phi(a, \varphi) = \phi_0, \forall \varphi$ , und Regularitätsforderung für  $\rho < a$  "bleibt" nur die Konstante und es folgt  $\phi(\rho, \varphi) = \phi_0$ .

Dagegen: Kreisringquerschnitt (Koaxial-Wellenleiter)



Hier  $\ln \rho$  "zulässig"!

$$\phi(\rho, \varphi) = A \ln \rho + B$$

Aus RB  $\phi(R_1) = \phi_1, \phi(R_2) = \phi_2$  folgt

$$A = \frac{\phi_2 - \phi_1}{\ln R_2 - \ln R_1}, \quad B = \frac{\phi_1 \ln R_2 - \phi_2 \ln R_1}{\ln R_2 - \ln R_1}$$

$\Rightarrow \vec{E}_t(x, y) \neq \vec{0}$  (selbst ausrechnen...)

Feldamplitude proportional zu  $\phi_2 - \phi_1$

Beachte: Bei mehrfach zusammenhängendem Querschnitt gibt es TEM-Wellen für beliebige

Kreisfrequenzen  $\omega \in (0, \infty)$  und es gilt

$$\omega = c/k, \text{ d.h. } v_{ph} = \frac{\omega}{k} = c \text{ (unabhängig von } \omega).$$

Signale, welche ein ganzes Frequenzspektrum

enthalten, werden daher unverzerrt "durchgeleitet".

### V.4.D. TM-Wellen und TE-Wellen

TM-Wellen (auch Wellen vom E-Typ genannt)

$$B_z(x,y) = 0, \text{ aber } E_z(x,y) \neq 0 \quad (4a)$$

$$-\Delta_t E_z(x,y) = (\frac{\omega^2}{c^2} - k^2) E_z(x,y) \quad (49) \equiv (A)$$

$$-\Delta_t \underbrace{B_z(x,y)}_0 = (\frac{\omega^2}{c^2} - k^2) \underbrace{B_z(x,y)}_0 \quad \checkmark \quad (B)$$

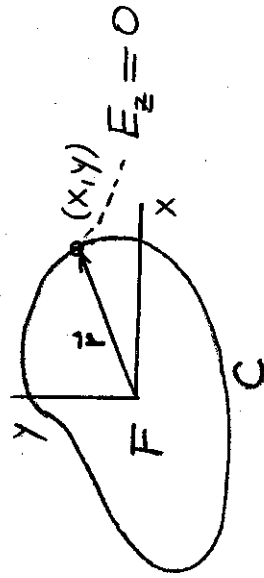
$$(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2) \vec{E}_t(x,y) = ik \nabla_t E_z(x,y) \quad (C)$$

$$+ i \frac{\omega}{c} \nabla_t \underbrace{B_z(x,y)}_0 \times \vec{e}_z \quad (D)$$

$$(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2) \vec{B}_t(x,y) = ik \nabla_t \underbrace{B_z(x,y)}_0 - i \frac{\omega}{c} \nabla_t E_z(x,y) \times \vec{e}_z$$

(A) Lösungen gesucht, welche die RB

$$E_z = 0 \text{ auf } C \text{ erfüllen}$$



EWP von  $-\Delta_t$  mit Dirichletscher RB:

$$-\Delta_t E_z(x,y) = \lambda^2 E_z(x,y) \quad \text{in } F$$

$$RB: E_z = 0 \quad \text{auf } C$$

$\lambda^2$  EW-Parameter ( $\lambda^2 > 0$ )  
 Siehe V-27'!

Lösung des EWP: angeschrieben für den Fall, daß keine Entartung vorliegt (Quadrat)

$$-\Delta_t E_z^{(n)}(x,y) = \lambda^{(n)2} E_z^{(n)}(x,y)$$

In Beispielen  
 statt  $n$  besser  
Indexpaar!

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (50)$$

$$EW: \lambda^{(1)2} < \lambda^{(2)2} < \dots$$

$$(A): -\Delta_t E_z(x,y) = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) E_z(x,y) \quad (\omega \text{ vor=} \text{gegeben})$$

1) besitzt keine brauchbare Lösung, wofem für das vorgegebene  $\omega$

$$k^{(1)2} = \frac{\omega^2}{c^2} - \lambda^{(1)2} < 0$$

ist  $\Rightarrow \exists$  Grenzfrequenz, welche überschritten sein muß

Bemerkung:  $k^2 < 0 \Rightarrow k$  imaginär  $\Rightarrow$  Welle klingt in

$z$ -Richtung exponentiell ab.

Zum EWP von  $-\Delta_t$  mit Dirichletscher RB: V-27'

QM: zeitunabhängige Schrödingergleichung  
 für Teilchen der Masse  $m$  im zweidimensionalen unendlich tiefen Kastenpotential der Grundfläche  $F$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi(x,y) = E \psi(x,y)$$

RB:  $\psi = 0$  auf  $C$   
 (Rand von  $F$ )

$\rightarrow$  diskrete positive Energieeigenwerte

2) besitzt  $n_0$  brauchbare Lösungen,  
wofür für das vorgegebene  $\omega$

$$k^{(n)^2} = \frac{\omega^2}{c^2} - \lambda^{(n)^2} > 0 \quad \text{für} \quad (51)$$

$$n = 1, 2, \dots, n_0$$

aber

$$k^{(n_0+1)^2} = \frac{\omega^2}{c^2} - \lambda^{(n_0+1)^2} < 0$$

ist

Es gibt also stets nur eine endliche  
Anzahl von "Moden".

(C), (D) gestatten dann die Berechnung

der zu einem bestimmten  $n$

( $n = 1, 2, \dots, n_0$ ) gehörigen Komponenten

$$\vec{E}_t^{(n)}(x, y), \vec{B}_t^{(n)}(x, y)$$

$$\vec{E}_t^{(n)}(x, y) = i k^{(n)} \vec{\nabla}_t E_z^{(n)}(x, y) - \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^{(n)^2} \right) z \hat{e}_z \quad \lambda^{(n)^2} > 0$$

$$\vec{B}_t^{(n)}(x, y) = -i \frac{\omega}{c} \vec{\nabla}_t E_z^{(n)}(x, y) \times \hat{e}_z - \frac{\omega^2}{c^2} - k^{(n)^2}$$

$$n = 1, 2, \dots, n_0$$



TE-Wellen (auch Wellen vom B-Typ bzw. H-Typ genannt)

$$E_z(x,y) = 0, \text{ aber } B_z(x,y) \neq 0 \quad (52)$$

Vollkommen analog mit vertauschten Rollen von  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ ; gleiche EWG wie zuvor,

ABER: andere EW  $\lambda^{(n)2}$  und andere EF  $B_z^{(n)}(x,y)$ , da andere RB:  
daher auch andere Grenzfrequenz

$$(D): \quad \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) \vec{B}_t(x,y) = i k \vec{\nabla}_t B_z(x,y)$$

Benötigt, um RB für  $B_z$  abzuleiten.

$$-i \frac{\omega}{c} \vec{\nabla}_t E_z(x,y) \times \vec{e}_z$$

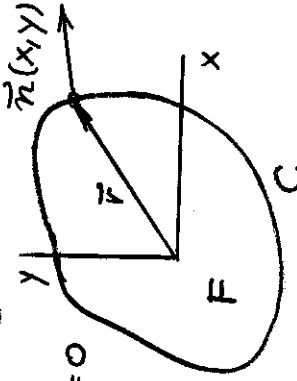
RB für  $B_z$  auf C:

$$B_n = \vec{n} \cdot \vec{B} \Big|_C = \vec{n} \cdot \vec{B}_t \Big|_C \quad \text{da } \vec{n} \cdot \vec{e}_z = 0 \quad (56)$$

$$= \frac{i k}{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)} \underbrace{\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_t B_z \Big|_C}_{\frac{\partial B_z}{\partial n}} = 0$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial n} = 0 \text{ auf C} \quad (57)$$

(da  $-\Delta_t$  positiv definit)



EWP von  $-\Delta_t$  mit Neumannscher RB:

$$-\Delta_t B_z(x,y) = \lambda^2 B_z(x,y) \text{ in } F$$

$$\text{RB: } \frac{\partial B_z}{\partial n} = 0 \text{ auf } C$$

$\lambda^2$  EW-Parameter ( $\lambda^2 > 0$ )

Beispiele: s. Greiner

Bemerkungen:

1) Die verschiedenen TM- und TE-Wellen plus TEM-Wellen (falls  $\exists$ ) bilden zusammen ein vollständiges Entwicklungssystem für einen beliebigen elm. Wellenvorgang im Wellenleiter.

2) Für TM- bzw. TE-Wellen gilt

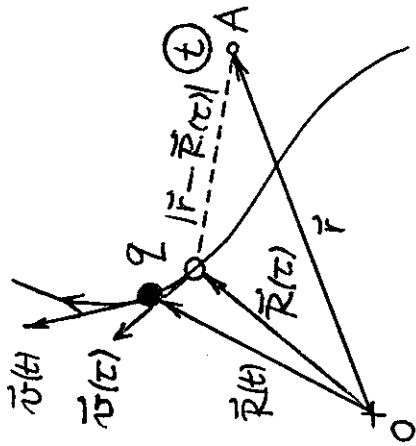
$$v_{Ph}^{(n)} = \frac{\omega}{k^{(n)}} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \lambda^{(n)2}}} \text{ abhängig von } \omega \text{ und von } n!$$

Signale, welche TM- oder (und) TE-Wellen mit verschiedenen Frequenzen oder (und) mehrere Moden enthalten, werden daher beim "Durchgang" durch den Wellenleiter verzerrt.

VI. ELM. FELDER IM VAKUUM

VI.1 Feld einer beliebig bewegten

Punktladung



$\vec{R}(t)$  vorgegeben

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{R}(t)}{dt}$$

$$t - \tau = \frac{|\vec{r} - \vec{R}(\tau)|}{c}$$

$$\tau = t - \frac{|\vec{r} - \vec{R}(\tau)|}{c}$$

$\Leftrightarrow$

$$\tau = \tau(\vec{r}, t)$$

retardierte Zeit

(Lösung eindeutig)

$$|\vec{v}(t)| < c, \forall t'$$

Quelldichten

$$\rho(\vec{r}, t) = q \delta(\vec{r} - \vec{R}(t))$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{v}(t) \rho(\vec{r}, t)$$

(1a)

(1b)

Zeige selbst:

$$\text{div } \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad \checkmark$$

KG:

(II.41), (II.42):

retardierte Potentiale

$$\phi(\vec{r}, t) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

bzw.  $D_{\text{ret}}(|\vec{r} - \vec{r}'|, t - t')$

$$\phi(\vec{r}, t) = \int d^3r' \int dt' \frac{\delta(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho(\vec{r}', t')$$

(2a)

$\int \delta(|\vec{r} - \vec{r}'|)$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \int dt' \frac{\delta(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{j}(\vec{r}', t')$$

(2b)

$\int \vec{v}(t') \delta(|\vec{r} - \vec{r}'|)$

$$\phi(\vec{r}, t) = \int dt' \frac{\delta(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{R}(t')|}{c})}{|\vec{r} - \vec{R}(t')|}$$

(3a)

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \int dt' \frac{\delta(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{R}(t')|}{c})}{|\vec{r} - \vec{R}(t')|} \vec{v}(t')$$

(3b)

"Methoden":

Besitzt die Funktion  $g(t')$  eine einzige Nullstelle  $\tau$  und ist diese einfach, d.h.

gilt  $g(\tau) = 0, g'(\tau) \neq 0,$  (4a)

so folgt

$$\delta(g(t')) = \frac{\delta(t' - \tau)}{|g'(\tau)|} \quad (4b)$$

(Im Skriptum ist anstelle von  $g(t')$  die Funktion  $f(t')$  mit

$$g(t') =: t' - f(t')$$

verwendet.)

HIER:

$$\delta\left(t - t' - \underbrace{\frac{|F - \vec{R}(t')|}{c}}_{g(t')}\right)$$

( $\vec{R}, t$  für Integration fest)

$$g(t') = 0 \iff t - t' = \frac{|F - \vec{R}(t')|}{c}$$

besitzt nur eine Lösung, nämlich

$$t' = \tau = \tau(\vec{R}, t)$$

$$g'(\tau) = -1 + \frac{\vec{v}(\tau)}{|F - \vec{R}(\tau)|} \cdot \frac{\vec{v}(\tau)}{c} < 0 \quad (\text{also einfache Nullstelle})$$

Somit:

$$\delta(t - t' - \frac{|F - \vec{R}(t')|}{c}) = \frac{\delta(t' - \tau)}{1 - \frac{\vec{v}(\tau) \cdot \vec{v}(\tau)}{|F - \vec{R}(\tau)| c}} \quad (5)$$

mit

$\tau = \tau(\vec{R}, t)$  implizit definiert durch

$$\tau = t - \frac{|F - \vec{R}(\tau)|}{c}$$

$$\phi(\vec{r}, t) = q \int dt'$$

$$\frac{\delta(t - t' - \frac{|F - \vec{R}(t')|}{c})}{|F - \vec{R}(t')|}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = q \int dt' \frac{\delta(t - t' - \frac{|F - \vec{R}(t')|}{c})}{|F - \vec{R}(t')|} \cdot \frac{\vec{v}(t')}{c}$$

(6a)

(6b)

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{|F - \vec{R}(\tau)|} \frac{1}{1 - \frac{\vec{v}(\tau) \cdot \vec{v}(\tau)}{|F - \vec{R}(\tau)| c}}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{v}(\tau)}{c} \phi(\vec{r}, t) \quad \text{mit } \tau = \tau(\vec{R}, t)$$

Liénard-Wiechert-Potentiale

Abkürzungen:

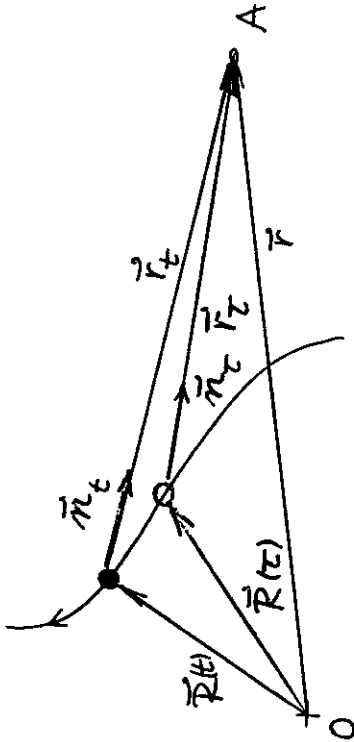
$$\vec{r}_t = \vec{r} - \vec{R}(t), \quad r_t = |\vec{r} - \vec{R}(t)|$$

$$\vec{n}_t = \frac{\vec{r}_t}{r_t} = \frac{\vec{r} - \vec{R}(t)}{|\vec{r} - \vec{R}(t)|}$$

(8)

$$\vec{\beta}_t = \frac{\vec{v}(t)}{c}$$

$$n_t \dots \dots \dots \kappa(\vec{r}, t) = 1 - n_t \cdot \vec{\beta}_t = 1 - \frac{\vec{r} - \vec{R}(t)}{|\vec{r} - \vec{R}(t)|} \cdot \frac{\vec{v}(t)}{c}$$



$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{R}(t)|} \frac{1}{1 - \frac{\vec{r} - \vec{R}(t)}{|\vec{r} - \vec{R}(t)|} \cdot \frac{\vec{v}(t)}{c}}$$

(9a)

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{r_t \kappa(\vec{r}, t)}$$

mit  $\tau = \tau(\vec{r}, t)$

(9b)

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{\beta}_t \phi(\vec{r}, t)$$

$$\tau = t - \frac{r_t}{c} \quad (10)$$

VI.1.B. Berechnung der Feldstärken

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\text{grad} \phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{rot} \vec{A}(\vec{r}, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left| \phi(\vec{r}, t) = q \int dt' \frac{\delta(t - t' - \frac{r_t}{c})}{|\vec{r} - \vec{R}(t')|} \right.$$

$$= q \int dt' \frac{\delta(t - t' - \frac{r_t}{c})}{r_t}$$

$$= \frac{q}{|\vec{r} - \vec{R}(\tau)|} \frac{1}{1 - \frac{\vec{r} - \vec{R}(\tau)}{|\vec{r} - \vec{R}(\tau)|} \cdot \frac{\vec{v}(\tau)}{c}}$$

$$= \frac{q}{r_t \kappa(\vec{r}, \tau)} \quad \text{mit } \tau = \tau(\vec{r}, t)$$

Deshalb Differentiationen unter den Integralen  $\int dt' \dots$  ausgeführt:

$$\phi(\vec{r}, t) = q \int dt' \frac{\delta(t - t' - \frac{r_t}{c})}{r_t}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = q \int dt' \frac{\delta(t - t' - \frac{r_t}{c})}{r_t} \vec{\beta}_{t'}$$

Ergebnis: \*)

$$\vec{E}(r,t) = \frac{q}{r^2 \kappa^3(r,t)} (1 - \beta_z^2) (\vec{n}_z - \beta_z^2) \quad (22)$$

$$+ \frac{q}{r \kappa^3(r,t)} \left\{ \vec{n}_z \times [(\vec{n}_z - \beta_z) \times \frac{1}{\kappa} \frac{d\vec{\beta}_z}{dt}] \right\} \uparrow$$

$$\vec{B}(r,t) = \vec{n}_z \times \vec{E}(r,t) \quad (17)$$

mit  $t - \frac{r}{\kappa} \iff \tau = \tau(r,t)$

Abstrahlung elm. Wellen!

VI.1.C. Sonderfall: gleichförmig

geradlinig bewegte Punktladung

$$\vec{R}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t \quad (\text{Skriptum: } \vec{r} \text{ statt } \vec{v}_0)$$

Vorübergehend  $\vec{r}_0 = \vec{0}$  gesetzt (Wahl des

Ursprungs des KS):

\*) Skriptum Gl. (11) - Gl. (16) und Gl. (18) - Gl. (21)

NICHT PRÜFUNGSSTOFF

$$\vec{R}(t) = \vec{v}_0 t \quad (23)$$

$$\vec{r}_z = \vec{r} - \vec{R}(t) = \vec{r} - \vec{v}_0 t \quad (24)$$

Die Bestimmungsgleichung für  $\tau(r,t)$

$$\tau = t - \frac{r}{\kappa}$$

lässt sich in diesem Fall explizit nach  $\tau$

auflösen:

Quadrieren von

$$t - \tau = \frac{|\vec{r} - \vec{v}_0 \tau|}{\kappa}$$

und Lösen der quadratischen Gl. für  $\tau$

( $\tau < t$ ) liefert

$$\tau = \tau(r,t) \quad (\text{Selbst rechnen.})$$

Wir eliminieren aber  $\tau$  aus  $\phi, A, \vec{E}$  und  $\vec{B}$  auf einem eleganteren Weg.

Mit

$$\vec{\beta}_0 = \frac{\vec{v}_0}{\kappa}$$

gilt

(9), (22):

$$\phi(r, t) = \frac{q}{r_c \kappa(r, \tau)}, \quad \vec{A}(r, t) = \vec{\beta}_0 \phi(r, t)$$

$$\vec{E}(r, t) = \frac{q}{r_c^3 \kappa^3(r, \tau)} (1 - \beta_0^2) (\vec{r}_c - \vec{\beta}_0 r_c) \quad (31)$$

$$\vec{B}(r, t) = \text{rot}(\vec{\beta}_0 \phi(r, t))$$

wobei

$$r_c \kappa(r, \tau) = r_c - \vec{\beta}_0 \cdot \vec{r}_c$$

Nur diese

Ausdrücke benötigt!

1)  $r_c - \vec{\beta}_0 r_c$

$$\vec{r}_c = \vec{r} - \vec{R}(t) = \vec{r} - \vec{v}_0 t = \underbrace{\vec{r} - \vec{v}_0 t - \vec{v}_0 (t - \tau)}_{\vec{r}_c} \quad (25)$$

$$r_c - \vec{\beta}_0 r_c = \vec{r}_c \quad (1)$$

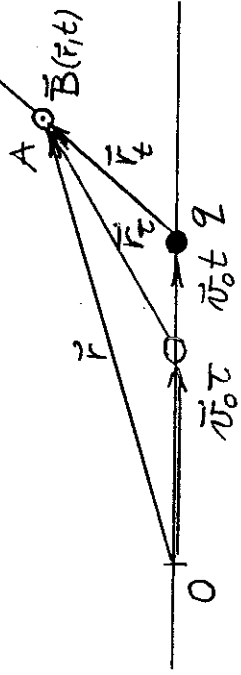
2)  $r_c - \vec{\beta}_0 \cdot \vec{r}_c$

$$\begin{aligned} r_c^2 - (\vec{r}_c \times \vec{\beta}_0)^2 &= (\vec{r}_c - \vec{\beta}_0 r_c)^2 - (\vec{r}_c \times \vec{\beta}_0)^2 \\ &= r_c^2 - 2(\vec{\beta}_0 \cdot \vec{r}_c) r_c + \beta_0^2 r_c^2 \\ &\quad - (\vec{r}_c^2 \beta_0^2 - (\vec{\beta}_0 \cdot \vec{r}_c)^2) = (r_c - \vec{\beta}_0 \cdot \vec{r}_c)^2 \end{aligned} \quad (26)$$

VI-10

$$r_c \kappa(r, \tau) = r_c - \vec{\beta}_0 \cdot \vec{r}_c$$

$$= \sqrt{r_c^2 - (\vec{r}_c \times \vec{\beta}_0)^2} \quad \vec{E}(r, t) \quad (q > 0)$$



Rotations-  
Symmetrie bezgl.  
Bahnkurve

$$\phi(r, t) = \frac{q}{r_c \kappa(r, \tau)} = \frac{q}{\sqrt{r_c^2 - (\vec{r}_c \times \vec{\beta}_0)^2}} \quad (28)$$

$$\vec{A}(r, t) = \vec{\beta}_0 \phi(r, t)$$

$$\vec{E}(r, t) = \frac{q}{r_c^3 \kappa^3(r, \tau)} (1 - \beta_0^2) (\vec{r}_c - \vec{\beta}_0 r_c)$$

$$= \frac{q (1 - \beta_0^2)}{[r_c^2 - (\vec{r}_c \times \vec{\beta}_0)^2]^{3/2}} \vec{r}_c \quad (32)$$

$$\vec{B}(r, t) = \vec{\beta}_0 \times \vec{E}(r, t)$$

s. unten

Zu  $\vec{B}(F,t)$ :

$$\begin{aligned}\vec{B}(F,t) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(F,t) = \vec{\nabla} \times (\beta_0 \phi(F,t)) \\ &= \beta_0 \times (-\text{grad} \phi(F,t))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{E}(F,t) &= -\text{grad} \phi(F,t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(F,t)}{\partial t} \\ &= -\text{grad} \phi(F,t) - \frac{1}{c} \beta_0 \frac{\partial \phi(F,t)}{\partial t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \vec{\beta}_0 \times \vec{E}(F,t) &= \beta_0 \times (-\text{grad} \phi(F,t)) \\ \vec{B}(F,t) &= \beta_0 \times \vec{E}(F,t) \quad \checkmark\end{aligned}$$

Bemerkung 1: Die Formeln für  $\phi$ ,  $\vec{A}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  gelten auch im Falle  $\vec{v}_0 \neq \vec{0}$ , man hat lediglich

$$\vec{r}_E = \vec{r} - \vec{v}_0 t \quad \rightarrow \quad \vec{r}_E = \vec{r} - \vec{v}_0 - \vec{v}_0 t$$

zu setzen.

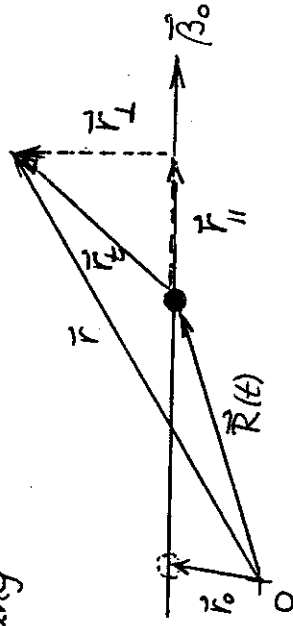
Bemerkung 2: Potentiale und Feldstärken hängen nur von der Variablenkombination  $\vec{r} - \vec{v}_0 - \vec{v}_0 t$  ab: "konvektives Coulombfeld" — rein elektrostatisches Coulombfeld im Ruhesystem der Ladung •

Äquipotentialflächen von  $\phi$  für festes  $t$

$$\phi(\vec{r}, t) = \text{konst.} \quad (t \text{ fest}) \Rightarrow$$

$$r_E^2 - (\vec{r}_E \times \vec{\beta}_0)^2 = \text{konst.}^2 > 0$$

Zerlegung



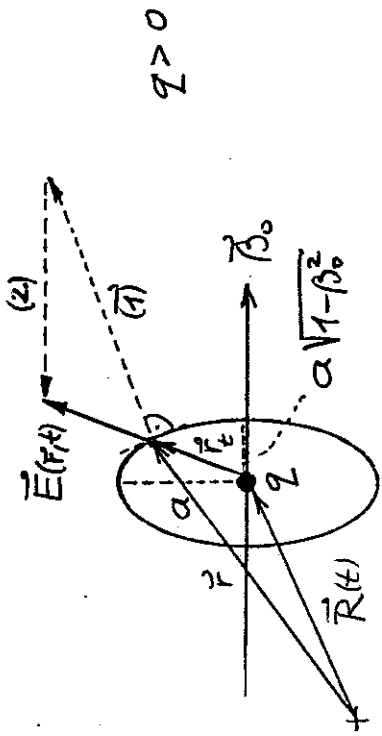
$$(\vec{r}_{II} + \vec{r}_I)^2 - [(\vec{r}_{II} + \vec{r}_I) \times \vec{\beta}_0]^2 = \text{konst.}^2$$

$$r_{II}^2 + r_I^2 - (\vec{r}_I \times \vec{\beta}_0)^2 = \text{konst.}^2$$

$$\beta_0^2 r_I^2 - \underbrace{(\vec{\beta}_0 \cdot \vec{r}_I)^2}_0$$

$$r_{II}^2 + (1 - \beta_0^2) r_I^2 = \text{konst.}^2 \quad (30)$$

Rotationsellipsoid bzgl. Bahnkurve mit um Faktor  $\sqrt{1 - \beta_0^2}$  kürzerer Achse in Bewegungsrichtung



$q > 0$

Achtung!  $\vec{E}(r,t) = -\text{grad} \phi(r,t)$  (1)  
 $-\beta_0 \frac{1}{c} \frac{\partial \phi(r,t)}{\partial t}$  (2)

Kraft auf eine gleichförmig "mitbewegte"

Punktladung Q  $\vec{r}_f$

$$\phi(r,t) = \phi(\vec{r} - \vec{r}_0 - \vec{v}_0 t)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} \frac{\partial \phi(r,t)}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi(r,t) \cdot \vec{\beta}_0$$

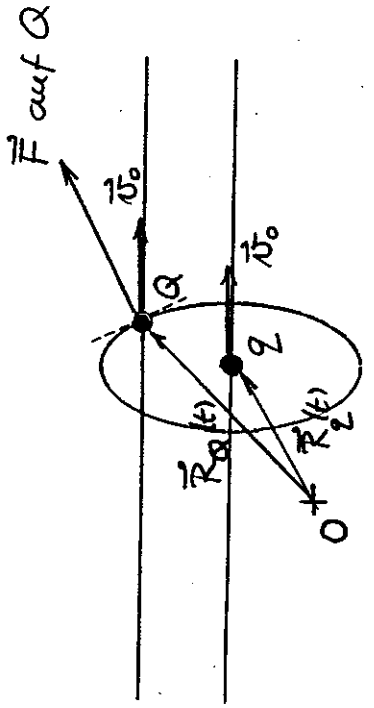
$$\vec{E}(r,t) = -\vec{\nabla} \phi(r,t) + \vec{\beta}_0 (\vec{\beta}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi(r,t))$$

$$\vec{B}(r,t) = \vec{\nabla} \phi(r,t) \times \vec{\beta}_0$$

$$\Rightarrow \vec{E} + \vec{\beta}_0 \times \vec{B} = -\vec{\nabla} \phi + \vec{\beta}_0 (\vec{\beta}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi) + [\vec{\beta}_0 \times (\vec{\nabla} \phi \times \vec{\beta}_0)]$$

$$= -\vec{\nabla} \phi + (\vec{\beta}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi) \vec{\beta}_0 + \beta_0^2 \vec{\nabla} \phi - (\vec{\beta}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi) \vec{\beta}_0$$

$$\vec{E}(r,t) + \frac{\vec{v}_0}{c} \times \vec{B}(r,t) = -\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right) \vec{\nabla} \phi(r,t) \quad (33)$$

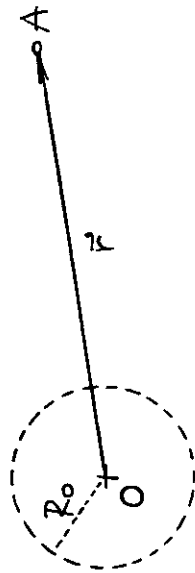


Zeichnung für  $q > 0, Q > 0$



VI-15

VI.2. Abstrahlung elm. Wellen durch eine lokalisierte zeitabhängige Ladungs- und Stromverteilung



Lokalisierte Quellverteilung:

$$\rho(\vec{r}', t') = 0$$

$$\vec{j}(\vec{r}', t') = \vec{0}$$
 für  $r' > R_0, \forall t'$   
 Keine RB im Endlichen,  
 keine Quellen im Unendlichen (natürliche RB).

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

IV.2.A. Berechnung der "Strahlungsanteile"  
 $\vec{E}_s(\vec{r}, t), \vec{B}_s(\vec{r}, t)$  der Felder  $\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t)$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}, t)$$

$$\begin{aligned}
 \vec{B}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c} \int d^3r' \left( \vec{\nabla} \times \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \\
 &= -\frac{1}{c} \int d^3r' \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times \dot{\vec{j}}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{c |\vec{r} - \vec{r}'|^2} \\
 &= -\frac{1}{c} \int d^3r' \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times \ddot{\vec{j}}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}
 \end{aligned}$$

$$\dot{\vec{a}}(\vec{r}, t) := \frac{\partial \ddot{\vec{a}}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (35)$$

$r > R_0$ : Führender Term in der Entwicklung nach  $\frac{1}{r}$  = Term 1. Ordnung in  $\frac{1}{r}$   
 =: "Strahlungsanteil" des Feldes

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r} + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\begin{aligned}
 \vec{B}(\vec{r}, t) &= - \underbrace{\frac{\vec{r}}{c^2 r^2} \times \int d^3r' \dot{\vec{j}}(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{c})}_{=: \vec{B}_s(\vec{r}, t)} + \vec{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \\
 & \quad (34)
 \end{aligned}$$

VI-16

$$\dot{q}(\vec{r}, t) := \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{cr})$$

$\dot{q}(\vec{r}, t)$  allgemeines Strahlungsmoment (37)

Beachte:

$$\dot{q}(\vec{r}, t) = \dot{q}(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r})$$

$t_r := t - \frac{r}{c}$  retardierte Zeit

$\vec{r} = (r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta)$

Raumrichtung  $\hat{=} \mathcal{D}, \varphi$

$$\vec{B}_s(\vec{r}, t) = -\frac{\vec{r}}{c^2 r^2} \times \ddot{q}(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r})$$

$$\vec{B}_s(\vec{r}, t) = \frac{\ddot{q}(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}) \times \vec{r}}{c^2 r^2} \quad (36)$$

$\vec{E}_s(\vec{r}, t)$  aus

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{rot } \vec{B} \quad (r > R_0 !)$$

$\frac{1}{4}$ -Anteil von rot  $\vec{B}_s(\vec{r}, t)$ :

$$\begin{aligned} & \left( \nabla \times \frac{\ddot{q}(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}) \times \vec{r}}{c^2 r^2} \right)_i \\ &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (\epsilon_{klm} \underbrace{\frac{\ddot{q}_l(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}) x_m}{c^2 r^2}}_{\uparrow}) \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \frac{x_m}{c^2 r^2} \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\ddot{q}_l(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r})}_{\downarrow} + O(\frac{1}{r^2}) \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \underbrace{\ddot{q}_l}_{(\ddot{q} \times \vec{r})_k} x_m \frac{x_j}{c^3 r^3} + O(\frac{1}{r^2}) \\ &= \left( \frac{[\ddot{q}(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}) \times \vec{r}] \times \vec{r}}{c^3 r^3} \right)_i + O(\frac{1}{r^2}) \\ &= \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_s(\vec{r}, t)}{\partial t} \right)_i + O(\frac{1}{r^2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{E}_s(\vec{r}, t) &= \frac{[\ddot{q}(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}) \times \vec{r}] \times \vec{r}}{c^2 r^3} \\ &= \vec{B}_s(\vec{r}, t) \times \frac{\vec{r}}{r} \end{aligned} \quad (38)$$

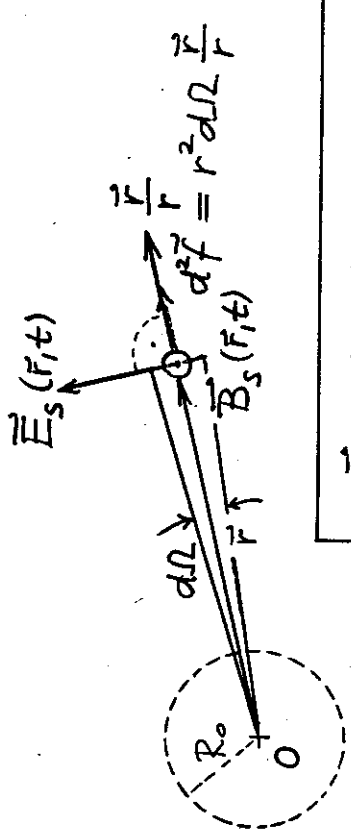
VI-18'

$$\vec{B}_s(r,t) = \frac{\dot{\vec{q}}(t - \frac{r}{c}, \vec{r}) \times \vec{r}}{c^2 r^2}$$

(36)

$$\vec{E}_s(r,t) = \vec{B}_s(r,t) \times \vec{r}$$

(39)



$\vec{r}, \vec{E}_s, \vec{B}_s$  orthogonales  
Dreibein  
(Rechtssystem)

$|\vec{E}_s| = |\vec{B}_s|$

Eigenschaften eines Wellenfeldes

VI.2. B. Abstrahlungsleistung

$r > R_0$ :

$$\vec{S}(r, t) = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}_s(r, t) \times \vec{B}_s(r, t)] + \vec{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (40)$$

$$\frac{c}{4\pi} \vec{B}_s^2(r, t) \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{mit } \vec{B}_s = \frac{\ddot{\vec{q}} \times \vec{r}}{c^2 r^2}$$

$$\vec{S}(r, t) = \frac{1}{4\pi c^3} r^2 [\ddot{\vec{q}}(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}) \times \frac{\vec{r}}{r}]^2 \frac{\vec{r}}{r} + \vec{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (41)$$

$$\vec{S}(r, t) \cdot d^2\vec{f} = \frac{1}{4\pi c^3} [\ddot{\vec{q}}(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}) \times \frac{\vec{r}}{r}]^2 d\Omega + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

Abstrahlungsleistung  $dP(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r})$

$$dP = \frac{1}{4\pi c^3} [\ddot{\vec{q}} \times \frac{\vec{r}}{r}]^2 d\Omega$$

$$= \frac{1}{4\pi c^3} [\ddot{\vec{q}}^2 - (\frac{\vec{r}}{r} \cdot \ddot{\vec{q}})^2] d\Omega \quad (42)$$

mit

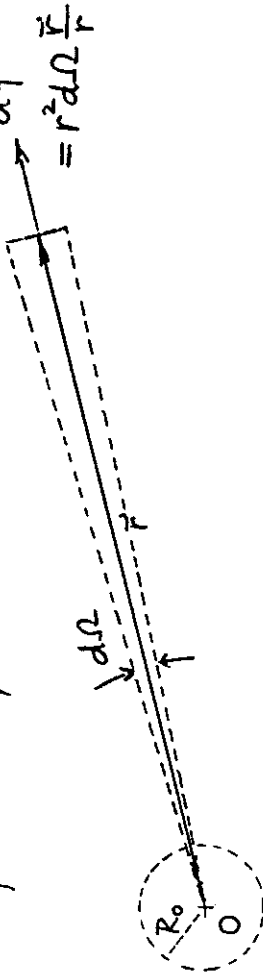
$$\ddot{\vec{q}} = \ddot{\vec{q}}(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}) = \int d^3r' \ddot{\vec{q}}(r', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{cr})$$

$$dP = dP(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}) \quad \text{Strahlungsenergie,}$$

welche zum Zeitpunkt  $t$  in der Zeiteinheit

ein im Aufpunkt  $\vec{r}$  befindliches Flächenelement

$$d^2\vec{f} = r^2 d\Omega \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{durchsetzt.}$$



Gesamte abgestrahlte Leistung:

$$P(t - \frac{r}{c}) = \int_{[4\pi]} dP(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r})$$

$$= \frac{1}{4\pi c^3} \int d\Omega [\ddot{\vec{q}} \times \frac{\vec{r}}{r}]^2 \quad [4\pi] \quad (43)$$

Strahlungsenergie, welche zum Zeitpunkt  $t$  in der Zeiteinheit eine Kugel vom Radius  $r$  durchsetzt.

VI. 2.C. Kartesische Multipolentwicklung  
des allgemeinen Strahlungsmomentes  $\vec{Q}$

V.S.  $r \gg R_0$  genügt nicht!

$$\dot{\vec{Q}}(t - \frac{r}{c}, \vec{r}) = \int d^3r' \vec{j}(F', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{F}'}{c r}) \quad (45)$$

Annahme: Die vorgegebene lokalisierte Stromverteilung Ändert sich in Zeiten  $\frac{\vec{r} \cdot \vec{F}'}{c r}$  ( $\vec{F}'$  aus Bereich, in dem  $\vec{j}(F', t')$  von null verschieden ist) nur wenig.

Physikalische Bedeutung: s. unten.

Taylorentwicklung:

$$\vec{j}(F', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{F}'}{c r}) = \underbrace{\vec{j}(F', t - \frac{r}{c})}_{t_r} + \underbrace{\frac{\vec{r} \cdot \vec{F}'}{c r} \dot{\vec{j}}(F', t - \frac{r}{c})}_{t_r} + \dots$$

$$\dot{\vec{Q}}(t_r, \vec{r}) = \underbrace{\int d^3r' \vec{j}(F', t_r)}_{\text{E1-Beitrag}} + \underbrace{\int d^3r' \dot{\vec{j}}(F', t_r) \frac{\vec{r} \cdot \vec{F}'}{c r} + \dots}_{\text{M1- und E2-Beitrag}} \quad (46)$$

liefert E1-Beitrag M1- und E2-Beitrag

$$\dot{\vec{Q}}(t_r, \vec{r}) = \underbrace{\int d^3r' \vec{j}(F', t_r)}_{\text{Umformung analog zu Gl. (IV-11a)}} + \frac{1}{c r} \int d^3r' \underbrace{(\vec{r} \cdot \vec{F}') \dot{\vec{j}}(F', t_r)}_{\text{Umformung analog zu Gl. (IV-11b), (IV-13)}} + \dots$$

1) Umformung analog zu Gl. (IV-11a)

2) Umformung analog zu Gl. (IV-11b), (IV-13)

$$\text{zu 1): } \frac{\partial}{\partial x_i} (j_i(F', t_r) x'_k) = \underbrace{\frac{\partial j_i(F', t_r)}{\partial x'_i}}_{\text{div}' \vec{j}(F', t_r)} x'_k \quad (KG)$$

$$\text{div}' \vec{j}(F', t_r) = -\dot{\rho}(F', t_r) \quad (KG)$$

symbolisch:  $+ j_i(F', t_r) \delta_{ik}$

$$\vec{j}(F', t_r) = \dot{\rho}(F', t_r) \vec{F}' + (\nabla' \cdot \vec{j}(F', t_r)) \vec{F}' \quad (47a)$$

$$\Rightarrow \int d^3r' \vec{j}(F', t_r) = \int d^3r' \vec{F}' \dot{\rho}(F', t_r)$$

VI-23

zu 2)  $(\vec{r} \cdot \vec{r}') \dot{\vec{r}}(r', t_r)$

$$a) \frac{\partial}{\partial x_i} (j_i(r', t_r) x_e x'_e x'_e) = \underbrace{\frac{\partial j_i(r', t_r)}{\partial x_i}}_{-\dot{\rho}(r', t_r)} x_e x'_e x'_e$$

$$+ j_i(r', t_r) x_e \delta_{ie} x'_e + j_i(r', t_r) x_e x'_e \delta_{ie}$$

$$(r \cdot r') \dot{\vec{r}}(r', t_r) = - (r \cdot \dot{\vec{r}}(r', t_r)) r' + \dot{\rho}(r', t_r) (r \cdot r') r' + (\nabla' \cdot \dot{\vec{r}}(r', t_r)) (r \cdot r') r'$$

b)

$$(r \cdot r') \dot{\vec{r}}(r', t_r) = (r \cdot \dot{\vec{r}}(r', t_r)) r' + (r' \times \dot{\vec{r}}(r', t_r)) \times r$$

a+b)

$$(r \cdot r') \dot{\vec{r}}(r', t_r) = \frac{1}{2} (r' \times \dot{\vec{r}}(r', t_r)) \times r + \frac{1}{2} \ddot{\rho}(r', t_r) (r \cdot r') r' + \frac{1}{2} (\nabla' \cdot \dot{\vec{r}}(r', t_r)) (r \cdot r') r'$$

$$\Rightarrow \int d^3 r' (r \cdot r') \dot{\vec{r}}(r', t_r) \quad (47b)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3 r' [r' \times \dot{\vec{r}}(r', t_r)] \times r + \frac{1}{2} \int d^3 r' \ddot{\rho}(r', t_r) (r \cdot r') r'$$

VI-24

$$\dot{\vec{r}}(t_r, \vec{r}) = \int d^3 r' \dot{\vec{r}}(r', t_r) + \frac{1}{c r} \int d^3 r' (r \cdot r') \dot{\vec{r}}(r', t_r) + \dots$$

$$= \int d^3 r' \dot{\vec{r}}(r', t_r)$$

$$+ \frac{1}{2c} \int d^3 r' [r' \times \dot{\vec{r}}(r', t_r)] \times \frac{r}{r}$$

$$+ \frac{1}{6c} \int d^3 r' 3 (\frac{r}{r} \cdot r') r' \ddot{\rho}(r', t_r) + \dots$$

$$\vec{p}(t) = \int d^3 r \vec{r} \rho(r, t) \quad (49a)$$

$$\vec{m}(t) = \frac{1}{2c} \int d^3 r [r \times \dot{\vec{r}}(r, t)] \quad (49b)$$

$$Q_{ij}(t) = \int d^3 r 3 x_i x_j \rho(r, t) \quad (49d)$$

$$\vec{Q}(t, \frac{r}{r}) := \frac{r}{r} \cdot \vec{Q}(t) \quad (49c)$$

$$\dot{\vec{r}}(t_r, \frac{r}{r}) = \underbrace{\dot{\vec{r}}(t_r)}_{E1-} + \underbrace{[\dot{m}(t_r) \times \frac{r}{r}]}_{M1-} + \frac{1}{6c} \underbrace{\ddot{Q}(t_r, \frac{r}{r})}_{E2- \text{ Strahlung}} + \dots$$

$$\ddot{\vec{r}}(t_r, \frac{r}{r}) = \ddot{\vec{r}}(t_r) + [\ddot{m}(t_r) \times \frac{r}{r}] + \frac{1}{6c} \ddot{\vec{Q}}(t_r, \frac{r}{r}) + \dots$$

Mit  $\ddot{\vec{r}}$  sind  $\vec{B}_s, \vec{E}_s$  und  $\frac{dP}{d\Omega}$  bekannt!

Bemerkung:

Anstelle von

$$Q_{ij}(t) = \int d^3r \ 3x_i x_j \rho(\vec{r}, t) \quad (\bar{Q}_{ij} \text{ in Elektrostatik})$$

kann man auch

$$Q_{ij}(t) = \int d^3r \ [3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}] \rho(\vec{r}, t)$$

↑  
( $Q_{ij}$  in Elektrostatik)

verwenden.

Damit ändert sich zwar das Vektorfeld

$$\vec{Q}(t_r, \vec{r}) = \vec{r} \cdot \vec{Q}(t_r)$$

nicht aber der E2-Beitrag

zu  $\ddot{\vec{Q}}(t_r, \vec{r}) \times \frac{\vec{r}}{r}$ , welcher durch

$$\frac{1}{6c} \ddot{\vec{Q}}(t_r, \vec{r}) \times \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{6c} \left[ \frac{\vec{r}}{r} \cdot \ddot{\vec{Q}}(t_r) \times \frac{\vec{r}}{r} \right]$$

gegeben ist, da  $\vec{r} \cdot \vec{I} = \frac{\vec{r}}{r}$  gilt.

Gleiches  $\ddot{\vec{Q}} \times \frac{\vec{r}}{r}$  bedeutet aber

gleiches  $\vec{B}_s, \vec{E}_s$  und  $\frac{dP}{d\Omega}$  !

Voraussetzungen für die Brauchbarkeit

Obiger Multipolentwicklung

- d charakteristische Lineardimension der Quellen
- T charakteristisches Zeitintervall für die zeitliche

Änderung der Quellen

Bedingung  $\left| \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{cr} \right| \sim \frac{d}{c} \ll T$  (51)

Speziell:

- a) Handelt es sich um eine beschleunigt bewegte Ladung mit der Größenordnung  $v$  der Teilchengeschwindigkeit, so gilt

$$v \sim \frac{d}{T} \implies \text{Bedingung } v \ll c \quad (52)$$

- b) Handelt es sich um einen zeitlich harmonischen Vorgang mit der Wellenlänge  $\lambda$  emittierten Strahlung, so gilt

$$T = T_s = \frac{\lambda}{c}$$

$\implies$  Bedingung  $d \ll \lambda$

VI. 2. D. Hertzscher Vektor

In der Strahlungstheorie wird öfter durch

$$\phi(\vec{r}, t) = -\text{div} \vec{Z}(\vec{r}, t)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{Z}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (54)$$

ein "Superpotential", der Hertzsche Vektor  $\vec{Z}(\vec{r}, t)$ , eingeführt.

Lorenzgleichung automatisch erfüllt:

$$\text{div} \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} \equiv 0 \quad (55)$$

Führt man noch durch

$$\rho(\vec{r}, t) = -\text{div} \vec{P}(\vec{r}, t)$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{P}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (57)$$

den sog. Polarisationsvektor  $\vec{P}(\vec{r}, t)$  ein, so ist

auch die KG automatisch erfüllt:

$$\text{div} \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (58)$$

Bemerkung: Beziehungen zwischen

$\vec{P}$ ,  $\rho$ ,  $\vec{j}$  mathematisch formal gleich wie

in Dielektrikum zwischen elektrischer Polarisation, Polarisationsladungs- und Polarisationsstromdichte. ●

Verlangt man vom Hertzschen Vektor, daß er Lösung von

$$\square \vec{Z}(\vec{r}, t) = -4\pi \vec{P}(\vec{r}, t) \quad (59)$$

ist, so ist damit

$$\square \phi(\vec{r}, t) = -4\pi \rho(\vec{r}, t) \quad \checkmark$$

$$\square \vec{A}(\vec{r}, t) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) \quad \checkmark \quad (56)$$

gewährleistet.

Es gilt

$$\vec{E} = -\text{grad} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$= \underbrace{\text{grad} \text{div} \vec{Z}}_{\text{rot rot} \vec{Z} + \Delta \vec{Z}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} = \text{rot rot} \vec{Z} - 4\pi \vec{P}$$



$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{rot rot } \vec{Z}(\vec{r}, t) - 4\pi\vec{P}(\vec{r}, t)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{Z}(\vec{r}, t) \quad (61)$$

Die retardierte Lösung für  $\vec{Z}(\vec{r}, t)$  lautet

$$\vec{Z}(\vec{r}, t) = \int d^3r' \frac{\vec{P}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (60)$$

Entwicklung nach Potenzen von  $\frac{1}{r}$  gibt

analog zu Gl. (34)  $\vec{B}_S(\vec{r}, t)$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = -\frac{\vec{r}}{c^2 r^2} \times \underbrace{\int d^3r' \ddot{\vec{P}}(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{c r}) + O(\frac{1}{r^2})}_{\ddot{\vec{q}}(t - \frac{r}{c}, \vec{r})}$$

womit

$$\vec{q}(t - \frac{r}{c}, \vec{r}) = \int d^3r' \vec{P}(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{c r})$$

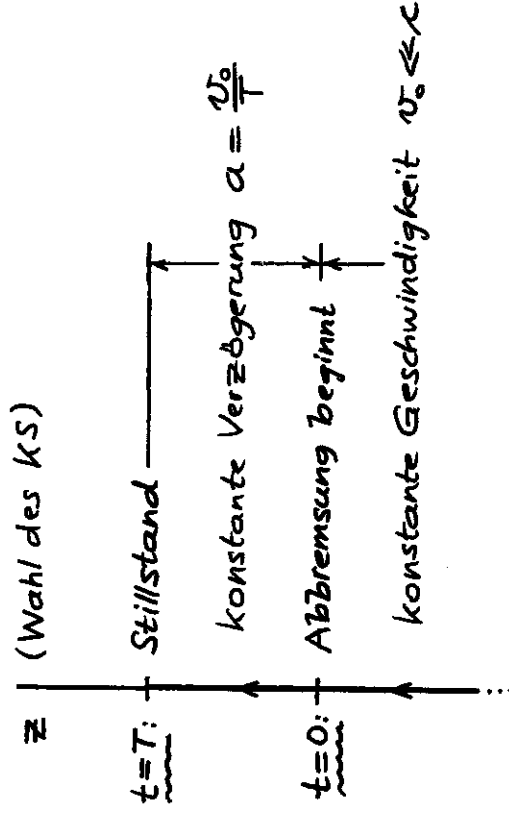
und

$$\vec{Z}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{q}(t - \frac{r}{c}, \vec{r})}{r} + O(\frac{1}{r^2})$$

Aus dem  $\frac{1}{r}$ -Anteil von  $\vec{Z}(\vec{r}, t)$  kann man also das Strahlungsmoment  $\vec{q}(t - \frac{r}{c}, \vec{r})$  ablesen und damit  $\vec{B}_S, \vec{E}_S, \frac{dP}{d\Omega}$  berechnen.

VI.2.E. Beispiel: gleichmäßige Abbremsung einer nichtrelativistischen Punktladung

Punktladung



Für Berechnung der Abstrahlung nur

benötigt:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = -a\vec{e}_z, \quad 0 < t < T$$

$v_0 \ll c$ : E1-Näherung möglich:

$$\ddot{\vec{q}}(t_r, \vec{r}) = \ddot{\vec{p}}(t_r) + \dots$$

Zeige selbst:

1)  $\ddot{m}(t_r) \equiv 0$

2)  $\frac{1}{6\pi} \ddot{\vec{Q}}(t_r, \vec{r})$

betragsmäßig um Ordnung  $\frac{v_0}{c}$  kleiner als  $\ddot{\vec{p}}(t_r)$

$$0 < t < T:$$

$$\dot{\vec{p}}(t) = q \ddot{\vec{R}}(t), \quad \ddot{\vec{p}}(t) = q \ddot{\ddot{\vec{R}}}(t) = -qa\ddot{\vec{e}}_z$$

$\Rightarrow$  (E1-Näherung)

$$0 < t_r < T:$$

$$\ddot{\vec{q}}(t_r) \approx \ddot{\vec{p}}(t_r) = -qa\ddot{\vec{e}}_z \quad (64)$$

$$[\ddot{\vec{q}}(t_r) \times \frac{\vec{r}}{r}]^2 = q^2 a^2 \sin^2 \vartheta \quad *)$$

$$\frac{dP}{d\Omega}(t_r, \vec{r}) = \frac{q^2 a^2}{4\pi\epsilon^3} \sin^2 \vartheta \quad *) \quad (\text{unabhängig von } \varphi)$$

$$P(t_r) = \int_{[4\pi]} dP(t_r, \vec{r}) = \frac{q^2 a^2}{4\pi\epsilon^3} \int d\Omega \sin^2 \vartheta$$

$$P(t_r) = \frac{2q^2 a^2}{3\epsilon^3} \quad *) \quad (65) \quad \underbrace{2\pi \cdot 2 \left(1 - \frac{1}{3}\right)}_{[4\pi]} = \frac{8\pi}{3}$$

gesamte während der Abbremsphase  
abgestrahlte Energie:  $a = \frac{v_0}{T}$

$$W_S = \frac{2q^2 a^2}{3\epsilon^3} T = \frac{2q^2 v_0^2}{3\epsilon^3} \frac{1}{T} \quad *) \quad (66)$$

\*) In E1-Näherung, also eigentlich "≈".

$$W_S = \frac{2q^2 v_0^2}{3\epsilon^3} \frac{1}{T}$$

kinetische Energie der Ladung vor der  
Abbremsung:

$$W_{\text{kin}} = \frac{m v_0^2}{2} \quad (67)$$

$$\Rightarrow \frac{W_S}{W_{\text{kin}}} = 2 \frac{\tau_S}{T} \quad \text{mit} \quad \tau_S := \frac{2q^2}{3m\epsilon^3} \quad (68)$$

$$\text{Elektron: } \tau_{S,e} = \frac{2e^2}{3m_e\epsilon^3} \approx 6 \cdot 10^{-24} \text{ s}$$

$\Rightarrow W_S \ll W_{\text{kin}}$  für "realistische" Werte von T

Bemerkung: Abstrahlung ist ein "relativistischer Effekt": eine beschleunigt bewegte Ladung strahlt umso stärker, je näher  $\vec{r}(t)$  bei  $\vec{r}$  und je größer  $\ddot{\vec{r}}(t)$  ist. ●

VI.3. Abstrahlung durch

zeitlich harmonische Quaddedichten,

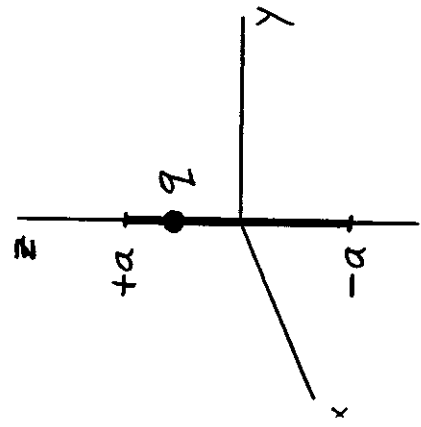
d.h.

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}, t) &= \rho(\vec{r}) e^{-i\omega t} + c.c. \\ \vec{j}(\vec{r}, t) &= \vec{j}(\vec{r}) e^{-i\omega t} + c.c. \end{aligned} \quad (69)$$

Bemerkung: Der Titel "Abstrahlung bei periodischer Zeitabhängigkeit" ist missverständlich.

z.B.: linear schwingende Punktladung

$$\vec{R}(t) = a \sin \omega_0 t \vec{e}_z$$



$$\rho(\vec{r}, t) = q \delta(\vec{r} - \vec{R}(t))$$

$$= q \delta(x) \delta(y) \delta(z - a \sin \omega_0 t)$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = q \dot{\vec{v}}(t) \delta(\vec{r} - \vec{R}(t))$$

$$= q a \omega_0 \cos \omega_0 t \cdot$$

$$\cdot \delta(x) \delta(y) \delta(z - a \sin \omega_0 t) \vec{e}_z$$

$\rho, \vec{j}$  lassen sich nicht in der Form (69) schreiben!

VI.3.A. Näherungsentwicklung für

große Wellenlängen

$$\dot{\vec{j}}(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}) = \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{cr})$$

$$\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{cr}) = \vec{j}(\vec{r}') e^{-i\omega(t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{cr})} + c.c.$$

$$k := \frac{\omega}{c}, \quad \vec{k} := k \frac{\vec{r}}{r} \quad (70)$$

$$\dot{\vec{j}}(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}) = e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'} + c.c. \quad (71)$$

Grenzfall großer Wellenlängen

$$d \ll \lambda$$

d charakteristische Lineardimension der lokalisierten Quellverteilung

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{\nu} \quad \text{Wellenlänge der emittierten Strahlung}$$

$$|\vec{k} \cdot \vec{r}'| = \frac{\omega}{c} |\vec{r}' \cdot \vec{r}'| \leq \frac{2\pi}{\lambda} d \ll 1 \quad (72)$$

$$e^{\pm i\vec{k} \cdot \vec{r}'} = 1 \pm i\vec{k} \cdot \vec{r}' + \dots \quad (73)$$

liefert  $E1-$   $M1-$ ,  $E2-$  Beitrag

(50):

$$\ddot{\underline{q}}(t_r, \underline{r}) = \underbrace{\ddot{\underline{p}}(t_r)}_{E1} + \underbrace{[\ddot{\underline{m}}(t_r) \times \underline{r}]}_{M1} + \underbrace{\frac{1}{6c} \underline{r} \cdot \ddot{\underline{Q}}(t_r)}_{E2} + \dots$$

M1, E2: gleiche Ordnung in  $\frac{d}{\lambda}$ ,  
eine Ordnung kleiner in  $\frac{d}{\lambda}$  als E1

HIER:

$$\underline{p}(t) = \int d^3r \underline{r} \rho(\underline{r}, t) = e^{-i\omega t} \underbrace{\int d^3r \underline{r} \rho(\underline{r})}_{=: \underline{p} \text{ i.a. komplex (74a), (76)}} + c.c.$$

$$\underline{m}(t) = \frac{1}{2c} \int d^3r [\underline{r} \times \underline{j}(\underline{r}, t)] = e^{-i\omega t} \underbrace{\frac{1}{2c} \int d^3r [\underline{r} \times \underline{j}(\underline{r})]}_{=: \underline{m} \text{ i.a. komplex (74b), (83)}} + c.c.$$

$$Q_{ij}(t) = \int d^3r \underbrace{3x_i x_j \rho(\underline{r}, t)}_{(74c), (90) \text{ bzw. (93)}} \\ \text{oder } 3x_i x_j - r^2 \delta_{ij} \\ = e^{-i\omega t} \int d^3r \underbrace{3x_i x_j \rho(\underline{r})}_{=: Q_{ij} \text{ i.a. komplex}} + c.c.$$

Zur Erinnerung: Die alternativen Definitionen liefern zwar verschiedenes  $\underline{\ddot{q}}$ ,  
aber gleiches  $\underline{\ddot{q}} \times \underline{r}$  und  
damit gleiches  $\underline{E}_s, \underline{B}_s, \frac{dP}{d\Omega}$ .

$$\ddot{\underline{q}}(t_r, \underline{r}) = \ddot{\underline{p}}(t_r) + [\ddot{\underline{m}}(t_r) \times \underline{r}] + \frac{1}{6c} \underline{r} \cdot \ddot{\underline{Q}}(t_r) + \dots$$

$$\underline{q}(t_r, \underline{r}) = \underline{p}(t_r) + [\underline{m}(t_r) \times \underline{r}] + \frac{1}{6c} \underline{r} \cdot \underline{\dot{Q}}(t_r) + \dots$$

$$\underline{\dot{Q}}(t) = \underline{\dot{Q}} e^{-i\omega t} + c.c. \\ \underline{\dot{Q}}(t) = -i\omega \underline{Q} e^{-i\omega t} + c.c.$$

$$\underline{q}(t_r, \underline{r}) = e^{-i\omega t_r} \{ \underline{p} + [\underline{m} \times \underline{r}] - \frac{i\omega}{6} \underline{r} \cdot \underline{Q} + \dots \} + c.c. \quad (75)$$

$$\vec{q}(t-\frac{r}{c}, \frac{r}{r}) = e^{i(kr-\omega t)} \left\{ \vec{p} + [\vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r}] - \frac{i k}{6} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{Q} + \dots \right\} + r.c.c.$$

(75)

$$\ddot{\vec{q}}(t-\frac{r}{c}, \frac{r}{r}) = -c^2 k^2 \vec{q}(t-\frac{r}{c}, \frac{r}{r})$$

$$(36): \quad \vec{B}_s(r,t) = \frac{1}{c^2 r} [\ddot{\vec{q}} \times \frac{\vec{r}}{r}]$$

$$(39): \quad \vec{E}_s(r,t) = \vec{B}_s(r,t) \times \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega}(t-\frac{r}{c}, \frac{r}{r}) &= \frac{1}{4\pi c^3} [\ddot{\vec{q}} \times \frac{\vec{r}}{r}]^2 \\ &= \frac{1}{4\pi c^3} [\ddot{\vec{q}}^2 - (\frac{\vec{r}}{r} \cdot \ddot{\vec{q}})^2] \end{aligned}$$

(42b):

$$\text{mit } \ddot{\vec{q}} = \ddot{\vec{q}}(t-\frac{r}{c}, \frac{r}{r})$$

Achtung! Mit der Entwicklung von  $\ddot{\vec{q}}$  als Summe eines  $E1$ -,  $M1$ -,  $E2$ -, ... Beitrages stellen sich auch  $\vec{B}_s$ ,  $\vec{E}_s$  als Summe entsprechender Beiträge ( $E1$ -Feld,  $M1$ -Feld,  $E2$ -Feld, ...) dar. In  $(\frac{dP}{d\Omega})$  treten aber i.a. von null verschiedene Interferenzterme auf.

Da jedoch die Interferenzterme bei der Winkelintegration keine Beiträge liefern (s. Jackson) stellt sich  $P$  wieder als Summe eines  $E1$ -, eines  $M1$ -, eines  $E2$ -, ... Beitrages dar.

### VI.3.B. Elektrische Dipolstrahlung

$$\vec{q}(t-\frac{r}{c}, \frac{r}{r})$$

$$= e^{i(kr-\omega t)} \left\{ \vec{p} + [\vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r}] - \frac{i k}{6} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{Q} + \dots \right\} + r.c.c. \quad E1\text{-Beitrag} \quad (77)$$

$$\ddot{\vec{q}}(t-\frac{r}{c}, \frac{r}{r}) = -c^2 k^2 \vec{q}(t-\frac{r}{c}, \frac{r}{r})$$

 $\Rightarrow$  $E1$ -Strahlungsfeld

$$\vec{B}_s(r,t) = \frac{1}{c^2 r} [\ddot{\vec{q}}(t-\frac{r}{c}, \frac{r}{r}) \times \frac{\vec{r}}{r}]$$

$$= k^2 \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} (\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{p}) + r.c.c. \quad (78)$$

$$\vec{E}_s(r,t) = k^2 \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} [(\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{p}) \times \frac{\vec{r}}{r}] + r.c.c.$$

$\frac{dP}{d\Omega}$  für reine E1-Strahlung

Hat man es mit einem ortsfesten zeitabhängigen elektrischen Punktdipol (Hertzschen Dipol) zu tun, oder kann man die höheren Terme wegen der Kleinheit von  $d$  gegen  $\lambda$  vernachlässigen, so hat man

$$\dot{q}(t - \frac{r}{c}, \frac{r}{r}) = e^{i(kr - \omega t)} \vec{p} + c.c.$$

$$\ddot{q}(t - \frac{r}{c}, \frac{r}{r}) = -c^2 k^2 e^{i(kr - \omega t)} \vec{p} + c.c.$$

$$\frac{dP}{d\Omega}(t - \frac{r}{c}, \frac{r}{r}) = \frac{1}{4\pi c^3} \left[ \ddot{q}(t - \frac{r}{c}, \frac{r}{r}) \times \frac{r}{r} \right]^2$$

$$= \frac{c}{4\pi} k^4 \left[ e^{i(kr - \omega t)} (\vec{r} \times \vec{p}) + e^{-i(kr - \omega t)} (\vec{r} \times \vec{p}^*) \right]^2$$

$$= \frac{c}{4\pi} k^4 \left[ 2 \left| \frac{r}{r} \times \vec{p} \right|^2 + e^{2i(kr - \omega t)} (\vec{r} \times \vec{p})^2 + e^{-2i(kr - \omega t)} (\vec{r} \times \vec{p}^*)^2 \right] + c.c.$$

$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}^*$

$$\frac{dP}{d\Omega}(t - \frac{r}{c}, \frac{r}{r}) = \frac{c}{4\pi} k^4 \left\{ \left| \frac{r}{r} \times \vec{p} \right|^2 + e^{2i(kr - \omega t)} (\vec{r} \times \vec{p})^2 \right\} + c.c. \quad (79)$$

Zeitmittel über eine Periode  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt f(t)$$

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle (\frac{r}{r}) = \frac{c}{2\pi} k^4 \left| \frac{r}{r} \times \vec{p} \right|^2 \quad (80)$$

Winkelabhängigkeit im Spezialfall eines in einer festen Richtung ē

"Schwingenden" Dipols (Dipolmoment besitz zu allen Zeiten dieselbe Richtung)

$$\vec{p}(t) = p(t) \vec{e} = p_0 \cos(\omega t - \delta) \vec{e} = \vec{p} e^{-i\omega t} + c.c.$$

Bemerkung 1: Dies bedeutet, daß die Komponenten  $p_x, p_y, p_z$  des komplexen Vektors  $\vec{p}$  Phasendifferenzen 0 oder  $\pi$  besitzen.

Bemerkung 2: Für einen in der  $xy$ -Ebene

rotierenden Dipol hätte man beispielsweise

$$\vec{p}(t) = p_0 [\cos(\omega t - \delta) \vec{e}_x + \sin(\omega t - \delta) \vec{e}_y]$$

In diesem Fall wäre  $p_z = 0$  und  $p_x, p_y$  hätten die Phasendifferenz  $\frac{\pi}{2}$ .

"Schwingender" Dipol: Wahl des KS:  $\vec{e} = \vec{e}_z$

$$\langle \frac{dP}{d\Omega} \rangle(\vec{r}) = \frac{c}{2\pi} k^4 \left| \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{p} \right|^2$$

$$\vec{p}(t) = p_0 \cos(\omega t - \delta) \vec{e}_z = \vec{p} e^{-i\omega t} + c.c.$$

$$\Rightarrow \langle \frac{dP}{d\Omega} \rangle(\delta) = \frac{c}{8\pi} k^4 \underbrace{|2\vec{p}|^2}_{P_0^2} \sin^2 \delta \quad (81)$$

Winkelintegral:  $\frac{8\pi}{3} \Downarrow$

$$\langle P \rangle = \frac{c k^4}{3} |2\vec{p}|^2 \propto \frac{1}{\lambda^4} \quad (82)$$

Ergebnis für  $\langle P \rangle$  gilt für beliebigen elektrischen Dipol mit Moment  $\vec{p}$  (z.B. auch für rotierenden)

VI. 3.C. Magnetische Dipolstrahlung

$$\vec{q}(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}) = e^{i(kr - \omega t)} \left\{ \vec{p} + \left[ \dot{\vec{m}} \times \frac{\vec{r}}{r} \right] - \frac{i k}{6} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \dot{\vec{q}} + \dots \right\}$$

+ c.c. M1-Beitrag (84)

$\Rightarrow$  M1-Strahlungsfeld

$$\vec{B}_S(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2 r} \left[ \ddot{\vec{q}}(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}) \times \frac{\vec{r}}{r} \right]$$

$$= k^2 \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \left[ \left( \frac{\vec{r}}{r} \times \dot{\vec{m}} \right) \times \frac{\vec{r}}{r} \right] + c.c.$$

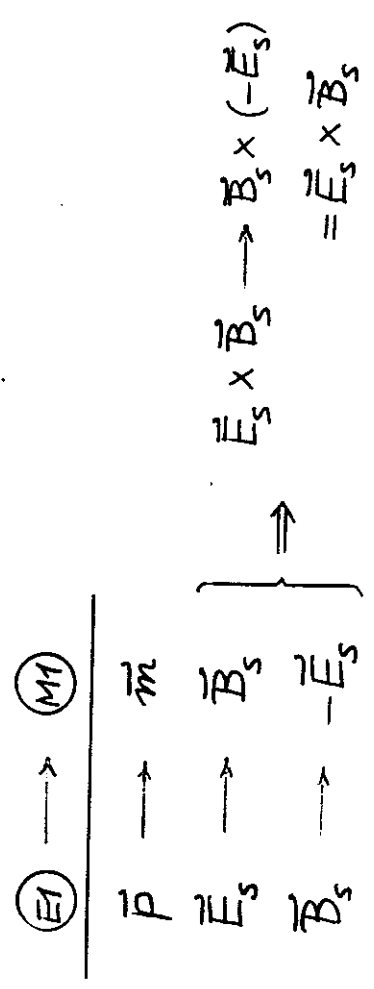
$$E1: k^2 \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \left( \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{p} \right) + c.c.$$

(85)

$$\vec{E}_S(\vec{r}, t) = -k^2 \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \left( \frac{\vec{r}}{r} \times \dot{\vec{m}} \right) + c.c.$$

$$E1: k^2 \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \left[ \left( \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{p} \right) \times \frac{\vec{r}}{r} \right] + c.c.$$

Vergleich  $E1 \leftrightarrow M1$  zeigt:



Folge: Die Formeln für  $\frac{dP}{d\Omega}$ ,  $\langle \frac{dP}{d\Omega} \rangle$ ,  $\langle P \rangle$

können vom E1-Fall formal  
übernommen werden, es ist

lediglich überall  $\vec{p}$  durch  $\vec{m}$  zu  
ersetzen: Skriptum Gln. (86) - (89).

Auch die entsprechenden Überlegungen  
sind analog.

VI.3.D. Elektrische Quadrupolstrahlung

$$\vec{q}(t - \frac{r}{c}, \vec{r}) = e^{i(kr - \omega t)} \left\{ \vec{p} + [\vec{m} \times \vec{r}] - \frac{i k}{6} \vec{r} \cdot \vec{Q} + \dots \right\}$$

+c.c. E2-Beitrag (91)

$$\ddot{\vec{q}}(t - \frac{r}{c}, \vec{r}) = -c^2 k^2 \vec{q}(t - \frac{r}{c}, \vec{r})$$

⇒ E2-Strahlungsfeld

$$\vec{B}_S(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2 r} [\ddot{\vec{q}}(t - \frac{r}{c}, \vec{r}) \times \vec{r}]$$

$$= \frac{i k^3}{6} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} (\vec{r} \cdot \vec{Q} \times \vec{r}) + c.c.$$

(92a)

$$\vec{E}_S(\vec{r}, t) = \frac{i k^3}{6} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} [(\vec{r} \cdot \vec{Q} \times \vec{r}) \times \frac{\vec{r}}{r}]$$

+c.c. (92b)

für reine E2-Strahlung

$$\frac{dP}{d\Omega}(t - \frac{r}{c}, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi c^3} [\ddot{\vec{q}}(t - \frac{r}{c}, \vec{r}) \times \frac{\vec{r}}{r}]^2$$

$$\ddot{\vec{q}}(t - \frac{r}{c}, \vec{r}) = \frac{i c^2 k^3}{6} e^{i(kr - \omega t)} \vec{r} \cdot \vec{Q} + c.c.$$

$$\frac{dP}{d\Omega}(t - \frac{r}{c}, \vec{r}) = \frac{c}{4\pi} \frac{k^6}{36} [i e^{i(kr - \omega t)} (\vec{r} \cdot \vec{Q} \times \frac{\vec{r}}{r}) - i e^{-i(kr - \omega t)} (\vec{r} \cdot \vec{Q}^* \times \frac{\vec{r}}{r})]^2$$

$$\frac{dP}{d\Omega}(t - \frac{r}{c}, \vec{r}) = \frac{c}{4\pi} \frac{k^6}{36} \left\{ |\vec{r} \cdot \vec{Q} \times \frac{\vec{r}}{r}|^2 - e^{2i(kr - \omega t)} (\vec{r} \cdot \vec{Q} \times \frac{\vec{r}}{r})^2 + c.c. \right\}$$

(94)

$$\langle \frac{dP}{d\Omega} \rangle(\vec{r}) = \frac{c}{2\pi} \frac{k^6}{36} |\vec{r} \cdot \vec{Q} \times \frac{\vec{r}}{r}|^2$$

$\langle \frac{dP}{d\Omega} \rangle$  komplizierte Winkelabhängigkeit (95)



Winkelabhängigkeit im Spezialfall  
eines "schwingenden" Quadrupols  
(Hauptachsenrichtungen von  $\vec{Q}(t)$  zeitunabhängig)

Wahl des KS: Hauptachsenrichtungen als  
Koordinatenachsenrichtungen  
gewählt

Dann gilt:

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{Q} = \begin{pmatrix} Q_{xx} \frac{x}{r} \\ Q_{yy} \frac{y}{r} \\ Q_{zz} \frac{z}{r} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \vec{Q} \times \frac{\vec{r}}{r} &= (Q_{yy} - Q_{zz}) \frac{yz}{r^2} \vec{e}_x \\ &+ (Q_{zz} - Q_{xx}) \frac{zx}{r^2} \vec{e}_y \\ &+ (Q_{xx} - Q_{yy}) \frac{xy}{r^2} \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$|\vec{r} \cdot \vec{Q} \times \frac{\vec{r}}{r}|^2 = |Q_{yy} - Q_{zz}|^2 \frac{y^2 z^2}{r^4} + \text{zyklisch}$$

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle(\vartheta, \varphi)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{c}{2\pi} \frac{k^6}{36} \left\{ |Q_{zz} - Q_{xx}|^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \cos^2 \varphi \right. \\ &\quad + |Q_{yy} - Q_{zz}|^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi \\ &\quad \left. + |Q_{xx} - Q_{yy}|^2 \sin^4 \vartheta \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \right\} \end{aligned}$$

alle Winkelintegrale  
haben den Wert  $\frac{4\pi}{15}$

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{c k^6}{360} \frac{4}{3} \left\{ |Q_{zz} - Q_{xx}|^2 \right. \\ &\quad + |Q_{yy} - Q_{zz}|^2 \\ &\quad \left. + |Q_{xx} - Q_{yy}|^2 \right\} \end{aligned}$$

Alle bisher angeschriebenen Formeln gelten  
für beide Arten der Definition von  $\vec{Q}$ .

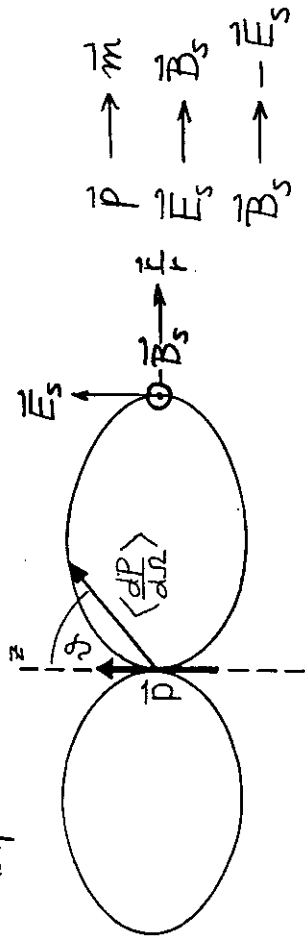
Bei Verwendung der Definition mit  $\text{Sp} \vec{Q} = 0$   
kann man das Ergebnis weiter vereinfachen:

$$\langle P \rangle = \frac{c k^6}{360} \left\{ |2Q_{xx}|^2 + |2Q_{yy}|^2 + |2Q_{zz}|^2 \right\}$$

Für allgemeinen elektrischen Quadrupol gilt (97)

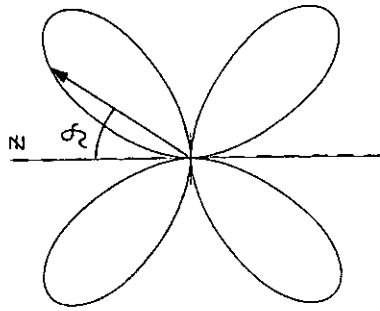
$$\langle P \rangle = \frac{c k^6}{360} \sum_{ij} |2Q_{ij}|^2 \propto \frac{1}{\lambda^6}$$

"Schwinger" elektrischer bzw. magnetischer Dipol



$$\langle \frac{dP}{d\Omega} \rangle \propto \sin^2 \vartheta$$

Rotationssymmetrischer "Schwinger" elektrischer Quadrupol



$$\langle \frac{dP}{d\Omega} \rangle \propto \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta$$

Beispiel: Bzgl. der z-Achse

rotationssymmetrischer

"Schwinger" elektrischer Quadrupol im Hauptachsensystem

Konvention mit  $Sp \vec{Q} = 0$  verwendet:

$$Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2} Q, \quad Q_{zz} = Q$$

$$\Rightarrow |Q_{zz} - Q_{xx}|^2 = |Q_{yy} - Q_{zz}|^2 = \frac{9}{4} |Q|^2$$

$$|Q_{xx} - Q_{yy}|^2 = 0$$

$$\langle \frac{dP}{d\Omega} \rangle(\vartheta) = \frac{c}{2\pi} \frac{k^6}{36} \frac{9}{4} |Q|^2 \cdot$$

$$\cdot \left\{ \begin{aligned} &\sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi \\ &+ \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi \end{aligned} \right\} \quad \text{--- } \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta$$

$$\langle \frac{dP}{d\Omega} \rangle(\vartheta) = \frac{ck^6}{128\pi} |2Q|^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta$$

## VI. 4. Multipolstrahlung

(Sphärische Multipolentwicklung)

NICHT VORGETRAGEN

NICHT PRÜFUNGSSTOFF

VI-49

VII-1

## SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

### VII. RELATIVISTISCHE KINEMATIK

#### VII.1. Grundlagen

#### VII.1. A. Grundlegende Experimente

Situation Ende des 19. Jhdts:

Äther: "Medium" für die Ausbreitung elm. Felder

- erfüllt den ganzen Raum, d.h. ist "überall"
- verhält sich als "Trägermedium" elm. Wellen
- wie ein elastischer Festkörper (Transversalwellen!)
- setzt langsam bewegten Materieobjekten keinen merklichen Widerstand entgegen (Himmelsmechanik!)

Nähere Details: M. Born

Die Relativitätstheorie  
Einsteins

Gesetze der Mechanik (NEWTON):

- in allen Inertialsystemen gleich  
(Relativitätsprinzip)
- forminvariant bei Galilei-Transformationen  
(GT)

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$$

$$t' = t$$

Alternativen bzgl. Gesetzen der Elektrodynamik:

- 1) ∃ ausgezeichnetes Bezugssystem, das Äthersystem, in welchem die Grundgln. in der bekannten Form gelten (Grundgleichungen der Elektrodynamik korrekt)

MEHRHEITSMEINUNG

- GT korrekt
- ⇒ Relativitätsprinzip gilt für Phänomene der Elektrodynamik nicht (da Grundgln. bei GT Form ändern), damit Bewegung gegen Äther durch elm. Versuche nachweisbar

- 2) Relativitätsprinzip gilt auch für Phänomene der Elektrodynamik

- GT korrekt, Mechanik korrekt

MINDERHEIT =  
VOTUM

⇒ Grundgln. der Elektrodynamik sind nicht korrekt  
KAUM VORSTELLBAR ... (Experimente!)

- 3) Relativitätsprinzip gilt auch für Phänomene der Elektrodynamik

- Grundgleichungen der Elektrodynamik sind korrekt

MINDERHEIT =  
VOTUM  
SIEGER

⇒ GT nicht korrekt,

Grundgln. der Mechanik nicht korrekt

Entscheidung durch

EXPERIMENTE

1887 Michelson-Morley

1725 Aberration (Bradley)

1851 Fizeausche Mitführung

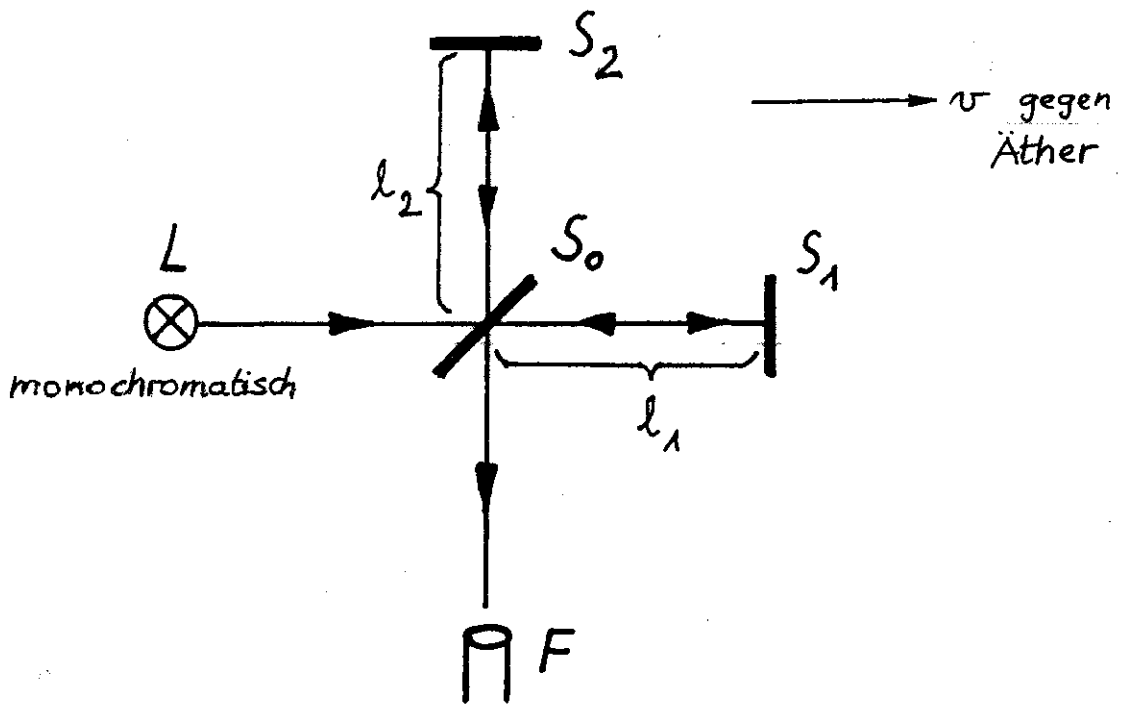
1903 Trouton-Noble

1932 Kennedy-Thorndike

∴  
Classical Electricity  
and Magnetism

"experimenta  
Crucis"

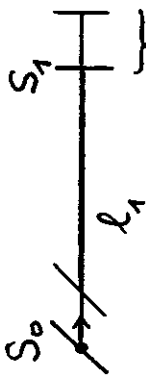
s. Panofsky,  
Phillips



Gesichtsfeld hell oder dunkel,  
 im realen Experiment System heller  
und dunkler Ringe ("Interferenzstreifen"),  
 da ankommende Strahlen nicht genau parallel  
 und Wellenfronten nicht ganz eben

Athertheorie:  
 Laufzeit des zu  $S_1$  laufenden Teilstrahler  
 für die Wege  $S_0 \rightarrow S_1$  ("hin") und

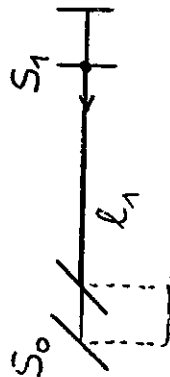
$S_1 \rightarrow S_0$  ("rück")  $\rightarrow v$  gegen Äther



$$\Delta l_1^{hin} = v t_1^{hin}$$

$$t_1^{hin} = \frac{l_1 + \Delta l_1^{hin}}{c}$$

$$\Rightarrow t_1^{hin} = \frac{l_1}{c-v} \quad (\text{absolute Zeit!})$$



$$\Delta l_1^{rück} = v t_1^{rück}$$

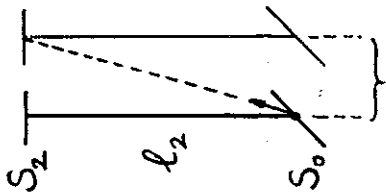
$$t_1^{rück} = \frac{l_1 - \Delta l_1^{rück}}{c}$$

$$\Rightarrow t_1^{rück} = \frac{l_1}{c+v}$$

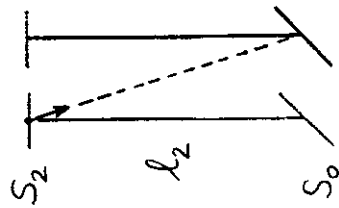
$$t_1 = t_1^{hin} + t_1^{rück} = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad (2)$$

Laufzeit des zu  $S_2$  laufenden Teilstrahles für die Wege  $S_0 \rightarrow S_2$  ("hin") und  $S_2 \rightarrow S_0$  ("rück")

$\longrightarrow v$  gegen Äther



$$\Delta l_2^{\text{hin}} = v t_2^{\text{hin}} \quad \Rightarrow \quad t_2^{\text{hin}} = \frac{l_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$



$$t_2^{\text{rück}} = t_2^{\text{hin}}$$

$$t_2 = t_2^{\text{hin}} + t_2^{\text{rück}} = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3)$$

Laufzeitdifferenz

$$t_1 - t_2 = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Bei um  $90^\circ$  gedrehter Apparatur ( $l_1 \leftrightarrow l_2$ ):

andere Laufzeitdifferenz

$$\bar{t}_1 - \bar{t}_2 = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{2l_2}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

1887: Michelson-Morley-Experiment:  $l_1 = l_2 = l$

und langsame Drehung der Apparatur

(dauert einige Minuten)

Anfangsstellung (Arm 1 in Richtung von  $\vec{v}$ )

$$\Delta t_A = t_1 - t_2 = \frac{2l}{c} \left( \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

Endstellung (Arm 2 in Richtung von  $\vec{v}$ )

$$\Delta t_E = \bar{t}_1 - \bar{t}_2 = -\Delta t_A$$

$\Rightarrow$  Während der Drehung langsame Verschiebung

um  $n = \frac{c(\Delta t_A - \Delta t_E)}{\lambda}$  "Interferenzstreifen"

$$n = \frac{4l}{\lambda} \left( \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \approx \frac{2l}{\lambda} \frac{v^2}{c^2}$$

müßte eintreten, aber:

"Interferenzstreifen" verschoben sich nicht!

"negativer Ausgang" des

Michelson-Morley-Experimentes

Erklärungsversuche

1)  $v = 0$  zum "Versuchszeitpunkt"

Wiederholung des Versuches nach einem halben Jahr fällt abermals negativ aus.

2) Erde "nimmt" Äther in ihrer Umgebung vollständig mit"

WIDERSPRUCH zu Aberrationsversuchen

Längenkontraktionshypothese (ad-hoc Annahme)

s. Skriptum VII.1.B.

⇒ Äther bei Michelson-Morley-Experiment nicht beobachtbar:

$$\begin{aligned} t_1 - t_2 &= \frac{2l_{10} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{c} - \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{2l_{20}}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ &= \frac{2(l_{10} - l_{20})}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = t_1 - t_2 \end{aligned}$$

⇒ keine Verschiebung der "Interferenzstreifen" bei Drehung um  $90^\circ$  (gleichgültig, ob  $l_{10} = l_{20}$  oder nicht)

ABER: 1932 Kennedy-Thorndike-Experiment

$l_{10} \neq l_{20}$  (ungefähr 16 cm Unterschied),

Apparat im Labor fixiert, aber

Beobachtung durch mehrere Monate:

"Streifenverschiebung" müßte sich

durch Änderung von  $v$  ergeben

"negativer Ausgang", keinerlei

Verschiebung der "Interferenzstreifen"

4) 1905 Einstein:

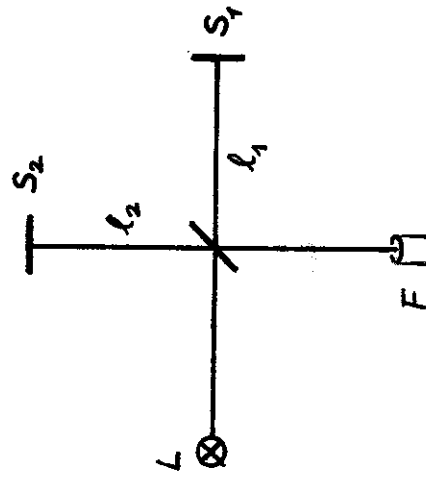
- ES gibt keinen Äther.
- Das Relativitätsprinzip gilt auch für elm. Phänomene.
- Die Maxwelltheorie ist korrekt,  
Newtonsche Mechanik und GT sind nicht korrekt.

Daraus folgt u.a.:

Elm. Wellen breiten sich im Vakuum unabhängig vom Bewegungszustand ihrer Quelle in jedem Inertialsystem mit der Geschwindigkeit  $c$  aus.

**DAS IST DER "TOD" DER KONZEPTE DES ABSOLUTEN RAUMES UND DER ABSOLUTEN ZEIT!**

Michelson-Morley oder Kennedy-Thorndike Experiment im Ruhsystem der Apparatur (in guter Näherung ein Inertialsystem) betrachtet:



$$t_1 - t_2 = \frac{2(l_1 - l_2)}{c}$$

$t_1, t_2, l_1, l_2$  gemessen im Ruhsystem der Apparatur

Formel gilt für jede Orientierung der Apparatur

Zur Lorentzschen ad-hoc Zeitdilationsannahme

s. Skriptum VII.1.B.

Beachte: Die Lorentzschen ad-hoc Annahmen sind von den experimentell überprüfbaren (!) kinematischen Effekten der SRT, welche man als Längenkontraktion (Lorentzkontraktion) und Zeitdilatation bezeichnet, zu unterscheiden.

### VII.1.C. Postulate der SRT

#### P1: Relativitätsprinzip

Beliebige physikalische Vorgänge laufen bei gleichen Bedingungen in beliebigen Inertialsystemen gleich ab.

Naturgesetze müssen sich daher so formulieren lassen, daß sie bei einem Wechsel des inertialen Bezugssystems ihre Form nicht ändern (Forminvarianz, Kovarianz).



P2: "Konstanz der Lichtgeschwindigkeit"

Elektromagnetische Wellen breiten sich unabhängig vom Bewegungszustand ihrer Quelle in allen Inertialsystemen mit der Geschwindigkeit  $c$  aus.

Bemerkung: Auf Grund von P1 kommt

$c$  die universelle Bedeutung einer Signalgeschwindigkeit beliebiger physikalischer Wirkungen zu.

Homogenität und Isotropie des Raumes und Homogenität der Zeit in bezug auf ein Inertialsystem stellen kein von P1, P2 unabhängiges Postulat dar, sie sind schon in der Definition des Begriffes Inertialsystem enthalten.

## VII.1. D. Lorentztransformationen der Zeit - Orts - Koordinaten von Ereignissen

Ereignis  $E$ : Inertialsystem  $S$ :  $t, x, y, z$   
 Inertialsystem  $S'$ :  $t', x', y', z'$

Gesucht: Transformationsgl.

$$t' = t'(t, x, y, z)$$

$$x' = x'(t, x, y, z)$$

$$y' = y'(t, x, y, z)$$

$$z' = z'(t, x, y, z)$$

1) Raum bzgl.  $S$  und  $S'$  homogen und isotrop, Zeit bzgl.  $S$  und  $S'$  homogen  $\Rightarrow$

Transformation muß linear sein

(gerade gleichförmig durchlaufene

Teilchenbahnen müssen in gerade

gleichförmig durchlaufene Teilchenbahnen

transformieren)

2) Transformation linear  $\Rightarrow$  Ebenen von S  
transformieren in Ebenen von S'

Satz: raumfeste Ebenen bzgl. S mit

Normalenvektoren  $\vec{n} \perp \vec{r}$ ,

$\vec{r}$  Geschwindigkeit von S' gegen S,

transformieren in raumfeste

Ebenen bzgl. S'

Beweis:

$$S: n_1 x + n_2 y + n_3 z + p = 0$$

$$S' \rightarrow S: x = a_1 x' + b_1 y' + c_1 z' + d_1 t' + e_1$$

$$y = a_2 x' + b_2 y' + c_2 z' + d_2 t' + e_2$$

$$z = a_3 x' + b_3 y' + c_3 z' + d_3 t' + e_3$$

$$S': (n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3) x'$$

$$+ (n_1 b_1 + n_2 b_2 + n_3 b_3) y'$$

$$+ (n_1 c_1 + n_2 c_2 + n_3 c_3) z'$$

$$+ (n_1 d_1 + n_2 d_2 + n_3 d_3) t'$$

$$+ (n_1 e_1 + n_2 e_2 + n_3 e_3) + p = 0$$

$$= 0 \Leftrightarrow \text{falls } \vec{n} := (n_1, n_2, n_3), \vec{d} := (d_1, d_2, d_3)$$

$\vec{n} \cdot \vec{d} = 0$  erfüllen; offensichtlich:  $\vec{d} \parallel \vec{r}$

3) Wählt man Koordinatensprünge

und Zeitnullpunkte in S und S' so, daß

$$x = y = z = 0, t = 0 \text{ auf } x' = y' = z' = 0, t' = 0$$

abgebildet wird, so muß wegen P2 gelten:

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2, t > 0$$



$$S': x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2, t' > 0$$

Bemerkung: Das ist der "Tod" der  
absoluten (universellen) Zeit.

Definitionen:

$$S^2 := c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

$$S'^2 := c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

Satz: Folgt für eine lineare homogene

Transformation, daß  $S^2 = 0$

$S'^2 = 0$  impliziert (und umgekehrt),

so folgt <sup>t)</sup>

$$S'^2 = S^2$$

<sup>t)</sup> bei Verwendung gleicher Einheiten in S und S'

Beweis: Lineare homogene Transformation  
gibt

$$\begin{aligned} S^2 &= \underline{\underline{c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2}} \\ &= \underline{\underline{A c^2 t^2 + B x^2 + C y^2 + D z^2}} \\ &+ \underline{\underline{I c t x + J c t y + K c t z}} \\ &+ \underline{\underline{L y z + M z x + N x y}} \equiv \underline{\underline{P}} \end{aligned}$$

a) Notwendige Bedingungen dafür, daß  
P für jene reellen  $ct > 0, x, y, z$   
null ist, für die

$$S^2 = \underline{\underline{c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2}}$$

null ist:

$$(ct, x, y, z) = (1, \pm 1, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A + B \pm I = 0}}, \underline{\underline{A + B = 0}}$$

$$\underline{\underline{I = 0}}$$

Analog:

$$(ct, x, y, z) = (1, 0, \pm 1, 0)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A + C = 0}}, \underline{\underline{A + D = 0}}$$

$$\underline{\underline{J = 0}}, \underline{\underline{K = 0}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A + D = 0}}, \underline{\underline{K = 0}}$$

$$S^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

$$S^2 = P = \underline{\underline{A c^2 t^2 + B x^2 + C y^2 + D z^2}}$$

$$\underline{\underline{-A}} \quad \underline{\underline{-A}} \quad \underline{\underline{-A}}$$

$$+ \underline{\underline{I c t x + J c t y + K c t z}}$$

$$\underline{\underline{0}} \quad \underline{\underline{0}} \quad \underline{\underline{0}} \quad \text{bereits gezeigt}$$

$$+ \underline{\underline{L y z + M z x + N x y}}$$

$$\underline{\underline{0}} \quad \underline{\underline{0}} \quad \underline{\underline{0}} \quad \text{s. unten}$$

$$(ct, x, y, z) = (\sqrt{2}, 0, 1, 1)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{2A - A - A + L = 0}}, \underline{\underline{L = 0}}$$

analog:

$$\underline{\underline{M = 0}}$$

$$\underline{\underline{N = 0}}$$

$$\Rightarrow S^2 = P = A S^2$$

$$b) \quad S^2 = A(|\vec{v}|) S^2$$

Isotropie

"Reziprozität":

$$S^2 = A(|\vec{v}|) S^2$$

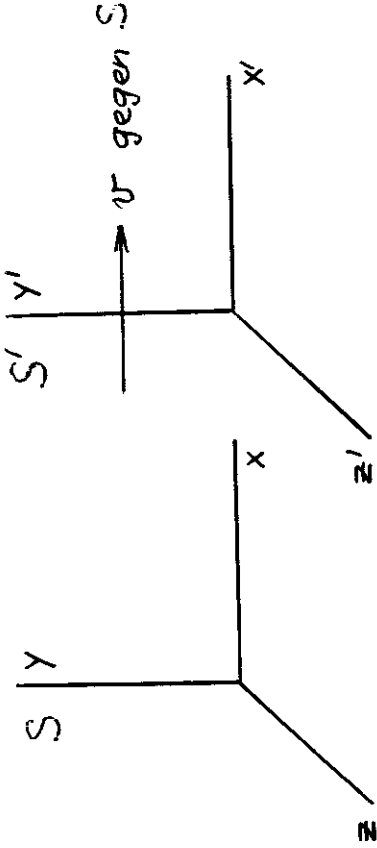
$$\Rightarrow S^2 = S^2 \quad \text{für homogene Transformationen}$$

$$A^2(|\vec{v}|) = 1$$

$$\Rightarrow A(|\vec{v}|) = \pm 1$$

Grenzfall  $|\vec{v}| \downarrow 0$

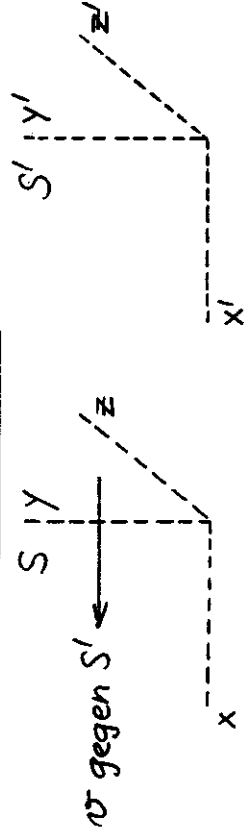
Standard-LT der Zeit-Orts-Koordinaten  
 (homogene LT für achsenparallele Systeme,  
 Relativbewegung in x-Richtung)



$(ct, x, y, z) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow (ct', x', y', z') = (0, 0, 0, 0)$

I.) Punkt 2): Ebene  $y=0$  von S wird auf  
Ebene  $y'=0$  von S' abgebildet

$\Rightarrow \underline{y' = C(v)y}$



$\underline{y = C(v)y'}$ ,  $\forall y$

$\Rightarrow C(v) = \frac{1}{C(v)}$ ,  $\underline{y' = y}$  (4)

Analog:  $z' = z$

II.) Ebene  $x'=0$  von S' muß  
Ebene  $x=vt$  von S sein

$\Rightarrow \underline{x' = A(v)(x - vt)}$ ,  $A(v) > 0$

Ferner:  $\underline{t' = B(v)t - D(v)x}$ ,  $B(v) > 0$

Punkt 3):  $S'^2 = S^2$  für homogene LT

$\underline{c^2 t'^2 - x'^2 = c^2 (Bt - Dx)^2 - A^2 (x - vt)^2}$   
 $\underline{= c^2 t^2 - x^2}$ ,  $\forall t, x$

$\Rightarrow t^2 \dots B^2 - \frac{v^2}{c^2} A^2 = 1$

$t x \dots A^2 - \frac{v^2}{c^2} B D = 0$  mit  $A > 0, B > 0$

$x^2 \dots A^2 - c^2 D^2 = 1$

$\Rightarrow A(v) = B(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

$D(v) = \frac{v}{c^2} A(v)$  (5)

Standard-LT

VII-19

$$\begin{aligned}
 ct' &= \gamma(v) \left( ct - \frac{v}{c} x \right) \\
 x' &= \gamma(v) (x - vt) \\
 y' &= y \\
 z' &= z
 \end{aligned}$$

"Raum-Zeit"

mit

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Bemerkung: Für  $\frac{v}{c} \ll 1 \Rightarrow \gamma(v) \approx 1$

erhält man daraus näherungsweise die Standard-GT

$$\begin{aligned}
 t' &= t && \text{(universelle Zeit)} \\
 x' &= x - vt \\
 y' &= y \\
 z' &= z
 \end{aligned}$$

Matrixschreibweise der Standard-LT

VII-20

Mit  $y = \gamma(v)$ ,  $\beta = \beta(v) = \frac{v}{c}$  (6)

gilt

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{}^s\Lambda = \text{}^s\Lambda(v)} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (7)$$

Transformationsmatrix (8) der Standard-LT

Es gilt:

$$\text{}^s\Lambda^{-1}(v) = \text{}^s\Lambda(-v) \quad (9)$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (10)$$

"Reziprozität"

## Allgemeine homogene LT ("eigentliche" <sup>†</sup>)

VII-21

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  Eulerwinkel

$$\mathcal{D}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (D_{ij}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)), \quad i, j = 1, 2, 3$$

dreidimensionale Drehmatrix  
(orthogonale Transformation) <sup>(11)</sup>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\beta\gamma & 0 \\ 0 & -\beta\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & \mathcal{D}(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

"Drehung"  $\mathcal{D}\Lambda$

Standard-LT  $st\Lambda$

"Drehung"  $\mathcal{D}\Lambda$

Allgemeine LT ("eigentliche" <sup>†</sup>)

Zusätzlich raum-zeitliche Translationen

<sup>†</sup> d.h. ohne Spiegelungen

Beachte:

1)  $c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$

gilt bei beliebiger homogener LT,

nicht aber bei inhomogener LT

2)  $c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$

gilt bei beliebiger LT (ebenso für endliche Differenzen  $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z$ )

## VII. 2. Vierertensoren

VII-22

### VII. 2. A. Raum-Zeit (Minkowskiwelt)

Minkowski 1908

Vierdimensionaler Raum, dessen "Punkte"

durch die denkbaren Ereignisse E gegeben sind ("Weltpunkte").

Definiert man auf diesem Raum Tensoren und Tensorfelder, so stellen Beziehungen zwischen solchen "Vierertensoren" per constructionem gegenüber Bezugssystem = Wechsel forminvariante (kovariante) Aussagen dar.

Dem Relativitätsprinzip kann man daher dadurch Rechnung tragen, daß man Naturgesetze als Vierertensorgleichungen formuliert.

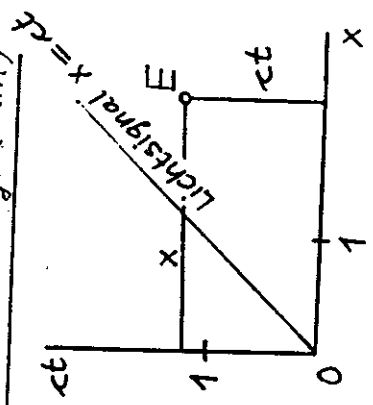
Geometrische Veranschaulichung

VII-23

der Standard-LT (Minkowski Diagramm)

1. Schritt: ct- und x-Achse  
willkürlich senkrecht  
gezeichnet (Konvention)

E: S: (ct, x)



Frage: Lage der ct'- und x'-Achse in diesem Diagramm?

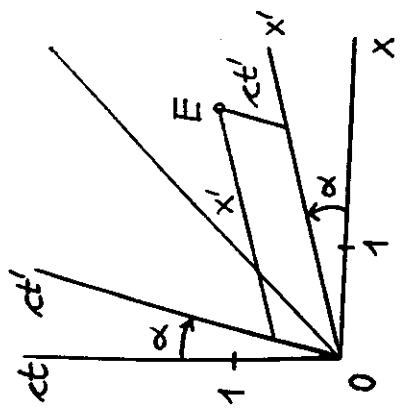
2. Schritt:

x'-Achse: ct' = 0

$ct' = \beta(ct - \beta x) = 0 \Rightarrow ct = \beta x$

ct'-Achse: x' = 0

$x' = \beta(x - ct) = 0 \Rightarrow ct = \frac{1}{\beta} x$



bzw.  $x = \beta ct$

$\alpha = \arctan \beta < \frac{\pi}{4}$

da  $\beta < 1$

E: S': (ct', x')

Frage: Einheiten auf der ct'- und x'-Achse?

3. Schritt: Eichkurven für Ort und Zeit

VII-24

$ct'^2 - x'^2 = c^2 t^2 - x^2$  für Standard-LT

Einheit auf der positiven x'-Achse:  $x' = 1, ct' = 0$

$\Rightarrow$  Schnitt des Hyperbelastes

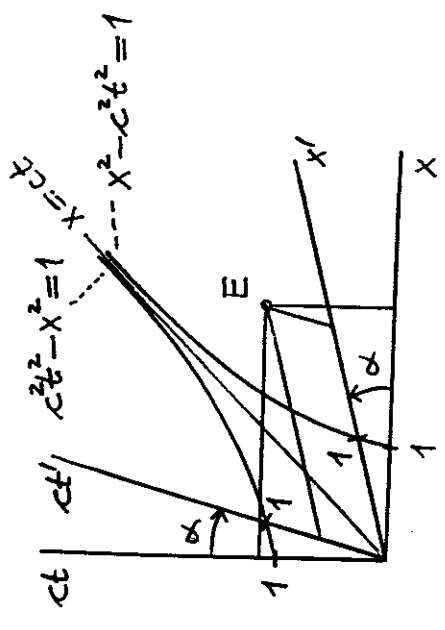
$x^2 - c^2 t^2 = 1, x > 0$  Eichkurve für Ort  
mit der x'-Achse

Einheit auf der positiven ct'-Achse:  $ct' = 1, x' = 0$

$\Rightarrow$  Schnitt des Hyperbelastes

$c^2 t'^2 - x'^2 = 1$ ,  $ct > 0$  Eichkurve für Zeit

mit der ct'-Achse



Invariante Bereiche der Raum-Zeit

VII-25

in bezug auf ein festes Ereignis, hier: O

Nur homogene LT betrachtet, somit

O:  $S: (0, 0, 0, 0)$

$S': (0, 0, 0, 0)$

⋮

und

$$S^2 = ct^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

$$= c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

= ... = L-Invariante

Man sagt: Das Ereignis E: S: (ct, x, y, z)

$S': (ct', x', y', z')$

⋮

liegt bzgl. O

raumartig, falls  $S^2 < 0$   
 lichtartig, falls  $S^2 = 0$   
 zeitartig, falls  $S^2 > 0$   
 und zwar  
 in der Zukunft, falls  $ct > 0$   
 ( $\Rightarrow ct' > 0, \dots$ )  
 in der Vergangenheit, falls  
 $ct < 0$  ( $\Rightarrow ct' < 0, \dots$ )

VII-26

Durch diese Klassifizierung zerfällt die Raum-Zeit bzgl. des festen Ereignisses (hier: O) in vier invariante Bereiche:

Bereiche:

3-dim.

1) den Lichtkegel (Hyperkegelfläche)  $S^2 = 0$

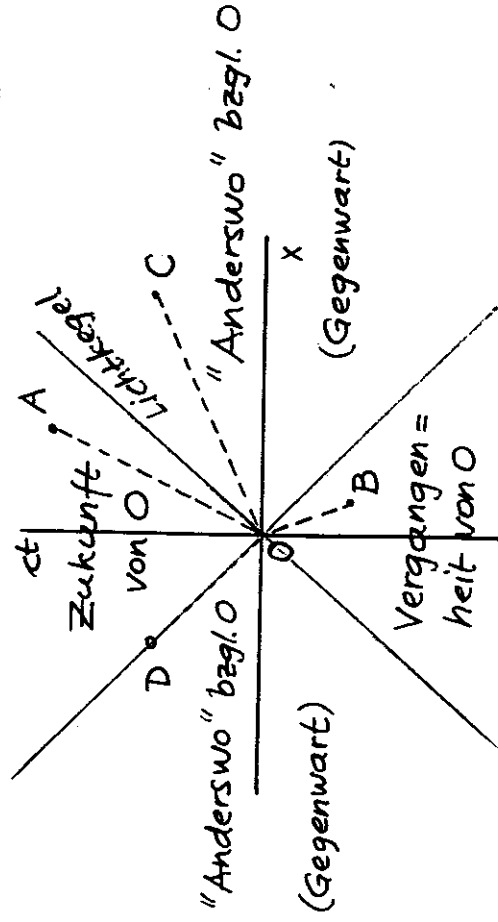
2) die Zukunft  $S^2 > 0, ct > 0$

3) die Vergangenheit  $S^2 > 0, ct < 0$

4) die Gegenwart (besser: das

"Anderswo"<sup>†)</sup>  $S^2 < 0$

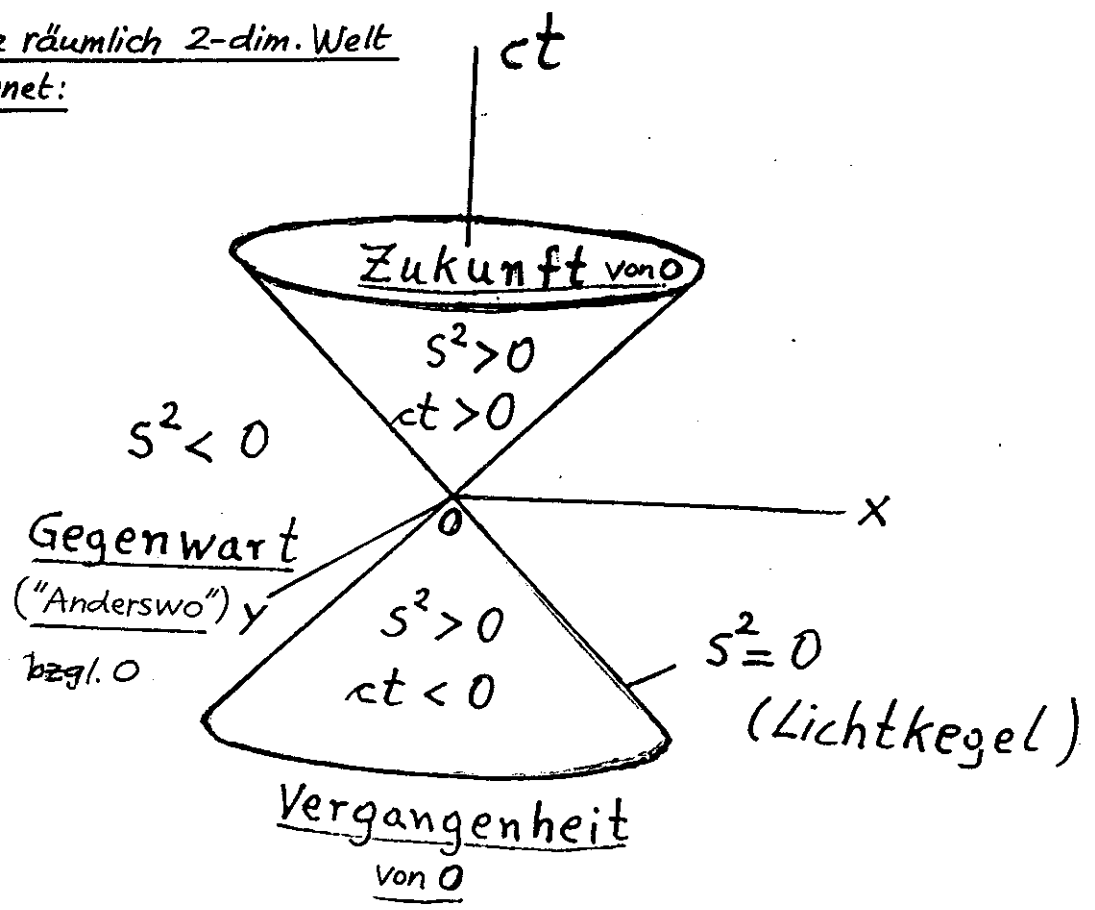
Für eine räumlich 1-dim. Welt gezeichnet:



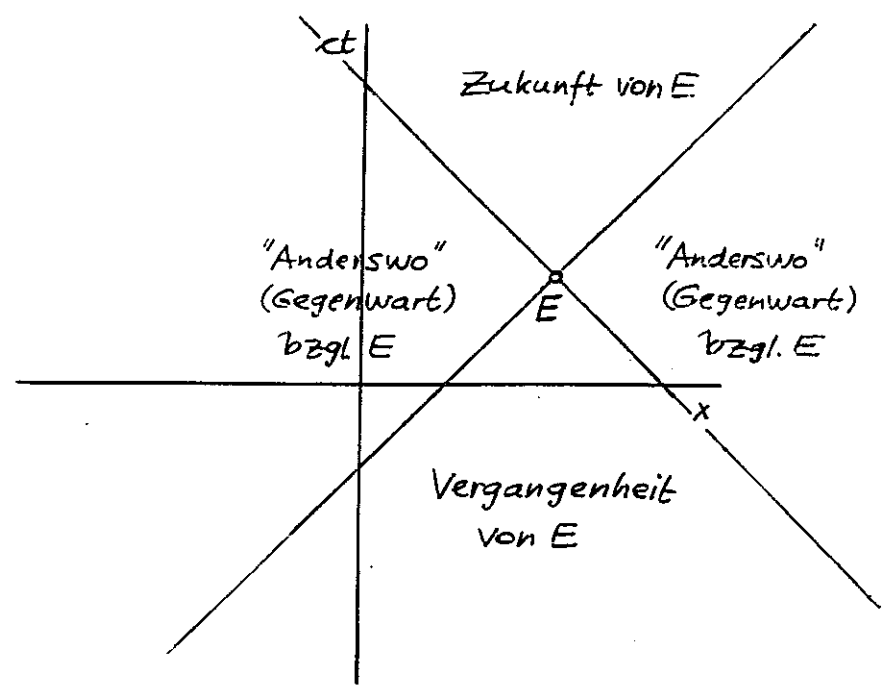
†) engl.: "elsewhere"



Für eine räumlich 2-dim. Welt  
gezeichnet:



Invariante Bereiche der Raum-Zeit  
bzgl. E



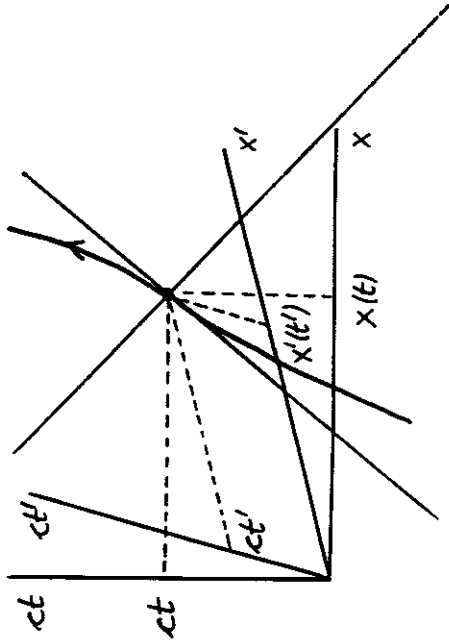
Weltlinie eines Teilchens

"Lebensgeschichte" eines Teilchens =

einparametrische Schar von Ereignissen

$E: S: (ct, x(t), y(t), z(t))$

$S': (ct', x'(t'), y'(t'), z'(t'))$



VIII. 2. B. Längenkontraktion, Zeitdilatation

Definition: Länge eines Stabes in einem

Inertialsystem = räumlicher Abstand

von Stabenanfang und Stabende -

und zwar einer bzgl. dieses

Inertialsystems gleichzeitigen Lage

von Stabenanfang und Stabende -

gemessen in diesem Inertialsystem.

"Maßstab" = Stab, welcher seine Länge im

Lauf der Zeit nicht merklich ändert

Längenkontraktion (Lorentzkontraktion) von

Maßstäben

Standard-LI für Ereignispaare  $E_1, E_2$  ( $\Delta X := x_2 - x_1$  usf.)

$c\Delta t' = \gamma(v) (c\Delta t - \frac{v}{c} \Delta X)$

$\Delta X' = \gamma(v) (\Delta X - v\Delta t)$  (\*)

bzw.

$c\Delta t = \gamma(v) (c\Delta t' + \frac{v}{c} \Delta X')$

$\Delta X = \gamma(v) (\Delta X' + v\Delta t')$  (\*)

1) Maßstab ruht in S

$\Delta X = L_0$  Ruhlänge,  $\Delta t$  beliebig

(\*)  $L' = \Delta X' \Big|_{\Delta t'=0} = \frac{\Delta X}{\gamma(v)} = \frac{L_0}{\gamma(v)} < L_0$  (17)

2) Maßstab ruht in S'

$\Delta X' = L_0$  Ruhlänge,  $\Delta t'$  beliebig

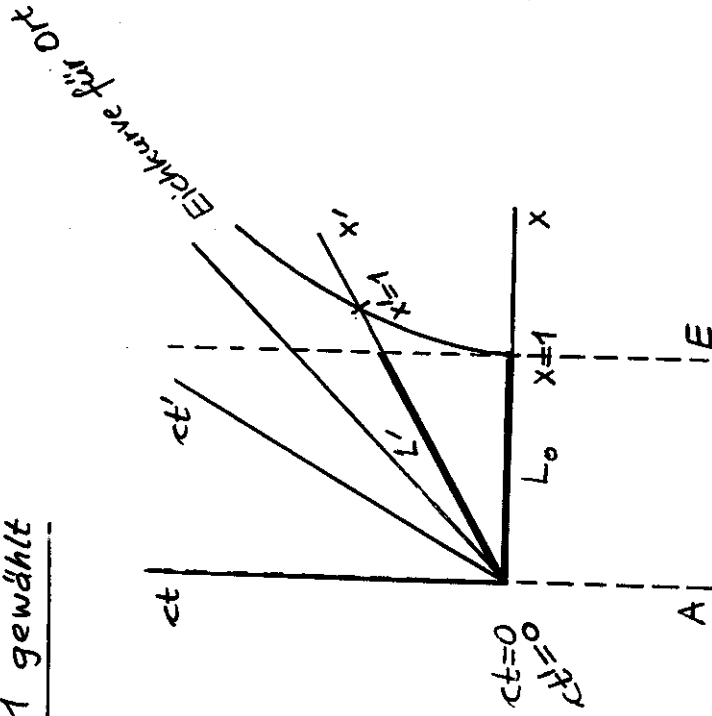
(\*)  $L = \Delta X \Big|_{\Delta t=0} = \frac{\Delta X'}{\gamma(v)} = \frac{L_0}{\gamma(v)} < L_0$

Bemerkung: Bei schlampiger Schreibweise in  $\uparrow$  scheinbarer Widerspruch!

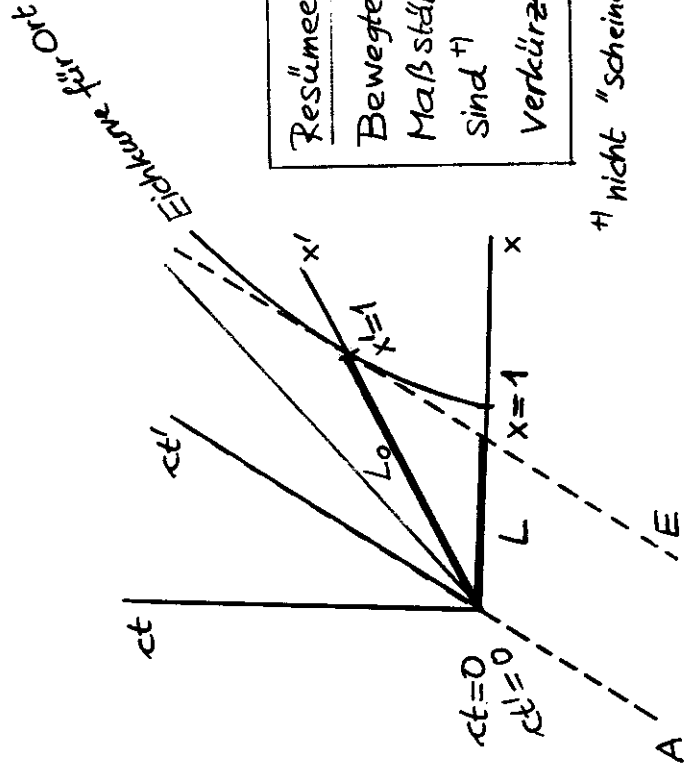
Minkowskidiagramme

$L_0 = 1$  gewählt

VII-30



zu 1)



zu 2)

+1 nicht "scheinen"!

Zeitdilatation für unbeschleunigt bewegte Uhren

VII-31

Standard-LI für Ereignispaare

$$c\Delta t' = \gamma(v) (c\Delta t - \frac{v}{c} \Delta x) \quad (*)$$

$$\Delta x' = \gamma(v) (\Delta x - v\Delta t)$$

bzw.

$$c\Delta t = \gamma(v) (c\Delta t' + \frac{v}{c} \Delta x') \quad (**)$$

$$\Delta x = \gamma(v) (\Delta x' + v\Delta t')$$

1) Uhr ruht in S

$\Delta t = \Delta \tau$  Eigenzeitintervall der Uhr

$$\Delta x = 0$$

Zeitintervall  $\Delta T'$ , um das die Uhren von  $S'$  vorrücken, während die in  $S$  ruhende (relativ zu  $S'$  mit der Geschwindigkeit  $v$  in negativer  $x'$ -Richtung bewegte) Uhr um  $\Delta \tau$  vorrückt:

$$(*) \quad \Delta T' = \Delta t \Big|_{\Delta x=0} = \gamma(v) \Delta t = \gamma(v) \Delta \tau$$

$$\Delta \tau = \frac{\Delta T'}{\gamma(v)}$$

Beachte:  $\Delta \tau$  wird aus zwei Ablesungen an derselben Uhr (der in

$S$  ruhenden Uhr) bestimmt,  $\Delta T'$  wird aber aus

Ableitungen an zwei verschiedenen Uhren

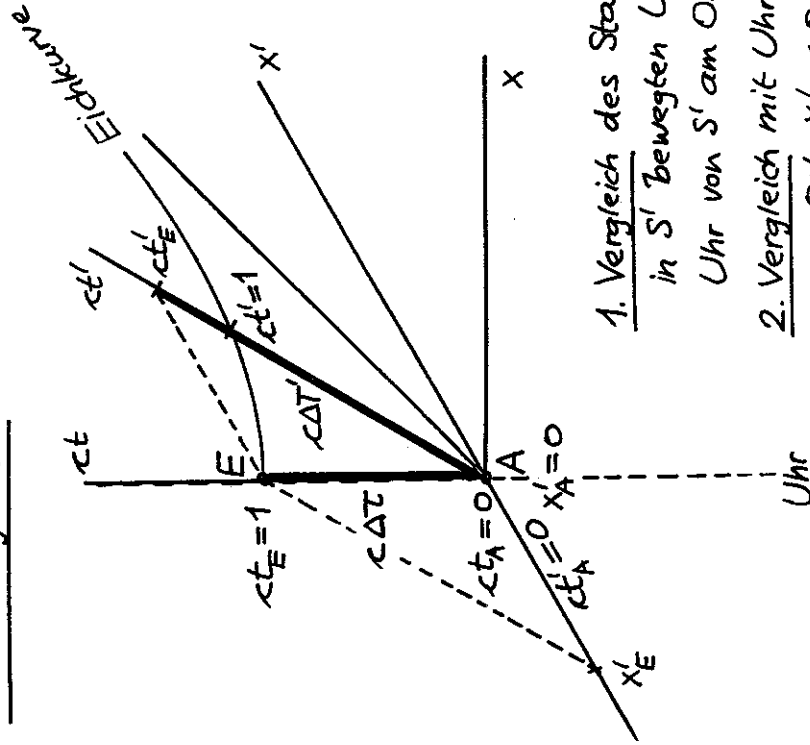
von S' bestimmt, welche allerdings untereinander synchronisiert sind.

Messung der Zeitdilatation durch Vergleich von nur zwei Uhren ist nur möglich, wenn mindestens eine von ihnen beschleunigt bewegt ist

(Trennung und Wiederzusammenkommen von Uhren; Zwillingsproblem S. Abschnitt VII.2.D).

Minkowskidiagramm

cΔT = 1 gewählt



1. Vergleich des Standes der Uhr in S' bewegten Uhr mit Uhr von S' am Ort  $x'_A = 0$ ,
2. Vergleich mit Uhr von S' am Ort  $x'_E < 0$

2) Uhr ruht in S'

$\Delta t' = \Delta \tau$  Eigenzeitintervall der Uhr

$\Delta x' = 0$

$c\Delta t = \gamma(v) (c\Delta t' + \frac{v}{c} \Delta x')$  (\*)

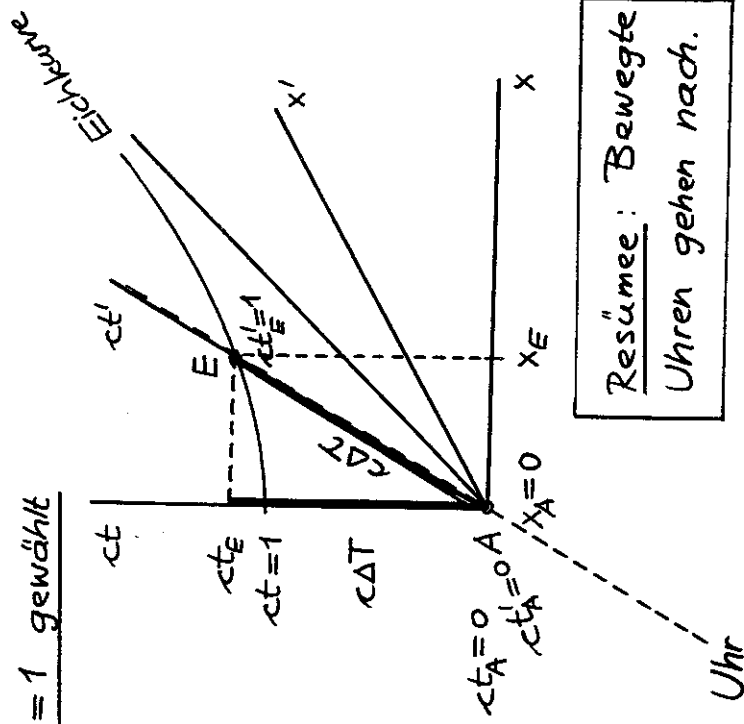
(\*)  $\Delta T = \Delta t \Big|_{\Delta x'=0} = \gamma(v) \Delta t' = \gamma(v) \Delta \tau$

$\Delta \tau = \frac{\Delta T}{\gamma(v)}$

(19)

Minkowskidiagramm

cΔT = 1 gewählt



Resümee: Bewegte Uhren gehen nach.

VII. 2. C. Vierertensoren. Metrik

Koordinaten im Minkowskiraum

= Zeit-Orts-Koordinaten der Ereignisse  
 bzgl. S:

$$(X^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$$

oder bzgl. S':

$$(x'^\mu) = (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) = (ct', x', y', z')$$

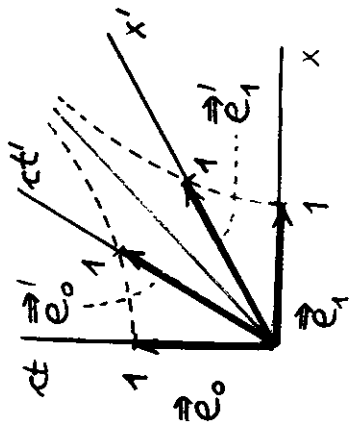
etc.

Kovariantes Basissystem bzgl. S bzw. S'

$$\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}, \vec{e}_\mu \text{ Verschiebung}$$

in Richtung der Koordinatenachse  $\mu$   
 mit wachsendem  $x^\mu$  um die Einheit

analog bei Verwendung der Koordinaten  $x'^\mu$



Beachte:  
 Inneres Produkt  
 von Vektoren noch  
 nicht definiert!

Ortsvektor im Minkowskiraum

$$\left. \begin{array}{l} \underline{E}: S: (x^\mu) \\ S': (x'^\mu) \end{array} \right\} \text{allgemeine homogene LT:} \quad \boxed{x'^\mu = \Lambda^\mu_\alpha x^\alpha} \quad (32)$$

Bemerkung: Wir betrachten nur homogene LT.

In Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \Lambda^3_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda \equiv (\Lambda^\mu_\alpha) \quad \text{Transformationsmatrix (kein Tensor!)} \\ \text{1. Index = Zeilenindex}$$

z.B. Standard-LT

$${}^{st}\Lambda \equiv ({}^{st}\Lambda^\mu_\alpha) = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\vec{X} = x^\mu \vec{e}_\mu = x'^\mu \vec{e}'_\mu \quad (21a)$$

Bemerkung: Daraus folgt:  $\vec{e}'_\mu = \Lambda^\alpha_\mu \vec{e}_\alpha$

Empfehlung: Schreibe zu den bisherigen und folgenden Beziehungen die jeweils analogen Beziehungen der kartesischen Tensorrechnung im 3dim. Euklidischen Raum an.

$$\begin{aligned} \text{Koo bzgl. } K: (x_i) &= (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z) \\ \text{bzgl. } K': (x'_i) &= (x'_1, x'_2, x'_3) = (x', y', z') \end{aligned}$$

Koo-Transformation: Drehung

$$x'_i = \mathcal{D}_{ij} x_j$$

Basissysteme für  $K$  und  $K'$ :

$$K: \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \} = \{ \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z \}$$

$K'$ : analog

$$\text{Ortsvektor: } \vec{r} = x_i \vec{e}_i = x'_i \vec{e}'_i$$

Vektor (Tensor 1. Stufe):  $\vec{r}$  Prototyp

$$\vec{a} = a_i \vec{e}_i \quad \text{Vektor, falls}$$

$$a'_i = \mathcal{D}_{ij} a_j$$

Fundamentale Invariante und metrische Fundamentalform:

$$l^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \text{drehinvariant}$$

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$l^2$  als  $\vec{r} \cdot \vec{r}$  interpretiert, inneres Produkt, Metriktenor usf.

Warum braucht man hierbei keine "oberen" und "unteren" Indices?

Vierervektoren (Vierertensoren 1. Stufe) $\vec{X}$  Prototyp für Vierervektor

$\vec{a} = a^\mu \vec{e}_\mu$  stellt einen Vierervektor dar,  
falls bei LT (Bezugssystemwechsel)

$$a'^\mu = \Lambda^\mu_\alpha a^\alpha \text{ gilt.}$$

Es gilt dann

$$\vec{a} = a'^\mu \vec{e}'_\mu = a'^\mu \vec{e}_\mu \quad (20)$$

$(a'^\mu)$ ,  $(a'^\mu)$  kontravariante Komponenten von  $\vec{a}$   
bzgl.  $S$  bzw.  $S'$

Bemerkung 1: Analog Vierervektorfeld, falls  
 $a^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$ ,  $a'^\mu(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ .

Bemerkung 2: Zeit-Orts-Koordinaten  $(x^4)$   
daher kontravariante Komponenten von  $\vec{X}$   
bzgl.  $S$ . •

Inneres Produkt von Vierervektoren.Metrik im Minkowskiraum

$$\begin{aligned} S^2 &= c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \\ &= (x'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2 = L\text{-Inv.}, \end{aligned}$$

deshalb als  $\vec{X} \cdot \vec{X}$  interpretiert

$$\begin{aligned} \vec{X} \cdot \vec{X} &= x^\mu x^\nu \underbrace{\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu}_{=: g_{\mu\nu}} = x'^\mu x'^\nu \underbrace{\vec{e}'_\mu \cdot \vec{e}'_\nu}_{g'_{\mu\nu}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = S^2 &= (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \\ &= (x'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (g_{\mu\nu}) = (g'_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (24)$$

$$g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu}$$

Metrikelemente

$d\vec{X}$  infinitesimaler  
Verschiebungsvektor

(kovariante Komponenten des  
Metrikensors; s. später)

$$\begin{aligned} d\vec{X} \cdot d\vec{X} &= ds^2 = g_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu \\ &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \end{aligned}$$

metrische Fundamentalfarm des MinkowskiraumesMinkowskiraum = "pseudo-euklidischer" Raumkein echter metrischer Raum, da

$$1) ds^2 \text{ nicht } \geq 0$$

$$2) ds^2 = 0 \text{ auch f\u00fcr } d\vec{X} \neq \vec{0} \text{ m\u00f6glich}$$

$$\vec{e}^\alpha \cdot \vec{e}^\beta = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \underbrace{\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu}_{\substack{g_{\mu\nu} \\ \delta_\mu^\beta}} = g^{\alpha\beta}$$

$$\vec{a} = a^\mu \vec{e}_\mu = a_\alpha \vec{e}^\alpha \quad (27)$$

( $a_\alpha$ ) kovariante Komponenten von  $\vec{a}$  bzgl. S

mit  $a_\alpha = g_{\alpha\mu} a^\mu, a^\mu = g^{\mu\alpha} a_\alpha \quad (30)$

Index "hinunterziehen" "hinaufziehen"

$$\Rightarrow a_0 = a^0, a_1 = -a^1, a_2 = -a^2, a_3 = -a^3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a_\nu b^\nu = a^\mu b_\mu \quad (31)$$

$$= g^{\alpha\beta} a_\alpha b_\beta$$

LT der kovarianten Vierervektorkomponenten  
kontravariante Komponenten:

$$a^\mu = \Lambda^\mu_\alpha a^\alpha$$

$$(\Lambda^\mu_\alpha) \equiv \Lambda \quad (\text{Matrix})$$

Inneres Produkt von Vierervektoren

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a^\mu b^\nu \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu \quad (22)$$

L-Invariante (bzw. Viererskalarfeld  
falls  $\vec{a}, \vec{b}$  Vierervektorfelder)

Duale (reziproke) Basissysteme

Definition: kontravariantes Basissystem

$$\{\vec{e}^0, \vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3\} \text{ bzgl. S:}$$

$$\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}^\alpha = \delta_\mu^\alpha \quad (26)$$

Kroneckerdeltas  
(definiert die  $\vec{e}^{\alpha r}$ )

Mit  $\vec{e}^\alpha = g^{\alpha r} \vec{e}_r \quad (28)$

folgt  $\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}^\alpha = g^{\alpha r} g_{\mu r} = \delta_\mu^\alpha$  Matrix

$$\Rightarrow (g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \equiv g$$

$g^{\mu\nu}$  (kontravariante Komponenten des Metritensors  
s. später)

$\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  und  $\{\vec{e}^0, \vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3\}$   
nennt man zueinander dual (reziprok)



kovariante Komponenten:

$$a'_\alpha = \underbrace{g'_{\alpha\mu}}_{g_{\alpha\mu}} a'^\mu = g_{\alpha\mu} \underbrace{\Lambda^\mu_\sigma a^\sigma}_{g^{\sigma r} a_r} = g_{\alpha\mu} \Lambda^\mu_\sigma g^{\sigma r} a_r$$

$$\Lambda'^\mu_\alpha = \Lambda^\mu_\alpha a^\alpha$$

$$a'_\mu = \Lambda_\mu^\alpha a_\alpha$$

Zeilenindex bei Matrix = Schreibweise;  $(\Lambda_\alpha^\nu) \equiv \Sigma$

mit  $\Lambda_\alpha^\nu = g_{\alpha\mu} \Lambda^\mu_\sigma g^{\sigma r} \leftrightarrow \Sigma = g \Lambda g$  (Matrixmultiplikation)

Speziell: Standard-LT

$$\left( {}^{st} \Lambda^\mu_\alpha \right) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv {}^{st} \Lambda$$

$$\left( {}^{st} \Lambda_\mu^\alpha \right) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv {}^{st} \Sigma$$

Allgemein:  $\Sigma^T = \Lambda^{-1}$ . Zeige dies mit Hilfe von

$a_\alpha b^\alpha = a'_\mu a'^\mu$  und den Transformationsgesetzen für  $a'_\mu$  und  $a'^\mu$  selbst! ●

Vierertensoren 2. Stufe

$\vec{a} \circ \vec{b}$  Prototyp für Vierertensor 2. Stufe

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a^\mu b^\nu \vec{e}_\mu \circ \vec{e}_\nu = a^\mu b_\beta \vec{e}^\mu \circ \vec{e}^\beta$$

$$= a_\alpha b^\nu \vec{e}^\alpha \circ \vec{e}_\nu = a_\alpha b_\beta \vec{e}^\alpha \circ \vec{e}^\beta$$

$$\vec{t} = t^{\mu\nu} \vec{e}_\mu \circ \vec{e}_\nu = t^\mu_\beta \vec{e}^\mu \circ \vec{e}^\beta$$

$$= t_\alpha^\nu \vec{e}^\alpha \circ \vec{e}_\nu = t_{\alpha\beta} \vec{e}^\alpha \circ \vec{e}^\beta$$

$(t^{\mu\nu})$  kontravariante  
 $(t^\mu_\beta), (t_\alpha^\nu)$  gemischte  
 $(t_{\alpha\beta})$  kovariante

Komponenten von  $\vec{t}$  bzgl. S

$$t^\mu_\beta = g_{\beta r} t^{\mu r} \quad t^{\mu\nu} = g^{\nu\beta} t^\mu_\beta$$

$$t_{\alpha\beta} = g_{\alpha\mu} g_{\nu\beta} t^{\mu\nu} \quad \text{usf.}$$

LT

$$t'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta t^{\alpha\beta}$$

$$t'^\mu_\nu = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda_\nu^\beta t^\alpha_\beta \quad t'^\nu \text{ analog}$$

$$t'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta t_{\alpha\beta}$$

Bei Feldern: Argumente!

VII. 2. D. Eigenzeit, Vierergeschwindigkeit und Vierbeschleunigung eines Teilchens

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = L\text{-Invariante}$$

für beliebige raum-zeitlich infinitesimal benachbarte Ereignisse:

$$ds^2 \geq 0 \quad (\text{zeitartiger, lichtartiger, raumartiger Abstand})$$

Speziell: Ereignisse (beschrieben in S):

bewegtes Teilchen ist zum Zeitpunkt  $t$  am Ort  $x(t), y(t), z(t)$  und ist zum Zeitpunkt  $t + dt$  am Ort  $x(t) + u_x(t)dt, y(t) + u_y(t)dt, z(t) + u_z(t)dt$  betrachtet, mit

$$\begin{aligned} \vec{u}(t) &= (u_x(t), u_y(t), u_z(t)) \\ &= \left( \frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right) \end{aligned} \quad (37)$$

$\vec{u}(t)$  Teilchengeschwindigkeit = "Dreiergeschwindigkeit"

Metrikentensor

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_\alpha \vec{e}^\alpha = a'_\mu \vec{e}'^\mu \\ a'_\mu &= \Lambda^\alpha_\mu a_\alpha \end{aligned} \quad \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Transformation} \\ \text{der kontrav.} \\ \text{Basis} \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow$  Transformation von  $g^{\alpha\beta} = \vec{e}^\alpha \cdot \vec{e}^\beta$  und Berücksichtigung von  $\Sigma^T = \Lambda^{-1}$  gibt

$$g'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta g^{\alpha\beta} \quad \text{Tensor}$$

$$\begin{aligned} g'^{\mu\nu} &= g_{\beta\gamma} g'^{\mu\nu} = \delta^\mu_\beta \\ g'_{\alpha\nu} &= g_{\alpha\mu} g'^{\mu\nu} = \delta^\nu_\alpha \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} g'^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \\ g'_{\alpha\nu} = g_{\alpha\nu} \end{array} \right\} \Rightarrow g'^{\mu\nu} \text{ geschrieben}$$

$$\begin{aligned} (g'^{\mu\nu}) &= (g'^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu}) = (g'_{\mu\nu}) \\ &= \text{diag}(1, -1, -1, -1) \\ (g'^{\mu\nu}) &= (g'^{\mu\nu}) = \text{diag}(1, 1, 1, 1) \end{aligned} \quad (29)$$

Dann gilt:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2(t)}{c^2}\right) > 0, \forall t$$

Definition 1: Eigenzeit "des Teilchens"

Eigenzeitdifferential:

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} dt \quad (37)$$

$$= \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} dt' = L\text{-Invariante}$$

Eigenzeit "des Teilchens" = Eigenzeit einer mit dem Teilchen mitgeführten Standarduhr (beschleunigungsunempfindlichen Uhr)

Bemerkung:  $\ddot{S}_t$  momentanes inertiales Ruh-System des Teilchens (der mitgeführten Standarduhr):  $\ddot{a}(t) = 0$  ( $\ddot{a}(t) \text{ i.a.} \neq 0$ )

$$d\tau = d\tilde{t}$$

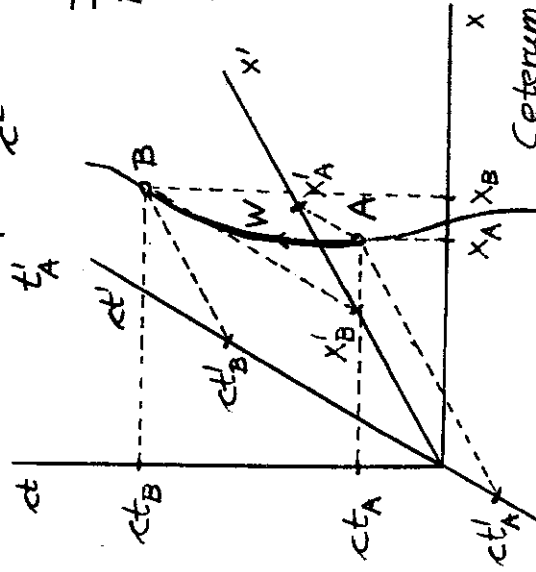
Eigenzeitintervall zwischen zwei Ereignissen A, B längs eines gegebenen Weltlinien =

Stücker W

$$\Delta\tau_{AB}^W = \int_A^B d\tau = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} dt \leq t_B - t_A$$

Zeitdilatation für ... beliebig bewegte Uhren (36)

$$t_B' - t_A' = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} dt \leq t_B - t_A$$



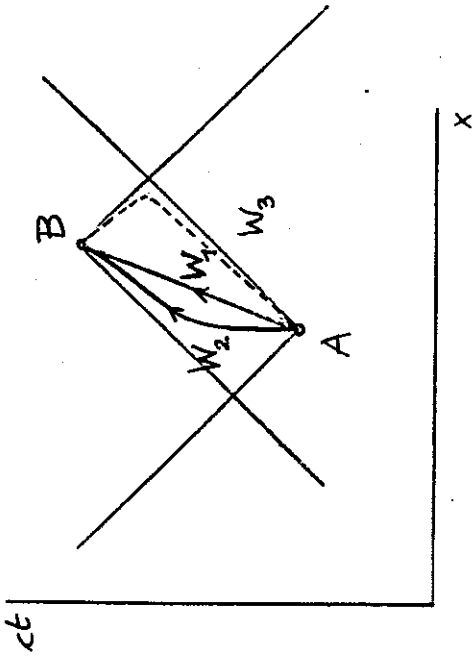
Im Diagramm illustriert für geradlinige Bewegung in x- (x'-) Richtung und Systeme in Standardconf.

Ceterum censeo:

Zwei Ablesungen der "betrachteten" Uhr verglichen mit (i.a.) zwei Uhren von S, zwei Uhren von S' ...

"Bewegte Uhren gehen nach..."  
Hier auch für beschleunigt bewegte Uhren gezeigt.

VII-44"  
Zeitdilatation zwischen zwei Uhren, die sich trennen und wieder zusammenkommen  
 "Zwillingsproblem"



$$\Delta \tau_{AB}^{W_3} < \Delta \tau_{AB}^{W_2} < \Delta \tau_{AB}^{W_1}$$

↓  
0

Experimentell vielfach verifiziert! \*)

Bemerkung: Für Photonen gibt es keine Eigenzeit:  
 $ds^2 = 0$ .

\*) s.z.B. "Maryland-Experiment"  
 Ergänzungsblätter zum VO-Skriptum Blatt VII-12'

VII-45  
Definition 2: Vierergeschwindigkeit des Teilchens

Verwendung der L-invarianten Eigenzeit des Teilchens als Bahnparameter ( $\tau \leftrightarrow t, \tau \leftrightarrow t', \dots$ )

$$\vec{u}(\tau) := \frac{d\vec{x}(\tau)}{d\tau} \quad (38)$$

kontravariante Komponenten bzgl. S

$$u^\nu = \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dt}{d\tau}$$

$$(x^\nu(\tau)) = (ct, x(t), y(t), z(t)) \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2(t)}{c^2}}} = f(u(t))$$

- $\nu=0: c$
- $\nu=1: u_x$
- $\vdots$

$$(u^\nu) = (u^0, u^1, u^2, u^3)$$

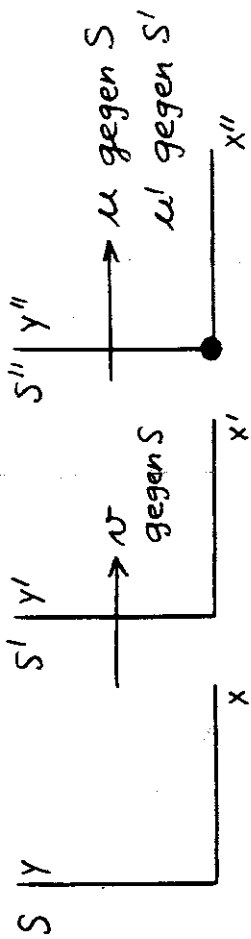
$$= f(u(t)) (c, u_x(t), u_y(t), u_z(t))$$

$$\equiv f(u(t)) (c, \vec{u}(t)) \quad (39)$$

Bemerkung:  $u^0$  enthält nur redundante Information!

VII.3. LT der Teilchengeschwindigkeit  
 ("relativistische Addition" von Geschwindigkeiten)

VII.3.A. Ableitung für gleichgerichtete konstante Geschwindigkeiten aus Gruppeneigenschaft der Standard-LT



Galilei:  $u = u' + v$   $u$  muss zeitlich konstant sein!  
Standard-LT der Zeit-Orts-Koordinaten:  $\Lambda \equiv \Lambda_{st}$

$$X''^\mu = \Lambda^\mu_\alpha(u') X'^\alpha = \Lambda^\mu_\alpha(u') \Lambda^\alpha_\nu(v) X^\nu$$

$$= \Lambda^\mu_\nu(u) X^\nu, \quad \forall X^0, X^1, X^2, X^3 \Rightarrow$$

$$\Lambda^\mu_\alpha(u') \Lambda^\alpha_\nu(v) = \Lambda^\mu_\nu(u) \quad (42)$$

S:  $(u^\nu) = f(u) (c, \vec{u})$   
 $(u_\nu) = f(u) (c, -\vec{u})$

$\vec{u}(\tau) \cdot \vec{u}(\tau) = u^\nu u_\nu = \vec{u}^\nu \vec{u}_\nu = c^2 > 0, \quad \forall \tau$   
 $\vec{u}(\tau)$  "zeitartig"

Definition 3: Vierbeschleunigung des Teilchens

$$\vec{a}(\tau) := \frac{d\vec{u}(\tau)}{d\tau} = \frac{d^2 \vec{x}(\tau)}{d\tau^2} \quad (40)$$

kontravariante Komponenten bzgl. S

$a^\nu = \frac{du^\nu}{d\tau} = \dots$  (selbst berechnen)

$(a^\nu) = f^2(u) \left( \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{c}, \vec{a} + f^2(u) \frac{(\vec{u} \cdot \vec{a}) \vec{u}}{c^2} \right)$

$(\vec{a}^\nu) = (0, \vec{a}), \quad (\vec{a}_\nu) = (0, -\vec{a})$

$\vec{a}(\tau) \cdot \vec{a}(\tau) = a^\nu a_\nu = \vec{a}^\nu \vec{a}_\nu = -\vec{a}^2 < 0$

$\vec{a}(\tau)$  "raumartig"

Es gilt:

$\vec{a}(\tau) \cdot \vec{u}(\tau) = a^\nu u_\nu = \vec{a}^\nu \vec{u}_\nu = 0, \quad \forall \tau \quad (41)$

Brauchen wir später...

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} f(u') & -\beta(u') f(u') & 0 & 0 \\ -\beta(u') f(u') & f(u') & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} f(v) & -\beta(v) f(v) & 0 & 0 \\ -\beta(v) f(v) & f(v) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} f(u) & -\beta(u) f(u) & 0 & 0 \\ -\beta(u) f(u) & f(u) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

∴ s. Skriptum → Einstein:  $u' \oplus v = \frac{u' + v}{1 + \frac{v u'}{c^2}}$

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v u'}{c^2}}, \quad u' = \frac{u - v}{1 - \frac{v u}{c^2}} \tag{44}$$

"Reziprozität"

$v$  fest ( $< c$ )

$$u' \uparrow c \iff u \uparrow c$$

Bemerkung: Transformation  $u \rightarrow u'$   
 ("Dreiergeschwindigkeit") nicht linear,  
 Transformation  $(u^v) \rightarrow (u^v)$  linear!

VII.3.B\*. Transformation der Teilchen=geschwindigkeit bei beliebiger Teilchenbewegung für Systeme in Standardkonfiguration mit Hilfe der Vierergeschwindigkeit

Standard-LT der Vierergeschwindigkeit

$$u'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} u^{\alpha} \quad \text{mit} \quad \Lambda \equiv \Lambda^{st}$$

mit  $(u'^{\mu}) = f(u) (\kappa, \vec{u})$  } Hier kann  $\vec{u}(t), \vec{u}'(t)$  sein!  
 $(u'^{\mu}) = f(u') (\kappa, \vec{u}')$

$$\begin{aligned}
 u'^0 &= f(v) (u^0 - \frac{v}{c} u^1) & 0 \\
 u'^1 &= f(v) (u^1 - \frac{v}{c} u^0) & 1 \\
 u'^2 &= u^2 & \text{lineare} \\
 u'^3 &= u^3 & \text{Transformation} \\
 & & \underline{2} \\
 & & \underline{3}
 \end{aligned}$$

$$0: f(u') \kappa = f(v) f(u) (\kappa - \frac{v}{c} u_x)$$

$f(u') = f(v) f(u) (1 - \frac{v u_x}{c^2})$
$f(u) = f(v) f(u') (1 + \frac{v u'_x}{c^2})$

"Reziprozität" (49)

VII. 4. Sichtbarkeit der Längenkontraktion?Längenkontraktion in BewegungsrichtungBeispiel 1: Ruhssystem: Objekt ist Kugel  
vom Radius  $R_0$ Bezugssystem, in dem sich das Objektmit  $v$  bewegt: Objekt ist Rotations-  
ellipsoid mit Halbachsen  $\frac{R_0}{\gamma(v)}$ ,  $R_0$ ,  $R_0$ Beispiel 2: Ruhssystem: Objekt ist Würfel  
mit Kantenlänge  $a_0$ .Bezugssystem, in dem sich das Objektparallel zu Kante mit  $v$  bewegt:Objekt ist Quader mit Kantenlängen

$$\frac{a_0}{\gamma(v)}, a_0, a_0$$

OBJEKT IST ... bezieht sich dabei auf die  
entsprechende MESSVORSCHRIFT FÜRLÄNGEN: Lineardimension eines Objekts  
in  $S$  in einer Raumrichtung = räumlicherAbstand von Objektanfang undObjektende (in dieser Richtung) gleichzeitig  
in  $S$  (Koordinatenabstände auf "world map"  
von  $S$ )

$$(u^{\mu'}) = f(u^{\mu}) (c, \vec{u}), \quad (u^{\mu'}) = f(u^{\mu}) (c, \vec{u}')$$

$$f(u^{\mu'}) = f(v) f(u) \left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)$$

$$u^{\mu'} = f(v) (u^{\mu} - \frac{v}{c} u^0) \quad 1$$

$$1: \quad f(u^{\mu'}) u_x^{\mu'} = f(v) f(u) (u_x - v)$$

$$u_x^{\mu'} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}$$

$$u^{\mu'^2} = u^{\mu^2} \quad 2$$

$$2: \quad f(u^{\mu'}) u_y^{\mu'} = f(u) u_y$$

$$u_y^{\mu'} = \frac{u_y}{f(v) \left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)}, \quad u_z^{\mu'} \text{ analog}$$

$$\vec{u}(t), \quad \vec{u}'(t')$$

$$u_x^{\mu'} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}, \quad u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}}$$

$$u_y^{\mu'} = \frac{u_y}{f(v) \left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)}, \quad u_y = \frac{u_y'}{f(v) \left(1 + \frac{v u_x'}{c^2}\right)}$$

$$u_z^{\mu'} = \frac{u_z}{f(v) \left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)}, \quad u_z = \frac{u_z'}{f(v) \left(1 + \frac{v u_x'}{c^2}\right)}$$

Was "sieht" man in den beiden Beispielen mit freiem Auge oder auf einer Fotografie?

Beispiel 1: Penrose 1959 (s. Abschnitt IX.4.C)

Man "sieht" - unabhängig von der Größe der Geschwindigkeit und der Größe der Entfernung zum Objekt einen kreisförmigen Umriss.

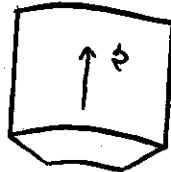
"Längenkontraktion" nicht sichtbar

Beispiel 2: Terrell 1959 (s. Folien VII-52', VII-52'')

Befindet sich das Objekt in so großer Entfernung vom Auge bzw. vom Objektiv, daß man die vom Objekt kommenden Lichtstrahlen als parallel ansehen kann, so "sieht" man einen gedrehten Würfel.

"Längenkontraktion" nicht sichtbar in dem naiven Sinn w.o.

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, "sieht" man einen gedrehten, verzerrten und kontrahierten "Würfel"



GRUND: Summenseffekt von Längenkontraktion und Retardierung: Photonen, die gleichzeitig im Auge (beim Objektiv) einlangen, stammen von verschiedenen Lagen des Objekts

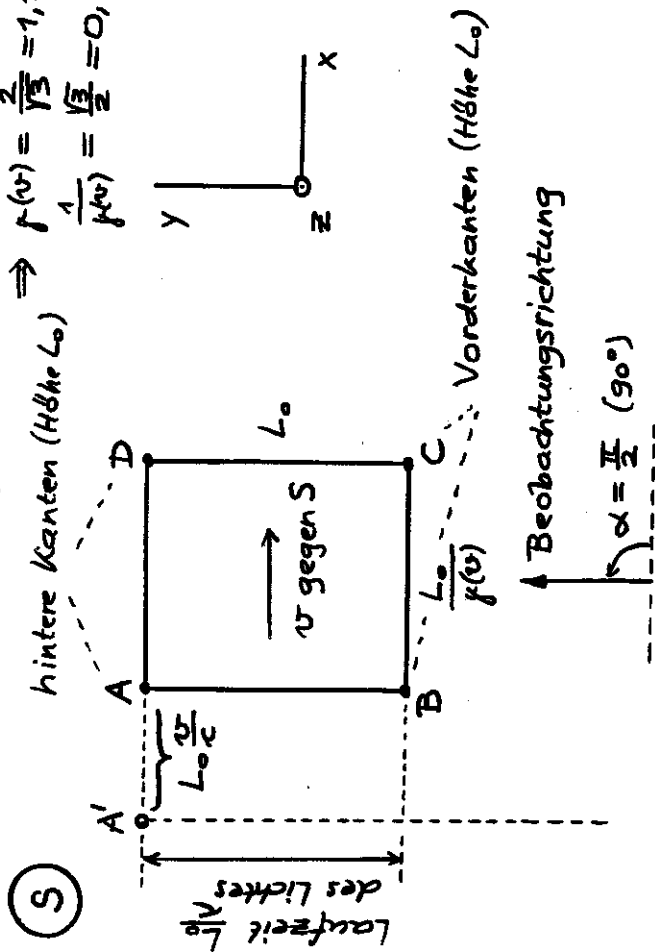
(Retardierungen auf "world picture" = "Weltbild")

Würfel in großer Entfernung (Parallelstrahlen)

S' Ruhssystem des Würfels; Abb. für  $v = 0,5c$

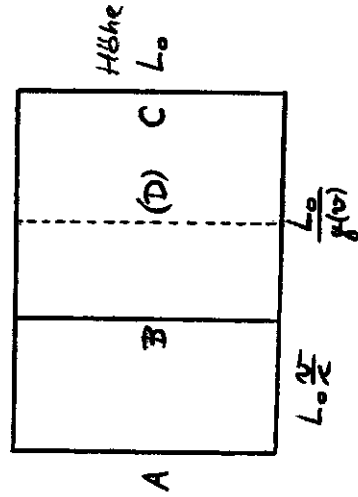
$$f(v) = \frac{2}{\gamma\sqrt{3}} = 1,154$$

$$\frac{1}{f(v)} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$$



Kante A wird wegen Retardierung in Lage A' "gesehen" (fotografiert)!

Daher sieht die fotografische Aufnahme so aus:



A... Kante A auf Aufnahme

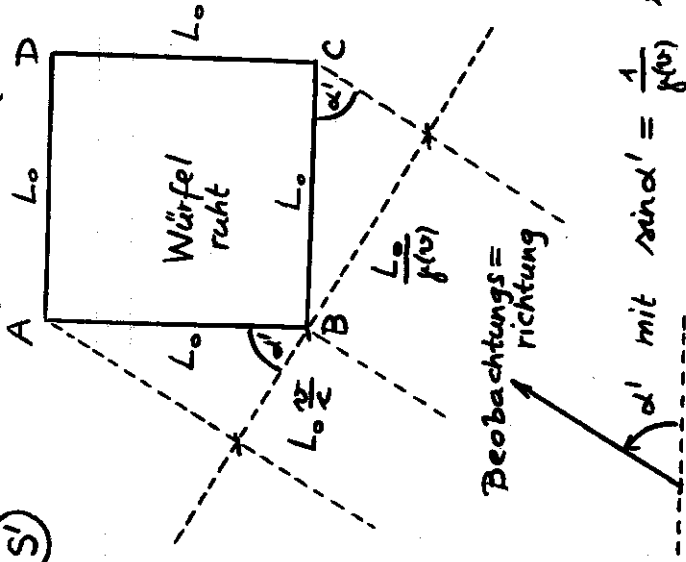
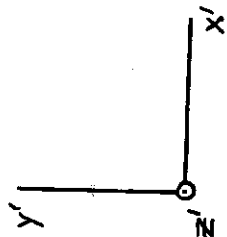
Das ist aber das gleiche Bild, wie wenn man den Würfel in seinem Ruhssystem aus einer "gedrehten" Richtung fotografiert!

Bild eines "gedrehten" Würfels!



Beweis: Kanten (Höhe  $L_0$ )

(S')



$\alpha'$  mit  $\sin \alpha' = \frac{1}{\gamma(v)}$ ,  $\cos \alpha' = \frac{v}{c}$

$(\sin^2 \alpha' + \cos^2 \alpha' = 1 \checkmark)$

Für  $\frac{v}{c} = 0.5$  gilt  $\alpha' = \frac{\pi}{3}$  ( $60^\circ$ )

Bemerkung: Für ein beliebiges Objekt in großer Entfernung (Parallelstrahlen) gilt eine qualitativ gleiche Aussage (z.B. Kugel).

Ferner: Für ein solches Objekt gilt

Längenkontraktion + Retardierung = Aberration

Die Aberrationsformeln (IX.68) (s. Folie IX-35) liefern mit  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  unmittelbar  $\sin \alpha' = \frac{1}{\gamma}$ ,  $\cos \alpha' = \beta$ .

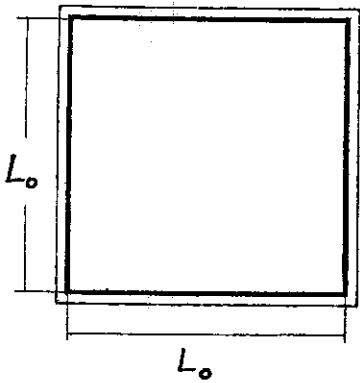


Abb. 5a: Würfel in Ruhe (Zentralprojektion)

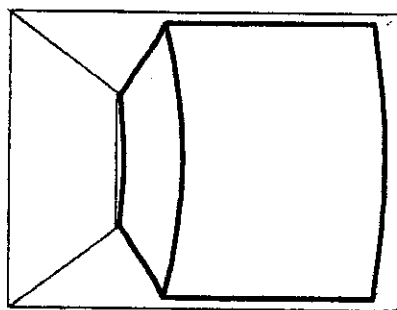


Abb. 5b: Würfel mit  $v=0.5c$  aus geringer Entfernung (Zentralprojektion)

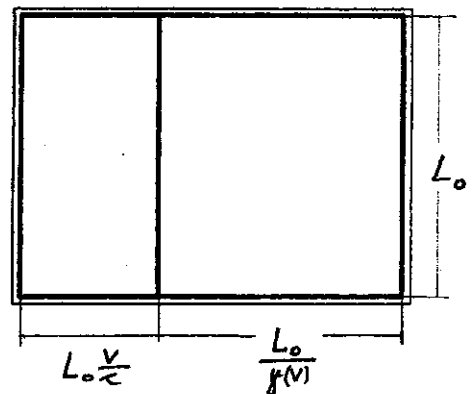


Abb. 5c: Würfel mit  $v=0.5c$  aus großer Entfernung (Parallelprojektion)

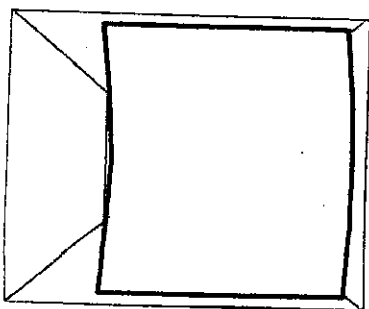


Abb. 7a:  $v=0.3c$

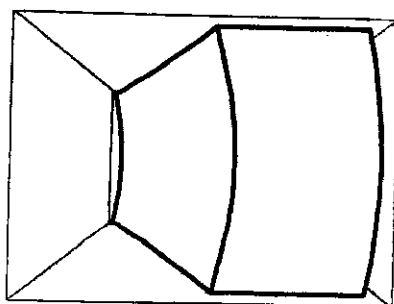


Abb. 7b:  $v=0.7c$

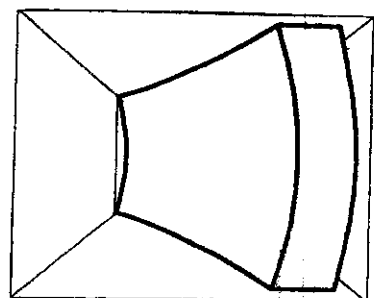


Abb. 7c:  $v=0.95c$

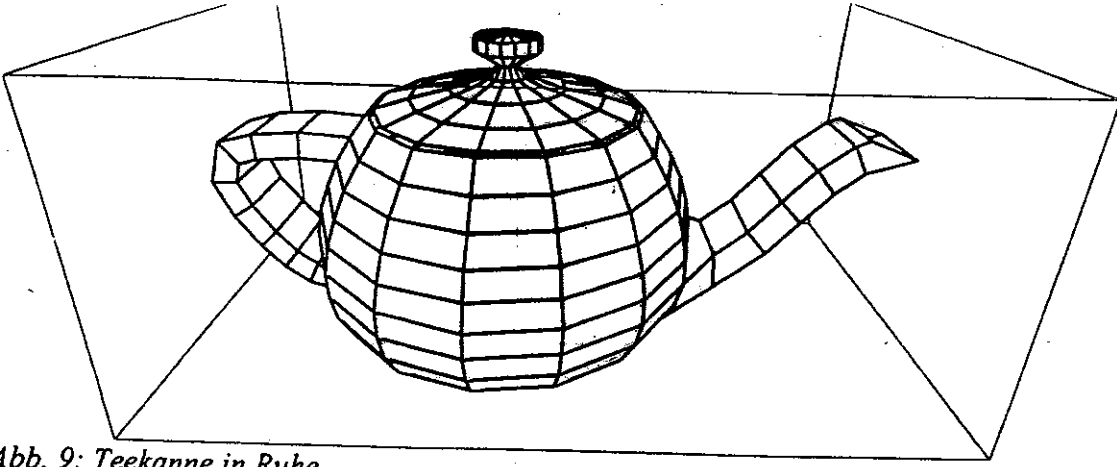
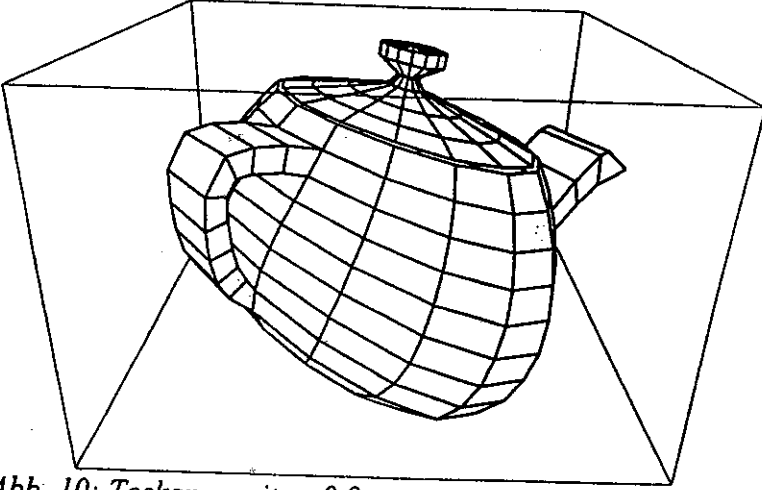


Abb. 9: Teekanne in Ruhe

Abb. 10: Teekanne mit  $v=0.8c$ 

#### VII. 4. A. "Superschnappschüsse"

Spezielle "idealisierte" (sehr unrealistische)  
Art von Fotografien.

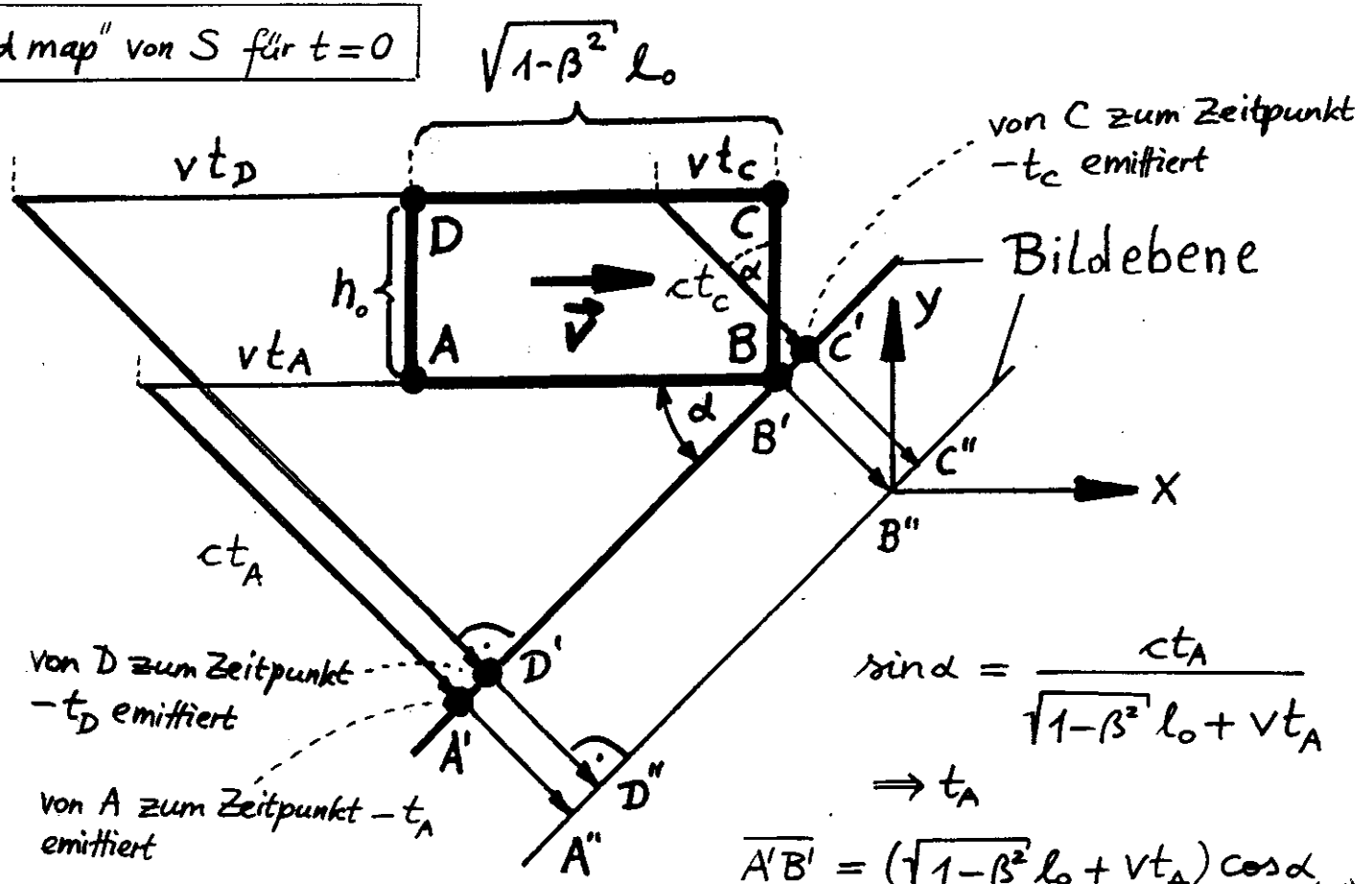
Definition: "Superschnappschuß"

Von Oberflächenpunkten des Objektes  
emittierte Photonen bewegen sich  
(Voraussetzungsgemäß) auf parallelen Bahnen  
auf eine zu diesen Bahnen senkrecht  
angeordnete Fotoplatte zu, treffen dort  
gleichzeitig (bzgl. des Ruhsystems der  
Fotoplatte) auf und erzeugen so ein  
"lebensgroßes" Bild des Objekts.

Beispiel:

"Superschnappschuß" eines Rechteckes  
(bzw. eines Rechteckquaders)

"World map" von S für  $t=0$

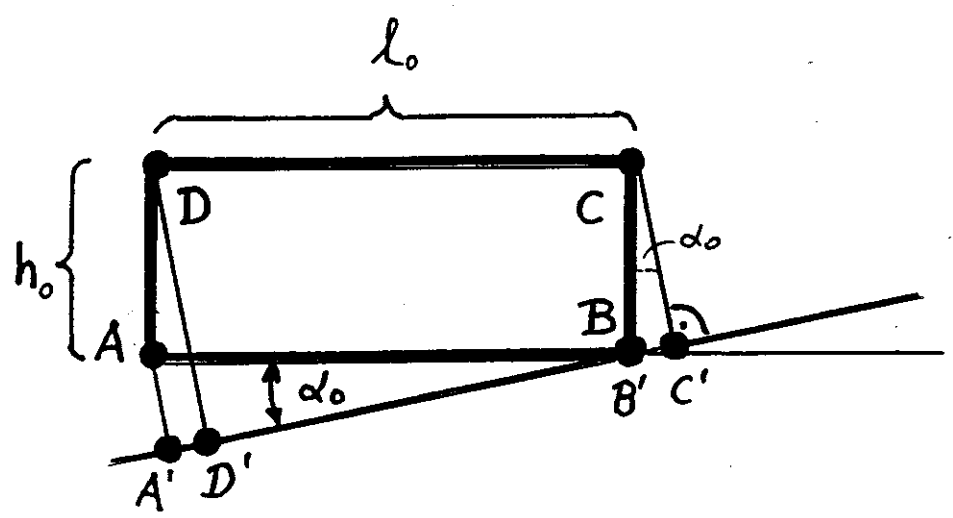


Superschnappschuß eines parallel zu seiner Längsrichtung bewegten Rechteckes

analog  $t_C$ ,  $\overline{B'C'}$  (s. Skriptum)

VII-57

"world map" von  $S_0$  für irgendein vorgegebenes  $t_0$



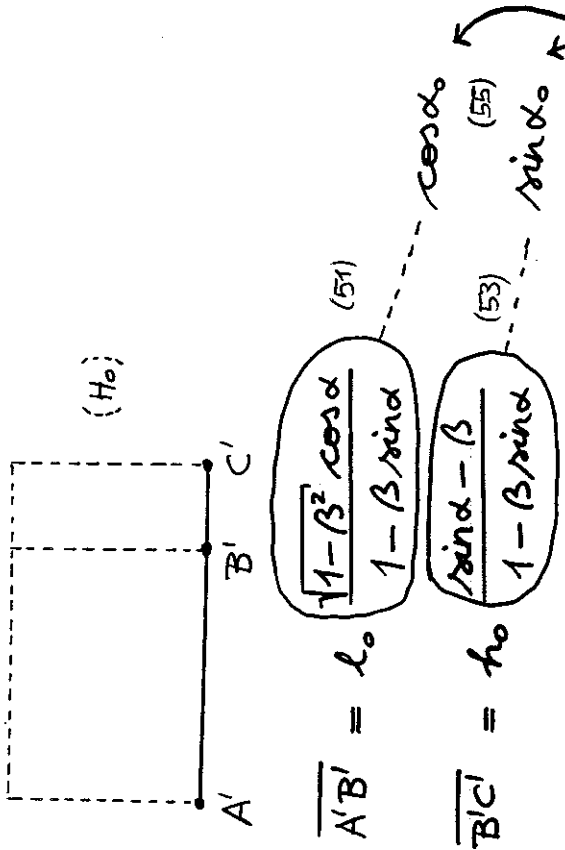
Superschnappschuß des ruhenden Rechteckes

$$\overline{A'B'} = l_0 \cos \alpha_0, \quad \overline{B'C'} = h_0 \sin \alpha_0 \quad (54)$$

VII-57

Ergebnisse:

bewegtes Rechteck (bewegter Quader)



Wie in Ruhssystem unter Winkel  $\alpha_0$  mit  $(\sin^2 \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0 = 1 \checkmark)$

Aberrationsformel Abschnitt IX.4.B !!

VIII.4.B. Satz von Terrell

Das (dauernde) Ruhssystem des betrachteten Objektes sei Inertialsystem.

Satz von Terrell:

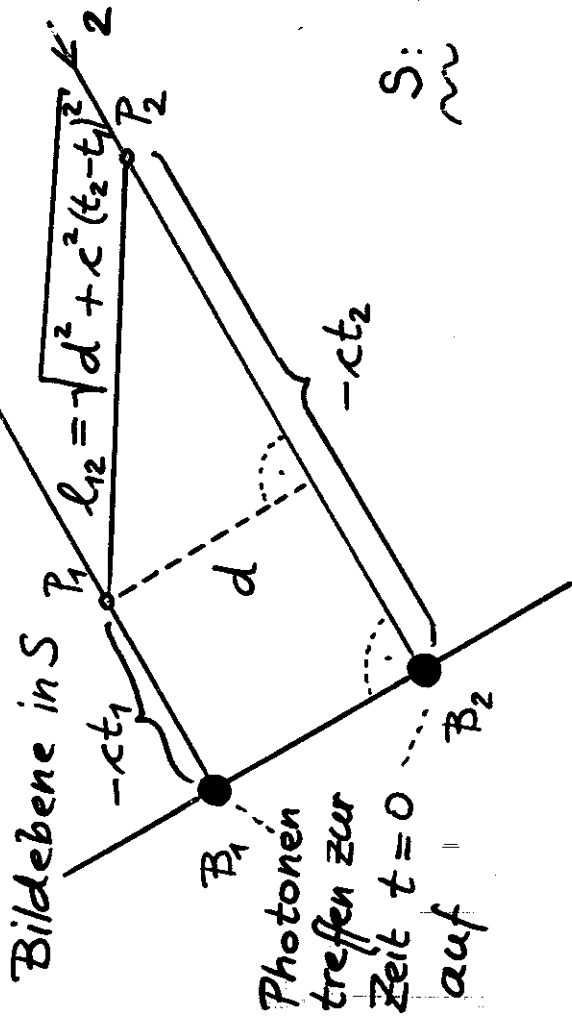
Alle "Superschnappschüsse" eines Objektes, die von einem relativ zum Objekt ruhenden und beliebigen zueinander und zum Objekt gleichförmig geradlinig bewegten Fotografen am selben Ereignis  $\vec{x}$  gemacht werden, sind gleich.

Beachte: "Am selben Ereignis  $\vec{x}$ " heißt, daß die Fotografen im Augenblick, in dem sie ihre Aufnahme machen, raum-zeitlich koinzidieren.

Folge: Unsichtbarkeit der Längenkontraktion auf einem "Superschnappschuß" eines Fotografen, relativ zu dem sich das Objekt bewegt.

Beweis: Kurz und genial (V. Weisskopf).

Zeichnung für S:  
 Bildebene in S (Photonenbahnen) in S



$E_1, E_2$  : zunächst (!) beliebige Ereignisse  
auf den Weltlinien der Photonen

1, 2 ("Photon 1 war hier",  
 "Photon 2 war hier") (\*)

S:  $E_1: (ct_1, x_1, y_1, z_1)$ ,  $E_2: (ct_2, x_2, y_2, z_2)$   
 Ort  $P_1$  Ort  $P_2$   
 $t_1 < 0$   $t_2 < 0$

L-invariantes raum-zeitl. Abstandsquadrat von  $E_1, E_2$ :  
 $S'$ :  $E_1: (ct'_1, x'_1, y'_1, z'_1)$ ,  $E_2: (ct'_2, x'_2, y'_2, z'_2)$

$$\Delta S^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - l_{12}^2 = -d^2 \quad \text{unabhängig von } t_2 - t_1 !$$

$$= c^2(t'_2 - t'_1)^2 - l'^2_{12}$$

Wählen wir in den beiden einparametrischen Scharen von Ereignissen ein Paar gleichzeitiger Ereignisse bzgl.  $S'$  ( $t'_2 = t'_1$ ), so folgt für diese Ereignisse  $l'_{12} = d$ , wobei  $d$  auch der Normalabstand der Photonbahnen in  $S'$  sein muss ( $d' = d$ ), da sonst nicht  $\Delta S^2 = -d^2$ ,  $\forall E_1, E_2$  (\*) sein könnte!

Newton'sche Mechanik  $G$ -kovariant  
 Mechanik muß daher abgeändert werden

### VIII.1. Invariante Masse, Viererimpuls und relativistischer Impuls eines Punktteilchens

Punktteilchen: Trägheitseigenschaften durch

$L$ -invariante Masse  $m$  (= Ruhmasse; s. später)  
gekennzeichnet

Definition 1: Viererimpuls des Teilchens

$$\vec{p}(\tau) := m \vec{u}(\tau) \quad (1)$$

Mit  $\vec{p}^r = m u^r$ ,  $(u^r) = \gamma(u) (c, \vec{u})$

folgt für die

kontravarianten Komponenten bezgl.  $S$

$$\begin{aligned} (p^r) &= (p^0, p^1, p^2, p^3) = m \gamma(u) (c, u_x, u_y, u_z) \\ &= m \gamma(u) (c, \vec{u}) \end{aligned}$$

(2)

Definition 2 : relativistischer Impuls  
("Dreierimpuls") des Teilchens

$$\vec{p} := m\gamma(u)\vec{u} \quad (3)$$

Bemerkung : Der relativistische Impuls tritt an die Stelle des Newtonschen Impulses

$$\vec{p}_{\text{Newton}} = m\vec{u}$$

Mit der Abkürzung ("geschwindigkeitsabhängige Masse")

$$m(u) := m\gamma(u)$$

gilt

$$\vec{p} = m(u)\vec{u}$$

Wegen

$$m(0) = m$$

nennt man die invariante Masse auch

Ruhmasse.  $\vec{p}$

$$(p^{\alpha}) = (p^0, \vec{p}^1, p^2, p^3) = m\gamma(u) (c, \vec{u})$$

redundante Information (s. VIII-3)

$$\left. \begin{aligned} \vec{p} &= m\vec{u} \\ \vec{u} \cdot \vec{u} &= c^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{p}(t) \cdot \vec{p}(t) = m^2 c^2, \quad \forall t \quad (4)$$

$$p^{\mu} p_{\mu} = (p^0)^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2$$

$$p^0 = \sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2} \quad (p^0 = m\gamma(u)c > 0) \quad (5)$$

VIII.2. Relativistische Bewegungsgleichung

VIII.2.A. Viererkraft. Bewegungsgleichung

Newtonsche Mechanik:  
BG  $\frac{d}{dt} \vec{p}_{\text{Newton}} = \vec{F}$   
 $m \cdot \vec{a}$

G-kovariant,  
wenn  $\vec{F}' = \vec{F}$   
(achsenparallele Bezugssysteme)

$\vec{F}$  "gewöhnliche Kraft" = "Dreierkraft"  
(in Elektrodynamik "übliche" Lorentzkraft)

Relativistische Mechanik:  
POSTULAT (in "Dreierschreibweise")  
BG  $\frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{F}$

L-kovariant  
bei geeigneter Transformation

Von  $\vec{F}$  ist  $\frac{d}{dt} \vec{p}(t) \neq \vec{a}(t)$  !  
s. später

Fragen:

- 1) Welches Transformationsgesetz ist für  $\vec{F}$  zu fordern?
- 2) Wie sieht die Formulierung mit Vierervektoren, d.h. die offensichtlich L-kovariante Formulierung aus?

In der Vierervektorformulierung kann nur statt  $S: \frac{d}{dt} \vec{p}(t)$  ( $S': \frac{d}{dt'} \vec{p}'(t')$  etc.) der Vierervektor  $\frac{d}{d\tau} \vec{p}(\tau)$  verwendet werden:

Relativistische Mechanik:  
POSTULAT (in Vierervektorschreibweise)  

$$\frac{d}{d\tau} \vec{p}(\tau) = \vec{F}(\tau) \quad (7)$$

Damit die "räumlichen" Komponenten bzgl.  $S$  mit dem früheren Postulat  $\frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{F}$  übereinstimmen, muß wegen  $d\tau = \frac{dt}{\gamma(u)}$   $\vec{F}: S: (F^\mu) = (\cdot, \gamma(u) \vec{F})$  gelten. Deshalb:

Definition: Viererkraft auf ein Teilchen

$$\vec{F}: S: (F^\mu) = (F^0, F^1, F^2, F^3)$$
  

$$= (F^0, \gamma(u) \vec{F})$$
  
 $S': \text{ analog}$   
 $F^0$  (bzw.  $F^0$  etc.) bestimmt durch  $\vec{F}(\tau) \cdot \vec{u}(\tau) = 0, \forall \tau$

Bemerkungen:

1) Die "0"-Komponente von (7) muß redundante Information enthalten. WELCHE? (S. nächster Abschnitt)

per constructionem ("offensichtlich")  
 L-kovariant, wofür  $\vec{F}$  Vierervektor

$\vec{F}$  Dreierkraft  
 [(8)]

VIII-5  
 2) Die Forderung  $\vec{F} \cdot \vec{u} = 0$ , welche  $F^0$  (bzw.  $F^0$  etc.) bestimmt, ergibt sich aus Konsistenzgründen:

$$\vec{p}(\tau) = m \vec{u}(\tau) \Rightarrow \frac{d}{d\tau} \vec{p}(\tau) = m \frac{d\vec{u}(\tau)}{d\tau} = m \vec{a}(\tau)$$
  
 (VII.41): 
$$\left. \begin{aligned} \vec{a}(\tau) \cdot \vec{u}(\tau) &= 0, \forall \tau \\ \frac{d}{d\tau} \vec{p}(\tau) &= m \vec{a}(\tau) = \vec{F}(\tau) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

Forderung  $\vec{F}(\tau) \cdot \vec{u}(\tau) = 0, \forall \tau. \checkmark$

"Nebenergebnis": Man kann statt (7) auch alternativ schreiben:  

$$m \vec{a}(\tau) = \vec{F}(\tau) \quad (9)$$

Berechnung von  $F^0$ :  $(F^\mu) = (F^0, \gamma(u) \vec{F})$   
 $(u_\mu) = \gamma(u) (c, -\vec{u})$

$$0 = F^\mu u_\mu = \gamma(u) (F^0 c - \gamma(u) \vec{F} \cdot \vec{u}) \Rightarrow$$
  

$$F^0 = \gamma(u) \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c} \quad (10)$$

3) Aus

$(F^\mu) = \gamma(u) \left( \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c}, \vec{F} \right)$ ,  $(F'^\mu)$  analog  
 und  $F'^\mu = \Lambda^\mu_\alpha F^\alpha$

ergibt sich das für die L-Kovarianz der BG  $\frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{F}$  notwendige und hinreichende Transformationsgesetz  $\vec{F} \rightarrow \vec{F}'$ . (Für Standard-LI selbst anschreiben!)



5) "Räumliche" Komponenten von  $m\vec{a}(\tau) = \vec{F}$

bzgl. S (kontravariant) geben (s. (a<sup>n</sup>) Folie VIII-46)

$$m\gamma^3(u) (\vec{a} + \gamma^2(u) \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{u}) = \gamma^3(u) \vec{F}$$

$$m\gamma^3(u) \vec{a} + m\gamma^3(u) \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{u} = \vec{F} \quad | \cdot \frac{\vec{u}}{c^2} \quad (12)$$

$$\Rightarrow m\gamma^3(u) \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{c^2} (1 + \gamma^2(u) \frac{u^2}{c^2}) = \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c^2} = m\gamma^3(u) \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{c^2}$$

⇒ BG

$$m\gamma(u) \vec{a} = \vec{F} - \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c^2} \vec{u} \Leftrightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Kraft  $\vec{F}$  verursacht Beschleunigung  $\vec{a}$ , welche i.a. nicht die Richtung von  $\vec{F}$  besitzt.

Ausnahmen: 1)  $\vec{F} \perp \vec{u}$ ; z.B. geladenes Teilchen im Magnetfeld

2)  $\vec{F} \parallel \vec{u}$ ; z.B. geladenes Teilchen im longitudinalen elektrischen Feld

(Linearbeschleuniger)

Beachte:  $\vec{S} : m\vec{a} = \vec{F}$  ! ⇒ physikalische Bedeutung der L-inv. Masse  $m$

4) "Räumliche" Komponenten von  $\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \vec{F}$

bzgl. S:  $(p^\mu) = (p^0, \vec{p})$ ,  $(F^\mu) = \gamma(u) (\frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c}, \vec{F})$

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{d\vec{p}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma(u) \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \checkmark$$

VIII. 2. B. Arbeitssatz bzw. Energiesatz

Newtonsche Mechanik:

BG  $\frac{d}{dt} (m\vec{u}) = \vec{F} \Rightarrow$   
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\vec{F}_{\text{Newton}}}$

Arbeitssatz  $\frac{d}{dt} \frac{m\vec{u}^2}{2} = \vec{F} \cdot \vec{u}$   
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{T_{\text{Newton}}}$

Relativistische Mechanik:

BG  $\frac{d}{dt} (m\gamma(u)\vec{u}) = \vec{F} \Rightarrow$  (s. unten<sup>†)</sup>)

Arbeitssatz  $\frac{d}{dt} (m\gamma(u)c^2) = \vec{F} \cdot \vec{u}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{mc^2 + T}$

Ruhenergie (innere Energie)  $T := mc^2 (\gamma(u) - 1)$  relativistische kinetische Energie

†)  $\vec{F} \cdot \vec{u} = mc^2 \gamma(u) \vec{u} \cdot \vec{a} \frac{1}{c^2} = \frac{d}{dt} (m\gamma(u)c^2)$

1) Nun sehen wir explizit, dass die "0"-Komponente

$$\text{von } \frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{F}$$

den bereits aus den "räumlichen" Komponenten folgenden Arbeitssatz, also redundante Information,

enthält:

$$S: \frac{dp^0}{dt} = F^0 \quad \text{gibt mit } p^0 = m\gamma(u)c$$

$$F^0 = \gamma(u) \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c}$$

$$\frac{d}{dt} = \gamma(u) \frac{d}{dt}$$

$$\gamma(u) \frac{d}{dt} (m\gamma(u)c) = \gamma(u) \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c}$$

$$\frac{d}{dt} (m\gamma(u)c^2) = \vec{F} \cdot \vec{u} \quad \checkmark$$

2) Aus dem Arbeitssatz

$$\frac{d}{dt} (m\gamma(u)c^2) = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{u} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt}$$

folgt der differentielle Arbeitssatz

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = d(m\gamma(u)c^2) \quad (15)$$

## Potentialfeld

Gilt  $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ ,  $V$  Potential der Kraft <sup>(16)</sup>

so läßt sich der Arbeitssatz als Energiesatz interpretieren:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\vec{\nabla}V \cdot d\vec{r} = -dV = d(m\gamma(u)c^2)$$

$$d(m\gamma(u)c^2 + V) = 0$$

$$\underbrace{m\gamma(u)c^2 + V = E}_{mc^2 + T} \quad \text{Konstante der Bewegung} \quad (17)$$

Ruhenergie + kinetische Energie + potentielle Energie

= Gesamtenergie (zeitlich konstant)

## VIII. 2.C. kräftefreies Teilchen

$$E = m\gamma(u)c^2 = mc^2 + T = m(u)c^2 \quad (18)$$

Einsteinbeziehung

EINSTEIN: Steht zur Umwandlung in andere

Energieformen zur Verfügung

(z.B. "Zerstrahlung" eines

$e^-e^+$ -Paares in zwei Photonen)

$$(2), (5): \quad \vec{p}^0 = m\gamma(u)c = \sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{p}^0 = \frac{E}{c}, \quad (\vec{p}^0) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \quad (19)$$

$$E = \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^2} \quad (20)$$

Nichtrelativistischer Grenzfall:  $u \ll c$

$$E = mc^2 + T = mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{\vec{p}^4}{8m^3c^2} + \dots \quad (21)$$

### VIII. 2. D. Hyperbolische Bewegung

Annahmen: 1)  $\vec{F} = (F, 0, 0)$

$F$  zeitlich konstant  $> 0$

2) AB:  $\vec{r}(0) = \vec{0}, \quad \vec{u}(0) = \vec{0}$

$$\text{BG:} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\gamma(u)\vec{u}) = \vec{F} = F\vec{e}_x \quad (23)$$

bzw.

$$m\gamma(u)\vec{a} = \vec{F} - \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c^2} \vec{u} = F\vec{e}_x - \frac{F u_x}{c^2} \vec{u}$$

Wegen AB folgt daraus:

$$\underline{u_y(t) = u_z(t) = 0}, \quad \underline{y(t) = z(t) = 0} \quad (24)$$

$$\frac{d}{dt}(m\gamma(u)u) = F \quad \text{mit } u = u_x > 0$$

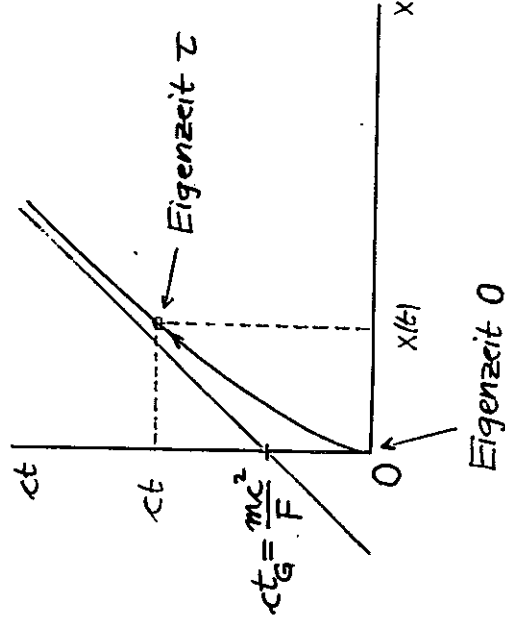
$$\frac{d}{dt}(m\gamma(u)u) = F, \quad m\gamma(u)u = Ft \quad (\text{AB}) \quad \text{VIII-11}$$

$$\Rightarrow u(t) = u_x(t) = \frac{ct}{\sqrt{t^2 + \frac{m^2c^2}{F^2}}}$$

$$x(t) = \frac{mc^2}{F} \left( \sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{m^2 c^2}} - 1 \right) \quad (\text{AB}) \quad (26)$$

Hyperbel im Minkowskiagramm mit

Asymptote  $ct = x + \frac{mc^2}{F}$



$$\text{Zielge selbst:} \quad a(t) = a_x(t) = \frac{F}{m} \frac{1}{\left(1 + \frac{F^2 t^2}{m^2 c^2}\right)^{3/2}}$$

Beachte: Für  $t \uparrow +\infty$  folgt  $u(t) \uparrow c, a(t) \downarrow 0$ .  
Für "kleine"  $t$  gilt:

$$x(t) \approx \frac{1}{2} t^2, \quad u(t) \approx at, \quad a(t) \approx a \quad \text{mit } a = \frac{F}{m}$$

$$u(t) = \alpha_x(t) = \frac{ct}{\sqrt{t^2 + \frac{m^2 c^2}{F^2}}} \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{u^2(t)}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{m^2 c^2}}}$$

$$\int \sqrt{1 - \frac{u^2(t)}{c^2}} dt = \int \frac{dt}{\sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{m^2 c^2}}} = \frac{mc}{F} \operatorname{arsh} \frac{Ft}{mc} + C$$

Eigenzeit ( $\tau = 0$  für  $t = 0$  gewählt)

$$\tau(t) = \frac{mc}{F} \operatorname{arsh} \frac{Ft}{mc} < t \quad (27)$$

Bemerkungen: Für diese Art der Bewegung ist die Beschleunigung im jeweiligen momentanen inertialen Ruhesystem  $\tilde{S}_t$  ( $t$  fest:  $\tilde{S}_t : \tilde{u}(t) = 0$ ) fest und durch den Wert  $a := \frac{F}{m}$  gegeben, weshalb man von einer "gleichförmig beschleunigten Bewegung" im Sinne der SRT spricht.

Falls es sich um eine gleichförmig beschleunigte Bewegung einer Rakete (im Sinne der SRT) handelt, ist  $m$  nicht zeitlich konstant, die Formeln für  $x(t), u(t), a(t)$  gelten dann aber mit der Ersetzung

$$\frac{F}{m} \rightarrow a$$

\*1) Zeige selbst:

1) Für eine eindimensionale Bewegung gilt allgemein

$$\tilde{\alpha}(E) = \gamma^3(u(t)) a(t)$$

2) Für die oben besprochene hyperbolische Bewegung gilt

$$a(t) = \frac{F}{m} \frac{1}{\gamma^3(u(t))}$$

Aus 1) + 2) folgt die Behauptung.

VIII.3. Relativistische Teilchenstoßprozesse

(inkl. Umwandlungsprozesse bzw. Reaktionen)

VIII.3.A. Erhaltung des Gesamtviererimpulses

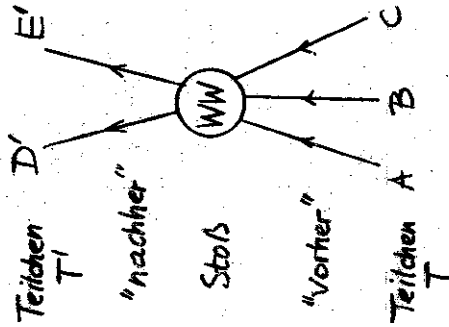
"Stoßnäherung"

WW der Teilchen wird außerhalb eines als raum-zeitlich klein angesehenen WW-Bereiches vernachlässigt.

Sind keine äußeren Kräfte (Felder) vorhanden, gilt dann:

"vor dem Stoß" } Teilchen kräftefrei  $\Rightarrow$

"nach dem Stoß" } Viererimpuls jedes Teilchens zeitunabhängig



$$\vec{P}_{\text{nachher}} = \sum_T \vec{P}_{T'}$$

elm., starke, schwache WW (Gravitation)

QT

gekrümmte Raumzeit (28)

$$\vec{P}_{\text{vorher}} = \sum_T \vec{P}_T$$

Postulat:

$$\vec{P}_{\text{nachher}} = \vec{P}_{\text{vorher}}$$

+ weitere Erhaltungssätze!

Bemerkungen:

- 1) Bedeutet Energie- und Impulserhaltung.  
Summe der Ruhmassen muss nicht erhalten sein.
- 2) Rechenaufwand lässt sich durch geschickte Wahl des Bezugssystems u. U. beträchtlich vermindern;  
z.B. Auswertung in  $S'$ , Transformation der Ergebnisse nach  $S$ . ●

### VIII. 3. B. Schwerpunktsystem $S^*$ für ein System kräftefreier Teilchen

$$\text{Gesamtviererimpuls } \vec{P} = \sum_T \vec{p}_T$$

Definition des Schwerpunktsystems

$$S^*: (p^{\mu}) = \left( \frac{E^*}{c}, \vec{0} \right) \uparrow$$

Transformation  $S \rightarrow S^*$  für den Fall

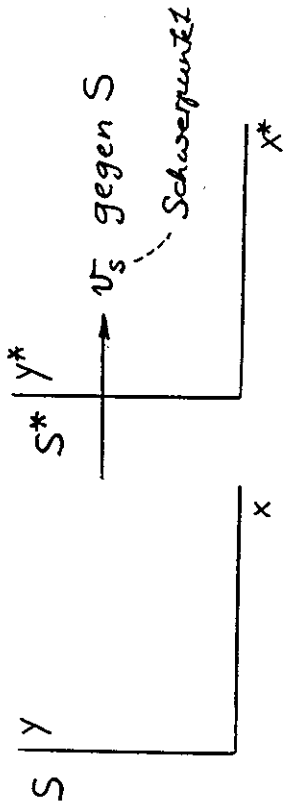
$$S: (p^{\mu}) = \left( \frac{E}{c}, p, 0, 0 \right), p > 0 \quad (32)$$

(durch geeignete Wahl des KS bzgl.  $S$  stets erreichbar)

DANN: Standard-LI zwischen  $S$  und  $S^*$  möglich

$$S: (p^{\mu}) = \left( \frac{E}{c}, p, 0, 0 \right), p > 0$$

$$S^*: (p^{*\mu}) = \left( \frac{E^*}{c}, 0, 0, 0 \right)$$



Zusammenhang zwischen  $E^*$  und  $E, p$

$$\vec{P} \cdot \vec{P} = p^{\mu} p_{\mu} = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = p^{*\mu} p^*_{\mu} = \frac{E^{*2}}{c^2} \quad (35)$$

$$\Rightarrow (p^{*\mu}) = \left( \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - p^2}, \vec{0} \right)$$

$$v_s \text{ bzw. } \beta_s \equiv \beta(v_s), \quad \gamma_s \equiv \gamma(v_s)$$

$$LT: \begin{array}{l} p^{*1} = \gamma_s (p^1 - \beta_s p^0) \Rightarrow \beta_s = \frac{p}{\frac{E}{c}} \\ \parallel \\ 0 \end{array} \parallel \begin{array}{l} \frac{E}{c} \\ p \end{array} \quad (34)$$

$$\beta_s = \frac{\frac{E}{c}}{\sqrt{\frac{E^2}{c^2} - p^2}}, \quad \beta_s \gamma_s = \frac{p}{\sqrt{\frac{E^2}{c^2} - p^2}}$$

Definition: Invariante Schwerpunktmasse  $M$

$$M^2 c^2 = \vec{P} \cdot \vec{P} \quad (36)$$

$$(p^{\mu}) = \left( \frac{E}{c}, p, 0, 0 \right)$$

$$(p^{*\mu}) = \left( \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - p^2}, 0, 0, 0 \right)$$

$$\gamma_s = \frac{\frac{E}{c}}{\sqrt{\frac{E^2}{c^2} - p^2}}, \quad \beta_s \gamma_s = \frac{p}{\sqrt{\frac{E^2}{c^2} - p^2}}$$

$$M^2 c^2 = \vec{p} \cdot \vec{p} = p^{\mu} p_{\mu} = \frac{E^2}{c^2} - p^2$$

$$(p^{*\mu}) = (Mc, 0, 0, 0)$$

$$\gamma_s = \frac{E}{Mc^2}, \quad \beta_s \gamma_s = \frac{p}{Mc}$$

$$\frac{E}{c} = M \gamma_s c, \quad p = M \gamma_s v_s$$

$$(p^{\mu}) = M \gamma_s (c, v_s, 0, 0)$$

(v\_s^{\mu})

$$p^{\mu} = M v_s^{\mu} \quad \text{bzw.} \quad \vec{p} = M \vec{v}_s$$

LT  $S \rightarrow S^*$ :  $x^{*\mu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} x^{\alpha}$  mit

$$({}^{st}\Lambda^{\mu}_{\alpha}) = \begin{pmatrix} \gamma_s & -\beta_s \gamma_s & 0 & 0 \\ -\beta_s \gamma_s & \gamma_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{Mc^2} & -\frac{p}{Mc} & 0 & 0 \\ -\frac{p}{Mc} & \frac{E}{Mc^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Spezialfall: Zwei Teilchen

$$(p_A^{\mu}) = \left( \frac{E_A}{c}, \vec{p}_A \right) = \left( \frac{E_A}{c}, p_A, p_y, p_z \right)$$

$$(p_B^{\mu}) = \left( \frac{E_B}{c}, \vec{p}_B \right) = \left( \frac{E_B}{c}, p_B, -p_y, -p_z \right) \quad (38)$$

$$(p^{\mu}) = \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right) = \left( \frac{E_A + E_B}{c}, p_A + p_B, 0, 0 \right)$$

"Energie-Impuls-Beziehungen"

$$\vec{p}_A \cdot \vec{p}_A = m_A^2 c^2 = \frac{E_A^2}{c^2} - \vec{p}_A^2 \quad (39)$$

$$\vec{p}_B \cdot \vec{p}_B = m_B^2 c^2 = \frac{E_B^2}{c^2} - \vec{p}_B^2$$

$$\vec{p} \cdot \vec{p} = M^2 c^2 = \frac{(E_A + E_B)^2}{c^2} - \underbrace{(p_A + p_B)^2}_{(\vec{p}_A + \vec{p}_B)^2}$$

(40)

$$= \underbrace{\frac{E_A^2}{c^2} - \vec{p}_A^2}_{m_A^2 c^2} + \underbrace{\frac{E_B^2}{c^2} - \vec{p}_B^2}_{m_B^2 c^2} + \frac{2E_A E_B}{c^2} - 2\vec{p}_A \cdot \vec{p}_B$$

$$M^2 = (m_A + m_B)^2 + 2 \left( \frac{E_A E_B}{c^4} - \frac{\vec{p}_A \cdot \vec{p}_B}{c^2} - m_A m_B \right) \quad (41)$$

### VIII.3.C. Elastische und inelastische Stoßprozesse

Elastisch: Nach dem Stoß liegen dieselben

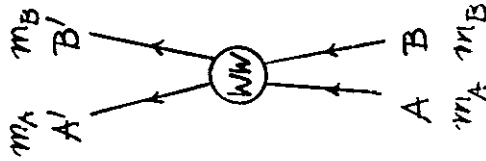
Teilchen vor wie vor dem Stoß.

Bei einem zusammengesetzten Teilchen

ändert sich nicht der innere Anregungszustand

(und damit auch nicht die Ruhmasse).

Beispiel: Elastischer Stoß zweier Teilchen



Inelastisch: Beim Stoß "verschwinden" Teilchen

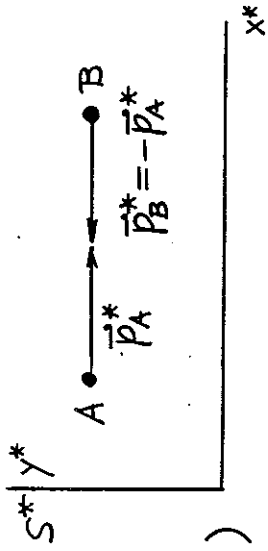
oder (und) es werden neue Teilchen

"erzeugt" oder (und) es ändert sich

bei mindestens einem zusammengesetzten

Teilchen der innere Anregungszustand.

### Elastischer Stoß zweier Teilchen: beschrieben im Schwerpunktsystem $S^*$



Vor dem Stoß:

$$(p_A^{*k}) = \left( \frac{E_A^*}{c}, \vec{p}_A^* \right)$$

$$= \left( \frac{E_A^*}{c}, p_A^*, 0, 0 \right)$$

$$(p_B^{*k}) = \left( \frac{E_B^*}{c}, \vec{p}_B^* \right) = \left( \frac{E_B^*}{c}, -p_A^*, 0, 0 \right), \quad p_A^* > 0 \quad (42a)$$

mit

$$m_A^2 c^2 = \frac{E_A^{*2}}{c^2} - \vec{p}_A^{*2}, \quad m_B^2 c^2 = \frac{E_B^{*2}}{c^2} - \vec{p}_B^{*2} \quad (42b)$$

$$\Rightarrow m_A^2 c^2 - m_B^2 c^2 = \frac{E_A^{*2} - E_B^{*2}}{c^2}$$

Nach dem Stoß:

$$(p_{A'}^{*k}) = \left( \frac{E_{A'}^*}{c}, \vec{p}_{A'}^* \right), \quad (p_{B'}^{*k}) = \left( \frac{E_{B'}^*}{c}, \vec{p}_{B'}^* \right) \quad (43a)$$

↑ Impulserhaltung:  $-\vec{p}_A^* = -\vec{p}_{A'}^*$

mit

$$m_A^2 c^2 = \frac{E_{A'}^{*2}}{c^2} - \vec{p}_{A'}^{*2}, \quad m_B^2 c^2 = \frac{E_{B'}^{*2}}{c^2} - \vec{p}_{B'}^{*2} = \frac{E_{B'}^{*2}}{c^2} - \vec{p}_A^{\prime 2} \quad (43b)$$

$$\Rightarrow m_A^2 c^2 - m_B^2 c^2 = \frac{E_{A'}^{*2} - E_{B'}^{*2}}{c^2}$$

Energieerhaltung:  $E_A^* + E_B^* = E_{A'}^* + E_{B'}^* \quad (44)$

ferner:  $E_A^{*2} - E_B^{*2} = E_{A'}^{*2} - E_{B'}^{*2}$



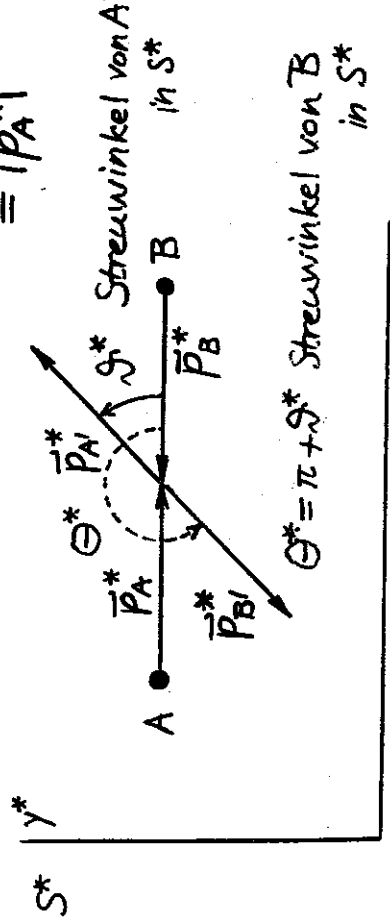
$$E_A^* + E_B^* = E_{A'}^* + E_{B'}^*$$

$$\left. \begin{aligned} (E_A^* + E_B^*) (E_A^* - E_B^*) &= (E_{A'}^* + E_{B'}^*) (E_{A'}^* - E_{B'}^*) \\ \Rightarrow \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$E_{A'}^* = E_A^* , E_{B'}^* = E_B^* \quad (45)$$

$$m_A^2 c^2 = \frac{E_A^{*2}}{c^2} - \vec{p}_A^{*2} = \frac{E_{A'}^{*2}}{c^2} - \vec{p}_{A'}^{*2} \Rightarrow$$

$$|\vec{p}_A^*| = |\vec{p}_{A'}^*| , \text{ analog } |\vec{p}_B^*| = |\vec{p}_B^*| = |\vec{p}_{B'}^*| \quad (46)$$



Beide Streuwinkel gemessen gegen Richtung von  $\vec{p}_A^*$  !

Nur Impulsrichtungen ändern sich in  $S^*$ ,

dabei gilt aber  $\vec{p}_{B'}^* = -\vec{p}_A^*$ .

Gehaltes der Aussagen  $E_{A'}^* = E_A^* , E_{B'}^* = E_B^*$

$$(p_A^{*\mu}) = \left( \frac{E_A^*}{c} , \vec{p}_A^* \right) , (p_{A'}^{*\mu}) = \left( \frac{E_{A'}^*}{c} , \vec{p}_{A'}^* \right)$$

$$(u_S^{*\mu}) = (c, \vec{0}) \quad (47)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{p}_A \cdot \vec{u}_S &= p_A^{*\mu} u_{S\mu}^* = E_A^* \\ \vec{p}_{A'} \cdot \vec{u}_S &= p_{A'}^{*\mu} u_{S\mu}^* = E_{A'}^* \end{aligned} \right\}$$

analog mit  $A \rightarrow B, A' \rightarrow B'$

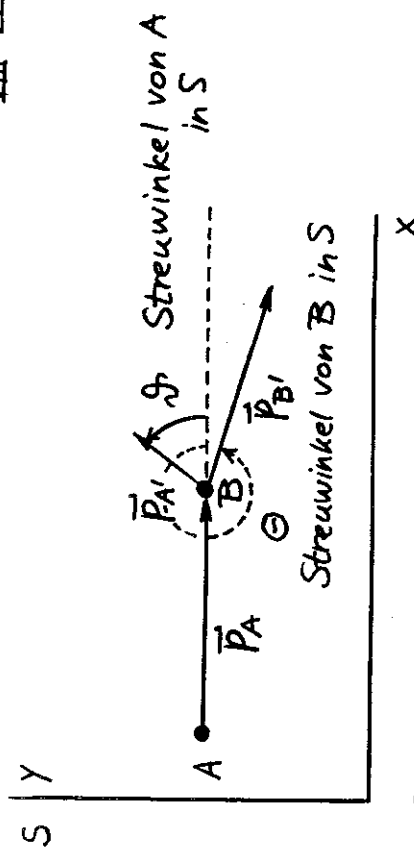
$$\Rightarrow \vec{p}_A \cdot \vec{u}_S = \vec{p}_{A'} \cdot \vec{u}_S , \vec{p}_B \cdot \vec{u}_S = \vec{p}_{B'} \cdot \vec{u}_S \quad (48)$$

VIII. 4. Beispiele für relativistische Teilchenstoßprozesse

VIII. 4. A. Elastischer Stoß zweier Teilchen beschrieben im Laborsystem S ("Target"-

Teilchen B vor dem Stoß in Ruhe)

Gesucht: Energien  $E_{A'} , E_{B'}$  der Teilchen A, B nach dem Stoß in Abhängigkeit von deren Streuwinkel  $\vartheta, \Theta$  in S



Vordem Stoß:

$$(p_A^K) = \left( \frac{E_A}{c}, \vec{p}_A \right) = \left( \frac{E_A}{c}, p_A, 0, 0 \right), p_A > 0 \quad (49)$$

$$(p_B^K) = \left( \frac{E_B}{c}, \vec{p}_B \right) = (m_B c, 0, 0, 0) \quad (50)$$

mit  $m_A^2 c^2 = \frac{E_A^2}{c^2} - p_A^2$

$$(p^K) = \left( \frac{E_A + m_B c^2}{c}, p_A, 0, 0 \right)$$

s. Folie VIII-16:  $(v_S^K) = \left( -\frac{p^K}{M} \right) = \left( \frac{E_A + m_B c^2}{Mc}, \frac{p_A}{M}, 0, 0 \right) \quad (51)$

Nach dem Stoß: Ansatz (s. Abb.)

$$(p_A'^K) = \left( \frac{E_A'}{c}, p_A' \cos \theta, p_A' \sin \theta, 0 \right) \quad (52)$$

$$(p_B'^K) = \left( \frac{E_B'}{c}, p_B' \cos \theta, p_B' \sin \theta, 0 \right)$$

mit  $m_A^2 c^2 = \frac{E_A'^2}{c^2} - p_A'^2$ ,  $m_B^2 c^2 = \frac{E_B'^2}{c^2} - p_B'^2 \quad (53)$

$$(p_A^K) = \left( \frac{E_A}{c}, p_A, 0, 0 \right)$$

$$(p_A'^K) = \left( \frac{E_A'}{c}, p_A' \cos \theta, p_A' \sin \theta, 0 \right)$$

$$(v_S^K) = \left( \frac{E_A + m_B c^2}{Mc}, \frac{p_A}{M}, 0, 0 \right)$$

$$(48): \vec{p}_A \cdot \vec{v}_S = \vec{p}_A' \cdot \vec{v}_S$$

$$\Rightarrow \frac{E_A (E_A + m_B c^2)}{M c^2} - \frac{p_A^2}{M}$$

$$= \frac{E_A' (E_A + m_B c^2)}{M c^2} - \frac{p_A' p_A \cos \theta}{M} \quad | \cdot M c^2$$

$$E_A (E_A + m_B c^2) - c^2 p_A^2 = E_A' (E_A + m_B c^2) - c^2 p_A' p_A \cos \theta \quad (54a)$$

mit  $p_A = \sqrt{\frac{E_A^2}{c^2} - m_A^2 c^2}$

Bestimmungsgleichung für  $E_A'$  in Abhängigkeit von  $\theta$

Analog folgt aus  $\vec{p}_B \cdot \vec{v}_S = \vec{p}_B' \cdot \vec{v}_S$

$$m_B c^2 (E_A + m_B c^2) = E_B' (E_A + m_B c^2) - c^2 p_A p_B' \cos \theta \quad (54b)$$

mit  $p_B' = \sqrt{\frac{E_B'^2}{c^2} - m_B^2 c^2}$

Bestimmungsgleichung für  $E_B'$  in Abhängigkeit von  $\theta$

Beachte:  $\theta, \theta'$  nicht voneinander unabhängig!

Das ist aber für die gestellten Fragen gleichgültig...

Bemerkung: Den Zusammenhang zwischen  $\vec{p}$  und  $\Theta$  erhält man am einfachsten aus dem Erhaltungssatz für die  $y$ -Komponente des Gesamtimpulses:

$$p_A'(\beta) \sin \beta + p_B'(\Theta) \sin \Theta = 0 \rightarrow \Theta(\beta)$$

aus Gl. (54a) aus Gl. (54b)

### VIII. 4. B. Spezialfall: Comptonstreuung

im Laborsystem S (Ruhsystem des  $e^-$  vor dem Stoß)

Teilchen A: Photon:  $m_f = 0$  und

Einstein-de Broglie-Beziehungen

$$E = \hbar\omega = hf, \quad p = \hbar k = \frac{h}{\lambda}$$

(20): kraftfreies Teilchen mit  $m=0$

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2} = cp \quad (p=|p|)$$

Somit:

$$E_A = cp_A = \frac{hc}{\lambda} \quad (55) + (56)$$

$$E_A' = cp_A' = \frac{hc}{\lambda'}$$

Teilchen B: Elektron:  $m_e$

(54a):  $\swarrow$  für Photon

$$E_A (E_A + m_B c^2) - \vec{p}_A^2 c^2 = E_A' (E_A + m_B c^2) - c^2 p_A p_A' \cos \beta$$

$$\frac{hc}{\lambda} m_e c^2 = \frac{hc}{\lambda'} \left( \frac{hc}{\lambda} + m_e c^2 \right) - \frac{hc}{\lambda} \frac{hc}{\lambda'} \cos \beta$$

$$\frac{1}{\lambda} m_e c^2 = \frac{1}{\lambda'} \left( \frac{hc}{\lambda} + m_e c^2 \right) - \frac{hc}{\lambda \lambda'} \cos \beta$$

$$\lambda' = \frac{h}{m_e c} + \lambda - \frac{h}{m_e c} \cos \beta$$

$$\lambda_c := \frac{h}{m_e c} \quad \text{Comptonwellenlänge (des Elektrons)}$$

$$\lambda' = \lambda + \lambda_c (1 - \cos \beta) \quad (59)$$

$2,4 \cdot 10^{-10} \text{ cm}$

### VIII. 4. C. Inelastische Proton-Proton-Streuung

Frage: Wie groß muss die Geschwindigkeit  $u_A$  eines Protons A mindestens sein, damit

beim Zusammenstoß mit einem ruhenden

Proton B ein zusätzliches Proton-Antiproton-Paar erzeugt werden kann?

Bemerkung: Ladungserhaltung und "Erhaltung

der Baryonenzahl" (= Erhaltung der

Differenz aus Zahl der Baryonen und Zahl

der Antibaryonen) gestatten einen solchen

Prozess. ●

$$\vec{p}_{\text{Vorher}} = \vec{p}_{\text{Nachher}} \Rightarrow \vec{p}_{\text{Vorher}} \cdot \vec{p}_{\text{Vorher}} = \vec{p}_{\text{Nachher}} \cdot \vec{p}_{\text{Nachher}} \quad (62)$$

Vor dem Stoß im Laborsystem S:

$$(p_A^k) = \left(\frac{E_A}{c}, \vec{p}_A\right) \quad \text{mit} \quad \frac{E_A^2}{c^2} - \vec{p}_A^2 = m_p^2 c^2$$

$$(p_B^k) = (m_p c, \vec{0})$$

$$(p_{\text{Vorher}}^k) = \left(\frac{E_A}{c} + m_p c, \vec{p}_A\right) \Rightarrow$$

$$\vec{p}_{\text{Vorher}} \cdot \vec{p}_{\text{Vorher}} = p_{\text{Vorher},\mu}^k p_{\text{Vorher},\mu}^k$$

$$= \left(\frac{E_A}{c} + m_p c\right)^2 - \vec{p}_A^2$$

$$= \left(\frac{E_A}{c} + m_p c\right)^2 - \left(\frac{E_A^2}{c^2} - m_p^2 c^2\right)$$

$$= 2E_A m_p + 2m_p^2 c^2$$

Nach dem Stoß im Schwerpunktsystem S\*:

$$(p_{T'}^{*k}) = (m_p c, \vec{0}), \quad T' = A', B', C', D'$$

Protonen Antiproton

$$(p_{\text{Nachher}}^{*k}) = (4m_p c, \vec{0}) \Rightarrow \quad (61)$$

$$\vec{p}_{\text{Nachher}} \cdot \vec{p}_{\text{Nachher}} = p_{\text{Nachher},\mu}^{*k} p_{\text{Nachher},\mu}^{*k} = 16m_p^2 c^2 \quad (62)$$

$$\Rightarrow 7E_A m_p = 14m_p^2 c^2, \quad E_A = 7m_p c^2$$

$$E_A = m_p \gamma(\omega_A) c^2 = 7m_p c^2 \quad (63)$$

$\gamma(\omega_A) = 7 \Rightarrow$  Mindestgeschwindigkeit:

$$\omega_A = \sqrt{\frac{48}{49}} c = 0,989774c$$

VIII.4.D. Ist ein Zerfall  $\gamma \rightarrow e^- + e^+$  möglich?

Bemerkung: Ladungserhaltung und "Erhaltung der Leptonenzahl" würden einen solchen Prozeß gestatten. •

S beliebiges Inertialsystem

"Vorher":

$$(p_\gamma^k) = (p_\gamma^k) = (p_{\text{Vorher}}^k) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

† mit  $E = c|\vec{p}|$  bzw.

$$\vec{p}_T \cdot \vec{p}_T = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = 0, \quad \vec{p}_T \text{ "lichtartig"}$$

"Nachher":

$$(p_{T'}^k) = \left(\frac{E_{T'}}{c}, \vec{p}_{T'}\right) \quad \text{mit} \quad \frac{E_{T'}^2}{c^2} - \vec{p}_{T'}^2 = m_e^2 c^2$$

$$T' = B', C'$$

$$(p_{\text{Nachher}}^k) = \left(\frac{E_{B'} + E_{C'}}{c}, \vec{p}_{B'} + \vec{p}_{C'}\right)$$

$$\vec{p}_{\text{Vorher}} = \vec{p}_{\text{Nachher}} \Rightarrow \begin{cases} E = E_{B'} + E_{C'} \\ \vec{p} = \vec{p}_{B'} + \vec{p}_{C'} \end{cases}$$

## IX. DIE ELEKTRODYNAMIK ALS

## L-KOVARIANTE THEORIE

## IX.1. Feldtensor, Maxwellgleichungen

## IX.1.A. Viererstrom und Viererpotential

Viererstromdichte  $\vec{j}$ 

Wie man beweisen kann, bilden  $\rho, \vec{j}$  die kontravarianten Komponenten eines

Vierervektorfeldes bzgl.  $S$ , welches man als

Viererstromdichte  $\vec{j}$  bezeichnet.

$$\vec{j}: S: (j^\mu) = (\rho, \vec{j})$$

$$S': (j'^\mu) = (\rho', \vec{j}')$$

$$\vdots$$

Beachte:  $\rho(x^0, x^1, x^2, x^3), \vec{j}(x^0, x^1, x^2, x^3)$

$\rho'(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3), \vec{j}'(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$

Beweis (anders als im Skriptum):

Wir betrachten den Fall einer beliebig bewegten

Punktladung  $q$ . Es gilt dann  $\rho(\vec{r}, t) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}(t))$ ,

$\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{u}(t) \rho(\vec{r}, t)$ .

$$E^2 - c^2 \vec{p}^2 = 0$$

$$(E_{B'} + E_{C'})^2 - c^2 (\vec{p}_{B'} + \vec{p}_{C'})^2 = 0 \quad (66)$$

$$E_{B'}^2 - c^2 \vec{p}_{B'}^2 + E_{C'}^2 - c^2 \vec{p}_{C'}^2 + 2(E_{B'} E_{C'} - c^2 \vec{p}_{B'} \cdot \vec{p}_{C'}) = 0$$

$$m_e^2 c^4 + \frac{E_{B'}}{c} E_{C'} - \vec{p}_{B'} \cdot \vec{p}_{C'} = 0$$

$$m_e^2 c^2 + \underbrace{(\sqrt{\vec{p}_{B'}^2 + m_e^2 c^2} \sqrt{\vec{p}_{C'}^2 + m_e^2 c^2} - \vec{p}_{B'} \cdot \vec{p}_{C'})}_{> 0} = 0 \quad (67)$$

> 0 Widerspruch!

L-Invarianz der Ladung:

$$\rho' d^3 r' = \rho d^3 r \iff \rho d^3 r = \text{Viererskalarfeld}$$

$$\Rightarrow \rho d^3 r dx^\mu = \rho d^3 r d(ct) \underbrace{\frac{1}{c} \frac{dx^\mu}{dt}}_{d^4 x}$$

$$= \frac{1}{c} d^4 x \rho \frac{dx^\mu}{dt} = \text{Vierervektorfeld (kontravariante Komponenten bezgl. S)}$$

L-Invarianz des vierdimensionalen Volumenelementes:<sup>†)</sup>

$$d^4 x' = \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} d^4 x = d^4 x$$

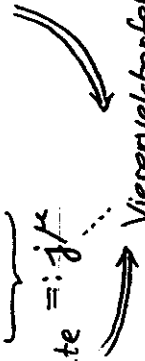
$\det \Lambda = 1$  für beliebige eigentliche LT (LT ohne Spiegelung)

Beachte:  $\det {}^{st}\Lambda = 1$ , ferner  $\det {}^D\Lambda = 1$  (Drehung)

und  $\det \Lambda = \det({}^D\Lambda {}^{st}\Lambda {}^P\Lambda)$  (s. Gl. (VII.11))

$$= \det {}^D\Lambda \cdot \det {}^{st}\Lambda \cdot \det {}^P\Lambda \bullet$$

$$\frac{1}{c} d^4 x \rho \frac{dx^\mu}{dt} = \text{Vierervektorfeld (kontravariante Komponenten)}$$

L-Invariante  $=: j^\mu$    


†) Pseudoskalar bezgl. räumlichen Spiegelungen

$$j^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{dt} = \rho \frac{dt}{dt} \underbrace{\frac{dx^\mu}{dt}}_{\frac{1}{\gamma(u)} u^\mu}$$

$$(j^\mu) = \rho \frac{1}{\gamma(u)} (u^\mu) = \rho \frac{1}{\gamma(u)} \gamma(u) (\kappa, \vec{u})$$

$$= (\kappa \rho, \vec{u} \rho) = (\kappa \rho, \vec{j})$$

Beliebige (mikroskopische) Ladungs- und

Stromverteilungen kann man sich additiv aus

den Beiträgen von Punktladungen zusammen-

gesetzt denken. Mit (A Teilchenindex)  $\vec{j}_A$

ist aber auch  $\sum_A \vec{j}_A = \vec{j}$  Vierervektorfeld.

Vierergradientenoperator  $\vec{\partial}$ , Quablaoperator  $\nabla$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \text{ transformiert bei homogenen LT}$$

Wie  $x_\mu$ : kovariante Komponenten

eines Vierervektoroperators, des

Vierergradienten  $\vec{\partial}$  bezgl. S

$$\vec{\partial}: S: (\partial_\mu) = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right)$$

$$(\partial^\mu) = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) !$$

S': analog

(7)

Es gilt

$$\begin{aligned} \vec{\partial} \cdot \vec{\partial} &= \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = -\square \\ &= \partial'^\mu \partial'_\mu = \frac{1}{c'^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \Delta' = -\square' \end{aligned}$$

L-invarianter und forminvarianter OperatorKontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad (20)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} c\rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (21)$$

Offensichtlich: L-kovariante Formulierung der Ladungserhaltung

$$\vec{\partial} \cdot \vec{j} = 0$$

(10)

Viererpotential  $\vec{A}$ Feldgleichungen für die elm. Potentiale  $\phi, \vec{A}$ :

$$\text{(II.13a): } \square \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} \right) = -\frac{4\pi E}{c} c\rho$$

$$\text{(II.13b): } \square \vec{A} - \operatorname{grad} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} \right) = -\frac{4\pi E}{c} \vec{j} \quad (14a)$$

Frage: Gibt es ein Transformationsgesetz für  $\phi, \vec{A}$ ,

welches zusammen mit den bekannten

L-Transformationen von  $(ct, \vec{r})$  undvon  $(c\rho, \vec{j})$  diese Gln. forminvariant läßt?Bemerkung: Stellt man die analoge Frage für die GI,so lautet die Antwort "Nein"!

HIER:

Antwort: "Ja"Postulieren wir dieses Transformationsgesetz:für  $\phi, \vec{A}$ , so erhalten wir eine L-kovariante Theorie.Postulat: Viererpotential

$$\vec{A}: S: (A'^\mu) = (\phi, \vec{A})$$

$$S': (A'^\mu) = (\phi', \vec{A}')$$

⋮

Damit folgt:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi + \text{div} \vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi + \nabla \cdot \vec{A}$$

$$= \partial_\mu A^\mu = \vec{\partial} \cdot \vec{A} \quad (9)$$

$$\square \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\underbrace{\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi + \text{div} \vec{A}}_{\vec{\partial} \cdot \vec{A}}) = - \underbrace{\frac{4\pi}{c} \rho}_{\text{inv. } j^0}$$

$$\underbrace{-\vec{\partial} \cdot \vec{\partial}}_{A^0} \phi + \underbrace{(-\frac{\partial}{\partial x})}_{A^1} (\underbrace{\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi + \text{div} \vec{A}}_{\vec{\partial} \cdot \vec{A}}) = - \underbrace{\frac{4\pi}{c} j_x}_{j^1}$$

analog y-, z-Komponente

$$\boxed{(-\vec{\partial} \cdot \vec{\partial}) \vec{A} + \vec{\partial} (\vec{\partial} \cdot \vec{A}) = - \frac{4\pi}{c} \vec{j}} \quad (11a)$$

offensichtlich L-kovariante Formulierung der FG für die elm. Potentiale

Bezüglich Eichung und Eichtransformationen s. IX.2.A.

IX-6

IX.1.B. Feldtensor.

Maxwellgleichungen 1. Teil

(Coulombsches und Amperesches Gesetz)

$$\vec{E} = -\text{grad} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

Definition: Feldtensor (Feldstärketensor) des elm. Feldes

$\vec{F}: S: (F^{\mu\nu})$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (12)$$

Es gilt

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \quad \text{antisymmetrischer Tensor 2. Stufe} \quad (13)$$

$\Rightarrow \exists$  6 unabhängige Komponenten

Zeige selbst:  $F^{01} = \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 = \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = -E_x$  usf.

Zeile Spalte

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

"ELEKTROMAGNETISCHES FELD" Maßsystem!

IX-7



IX-8

$$\text{(11a)}: -\partial_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = -\frac{4\pi}{c} j^\nu$$

$$\partial_\mu (\underbrace{\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu}_{F^{\mu\nu}}) = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

Somit:  
 Offensichtlich L-kovariante Formulierung der  
 Maxwellgleichungen 1. Teil (Gln. mit Quelltermen)

$$\text{div } \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \rho \quad (3)$$

$$\text{rot } \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

----- "Verkehlungskern"  
 (kein Quellterm,  
 Verschreibung = Strom des Vakuums)

S:  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$

S':  $\partial'_\mu F'^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j'^\nu$

Bemerkung:  
 Symbolisch (bezugssystemunabhängig) kann man  
 schreiben:

$$\vec{\partial} \cdot \vec{F} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\vec{F} = F^{\mu\nu} \vec{e}_\mu \circ \vec{e}_\nu, \quad \vec{\partial} = \partial_\sigma \vec{e}^\sigma$$

$$\vec{j} = j^\nu \vec{e}_\nu \quad \text{und} \quad \vec{\partial}^\sigma \cdot \vec{e}_\mu = \delta^\sigma_\mu = \delta^\sigma_\mu$$

Mit  
 erhält man sofort wieder Gl. (15).

IX-9  
ABER: Symbolische Schreibweise wird in der  
 Feldtheorie nicht verwendet, da  
 1) für Beweistechnik unvorteilhaft  
 2) nicht auf Tensoren höherer als 2. Stufe  
 verallgemeinerbar

IX.1.C. Zu  $\vec{F}$  dualer Feldtensor  $\hat{F}$

Maxwellgleichungen 2. Teil (Quellenfreiheit  
 des Magnetfeldes und Faradaysches Gesetz)

Definition 1: vollständig antisymmetrischer Tensor  
 4. Stufe (Levi-Civita-Tensor)

$$\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (\mu\nu\sigma\tau) \text{ gerade Permutation} \\ & \text{von } (0123) \text{ ist} \\ -1 & \text{falls } (\mu\nu\sigma\tau) \text{ ungerade Permutation} \\ & \text{von } (0123) \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (16)$$

Bemerkung: Pseudotensor unter räumlichen Spiegelungen

Definition 2: zu  $\vec{F}$  dualer Tensor  $\hat{F}$   
 ("dualer Feldtensor")

$$\hat{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} F_{\sigma\tau} \quad (17a)$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu \hat{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} \partial_\mu F_{\sigma\tau} \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} \partial_\mu (\partial_\sigma A_\tau - \partial_\tau A_\sigma) \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} \partial_\mu \partial_\sigma A_\tau - \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} \partial_\mu \partial_\tau A_\sigma \\
 &= \frac{1}{2} (\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} \partial_\mu \partial_\sigma A_\tau - \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} \partial_\mu \partial_\tau A_\sigma) \\
 &= \frac{1}{2} (\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} - \epsilon^{\mu\nu\tau\sigma}) \partial_\mu \partial_\sigma A_\tau \\
 &= \frac{1}{2} (\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} + \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau}) \partial_\mu \partial_\sigma A_\tau \\
 &= \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} \partial_\mu \partial_\sigma A_\tau = 0
 \end{aligned}$$

also allein aus Definition des Feldensors!  
 $\partial_\mu \hat{F}^{\mu\nu} = 0$  folgen

(182)

Offensichtlich L-kovariante Formulierung der Maxwellgleichungen 2. Teil (Gln. ohne Quellterme)

$$\begin{aligned}
 \text{div } \vec{B} &= 0 \\
 \text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{0}
 \end{aligned}$$

$$\partial_\mu \hat{F}^{\mu\nu} = 0$$

(18a)

zu Gl. (18a): Führe die folgenden Rechnungen selbst durch!

1) Aus Gl. (14)

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

folgt mit

$$F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} F^{\mu\nu} = g_{\alpha\mu} F^{\mu\nu} g_{\nu\beta}$$

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

2) Daraus folgt mit

$$\hat{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} F_{\sigma\tau}$$

$$(\hat{F}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

(17b)

Beachte:  $(F^{\mu\nu}) \rightarrow (\hat{F}^{\mu\nu})$  formal durch



3) Damit sieht man unmittelbar:

$$\partial_\mu \hat{F}^{\mu 0} = 0 \iff \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \partial_\mu \hat{F}^{\mu i} = 0 \\ i=1,2,3 \end{array} \right\} \iff \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$$

4) Man kann leicht zeigen, dass "Verkettungsterm" (kein Quellterm) den vier Gln. (18a) die vier Gln.

$$\partial^\sigma F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\sigma\mu} + \partial^\mu F^{\nu\sigma} = 0 \quad (19)$$

$$(\sigma, \mu, \nu) = (0,1,2), (0,1,3), (0,2,3), (1,2,3)$$

äquivalent sind.

Die Gln. für andere Wertetriple von  $(\sigma, \mu, \nu)$

sind trivialerweise erfüllt; z.B.  $(\sigma, \mu, \nu) = (0,1,1)$ :

$$\underbrace{\partial^0 F^{11}}_0 + \underbrace{\partial^1 F^{10}}_{-F^{10}} + \underbrace{\partial^1 F^{01}}_0 = 0 \quad \perp \text{ äquivalent oder}$$

### IX.1.D. Kontinuitätsgleichung und Ladungserhaltung

#### Kontinuitätsgleichung

Haben wir bereits offensichtlich L-kovariant angeschrieben:

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

(21)

Mathematisch betrachtet ist sie

Integrabilitätsbedingung der Maxwell-Gln.:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \implies \underbrace{\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu}}_{\partial_\mu \partial_\nu - F^{\nu\mu}} = \frac{4\pi}{c} \partial_\nu j^\nu \quad (22)$$

Physikalisch betrachtet drückt sie raum-zeitlich lokal die Ladungserhaltung aus. Global gilt:

Ladungserhaltung:

Für eine räumlich lokalisierte Quellverteilung ist

$$Q = \int d^3r \rho(\vec{r}, t) \quad \text{zeitunabhängig} \quad (25b)$$

Beweis mit Hilfe des vierdimensionalen Gaußschen

Integralsatzes:

HIER NUR SKIZZIERT: näheres dazu s. Skriptum  
Anhangs A.1.3, A.1.4

$\mathcal{V}$  beliebiges vierdimensionales Gebiet

$$d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = L\text{-Invariante}^{+1}$$

Vierdimensionales Volumenelement

+1 Pseudoskalar

$\mathcal{R}(U)$  dreidimensionale Berandung von  $U$

= dreidimensionale geschlossene Hyperfläche

$$x^\mu = x^\mu(\mu, \nu, \omega)$$

$d^3\sigma^\mu$  dreidimensionales "vektorielles"

Hyperflächenelement = Vierervektor,

"Senkrecht" zur Hyperfläche,

"Betrag" = Inhalt des Hyperflächen=elementes

$$d^3\sigma_\mu = \epsilon_{\mu\nu\omega\tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \mu} \frac{\partial x^\omega}{\partial \nu} \frac{\partial x^\tau}{\partial \omega} du dv d\omega$$

Gaußscher Satz ( $d^3\sigma^\mu$  nach "außen" orientiert)

$$\int_U d^4x \partial^\mu \dots = \oint_{\mathcal{R}(U)} d^3\sigma^\mu \dots \quad (23)$$

$\Sigma$  raumartige dreidimensionale Hyperfläche:

beliebige Weltpunkte (Ereignisse) auf  $\Sigma$

besitzen raumartigen Abstand

$d^3\sigma^\mu$  zeitartig, zukunftsgerichtet gewählt

$$(d^3\sigma^\mu) = \underbrace{(dx^1 dx^2 dx^3)}_{d^3r > 0}, dx^2 dx^3 dx^0, dx^3 dx^0 dx^1, dx^0 dx^1 dx^2$$

Spezialfall:  $\Sigma$  Zeithyperebene

$$x^0 = \text{konst.}$$

$$x^1 = \mu$$

$$x^2 = \nu$$

$$x^3 = \omega$$

$$(d^3\sigma^\mu) = (d^3r, 0, 0, 0)$$

Offensichtlich L-kovariante Formulierung des globalen Erhaltungssatzes der Ladung

$$\int_U d^4x \underbrace{\partial^\mu j_\mu}_0 = \oint_{\mathcal{R}(U)} d^3\sigma^\mu j_\mu \Rightarrow \oint_{\mathcal{R}(U)} d^3\sigma^\mu j_\mu = 0 \quad (24)$$

Spezielle Wahl von  $U$ :  $U$  sei von zwei raumartigen Hyperflächen  $\Sigma_1, \Sigma_2$  (beide zukunftsorientiert)

und einer im räumlich Unendlichen liegenden

"Seiten"-Hyperfläche  $\Gamma$  begrenzt.

Dann lautet (24):

$$\int_{\Sigma_1} d^3\sigma^\mu j_\mu - \int_{\Sigma_2} d^3\sigma^\mu j_\mu + \int_{\Gamma} d^3\sigma^\mu j_\mu = 0$$

0 für räumlich lokalisierte Quellen  
offensichtlich L-kov. Erhaltungssatz

$$\Rightarrow \int_{\Sigma_1} d^3\sigma^\mu j_\mu = \int_{\Sigma_2} d^3\sigma^\mu j_\mu$$

Weitere Spezialisierung:

$\Sigma_1$  Zeithyperebene  $x^0 = ct_1$

$\Sigma_2$  Zeithyperebene  $x^0 = ct_2$

$$\int_{\Sigma_1} d^3\sigma^\mu j_\mu = \int_{\Sigma_2} d^3\sigma^\mu j_\mu$$

$$\int d^3r j_0(ct_1, \vec{r}) = \int d^3r j_0(ct_2, \vec{r})$$

$$\int d^3r \rho(\vec{r}, t_1) = \int d^3r \rho(\vec{r}, t_2)$$

$t_1, t_2$  beliebig fest

$(d^3\sigma^\mu)$

$$= (d^3r, 0, 0, 0)$$

(25a)

(25b)

IX.2. Transformation der Feldstärken.

Feldinvarianten

IX.2.A. Transformation der Feldstärken

Eichtransformationen

(II.14b):  $\phi \longrightarrow \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \psi$

(II.14a):  $\vec{A} \longrightarrow \vec{A} - \text{grad} \psi$

In "Vierschreibweise":

$$A^\mu \longrightarrow A^\mu + \partial^\mu \psi$$

$$\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu}$$

$$\partial^\mu (A^\nu + \partial^\nu \psi) - \partial^\nu (A^\mu + \partial^\mu \psi) = F^{\mu\nu}$$

Lorenzgleichung

(II.15):  $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi_L + \text{div} \vec{A}_L = 0$

Stellt eine L-kovariante Beziehung dar:

$$\partial_\mu A_L^\mu = 0 \quad (28)$$

Lorenzgleichung bleibt also bei Bezugssystemwechsel erhalten (Coulombgleichung nicht!)

FG für  $(A_L^\mu)$ :

$$\partial_\mu \partial^\mu A_L^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

-□

LT der Feldstärken

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta}$$

In Matrixschreibweise: Wegen  $F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta}$

$$F' = \Lambda F \Lambda^T$$

$${}^{st}\Delta = ({}^{st}\Lambda)^\alpha =$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{{}^{st}\Delta}_{(30)}$$

Beachte: Für allgemeine LT gilt  $\Delta^T = \Delta$  nicht!

$$\begin{pmatrix} 0 & -E'_x & -E'_y & -E'_z \\ E'_x & 0 & -B'_z & B'_y \\ E'_y & B'_z & 0 & -B'_x \\ E'_z & -B'_y & B'_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \quad (32)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ausmultiplizieren gibt:

$E'_x = E_x$	$B'_x = B_x$
$E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z)$	$B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z)$
$E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y)$	$B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y)$

Standard-LT der Feldstärken (33)

IX.2.B. Feldinvarianten

Da  $\vec{F}$  antisymmetrisch ist, kann man aus den Komponenten des Feldtensors durch "Verjüngen" und "Überschieben" nur zwei unabhängige nichttriviale Viererskalenfelder (L-invariante Felder) bilden:

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad F^{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu}$$

Beachte:  $F^\mu{}_\mu = F^\mu{}_\mu = \hat{F}^\mu{}_\mu = \hat{F}^\mu{}_\mu = 0$ , da  $\vec{F}$  und damit  $\hat{F}$  antisymmetrisch, also triviale Viererskalenfelder. Ferner:  $F^{\mu\nu} F_{\nu\mu} = -F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ , wegen Antisymmetrie, also "nichts Neues" (nicht unabhängig von obigen Größen).

Weniger offensichtlich (s. weiter unten):

$$\hat{F}^{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu} = -F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

also auch "nichts Neues".  
Ausrechnung gibt:  $(F^{\mu\nu}) \rightarrow (F^{\mu\nu})!$

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2), \quad F^{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu} = -4\vec{E} \cdot \vec{B} \quad (34)$$

"Feldinvarianten" des elm. Feldes

Für beliebige LT  $S \rightarrow S'$  gilt also

$$\begin{aligned} \vec{E}^2(F, t) - \vec{B}^2(F, t) &= \vec{E}'^2(F', t') - \vec{B}'^2(F', t') \\ \vec{E}(F, t) \cdot \vec{B}(F, t) &= \vec{E}'(F', t') \cdot \vec{B}'(F', t') \end{aligned} \quad (35)$$

IX.3. Kraft- und Energiebeziehungen

IX.3.A. Lorentz-Viererkraftdichte

Definition: Lorentz-Viererkraftdichte

$$f^\mu = \frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu$$

(39)

Mit

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$(j_\nu) = (c\rho, -j_x, -j_y, -j_z)$$

folgt

$$f^0 = \frac{1}{c} F^{0\nu} j_\nu = \frac{1}{c} \vec{E} \cdot \vec{j}$$

$$f^1 = \frac{1}{c} F^{1\nu} j_\nu = \frac{1}{c} E_x c\rho + \frac{1}{c} (B_z j_y - B_y j_z)$$

$$f^1 = \rho E_x + (\vec{j} \times \vec{B})_x, \quad f^2, f^3 \text{ analog}$$

also

$$(f^\mu) = (f^0, \vec{f}) \text{ mit } f^0 = \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{E} \tag{38}$$

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \tag{36}$$

Folgerungen: Am selben Ereignis E

$$S: (x^\mu) = (ct, \vec{F})$$

$$S': (x'^\mu) = (ct', \vec{F}')$$

⋮

gilt:

1) Ist in einem Inertialsystem der Betrag der elektrischen Feldstärke kleiner (gleich) [größer] als der Betrag der magnetischen Feldstärke, so gilt dies in allen Inertialsystemen.

2) Ist in einem Inertialsystem der Winkel zwischen elektrischer und magnetischer Feldstärke  $> \frac{\pi}{2}$  ( $= \frac{\pi}{2}$ ) [ $< \frac{\pi}{2}$ ], so gilt dies in allen Inertialsystemen.

3) Sind in einem Inertialsystem elektrische und magnetische Feldstärke zueinander senkrecht und von gleichem Betrag, so gilt dies in allen Inertialsystemen.

4) Gilt in einem Inertialsystem  $S \quad \vec{E} = \vec{0} \quad (\vec{B} = \vec{0})$ , so gilt in einem beliebigen gegenüber  $S$  bewegten Inertialsystem  $S' \quad \vec{E}' \perp \vec{B}'$ .

5) Ohne Beweis (offensichtlich konsistent mit Feldinvarianten):

Gilt in einem Inertialsystem  $S \quad \vec{E} \perp \vec{B}$  und  $|\vec{E}| > |\vec{B}|$  ( $\vec{E} \perp \vec{B}$  und  $|\vec{E}| < |\vec{B}|$ ), so gibt es Inertialsysteme  $S'$  mit  $\vec{B}' = \vec{0}$  ( $\vec{E}' = \vec{0}$ ).

Somit:

1) "räumliche" Komponenten der Lorentz-Viererkraftdichte  
= gewöhnliche Lorentz- (Dreier-) Kraftdichte

Von Gl. (I.41e).

2)  $c f^0$  = Leistungsdichte = vom Feld pro  
Zeit- und Volumseinheit an den Ladungen  
geleistete Arbeit

Elimination des Viererstromes und Umformung

mit Hilfe der Maxwell-Gln.: Ziel:  $\frac{1}{c} f^\mu = -\partial_\nu T^{\nu\mu}$ 

$$(39): \quad f^\mu = \frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu$$

$$(45): \quad \partial^\sigma F_{\sigma\nu} = \frac{4\pi c}{c} j_\nu$$

$$(49): \quad \partial^\sigma F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\sigma} + \partial^\nu F^{\sigma\mu} = 0$$

$$(39): \quad \frac{1}{c} f^\mu = \frac{1}{c} F^{\mu\nu} \frac{1}{c} j_\nu = \frac{1}{4\pi c} F^{\mu\nu} \partial^\sigma F_{\sigma\nu} \quad (40)$$

$$(15): \quad \frac{1}{4\pi} \partial^\sigma F_{\sigma\nu}$$

$$= \frac{1}{4\pi c} \partial^\sigma (F^{\mu\nu} F_{\sigma\nu}) - \frac{1}{4\pi c} F_{\sigma\nu} \partial^\sigma F^{\mu\nu}$$

$$\text{Ziel: } \frac{1}{c} f^\mu = -\partial_\nu T^{\nu\mu} \quad \text{IX-23}$$

$$\frac{1}{c} f^\mu = \frac{1}{4\pi c} \partial^\sigma (F^{\mu\nu} F_{\sigma\nu}) - \frac{1}{4\pi c} F_{\sigma\nu} \partial^\sigma F^{\mu\nu}$$

I II

$$\text{I: } \partial^\sigma (F^{\mu\nu} F_{\sigma\nu}) = \partial^\nu (F^{\mu\sigma} F_{\nu\sigma})$$

$$\Rightarrow F_{\sigma\nu} = -g_{\nu\tau} F_{\sigma}^{\tau}$$

$$= -g_{\nu\tau} \partial^\nu (F^{\mu\sigma} F_{\sigma}^{\tau}) = -\partial_\nu (F^{\mu\sigma} F_{\sigma}^{\nu})$$

I

$$\text{II: } F_{\sigma\nu} \partial^\sigma F^{\mu\nu} = F_{\nu\sigma} \partial^\nu F^{\mu\sigma} - F_{\sigma\nu} \partial^\nu F^{\sigma\mu}$$

$$= \frac{1}{2} F_{\sigma\nu} (\partial^\sigma F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\sigma\mu})$$

$$(19): \quad -\partial^\mu F_{\nu\sigma} = \partial^\mu F_{\sigma\nu}$$

Zuerst:  $\nu$

$$= \frac{1}{2} F_{\sigma\nu} \partial^\mu F_{\sigma\nu} = \frac{1}{4} \partial^\mu (F_{\sigma\nu} F^{\sigma\nu})$$

hierauf:  $\nu$

$$= \partial_\nu \left( \frac{1}{4} g^{\mu\sigma} F_{\sigma\tau} F^{\tau\sigma} \right)$$

II



$$\frac{1}{c} f^\mu = -\partial_\nu \left\{ \frac{1}{4\pi c} (F^{\mu\sigma} F^\nu{}_\sigma + \frac{1}{4} g^{\nu\mu} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau}) \right\} \quad (41)$$

IX.3.B. Energie-Impuls Vierertensor  
des elm. Feldes

Definition: Energie-Impuls-Vierertensor

$$T^{\nu\mu} = \frac{1}{4\pi c} (F^{\mu\sigma} F^\nu{}_\sigma + \frac{1}{4} g^{\nu\mu} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau}) \quad (42)$$

Damit gilt:

$$\frac{1}{c} f^\mu = -\partial_\nu T^{\nu\mu} \quad (43)$$

Symbolisch geschrieben:

$$\frac{1}{c} \vec{f} = -\vec{\partial} \cdot \vec{T}$$

$\frac{1}{c}$  Viererkraftdichte

"Vierendivergenz" von  $\vec{T}$

$\vec{T}$  ist symmetrisch:  $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$

Beweis: 1. Term in (42)

$$F^{\mu\sigma} F^\nu{}_\sigma = g_{\sigma\tau} F^{\mu\sigma} F^{\tau\nu} = -g_{\sigma\tau} F^{\mu\sigma} F^{\nu\tau}$$

symmetrisch, 2. Term symmetrisch.

Berechnung (Details s. Unterlagen)

$$T^{\nu\mu} = \frac{1}{4\pi c} ( \underbrace{F^{\mu\sigma} F^\nu{}_\sigma}_{\text{Faktor "1. Term"}} + \underbrace{\frac{1}{4} g^{\nu\mu} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau}}_{\text{"2. Term"}} )$$

"1. Term":  $F^\nu{}_\sigma = g_{\sigma\tau} F^{\tau\nu}$  gibt

$$(F^\nu{}_\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Damit folgt:

$$(F^{\mu\sigma} F^\nu{}_\sigma) =$$

$$\begin{pmatrix} \vec{E}^2 & (\vec{E} \times \vec{B})_x & (\vec{E} \times \vec{B})_y & (\vec{E} \times \vec{B})_z \\ \cdot & B^2 - (E_x^2 + B_x^2) & -E_x E_y - B_x B_y & -E_z E_x - B_z B_x \\ \cdot & \cdot & B^2 - (E_y^2 + B_y^2) & -E_y E_z - B_y B_z \\ \cdot & \cdot & \cdot & B^2 - (E_z^2 + B_z^2) \end{pmatrix}$$

"2. Term": (34a):  $F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau} = -2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \Rightarrow$

$$\left( \frac{1}{4} g^{\nu\mu} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau} \right) = -\frac{1}{2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \text{ diag}(1, -1, -1, -1)$$

$$\omega_{em} = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \quad \text{Energiedichte (II.46)}$$

$$\vec{g}_{em} = \frac{1}{4\pi c} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{\vec{S}}{c^2}$$

$\vec{S}$  Energiestromdichte (II.45)

$\vec{g}_{em}$  Impulsdichte (II.53)

$$T_{jk}^{(M)} = \frac{1}{4\pi} [E_j E_k + B_j B_k - \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \delta_{jk}]$$

Maxwell'scher Spannungstensor  
(= -Impulsstromdichtetensor) (II.52)  
des elm. Feldes

für den Energie-Impuls-Vierertensor

$$(T^{\nu\mu}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \omega_{em} & g_{em,x} & g_{em,y} & g_{em,z} \\ g_{em,x} & (-\frac{1}{c} T_{jk}^{(M)}) & & \\ g_{em,y} & & & \\ g_{em,z} & & & \end{pmatrix}$$

(45)

$$\frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} S_x & S_y & S_z \\ S_x & S_y & S_z \\ S_x & S_y & S_z \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix}$$

IX.3.C. Bilanzgleichungen

$$\left. \begin{aligned} f^\mu &= \frac{1}{c} F^{\nu\mu} j_\nu \\ \frac{1}{c} f^\mu &= -\partial_\nu T^{\nu\mu} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\partial_\nu T^{\nu\mu} + \frac{1}{c} F^{\nu\mu} j_\nu = 0 \quad (46)$$

lokale Energie und Impulsbilanz

für das aus elm. Feld und Quellen bestehende Gesamtsystem

Zerlegung in 0-Komponente und "räumliche" Komponenten:

$$\left( \frac{1}{c} F^{\nu\mu} j_\nu \right) = \left( \frac{1}{c} f^\mu \right) = s. (36), (38)$$

$$= \left( \frac{1}{c^2} \vec{j} \cdot \vec{E}, \frac{1}{c} [\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}] \right)$$

$$\left( \partial_\nu T^{\nu\mu} \right) = \left( \partial_\nu T^{\nu 0}, \partial_\nu T^{\nu 1}, \partial_\nu T^{\nu 2}, \partial_\nu T^{\nu 3} \right)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{c} \omega_{em} + \vec{\nabla} \cdot \vec{g}_{em} \quad \xrightarrow{\frac{1}{c^2}}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} g_{em,x} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\frac{1}{c} T_{j1}^{(M)} \right)$$

analog

$$\partial_r T^{rk} + \frac{1}{c^2} F^{kr} j_r = 0$$

↕

s. Abschnitt  
II.4. A, II.4. B

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \omega_{em} + \nabla \cdot \vec{S} + \vec{j} \cdot \vec{E} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} g_{em} + \nabla \cdot (-\vec{T}^{(M)}) + \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} &= \vec{0} \end{aligned} \quad (47)$$

Definition: Viererimpuls des elm. Feldes  
(Z Zeithyperebene)

$$P_{field}^{\mu} = \int_Z d^3r T^{r\mu} = \int d^3r T^{0\mu} \quad (48)$$

Accs  $\partial_r T^{rk} + \frac{1}{c} f^k = 0$

folgt dann

$$T^{00} = \frac{1}{c} \omega_{em}$$

$$T^{01} = g_{em,x}$$

usf.

$$\int d^3r \partial_r T^{rk} + \frac{1}{c} \int d^3r f^k = 0$$

$$\int d^3r \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} T^{0k} + \frac{\partial}{\partial x^i} T^{ik} \right) + \frac{1}{c} \int d^3r f^k = 0$$

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \underbrace{\int d^3r T^{0k}}_{P_{field}^k} + \frac{1}{c} \int d^3r f^k = - \int d^3r \frac{\partial}{\partial x^i} T^{ik} = \frac{d}{dt} P_{mech}^k \quad (49)$$

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} (P_{mech}^k + P_{field}^k) = - \int d^3r \frac{\partial}{\partial x^i} T^{ik} \quad (50)$$

$\mu=0$ : Energieerhaltungssatz (II.49) Gauß  
 $\mu=1,2,3$ : Impulserhaltungssatz (II.56)

IX.3.D. Bewegungsgleichung für eine

Punktladung in einem äußeren elm. Feld

BG:

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\vec{p}(t) = \vec{F}(t)}_{m \gamma(u(t)) \vec{u}(t)} = \underbrace{q \left[ \vec{E}(F(t), t) + \frac{\vec{u}(t)}{c} \times \vec{B}(F(t), t) \right]}_{\text{(Dreier-) Lorentzkraft}} \quad (51)$$

⇒ AS:

$$\frac{d}{dt} \underbrace{(m \gamma(u(t)) c^2)}_{mc^2 + T(t)} = \vec{F}(t) \cdot \vec{u}(t) = q \vec{E}(F(t), t) \cdot \vec{u}(t) \quad (52)$$

Zusammengefaßt in Vierergleichung, und damit offensichtlich L-kovariant formuliert

$$\frac{d}{dt} p^k = F^k \quad \text{mit} \quad p^k = m u^k$$

und  $(F^k) = (\gamma(u) \frac{\vec{E} \cdot \vec{u}}{c}, \gamma(u) \vec{F}) = q \gamma(u) \left( \frac{\vec{E} \cdot \vec{u}}{c}, \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} \right)$

$$(F^\mu) = \frac{q}{c} \gamma(\mu) \left( \frac{\vec{E} \cdot \vec{u}}{c}, \vec{E} + \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \right)$$

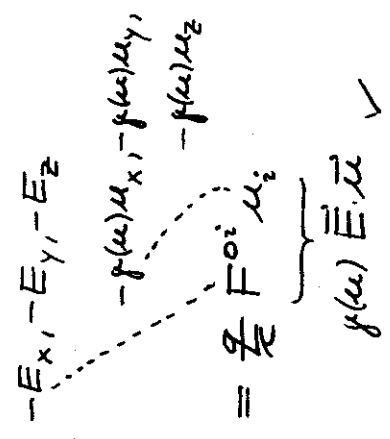
Vierer-Lorentzkraft

muss sich durch Feldtensor und Vierergeschwindigkeit ausdrücken lassen

Vierergeschwindigkeit ausdrücken lassen

Es gilt:

$$F^\mu = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu$$



$$\underline{\mu=0}: F^0 = \frac{q}{c} F^{0i} u_i = \frac{q}{c} \vec{E} \cdot \vec{u} \quad \checkmark$$

$$\underline{\mu=1}: F^1 = \frac{q}{c} F^{1\nu} u_\nu = \frac{q}{c} [ F^{10} u_0 + F^{1i} u_i ]$$

$$= \frac{q}{c} [ F^{10} u_0 + F^{1i} u_i ] \quad (F^{11} = 0)$$

$$= \gamma(\mu) E_x + \gamma(\mu) (B_z u_y - B_y u_z)_x \quad \checkmark$$

$$= \gamma(\mu) (\vec{u} \times \vec{B})_x$$

$\mu=2,3$  analog

BG: (bei Vernachlässigung der Selbstkraft = Strahlungsrückwirkungskraft)

$$m \frac{du^\mu}{dt} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu \quad (53)$$

IX.4. Monochromatische ebene Wellen.

Dopplereffekt und Aberration

IX.4.A. Monochromatische ebene Wellen

Homogene Maxwellgleichungen:

$$\partial_\sigma F^{\sigma\nu} = 0 \quad (54)$$

$$\partial_\sigma | \partial^\sigma F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\sigma} + \partial^\nu F^{\sigma\mu} = 0 \quad (55)$$

$$\underbrace{\partial_\sigma \partial^\sigma F^{\mu\nu}}_{-\square} + \underbrace{\partial^\mu \partial_\sigma F^{\nu\sigma}}_0 + \underbrace{\partial^\nu \partial_\sigma F^{\sigma\mu}}_0 = 0$$

$\square F^{\mu\nu} = 0$  Wellengleichungen  
notwendig für die Erfüllung der Max-Gln. (54), (55)

$$(56)$$

Ansatz:

$$F^{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3) = f^{\mu\nu} e^{-ik_\sigma x^\sigma} \quad (57)$$

$\vec{k}$  (Kreis-)Wellenzahlvierervektor

Behauptung:

Notwendige Bedingung für Erfüllung von (56):

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = 0 \quad (\vec{k} \text{ "lichtartig"}) \quad (58)$$

Beweis:

$$\square F^{\mu\nu} = f^{\mu\nu} \underbrace{\square e^{-ik_\sigma x^\sigma}}_0 = 0$$

nicht  $\forall \mu, \nu$  gleich 0  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \partial_\alpha \square e^{-ik_\sigma x^\sigma} &= -g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta e^{-ik_\sigma x^\sigma} \\ &= -g^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta e^{-ik_\sigma x^\sigma} = 0, \quad \forall x^0, x^1, x^2, x^3 \\ (\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}) \quad \vec{k} \cdot \vec{k} &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\underline{-ik_\sigma x^\sigma = i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)},$$

so folgt  $\frac{\omega}{c} ct$

$$k_\sigma x^\sigma = k_0 x^0 + k_i x^i = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$$

$$\begin{aligned} (k^\mu) &= (k^0, \vec{k}) = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right) \quad (59) \\ \Rightarrow k \cdot k &= 0 \Leftrightarrow \omega = c |\vec{k}| = ck \quad (60) \end{aligned}$$

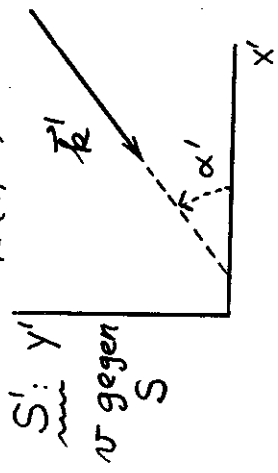
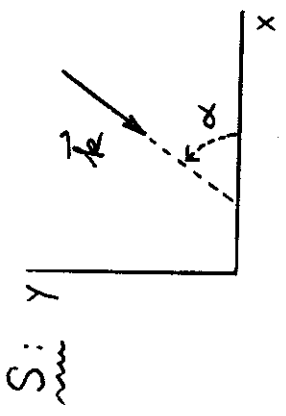
Dispersionsbeziehung (V.9)

Stoßprozesse: Photon: Einstein, de Broglie

$$\underline{(p^\mu) = (h k^\mu) = \left(\frac{h\omega}{c}, h\vec{k}\right) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)} \quad (61)$$

IX.4.B. Dopplereffekt

Standard-LT für  $\vec{k}$ :  $(k^\mu) = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right) = k(1, \vec{n})$



$$\vec{k} = k \vec{n} = \frac{\omega}{c} \vec{n} \quad \vec{k}' = k' \vec{n}' = \frac{\omega'}{c} \vec{n}'$$

$(k^\mu) = k(1, -\cos\alpha, -\sin\alpha, 0)$	$(k'^\mu) = k'(1, -\cos\alpha', -\sin\alpha', 0)$
---	---

(62)

$$\begin{aligned} k^0 &= \gamma(k^0 - \beta k^1) \\ k^1 &= \frac{\omega'}{c} \quad -k \cos\alpha = -\frac{\omega}{c} \cos\alpha \\ k &= \frac{\omega}{c} \end{aligned}$$

$$\omega' = \omega \gamma (1 + \beta \cos\alpha) \quad (64)$$

Dopplereffekt

$$\omega' = \omega \gamma (1 + \beta \cos \alpha)$$

### Spezialfälle

#### a) Longitudinaler Dopplereffekt



$$\alpha = 0$$

$$\alpha = \pi$$

$$\omega' = \omega \gamma (1 + \beta) \quad \omega' = \omega \gamma (1 - \beta) \quad (65)$$

Effekt 1. Ordnung in  $\beta$

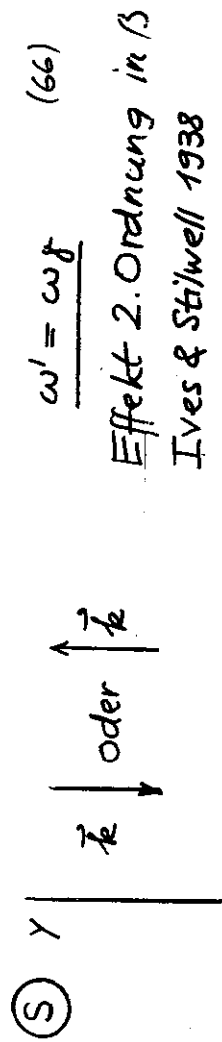
Vorrelativistisch: Falls S Äthersystem analoge

Formeln, allerdings ohne  $\gamma$ -Faktoren.

Unterschiede zu SRT also erst in

2. Ordnung in  $\beta$

#### b) Transversaler Dopplereffekt



$$\omega' = \omega \gamma \quad (66)$$

Effekt 2. Ordnung in  $\beta$

Ives & Stilwell 1938

Vorrelativistisch: kein Effekt

SRT: Zeitdilatation!

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{3\pi}{2}$$

### IX.4.C. Aberration

$$(k^{\mu}) = k (1, -\cos \alpha, -\sin \alpha, 0)$$

$$(k'^{\mu}) = k' (1, -\cos \alpha', -\sin \alpha', 0)$$

### Standard-LT

$$k^0 = \gamma (k^0 - \beta k^1) \quad k^1 = k \gamma (1 + \beta \cos \alpha)$$

$$k^1 = \gamma (k^1 - \beta k^0) \quad k^1 \cos \alpha' = k \gamma (\cos \alpha + \beta)$$

$$k^2 = k^2 \quad k^1 \sin \alpha' = k \sin \alpha$$

$$k^3 = k^3 \quad 0 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha' = \frac{\sin \alpha}{\gamma (1 + \beta \cos \alpha)} \\ \cos \alpha' = \frac{\cos \alpha + \beta}{1 + \beta \cos \alpha} \end{cases}$$

(68a)

(68b)

$$\sin^2 \alpha' + \cos^2 \alpha' = 1 \quad \checkmark$$

Bemerkung: Siehe die Anwendungen in Abschnitt VIII.4 (Folien VIII-52', VII-52" und VII-57', VII-58.)

Setzt man in

$$\cos \alpha' = \frac{\cos \alpha + \beta}{1 + \beta \cos \alpha}$$

die Identitäten

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \beta = \alpha', \alpha$$

ein, so erhält man (s. Skriptum)

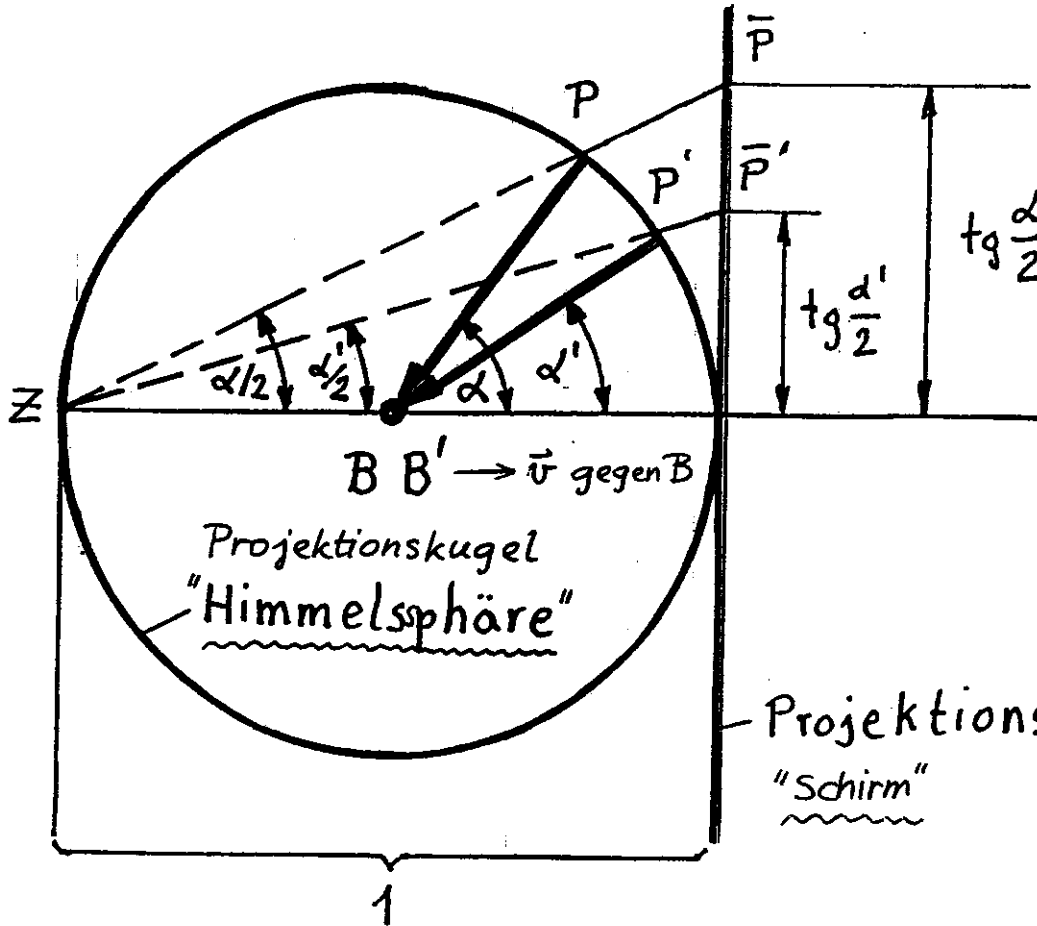
$$\tan \frac{\alpha'}{2} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \tan \frac{\alpha}{2}$$

(69)

Penrose 1959: Der Inhalt dieser Aberrationsformel kann als stereografische Projektion plus zentrische Streckung interpretiert werden.

Diese Abbildung ist konform (winkeltreu), Kreise (und Geraden) der Projektionsebene ("Schirm") werden auf Kreise auf der Projektionskugel ("Himmelsphäre") abgebildet und umgekehrt.

⇒ Unsichtbarkeit der Längenkontraktion für ein Objekt, welches in seinem Ruhesystem eine Kugel ist, für beliebige (relativ zu diesem Objekt beliebig nahe oder ferner und beliebig bewegte) Beobachter.



$$\begin{aligned} \tan \frac{\alpha}{2} &= f \cdot \tan \frac{\alpha'}{2} \\ f &= \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} > 0 \end{aligned}$$

Projektionsebene  
"Schirm"

1

# X. RELATIVISTISCHE HAMILTON = FUNKTIONEN

## X.1. Lagrange- und Hamiltonformalismus

### X.1.A. Grundlagen

Rekapitulation aus der klassischen Mechanik:

- Newtonsche Dynamik
- Nebenbedingungen, Zwangskräfte
- verallgemeinerte Koordinaten und Kräfte
- d'Alembertsches Prinzip
- Lagrangesche Gleichungen 1. Art, 2. Art

s. Skriptum

### X.1.B. Hamiltonsches Prinzip

(Extremalprinzip für die Wirkung)

für ein mechanisches System

System mit endlich vielen Freiheitsgraden =

mechanisches System

$q_1, q_2, \dots, q_f$  verallgemeinerte Koordinaten

$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f$  verallgemeinerte Geschwindigkeiten

$f$  Anzahl der Freiheitsgrade (endlich)



X-2

Ein mechanisches System ist durch eine Funktion

$$L(q_1, q_2, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f, t) \\ \equiv L(q, \dot{q}, t),$$

die Lagrangefunktion, charakterisiert.

Hamiltonsches Prinzip: Nimmt das System

zu den Zeitpunkten  $t_1, t_2$  bestimmte Lagen

$$q_r(t_1) = q_r^{(1)}, \quad q_r(t_2) = q_r^{(2)}, \quad r = 1, 2, \dots, f,$$

ein, so erfolgt die Bewegung des Systems

zwischen diesen beiden Lagen so, daß

die Wirkung

$$S := \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t)$$

einen extremalen Wert annimmt.

X-3

Bemerkung: Meist spricht man vom "Prinzip der kleinsten Wirkung", obwohl es sich nur für genügend kleine Abschnitte der Bewegung um ein Minimum handeln muß.

Variationsproblem

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0$$

mit den Nebenbedingungen

(8)

$$\delta q_r(t_1) = \delta q_r(t_2) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, f$$

liefert als Bedingungen für einen extremalen

Wert von S (sog. Eulersche Dgl'n. des Variationsproblems) die

Lagrangesehen Gleichungen (2. Art)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0, \quad r = 1, 2, \dots, f$$

(9)

Simultansystem von  $f$  gewöhnlichen

Dgl'n. 2. Ordnung für  $q_1(t), q_2(t), \dots, q_f(t)$

AB:  $q_r(t_0)$ ,  $\dot{q}_r(t_0)$ ,  $r = 1, 2, \dots, f$

Beachte:

$$L(q, \dot{q}, t) \rightarrow L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t)$$

lässt die BG unverändert.

Energie des Systems: Definition

$$E(q, \dot{q}, t) = \sum_{r=1}^f \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - L(q, \dot{q}, t)$$

Spezialfall: Nichtrelativistisches abgeschlossenes System oder nichtrelativistisches nichtabgeschlossenes System in einem konservativen äußeren Kraftfeld

Für ein solches System kann man zeigen:

$$L(q, \dot{q}) = \sum_{r,s=1}^f \frac{1}{2} a_{rs}(q) \dot{q}_r \dot{q}_s - V(q) \quad (6a)$$

potentielle Energie

$$\equiv T(q, \dot{q})$$

kinetische Energie

Grund für Namen s. nächste Folie

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

\*) S. z.B. Landau-Lifschitz; s. auch Folie X-9! Benötigt werden Homogenität und Isotropie des Raumes und Homogenität der Zeit sowie die GT. In der Relativitätstheorie (LT!) können daher weder T noch L diese Form haben! (S. später)

$T(q, \dot{q})$  homogene Funktion vom Grad 2

in den  $\dot{q}_r \Rightarrow$  Eulersche Dgl. für homogene Fktn. gilt

$$\sum_{r=1}^f \dot{q}_r \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} = 2T \quad (14a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}, \text{ somit } E = \underbrace{\sum_{r=1}^f \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}}_{2T} - L$$

$\Rightarrow$  Energie des Systems

$$E(q, \dot{q}) = 2T(q, \dot{q}) - L(q, \dot{q}) \quad (14b)$$

$$= T(q, \dot{q}) + V(q)$$

= Erhaltungsgröße \*)

X.1.C. Hamiltonformalismus für ein mechanisches Problem

Definition: Verallgemeinerter Impuls (kanonischer Impuls)  $p_r$  zur verallgemeinerten Koordinate  $q_r$

$$p_r = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_r} = p_r(q, \dot{q}, t), \quad r=1, 2, \dots, f \quad (10)$$

\*) Wie man beweisen kann; s. X-8.

$$p_r = p_r(q, \dot{q}, t), \quad r=1, 2, \dots, f$$

$$\Rightarrow \dot{q}_r = \dot{q}_r(q, p, t), \quad r=1, 2, \dots, f$$

Übergang vom Variablensatz  $q, \dot{q}$  auf den Variablensatz  $q, p$  durch eine Legendretransformation

$$H(q, p, t) := \sum_{r=1}^f p_r \dot{q}_r - L(q, \dot{q}, t) \quad (11)$$

Hamiltonfunktion des Systems

$$\left. \begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \\ \dot{q}_r &= \frac{\partial L}{\partial p_r} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \\ \dot{q}_r &= \frac{\partial L}{\partial p_r} \end{aligned}$$

$$dH(q, p, t) = \sum_r \left( \frac{\partial H}{\partial q_r} dq_r + \frac{\partial H}{\partial p_r} dp_r + \frac{\partial H}{\partial t} dt \right) + \sum_r \left( p_r \dot{q}_r - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \dot{q}_r - \frac{\partial L}{\partial p_r} dp_r - \frac{\partial L}{\partial t} dt \right)$$

$$\Rightarrow \dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r} \quad \text{und} \quad \frac{\partial H}{\partial q_r} = - \frac{\partial L}{\partial q_r}$$

Hamiltonsche Gleichungen  
(kanonische BG)

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}$$

$$\dot{p}_r = - \frac{\partial H}{\partial q_r} \quad r=1, 2, \dots, f$$

(12)

Simultansystem von  $2f$  gewöhnlichen

Dgln. 1. Ordnung für  $q_1(t), q_2(t), \dots, q_f(t)$

AB:  $q_r(t_0), p_r(t_0), \quad r=1, 2, \dots, f$

$$\frac{dH}{dt} = \sum_r \left( \frac{\partial H}{\partial q_r} \dot{q}_r + \frac{\partial H}{\partial p_r} \dot{p}_r \right) + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (13), (15)$$

Energie des Systems

$$E(q, \dot{q}, t) = \sum_{r=1}^f \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - L(q, \dot{q}, t)$$

$$H(q, p, t) = E(q, \dot{q}(q, p, t), t)$$

3) Formalismus lässt sich auf klassische  
Wechselwirkende Teilchen - Feld - Systeme  
verallgemeinern

Beispiel: elektrisch geladenes Punktteilchen  
im elm. Feld; allgemeiner: Mx-L-Theorie;  
aus einem einzigen Postulat  
(Lagrangefunktion) können die  
Mx-Gln. und die relativistische(n) BG  
inklusive Lorentzkraft abgeleitet werden!

4) Formalismus lässt sich auf wechselwirkende  
Quantenfelder verallgemeinern  
Beispiel: Quantenelektrodynamik  
(elm. Strahlungsfeld [Photonen]  
+ Diracfeld [Elektronen, Positronen])

Spezialfall von Folie X-4, X-5:  
Wegen  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

folgt für diesen Fall aus Gl. (13), (15), d.h. aus

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

daß

$$H(q, p) = E(q, \dot{q}(q, p)) = T(q, \dot{q}(q, p)) + V(q)$$

Erhaltungsgröße

ist.

Bedeutung des Hamiltonprinzips  
(Extremalprinzips der Wirkung) und des  
Lagrange- und Hamiltonformalismus  
für die SRT

1) Ohne Beweis: L-invariante Wirkung führt  
auf L-kovariante BG.

2) Formalismus lässt sich auf klassische "freie" Felder  
(z.B. klassisches elm. Strahlungsfeld\*) und "freie"  
Quantenfelder (z.B. quantisiertes elm. Strahlungsfeld,  
Dirac-Feld) verallgemeinern: Felder =  
Systeme mit nicht abzählbar unendlich vielen  
Freiheitsgraden.

\* ) = Wellenfeld

## X.2. Lagrange- und Hamiltonfunktion für ein kräftefreies Punktteilchen

### X.2.A. Nichtrelativistisches kräftefreies Punktteilchen

$$\underline{q_i(t) = x_i(t)}, \quad \underline{\dot{q}_i(t) = v_i(t)}, \quad i=1,2,3$$

$\hat{=} x, y, z$

$L(\vec{r}, \vec{v}, t)$  wegen Kräftefreiheit (kartes. Koo.)  
 nur  $\vec{r}, \vec{v}$  (Forderung der räuml. Translations-  
 u. Drehinvarianz u. der zeitl. Translations-  
 invarianz)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{r}) \quad \underline{\text{muß } G\text{-invariant sein}}$$

(damit BG G-kovariant sind)

$\Rightarrow L(\vec{r})$  muß proportional zu  $\vec{v}^2 \equiv v^2$  sein

(s. Landau-Lifschitz Bd.1)  $\star$

$$L = L(\vec{v}) = T(\vec{v}) = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m v_i^2 \quad (16)$$

$$\underline{p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = m v_i} \quad \text{kanon. Impuls} = \text{nichtrel.}$$

(17) mech. Impuls (Newtonscher Impuls)

$$H = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{\vec{p}^2}{m} - \frac{\vec{p}^2}{2m}; \quad \underline{\vec{p}^2 \equiv p^2}$$

$$H = H(\vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} = \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{2m} \quad (18)$$

$\star$ )  $m$  in nichtrelativistischer Mechanik als G-invariant betrachtet!

$$H = \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{2m}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{p}(t) &= \vec{p}(t_0) \\ \vec{F}(t) &= \vec{F}(t_0) + \frac{\vec{p}(t_0)}{m} (t - t_0) \end{aligned}$$

AB:  $q_i(t_0), p_i(t_0)$  (19)

### X.2.B, X.2.C. Relativistisches kräftefreies

#### Punktteilchen

$q_i, \dot{q}_i$  wie in Abschnitt X.2.A

$L(\vec{f}, \vec{x}, \dot{\vec{f}})$  wegen Kräftefreiheit

nur  $|\dot{\vec{x}}|$  (Begründung wie in Abschnitt X.2.A)

X-11

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\vec{x}) \quad \text{muß } L\text{-invariant sein}$$

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma(u)} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} dt$$

Eigenzeitdifferential  
für das Teilchen  
= L-invariant

$$\Rightarrow S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau f(u) L(\vec{x}) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \underbrace{\frac{L(\vec{x})}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}}_{\text{muß } L\text{-invariant sein}} \quad (20)$$

Einziges L-Invariante, die  
man aus  $u_x, u_y, u_z$   
bilden kann:  $u_x, u_y, u_z$

$$\Rightarrow f(u) L(\vec{x}) = \frac{L(\vec{x})}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

muß von  $\vec{x}$   
unabhängig sein:  
L-invariante  
Konstante (22a)

Setzt man

$$\frac{L(\vec{x})}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = -mc^2 \quad (\text{m invariante Masse} = \text{Ruhmasse des Teilchens}),$$

so folgt

$$L(\vec{x}) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad (22b)$$

$$L(\vec{x}) = -mc^2 + \frac{1}{2} m u^2 + \dots \quad L(\vec{x}) \text{ nichtrel.}$$

X-10

X.3. Freies elm. Feld

X.3.A. Lagrange- und Hamiltonformalismus für Felder in der SRT

Feld = System mit nicht abzählbar unendlich vielen Freiheitsgraden

Formalismus lässt sich in weitgehender Analogie zu jenem für Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden aufbauen

Annahme: Das betrachtete Feld werde durch n Feldfunktionen  $\phi_a$ ,  $a=1,2,\dots,n$ , beschrieben ("n-komponentiges Feld")

Bemerkung: Für das freie elm. Feld kann man das Vierpotential ( $A^\mu$ ) benutzen, man hat dann also vier Feldfunktionen  $A^0, A^1, A^2, A^3$ .

$$L(\vec{u}) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = - \frac{mc^2}{\gamma(u)}$$

$p_i, u_i$  hier kart. Komp. von  $\vec{p}, \vec{u}$  (nicht kovariante Komp. Impuls)

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial u_i} = \gamma(u) m u_i \quad (23)$$

kanonischer Impuls = relativistischer mechanischer Impuls

$$H = \vec{p} \cdot \vec{u} - L = \gamma(u) m u^2 + \frac{mc^2}{\gamma(u)} \quad (24)$$

$$= \gamma(u) m c^2 \left[ \frac{u^2}{c^2} + \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \right] = \underbrace{\gamma(u(p))}_{?} m c^2$$

$$(23): \quad p^2 = \gamma^2(u) m^2 u^2 \quad \vec{p}^2 \equiv p^2$$

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) p^2 = m^2 u^2, \quad \frac{u^2}{c^2} = \frac{p^2}{p^2 + m^2 c^2}$$

$$\frac{1}{\gamma^2(u)} = 1 - \frac{u^2}{c^2} = \frac{m^2 c^2}{p^2 + m^2 c^2}$$

$$\gamma(u(p)) = \frac{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}}{mc} \quad (25)$$

$$H = H(\vec{p}) = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2} \quad (26)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{c p_i}{\sqrt{m^2 c^2 + p^2}}, \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \quad (27)$$

$$\vec{p}(t) = \vec{p}(t_0) \quad \text{AB: } \vec{q}(t_0), p_i(t_0)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \frac{c \vec{p}(t_0)}{\sqrt{m^2 c^2 + p^2(t_0)}} (t - t_0)$$

⇒

Index  $r$ , Variable  $\rightarrow (x^\mu) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$ ,  $a$   
 Koordinate  $q_r \rightarrow \phi_a(x^\mu) \equiv \phi_a(\mathbb{F}, t)$

Lagrangefunktion

$$L(q, \dot{q}) \rightarrow \int d^3r \mathcal{L}(\phi(x^\mu), \partial^\nu \phi(x^\mu))$$

Lagrangedichte

Wirkung

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}) \rightarrow$$

$$S[\phi, \partial^\nu \phi] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(t)$$

$L$ -invariant  
muss Viererskalar=  
feld sein (28)

$$= \frac{1}{c} \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi(x^\mu), \partial^\nu \phi(x^\mu))$$

$\Omega$  begrenzt von den Zeithyperebenen  
 $\Sigma_1 \dots x^0 = ct_1, \Sigma_2 \dots x^0 = ct_2$  und  
 einer "Seitenhyperefläche"  $\Gamma$  (fest)

Variation

$$\delta S = 0 \text{ mit } \delta q_r(t_1) = \delta q_r(t_2) = 0 \rightarrow$$

$$\delta S = 0 \text{ mit } \delta \phi_a(\mathbb{F}, t_1) = \delta \phi_a(\mathbb{F}, t_2) = 0$$

$$\delta \phi_a|_{\Gamma} = 0, \quad a = 1, 2, \dots, n$$

Lagrangegleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \rightarrow \partial^r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^r \phi_a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} = 0$$

$$r = 1, 2, \dots, f \quad a = 1, 2, \dots, n \quad (30)$$

"Unbestimmtheit" der Lagrangefunktion

$$L(q, \dot{q}) \rightarrow L(q, \dot{q}) + \frac{d}{dt} f(q) \rightarrow$$

$$\mathcal{L}(\phi(x^\mu), \partial^\nu \phi(x^\mu)) \rightarrow \mathcal{L}(\phi(x^\mu), \partial^\nu \phi(x^\mu))$$

Hamiltonfunktion  
 $+ \partial^\alpha f_\alpha(\phi(x^\mu))$

$$\text{kanonischer Impuls } p_r := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \rightarrow$$

$$\text{kanonische Impulsdichte } \pi_a(x^\mu) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a} \quad (32)$$

$$\text{Hamiltonfunktion } H(q, p) := \sum_{r=1}^f p_r \dot{q}_r - L(q, \dot{q}) \rightarrow$$

$$H(t) = \int d^3r \mathcal{H}(\phi(x^\mu), \pi(x^\mu))$$

$$\text{mit } \mathcal{H}(\phi, \pi) := \sum_{a=1}^n \pi_a \dot{\phi}_a - \mathcal{L}(\phi, \partial^\nu \phi) \quad (33)$$

Hamiltondichte

Bemerkung:  $\mathcal{H}$  trans-  
 formiert wie "00-Kompo-  
 nente" eines Tensorfeldes •



Σ.3.B, Σ.3.C. Anwendung des Formalismus auf das freie elm. Feld

1)  $\phi_a, a=1,2,\dots,n \rightarrow A^\alpha, \alpha=0,1,2,3$   
 Funktionen, welche beim Wirkungsprinzip variiert werden

2)  $\mathcal{L}$  darf von den Potentialen nur in der Form

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$$

abhängen (Unabhängigkeit von der Eichung)

3) Damit sich lineare Feldgleichungen (=Lagrangegl.) ergeben, muß  $\mathcal{L}$  eine quadratische Form in den  $F$ s sein.

4)  $\mathcal{L}$  muß ein L-invariantes Feld (Viererskalarfeld) sein. Dies ist nicht nur für eigentliche LT, sondern auch für LT mit Spiegelungen (uneigentliche LT) zu fordern.

(Σ.34): 
$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) = \text{Viererskalarfeld}$$
  
 (auch bei LT mit Spiegelung)

scheidet aus 
$$F^{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu} = -4(\vec{E} \cdot \vec{B}) = \text{Viererskalarfeld}$$
  
 bei eigentlichen LT Pseudoskalar bei Spiegelung

1)-4)  $\Rightarrow \mathcal{L} = a F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$

L-invariante Konstante, Wahl  $a = -\frac{1}{16\pi}$   
 liefert richtigen Faktor  $\frac{1}{8\pi}$  bei Hamiltondichte  $\hat{=}$  Energiedichte im Gaußschen Maßsystem

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \quad (34)$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\partial^\sigma A^\tau)$$

$$= -\frac{1}{16\pi} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \quad (35)$$

$$= -\frac{1}{16\pi} g_{\sigma\mu} g_{\beta\nu} (\partial^\sigma A^\beta - \partial^\beta A^\sigma) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

Lagrangegleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\sigma A^\tau)} &= -\frac{1}{16\pi} g_{\sigma\mu} g_{\beta\nu} [(\delta_\sigma^\alpha \delta_\beta^\tau - \delta_\sigma^\tau \delta_\beta^\alpha) F^{\mu\nu} + F^{\alpha\beta} (\delta_\sigma^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\sigma^\nu \delta_\beta^\mu)] \\ &= -\frac{1}{16\pi} [g_{\sigma\mu} g_{\beta\nu} F^{\mu\nu} - g_{\sigma\mu} g_{\beta\nu} F^{\mu\nu} + g_{\alpha\sigma} g_{\beta\tau} F^{\alpha\beta} - g_{\alpha\tau} g_{\beta\sigma} F^{\alpha\beta}] \\ &= -\frac{1}{16\pi} [F_{\sigma\tau} - F_{\tau\sigma} + F_{\sigma\tau} - F_{\tau\sigma} - F_{\sigma\tau} - F_{\tau\sigma}] \\ &= -\frac{1}{4\pi} F_{\sigma\tau} \end{aligned}$$

IX-18

$$\partial^\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\sigma A^\tau)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\tau} = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{4\pi c} F_{\sigma\tau} = 0$$

$$\partial^\sigma F_{\sigma\tau} = 0$$

(36)

Dies sind die Maxwellgleichungen (IX.15)

$$\partial^\sigma F_{\sigma\tau} = \frac{4\pi c}{c} j_\tau$$

mit  $j_\tau = 0$  (freies elm. Feld).

Die restlichen Maxwellgleichungen (IX.18a) bzw. (IX-19)

$$\partial^\sigma \hat{F}_{\sigma\tau} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \partial^\sigma F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\sigma} + \partial^\nu F^{\sigma\mu} = 0$$

Sind keine BG im Sinne der Lagrangegl.,

sie sind - wie im Kapitel IX bewiesen -

eine mathematische Konsequenz der  
Definition von  $\hat{F}$ .

IX-19

Hamiltondichte und Hamiltonfunktion

$$\pi_\tau = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^\tau} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^0 A^\tau)} - \frac{1}{4\pi c} F_{0\tau} \quad (37)$$

$$\pi_\tau = -\frac{1}{4\pi c} F_{0\tau}$$

$$\vec{F}_{0\tau} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi_0(\vec{r}, t) \equiv 0, \quad \pi_i(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi c} E_i(\vec{r}, t) \quad (38)$$

$$\mathcal{H} = \pi_\tau \dot{A}^\tau - \mathcal{L} = \pi_i \dot{A}^i - \mathcal{L}$$

$$= -\frac{1}{4\pi c} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{8\pi c} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \quad (39)$$

$$-c \operatorname{grad} \phi - c \vec{E}$$

$$= \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \frac{1}{4\pi} \vec{E} \cdot \operatorname{grad} \phi \quad (40a)$$

$\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{E})$ , da

$\operatorname{div} \vec{E} = 0$  (freies  
Feld)

$$\mathcal{R}(r,t) = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2(r,t) + \vec{B}^2(r,t)) + \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot (\phi(r,t) \vec{E}(r,t))$$



$$\omega_{em}(r,t) = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2(r,t) + \vec{B}^2(r,t))$$

Sind die (freien!) Felder auf ein endliches Raumgebiet beschränkt:

$$H(t) = \int d^3r \mathcal{R}(r,t) = \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\vec{E}^2(r,t) + \vec{B}^2(r,t)) \tag{408}$$

X.4. Geladene Teilchen im elm. Feld

Dann gilt freies Teilchen ... freies Feld

$$S = S_{ft} + S_{em} + S_{ww} \quad \text{----- Wechselwirkung Teilchen-Feld}$$

bzw.

$$L = L_{ft} + L_{em} + L_{ww}$$

mit

$$L_{ft}(t) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} \quad \text{s. X.2.B}$$

$$L_{em}(t) = \int d^3r \mathcal{L}_{em} (\partial^\sigma A^\tau(x^\mu)) \quad \text{s. X.3.B}$$

$$L_{ww}(t) = \int d^3r \mathcal{L}_{ww}(\cdot) \quad \text{noch zu finden}$$

Bemerkung:

1) Für die Ableitung der Maxwellgl. mit Quelltermen

$$\partial_\sigma F^{\sigma\tau} = \frac{4\pi}{c} j^\tau \quad \text{benötigt man lediglich}$$

$\mathcal{L}_{em} + \mathcal{L}_{ww}$ ,  $L_{ft}$  ist dafür irrelevant.

2) Für die Ableitung der Bewegungsgleichung

$$\text{für das geladene Teilchen } m \frac{d}{dt} u^\mu = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu$$

benötigt man lediglich  $L_{ft} + L_{ww}$ ,  $L_{em}$

ist dafür irrelevant. •

X.4.A. Lagrangedichte und Lagrange = funktion der Wechselwirkung

1) Das elm. Feld muß durch  $A^\alpha(x^\mu)$  beschrieben werden.

2) Die Quellichten, welche das geladene Teilchen verursacht, sind durch  $j^\alpha(x^\mu)$  zu beschreiben.

3)  $\mathcal{L}_{ww}$  muß ein L-invariantes Feld (Viererskalarfeld) sein.

4) Damit sich lineare Feldgleichungen ergeben, muß  $\mathcal{L}_{ww}$  in  $j^\alpha(x^\mu)$  linear sein.

1) - 4)  $\Rightarrow \mathcal{L}_{ww} = b A^\alpha j_\alpha$

L-invariante Konstante; Wahl  $b = -\frac{1}{c}$   
führt (Zusammen mit  $\mathcal{L}_{em}$ )  
zu den im Gaußschen System  
richtigen Faktoren in den Maxwell-Gln.  
 mit Quelltermen

$$\mathcal{L}_{ww}(x^\mu) = -\frac{1}{c} A^\alpha(x^\mu) j_\alpha(x^\mu) \quad (41)$$

$$(A^\mu) = (\phi, \vec{A}), \quad (j^\mu) = (c\rho, \vec{j}) \quad (42)$$

$$\mathcal{L}_{ww}(r,t) = -\rho(r,t)\phi(r,t) + \frac{1}{c} \vec{j}(r,t) \cdot \vec{A}(r,t) \quad (43)$$

Beachte: Obwohl sich  $\mathcal{L}_{ww}$  bei Umeichung  
der Potentiale ändert, sind die aus  
 $\mathcal{L}_{em} + \mathcal{L}_{ww}$  abgeleiteten Feldgleichungen  
 und die aus  $\mathcal{L}_{ft} + \mathcal{L}_{ww}$  abgeleitete BG  
eichinvariant, wie dies gefordert werden  
 muss. Grund:  
 $A^\alpha \rightarrow A^\alpha + \partial^\alpha \psi \Rightarrow$   
 $A^\alpha j_\alpha \rightarrow A^\alpha j_\alpha + \underbrace{j_\alpha \partial^\alpha \psi}_{\partial^\alpha (j_\alpha \psi)}, \text{ da } \partial^\alpha j_\alpha = 0$

$\mathcal{L}_{ww}$  für Punktladung

$$\mathcal{L}_{ww}(r,t) = -\rho(r,t)\phi(r,t) + \frac{1}{c} \vec{j}(r,t) \cdot \vec{A}(r,t)$$

mit  $\rho(r,t) = q \delta(r - \vec{r}(t))$

(44)

$$\vec{j}(r,t) = q \vec{u}(t) \delta(r - \vec{r}(t))$$

gibt

$$\mathcal{L}_{ww}(t) = \int d^3r \mathcal{L}_{ww}(r,t)$$

$$= -q \phi(\vec{r}(t), t) + \frac{q}{c} \vec{u}(t) \cdot \vec{A}(\vec{r}(t), t) \quad (45)$$

$$= -\frac{q}{c} \frac{1}{r(\mu(t))} A^\alpha(x^\mu(\tau)) u_\alpha(\tau)$$

$\Rightarrow$

$$f(\mu(t)) \mathcal{L}_{ww}(t) = L\text{-Invariante} \checkmark$$

X.4. B. "Bewegungsgleichungen" für das elm. Feld

Nur  $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_{em} + \mathcal{L}_{ww}$  benötigt!

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(A^\mu, \partial^\nu A^\mu)$$

$$= -\frac{1}{16\pi} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{c} j_\alpha A^\alpha \quad (46)$$

$$\partial^\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\sigma A^\tau)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\tau} = 0 \Rightarrow$$

Wie bei freiem

Feld:

$$-\frac{1}{4\pi} F_{\sigma\tau} \quad \dots \quad \text{nun } \neq 0: \quad -\frac{1}{c} j_\tau$$

$$\partial^\sigma F_{\sigma\tau} = \frac{4\pi}{c} j_\tau$$

Restliche Maxwell-Gleichungen wie bei freiem Feld, da rein mathematische Folge der Definition von  $\vec{F}$ .

$$\pi_\tau = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^\tau} = -\frac{1}{4\pi c} F_{0\tau} \quad \text{ebenfalls wie bei freiem Feld} \quad (48)$$

X.4.C. Bewegungsgleichung für die Punktladung

Nur  $L \equiv L_{ft} + L_{nw}$  benötigt!

$$L = L(\vec{r}, \vec{u}, t) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} - q \phi(\vec{r}, t) + \frac{q}{c} \vec{u} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (49)$$

Beschreibung der Bewegung durch

$$\vec{r}(t), \quad \dot{\vec{r}}(t) = \vec{u}(t)$$

Mechanischer und kanonischer Impuls des Teilchens

mechanischer Impuls

$$\vec{p} = \gamma(u) m \vec{u} \quad (51)$$

$$L(\vec{r}, \vec{u}, t) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} - q \phi(\vec{r}, t) + \frac{q}{c} \vec{u} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)$$

kanonischer Impuls

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial u_i} = \underbrace{\gamma m u_i}_{p_i} + \frac{q}{c} A_i \quad (50)$$

$$\vec{P} = \vec{p} + \frac{q}{c} \vec{A}$$

Hamiltonfunktion

$$H = \vec{P} \cdot \vec{u} - L$$

$$= \gamma(u) m u^2 + \frac{q}{c} \vec{u} \cdot \vec{A} + \frac{mc^2}{\gamma(u)} + q\phi - \frac{q}{c} \vec{u} \cdot \vec{A}$$

$$H = \gamma(u) mc^2 + q\phi \quad (52)$$

$$(25): \quad \gamma(u(\vec{p})) = \frac{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}}{mc} \Rightarrow$$

$$\gamma(u(\vec{P})) = \frac{\sqrt{(\vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A})^2 + m^2 c^2}}{mc} \quad (53)$$

$$H(\vec{r}, \vec{p}, t) = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 (\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{r}, t))^2} + q \phi(\vec{r}, t)$$

Nichtrelativistische Näherung (57a)

$$H(\vec{r}, \vec{p}, t) = mc^2 + \frac{(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{r}, t))^2}{2m} + q \phi(\vec{r}, t)$$

Bewegungsgleichungen (57b)

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{c^2 (p_i - \frac{q}{c} A_i)}{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 (\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A})^2}}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_i} = + \frac{c^2 (p_i - \frac{q}{c} A_i) \frac{q}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x_i}}{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 (\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A})^2}} - q \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

1. Gl. nichts Neues, denn wir hatten bereits

$$p_i - \frac{q}{c} A_i = p_i = \gamma m u_i$$

$$\sqrt{m^2 c^4 + c^2 (\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A})^2} = \gamma m c^2, \quad \text{was bei Einsetzen}$$

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i = \frac{\gamma m c^2 u_i}{\gamma m c^2} \quad \checkmark \quad \text{ergibt.}$$

2. Gl.

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{c^2 (p_i - \frac{q}{c} A_i)}{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 (\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A})^2}} \frac{q}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} - q \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

liefert mit

$$p_i - \frac{q}{c} A_i = p_i = \gamma m u_i$$

$$\sqrt{m^2 c^4 + c^2 (\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A})^2} = \gamma m c^2$$

für  $\frac{dp_i}{dt}$ :

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt} (p_i - \frac{q}{c} A_i) = \frac{dp_i}{dt} - \frac{q}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x_j} u_j - \frac{q}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{q}{c} \underbrace{\left( u_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j} - u_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right)}_{\frac{\gamma m c^2 u_j}{\gamma m c^2} \frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i}} + q \underbrace{\left( - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right)}_{E_i}$$

$$= (\vec{u} \times \text{rot} \vec{A})_i \\ = (\vec{u} \times \vec{B})_i \quad \text{Beweis folgt}$$

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = q \left[ \vec{E}(\vec{r}(t), t) + \frac{\vec{u}(t)}{c} \times \vec{B}(\vec{r}(t), t) \right] \quad (57)$$

Fehlender Beweisschritt:

$$\begin{aligned}
 (\vec{u} \times \text{rot } \vec{A})_i &= \epsilon_{ijk} \mu_j \text{rot}_k \vec{A} \\
 &= \underbrace{\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm}}_{\text{Die } \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{je}} \mu_j \frac{\partial A_m}{\partial x_l} = \mu_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \mu_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j}
 \end{aligned}$$

Bemerkungen:

1) Wir könnten also tatsächlich MX-Gln., relativistische BG und Lorentzkräftgesetz aus einem einzigen Postulat (Lagrangefunktion  
 $L_{ft} + L_{em} + L_{ww}$ ) herleiten.

2) In Viererschreibweise lautet die BG

$$\frac{dp^\mu}{dt} = \underbrace{\frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu}_{\text{Vierer-Lorentzkraft } F^\mu}$$

bzw.  $ma^\mu$

3) Die erhaltene BG ist — wie vorausgesetzt — eichinvariant.

ELEKTRODYNAMIK RUHENDER

MATERIE ("Makroskopische Elektrodynamik")  
 = Elektrodynamik kontinuierlicher Medien)

XI. GRUNDGLEICHUNGEN FÜR RUHENDE MATERIE

XI.1. Aufteilung der Quellen in "freie" und "gebundene" Quellen.

"Übergang von der "mikroskopischen" zur "makroskopischen" Elektrodynamik

XI.1.A. Übersicht

"Mikroskopische" Elektrodynamik:

Ladungen und Ströme im Vakuum

Materie vom mikroskopischen Standpunkt:

Elektronen und Kerne im Vakuum,

in dauernder rascher Bewegung (auch im Ruhesystem eines Materiestückes).

Auf mikroskopischer Skala räumlich stark

Schwankende und auch zeitlich sehr rasch veränderliche mikroskopische elm. Felder.

Historisch mikroskopische Elektrodynamik der Materie  
 von Lorentz als "Elektronentheorie" bezeichnet,  
 da Lorentz die Ladungen nicht als Elektronen  
 und Kerne, sondern als "Punkte" oder  
 "Elektronen" bezeichnete (Lorentz 1902).

Aufteilung der Quellen

"freie" Quellen: sind direkt experimentell steuerbar  
 (z.B. Leitungsstrom in einem elektrischen  
 Leiter)

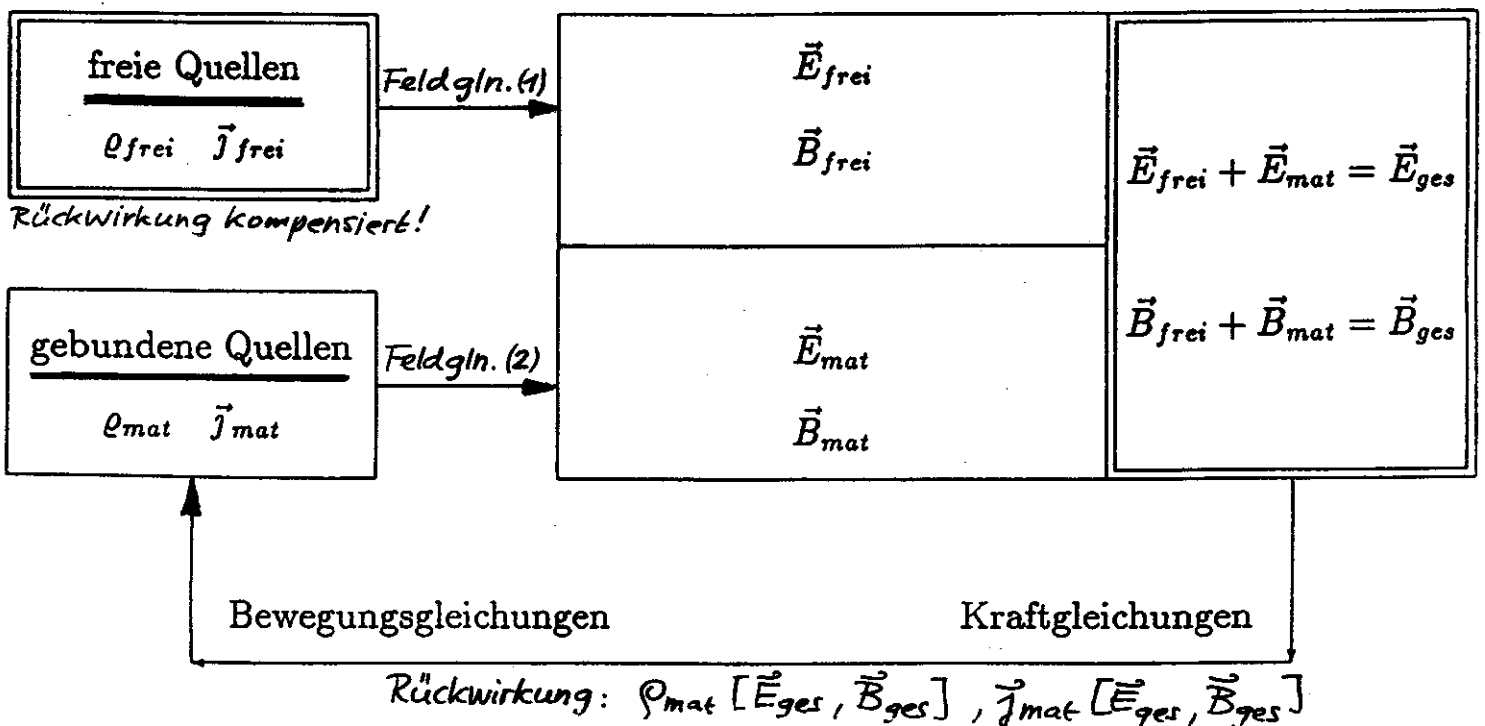
"gebundene" Quellen der Materie: sind nicht

direkt experimentell steuerbar  
 (z.B. Ampèresche Kreisströme in  
 Atomen und Molekülen), daher  
Rückwirkung der elm. Felder  
nicht kompensierbar

Siehe logischen Schema der  
 "mikroskopischen" Elektrodynamik!

Logisches Schema der "mikroskopischen" Elektrodynamik

Aufteilung der Quellen, Rückwirkung auf die "gebundenen" Quellen der Materie





Feldgleichungen (1): kann man für sich lösen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E}_{\text{frei}} &= 4\pi \rho_{\text{frei}} & , & \operatorname{rot} \vec{E}_{\text{frei}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_{\text{frei}} & , \\ \operatorname{rot} \vec{B}_{\text{frei}} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{frei}} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_{\text{frei}} & , & \operatorname{div} \vec{B}_{\text{frei}} = 0 & . \end{aligned} \quad (1)$$

Feldgleichungen (2): kann man nicht für sich lösen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E}_{\text{mat}} &= 4\pi \rho_{\text{mat}} & , & \operatorname{rot} \vec{E}_{\text{mat}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_{\text{mat}} & , \\ \operatorname{rot} \vec{B}_{\text{mat}} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{mat}} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_{\text{mat}} & , & \operatorname{div} \vec{B}_{\text{mat}} = 0 & . \end{aligned} \quad (2)$$

Addition gibt:  $\rho_{\text{mat}} [\vec{E}_{\text{ges}}, \vec{B}_{\text{ges}}], \vec{j}_{\text{mat}} [\vec{E}_{\text{ges}}, \vec{B}_{\text{ges}}] !$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E}_{\text{ges}} &= 4\pi (\rho_{\text{frei}} + \rho_{\text{mat}}) & , & \operatorname{rot} \vec{E}_{\text{ges}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_{\text{ges}} & , \\ \operatorname{rot} \vec{B}_{\text{ges}} &= \frac{4\pi}{c} (\vec{j}_{\text{frei}} + \vec{j}_{\text{mat}}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_{\text{ges}} & , & \operatorname{div} \vec{B}_{\text{ges}} = 0 & . \end{aligned} \quad (3)$$

XI.1.B. Übergang zur "makroskopischen"

Elektrodynamik durch "Ausmitteln" der Atomistik

Räumliche Mittelung über mikroskopisch große,

makroskopisch kleine Bereiche:

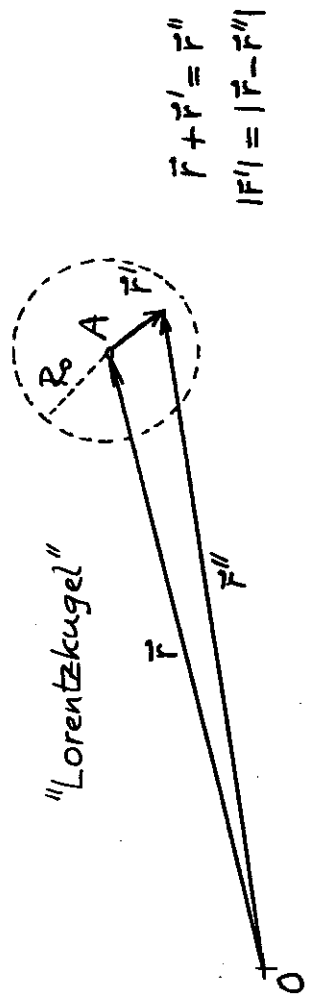
qualitativ: gemittelte Feldgröße  $\langle F(\vec{r}, t) \rangle$

im Aufpunkt  $\vec{r}$  zum Zeitpunkt  $t =$  Mittelwert

der entsprechenden mikroskopischen Feldgröße

$F(\vec{r}', t)$  über Kugelvolumen  $|\vec{r} - \vec{r}'| \leq R_0 \sim 100 \text{ \AA}$

(enthält  $\sim 10^6$  Elektronen und Kerne)



Formal mit auf 1 normierter Mittelungsfunktion

(Gewichtsfunktion)  $f(\vec{r}')$  angeschrieben:

$$\langle F(\vec{r}, t) \rangle := \int d^3r' F(\vec{r} + \vec{r}', t) f(\vec{r}')$$

mit  $\int d^3r' f(\vec{r}') = 1$

(5)

Bemerkungen:

- 1) Über die damit verbundenen Grenzen der Anwendbarkeit des Kontinuumsmodells der makroskopischen Elektrodynamik s. Später (Abschnitt XI.3.A).
- 2) Durch eine rein räumliche Mittelung dieser Art werden i.a. auch die mit der Atomistik der Materie verbundenen mikroskopischen zeitlichen Schwankungen weggemittelt, da diese i.a. nicht über makroskopische Distanzen korreliert sind.  
Wird aber durch die Felder  $\vec{E}_{\text{frei}}, \vec{B}_{\text{frei}}$  eine zeitlich rasche korrelierte mikroskopische Bewegung hervorgerufen (z.B. Elm. Welle trifft auf das Medium auf), so "überleben" die dazugehörigen Fourierkomponenten die räumliche Mittelung. (S. Jackson Auflage 1981).  
Würde man auch eine zeitliche Mittelung durchführen, würde man unerwünschterweise auch derartige rasche zeitliche Änderungen wegmitteln.

$$\langle F(\vec{r}, t) \rangle = \int d^3r' F(\vec{r} + \vec{r}', t) f(\vec{r}') \Rightarrow \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} \langle F \rangle$$

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle F \rangle$$

Gemittelte Feldgleichungen

(1):

$$\text{div } \vec{E}_{\text{frei}} = 4\pi \rho_{\text{frei}} \qquad \text{rot } \vec{E}_{\text{frei}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_{\text{frei}}$$

$$\text{rot } \vec{B}_{\text{frei}} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{frei}} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_{\text{frei}} \qquad \text{div } \vec{B}_{\text{frei}} = 0$$

$\text{div } \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle = 4\pi \rho$ $\text{rot } \langle \vec{B}_{\text{frei}} \rangle = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle$	$\text{rot } \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{B}_{\text{frei}} \rangle$ $\text{div } \langle \vec{B}_{\text{frei}} \rangle = 0$
--	--

mit  $\rho := \langle \rho_{\text{frei}} \rangle$  (makroskopische) freie Ladungsdichte

$\vec{j} := \langle \vec{j}_{\text{frei}} \rangle$  (makroskopische) freie Stromdichte (innerhalb der Materie: Leitungsstromdichte)

Werden experimentell "gesteuert"

(2): analog  $\Rightarrow$

XI-8

$\text{div} \langle \vec{E}_{\text{mat}} \rangle = 4\pi \langle \rho_{\text{mat}} \rangle$ $\text{rot} \langle \vec{B}_{\text{mat}} \rangle = \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j}_{\text{mat}} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{E}_{\text{mat}} \rangle$	$\text{rot} \langle \vec{E}_{\text{mat}} \rangle = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{B}_{\text{mat}} \rangle$ $\text{div} \langle \vec{B}_{\text{mat}} \rangle = 0$
---	---

(7)

$\langle \rho_{\text{mat}} \rangle$ ,  $\langle \vec{j}_{\text{mat}} \rangle$  als Funktionale von

$\vec{E} := \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle + \langle \vec{E}_{\text{mat}} \rangle$ $\vec{B} := \langle \vec{B}_{\text{frei}} \rangle + \langle \vec{B}_{\text{mat}} \rangle$
---

(makroskopische)  
elektrische Feldstärke  
 Skriptum:  
magnetische Induktion, besser  
 ist: (makroskopische)  
magnetische  
Feldstärke

benötigt:  $\langle \rho_{\text{mat}} \rangle [\vec{E}, \vec{B}]$ ,  $\langle \vec{j}_{\text{mat}} \rangle [\vec{E}, \vec{B}]$

Addition (6) + (7):

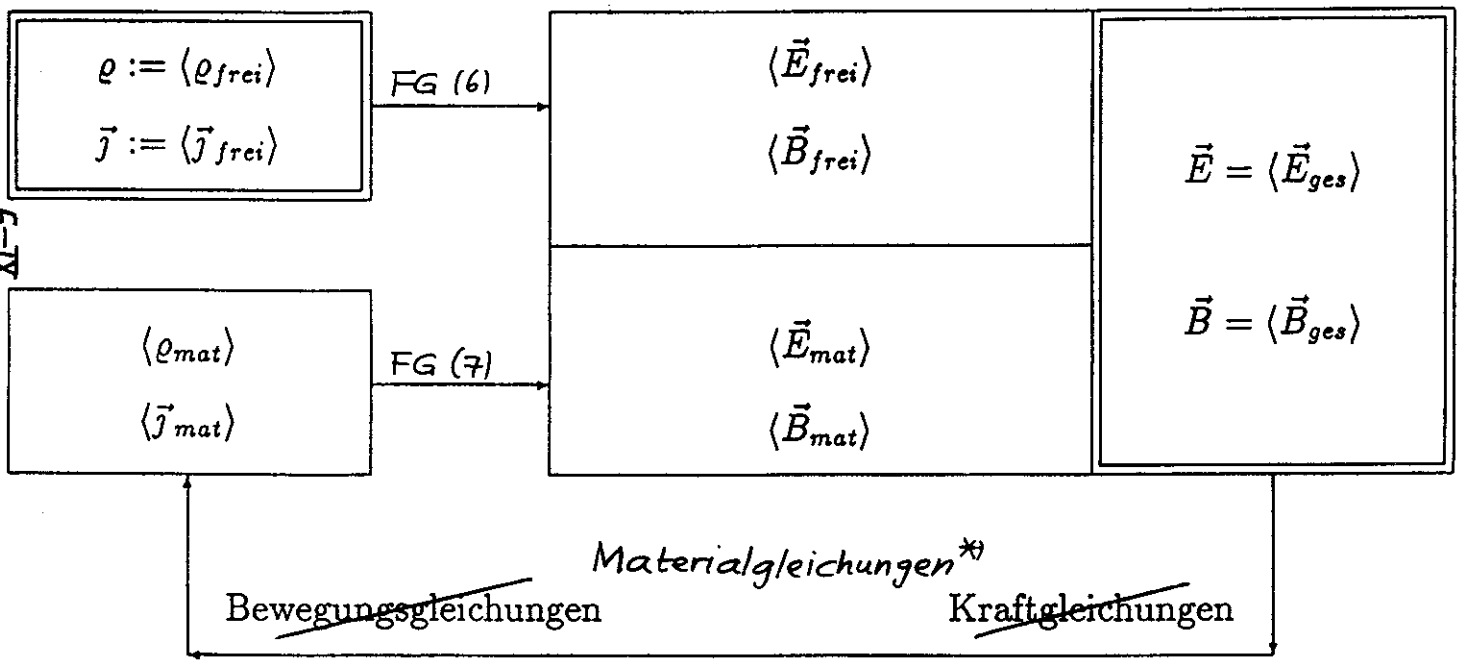
$\text{div} \vec{E} = 4\pi (\rho + \langle \rho_{\text{mat}} \rangle)$ $\text{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \langle \vec{j}_{\text{mat}} \rangle) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$	$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\text{div} \vec{B} = 0$
---	--

(8)

Logisches Schema der "makroskopischen" Elektrodynamik

**Gemittelte Quellen und Felder**

XI-9



Rückwirkung:  $\langle \rho_{\text{mat}} \rangle [\vec{E}, \vec{B}]$ ,  $\langle \vec{j}_{\text{mat}} \rangle [\vec{E}, \vec{B}]$

\*) Sind unter Zugrundelegung eines klassischen oder quantenmechanischen  
mikroskopischen Modells abzuleiten, was nur näherungsweise möglich ist.

Zum Vergleich: phänomenologische Feldgln. für  $\vec{E}, \vec{B}$  (s. Folie XI-13):

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi (\rho - \operatorname{div} \vec{P})$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \vec{M} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Zu zeigen bleibt also "nur" mehr:

$$\langle \rho_{\text{mat}} \rangle = -\operatorname{div} \vec{P} = \rho_P$$

$$\langle \vec{j}_{\text{mat}} \rangle = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \vec{M} = \vec{j}_P + \vec{j}_M$$

# XI-10 XI.1.C. Modifikation der Teilfelder

Ziel der folgenden Umformungen:

Phänomenologische makroskopische Feld- und Materialgleichungen mit den Feldgrößen  $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}$  und  $\vec{H}$  bzw.  $\vec{E}, \vec{B}, \vec{P}$  und  $\vec{M}$  und den Quellen  $\rho, \vec{j}$

Historische Bezeichnungen:

$\vec{D}$  dielektrische Verschiebung, elektrische Verschiebung, elektrische Induktion;  
besser ist es, einfach  $\vec{D}$ -Feld zu sagen

$\vec{H}$  magnetische Feldstärke;  
besser ist es, einfach  $\vec{H}$ -Feld zu sagen,  
und  $\vec{B}$  magnetische Feldstärke zu nennen

$\vec{P}$  Polarisation, elektrische Polarisation

$\vec{M}$  Magnetisierung, magnetische Polarisation

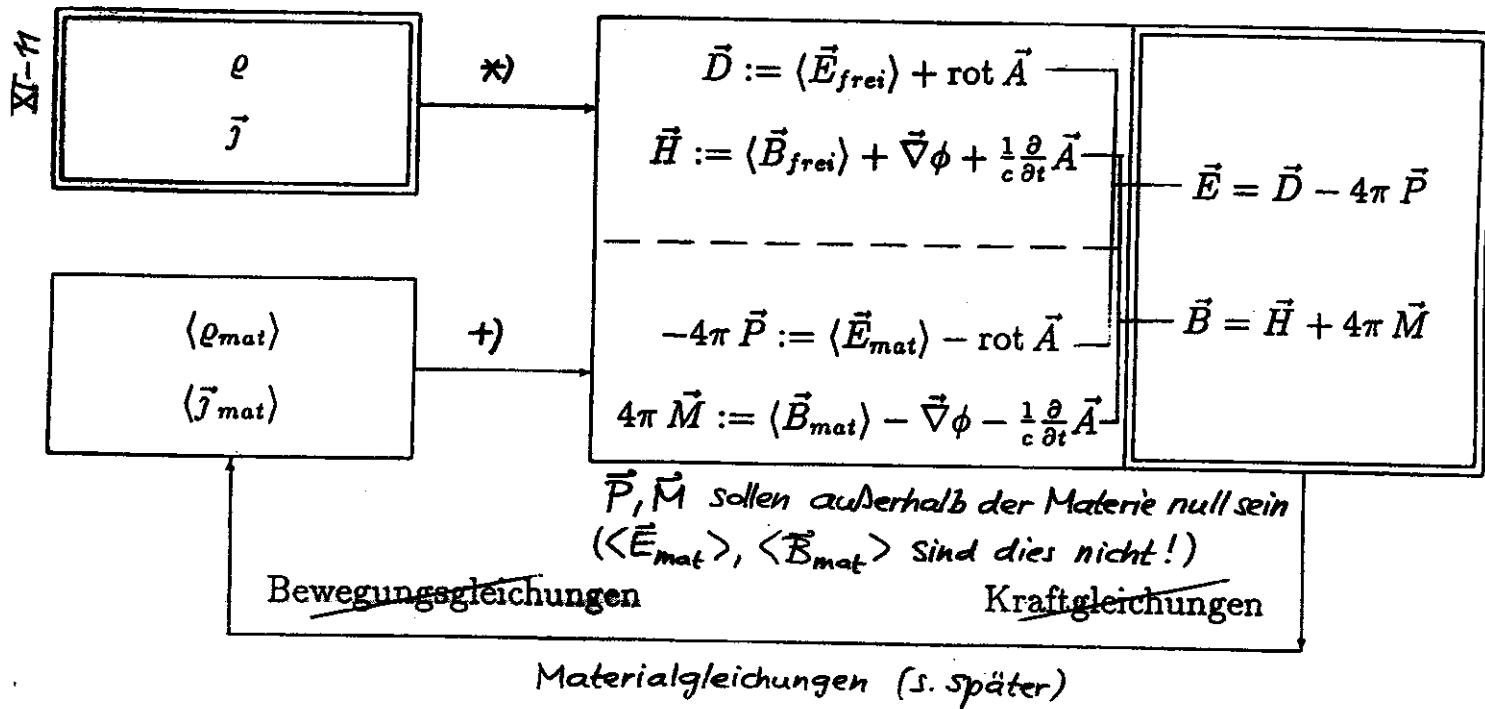
Beachte für das Folgende:

<sup>\*)</sup> ebenfalls in Verwendung:  
magnetische Induktion,  
magnetische Verschiebung

$\langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle, \langle \vec{B}_{\text{frei}} \rangle$  sind die durch  $\rho, \vec{j}$  verursachten Felder

$\langle \vec{E}_{\text{mat}} \rangle, \langle \vec{B}_{\text{mat}} \rangle$  sind die durch  $\langle \rho_{\text{mat}} \rangle, \langle \vec{j}_{\text{mat}} \rangle$  verursachten Felder

## Modifikation der Teilfelder: $\phi, \vec{A}$ "Umformungsgrößen"



- \*) Soll bedeuten: in die FG für  $\vec{D}, \vec{H}$  gehen neben den Umformungsgrößen  $\phi, \vec{A}$  nur die Quellen  $\rho, \vec{j}$  ein
- + ) Soll bedeuten: in die FG für  $\vec{P}, \vec{M}$  gehen neben den Umformungsgrößen  $\phi, \vec{A}$  nur die Quellen  $\langle \rho_{\text{mat}} \rangle, \langle \vec{j}_{\text{mat}} \rangle$  ein

$\vec{D}, \vec{H}$ :  
 $\vec{D} = \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle + \text{rot } \vec{A}$   
 $\vec{H} = \langle \vec{B}_{\text{frei}} \rangle + \text{grad } \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$\text{div } \vec{D} = \text{div } \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle = 4\pi \rho$   
 $\text{rot } \vec{H} = \text{rot } \langle \vec{B}_{\text{frei}} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} - \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle)$   
 $= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$\text{rot } \vec{D} = \text{rot } \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle + \text{rot rot } \vec{A}$   
 $= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{B}_{\text{frei}} \rangle + \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}$

$\vec{H} - \text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$   
 $= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \text{grad} (\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}) - \Delta \vec{A}$   
 $\text{div } \vec{H} = \text{div } \langle \vec{B}_{\text{frei}} \rangle + \text{div} (\text{grad } \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$

$\vec{P}, \vec{M}$ :  
 $-4\pi \vec{P} = \langle \vec{E}_{\text{mat}} \rangle - \text{rot } \vec{A}$   
 $4\pi \vec{M} = \langle \vec{B}_{\text{mat}} \rangle - \vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$   
 ⇒ analoge Rechnung

Ergebnisse: s. XI-13

Beispiel: Dielektrische Kugel in einem (Zuvor) homogenen elektrostatischen Feld

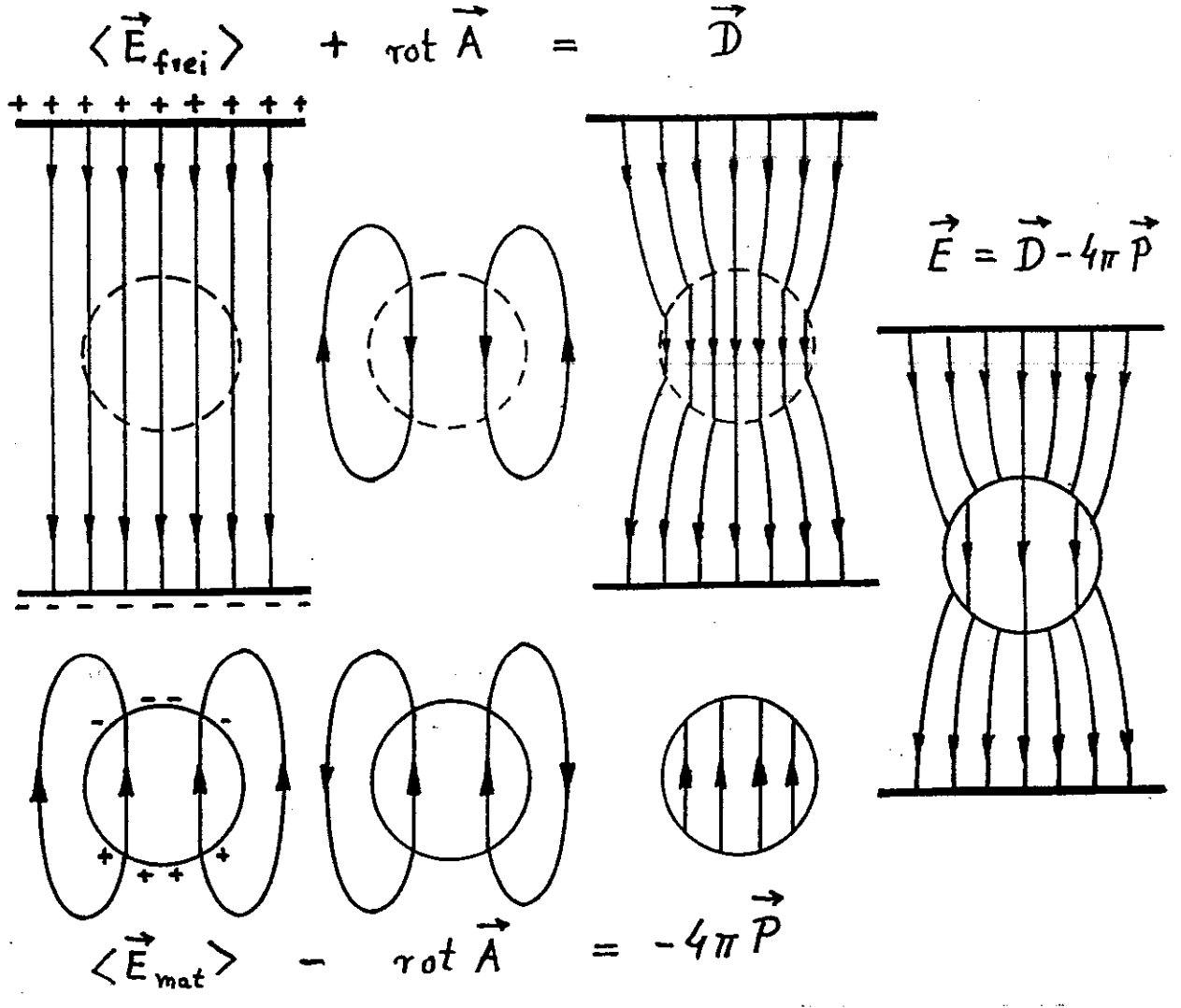


Fig. 11.1

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}, \quad \vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}$$

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{D} &= 4\pi\rho \\ \text{rot } \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

(9a)      FG1

$$\left( \begin{aligned} \text{rot } \vec{D} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \text{grad}(\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}) - \square \vec{A} \\ \text{div } \vec{H} &= \text{div}(\text{grad } \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) \end{aligned} \right) \quad (12)$$

"Vergessen" wir  $\vec{P}, \vec{M}$ ! (Festlegung von  $\vec{P}, \vec{M}$ !)  $-\frac{1}{4\pi} \square \vec{A}$

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{P} &= -\langle \rho_{\text{mat}} \rangle \\ \text{rot } \vec{M} &= \frac{1}{c} \langle \vec{j}_{\text{mat}} \rangle - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\left( \begin{aligned} \text{rot } \vec{P} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi} \text{grad}(\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}) \dots \\ \text{div } \vec{M} &= -\frac{1}{4\pi} \text{div}(\text{grad } \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) \end{aligned} \right)$$

liefern die gesuchten Ausdrücke für  $\langle \rho_{\text{mat}} \rangle, \langle \vec{j}_{\text{mat}} \rangle$  (s. Folie XI-8')

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= 4\pi(\rho + \langle \rho_{\text{mat}} \rangle) \\ \text{rot } \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \langle \vec{j}_{\text{mat}} \rangle) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (9b)$$

FG2

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= 4\pi(\rho - \text{div } \vec{P}) \\ \text{rot } \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \text{rot } \vec{M}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

FG1'

FG1' + FG2 + MG	$\vec{P}[\vec{E}, \vec{B}]$
ODER	$\vec{M}[\vec{E}, \vec{B}]$
FG1 + FG2 + MG	$\vec{D}[\vec{E}, \vec{B}]$
	$\vec{H}[\vec{E}, \vec{B}]$

Weitere aus der phänomenologischen makroskopischen Elektrodynamik bekannte Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} \rho_P &= \langle \rho_{\text{mat}} \rangle && \text{Polarisationsladungsdichte} \\ \vec{j}_P &= \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} && \text{Polarisationsstromdichte} \\ \vec{j}_M &= \langle \vec{j}_{\text{mat}} \rangle - \vec{j}_P && \text{Magnetisierungsstromdichte} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{P} &= -\rho_P \\ \text{rot } \vec{M} &= \frac{1}{c} \langle \vec{j}_{\text{mat}} \rangle - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= 4\pi(\rho + \rho_P) \\ \text{rot } \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \vec{j}_P + \vec{j}_M) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

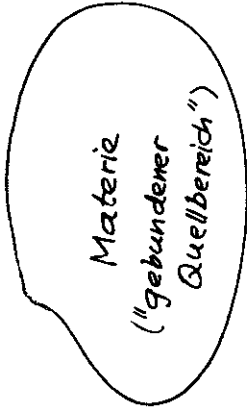
Beachte: KG

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \\ \text{div } \vec{j}_P + \frac{\partial \rho_P}{\partial t} &= 0 \\ \text{div } \vec{j}_M &= 0 \end{aligned}$$

# Festlegung von $\vec{P}$ und $\vec{M}$

XI-15

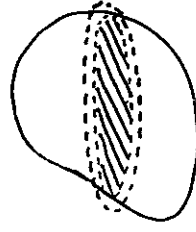
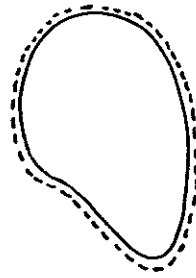
ruhende Materie



$$\int d^3r \rho_p(\vec{r}, t) = 0, \quad \int d^2\vec{f} \cdot \vec{j}_M(\vec{r}, t) = 0 \quad (17)$$

Integration über Volumen, welches die Materie im Inneren enthält  
Gesamtladung der Materie null

Integration "über beliebige Fläche, welche einen Materiequerschnitt ganz enthält"



1. Schritt, um  $\vec{P}, \vec{M}$  festzulegen: Forderung

$$\vec{P} \equiv \vec{0}, \quad \vec{M} \equiv \vec{0} \quad \text{außerhalb der Materie}$$

Dies ist unter den Voraussetzungen (17) möglich,

XI-16

denn es gilt:

$$(16): \quad \text{div } \vec{P} = -\rho_p$$

$$\Rightarrow \int d^3r \text{div } \vec{P} = \oint d^2\vec{f} \cdot \vec{P} = - \underbrace{\int d^3r \rho_p}_0 \quad \checkmark$$

$$\text{rot } \vec{M} = \frac{1}{c} \vec{j}_M$$

$$\Rightarrow \int d^2\vec{f} \cdot \text{rot } \vec{M} = \oint d\vec{r} \cdot \vec{M} = \frac{1}{c} \underbrace{\int d^2\vec{f} \cdot \vec{j}_M}_0 \quad \checkmark$$

2. Schritt, um  $\vec{P}, \vec{M}$  festzulegen: Forderung

$\vec{P}$  elektrisches Dipolmoment / Volumseinheit

$\vec{M}$  magnetisches Dipolmoment / Volumseinheit

innerhalb der Materie  
(makroskopische Größen)

Dies ist möglich, denn es gilt:

$$(16): \quad \text{div } \vec{P} = -\rho_p \Rightarrow -\vec{r} \cdot \text{div } \vec{P} = \vec{r} \rho_p \quad (18a)$$

$$-\int d^3r x_i \frac{\partial}{\partial x_j} P_j = - \int d^3r \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (x_i P_j) - P_j \right]$$

$$= \int d^3r x_i \rho_p$$



XI.2. Phänomenologische makroskopische

Elektrodynamik

XI.2.A. Phänomenologische Maxwellgleichungen

Wurden bereits auf XI-13 angeschrieben:

s. FG1 + FG2 bzw. FG1' + FG2

XI.2.B. Phänomenologische Materialgleichungen

Historisch hat man  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  als primäre <sup>historische</sup> Feldgrößen angesehen (deshalb auch die Bezeichnung magnetische Feldstärke für  $\vec{H}$ ).

Entsprechend hat man die zu den FG benötigten <sup>historisch</sup> MG in der Form

$$\vec{P}[\vec{E}, \vec{H}], \vec{M}[\vec{E}, \vec{H}] \quad (25)$$

angegeben.

Einfachste Form: in isotroper Materie (homogen oder inhomogen)

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E}, \vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (26)$$

Frage: Warum hier nicht noch ein Term in  $\vec{H}$  (bzw.  $\vec{B}$ )?

$$\int d^3r \vec{P}(\vec{r}, t) = \int d^3r \vec{P}_p(\vec{r}, t) \quad (19a)$$

$$\text{rot } \vec{M} = \frac{1}{c} \vec{j}_M \Rightarrow \vec{r} \times \text{rot } \vec{M} = \frac{1}{c} (\vec{r} \times \vec{j}_M) \quad (19b)$$

$$\int d^3r (\vec{r} \times \text{rot } \vec{M})_i = \int d^3r \epsilon_{ijk} x_j \text{rot}_k \vec{M} \quad \epsilon_{k\ell m} \frac{\partial}{\partial x_\ell} M_m$$

$$= \int d^3r \left( x_j \frac{\partial M_i}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial M_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (x_j M_j) - M_i \frac{\partial}{\partial x_j} (x_j M_i) - 3M_i$$

$$= 2 \int d^3r M_i = \frac{1}{c} \int d^3r (\vec{r} \times \vec{j}_M)_i$$

$$\int d^3r \vec{M}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2c} \int d^3r (\vec{r} \times \vec{j}_M(\vec{r}, t)) \quad (19b)$$

Bemerkung: Ohne diese Festlegung wäre  $\vec{P}$  in der

Materie nur bis auf einen Rotor und  $\vec{M}$  nur bis auf einen Gradienten bestimmt.

in anisotroper Materie (z.B. nichtkubischer Einkristall)

$$\vec{P} = \vec{\chi}_e \vec{E}, \quad \vec{M} = \vec{\chi}_m \vec{H} \quad (26')$$

Brauchbar sind diese MG für nicht zu starke, zeitlich nicht zu rasch veränderliche makroskopische Felder (lineare Näherung, Vernachlässigung der Dispersion).

$\chi_e$  bzw.  $\vec{\chi}_e$  (symm. Tensor) elektrische Suszeptibilität

$\chi_m$  bzw.  $\vec{\chi}_m$  (symm. Tensor) magnet. Suszeptibilität

Äquivalent dazu:

$$\vec{D}[\vec{E}, \vec{H}], \quad \vec{B}[\vec{E}, \vec{H}]$$

Speziell (nur für isotrope Materie angeschrieben)

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad (27)$$

Wegen

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \vec{E} + 4\pi \vec{P} = (1 + 4\pi \chi_e) \vec{E} \\ \vec{B} &= \vec{H} + 4\pi \vec{M} = (1 + 4\pi \chi_m) \vec{H} \end{aligned} \quad \text{folgt}$$

$$\epsilon = 1 + 4\pi \chi_e, \quad \mu = 1 + 4\pi \chi_m \quad (28)$$

- $\epsilon$  Dielektrizitätskonstante, elektrische Permeabilität
- $\mu$  Permeabilitätskonstante, magnetische Permeabilität

Vom logischen Aufbau der Theorie stellen aber  $\vec{E}, \vec{B}$  die primären Feldgrößen dar, denn es

gilt 
$$\vec{B} = \langle \vec{B}_{\text{frei}} \rangle + \langle \vec{B}_{\text{mat}} \rangle = \langle \vec{B}_{\text{ges}} \rangle.$$

Deshalb haben wir in den früheren Abschnitten die erforderlichen Funktionale immer als

$$\vec{P}[\vec{E}, \vec{B}], \quad \vec{M}[\vec{E}, \vec{B}]$$

bzw. als

$$\vec{D}[\vec{E}, \vec{B}], \quad \vec{H}[\vec{E}, \vec{B}]$$

geschrieben.

Speziell:

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E}, \quad \vec{M} = \chi_m \vec{B}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$$

$$\epsilon = 1 + 4\pi \chi_e, \quad \frac{1}{\mu} = 1 - 4\pi \chi_m$$

$$\epsilon \leftrightarrow \frac{1}{\mu}, \quad 1 - 4\pi \chi_m = \frac{1}{1 + 4\pi \chi_m}$$

Bezeichnung von Materialien "mit linearen Materialgleichungen"

im Hinblick auf die elektrische Polarisation:

$\epsilon > 1$  dielektrisches Material

im Hinblick auf die magnetische Polarisation:

$\mu < 1$  diamagnetisches Material ( $\frac{1}{\mu} \leftrightarrow \epsilon$ )

$\mu > 1$  paramagnetisches Material

im Hinblick auf die elektrische Stromleitung:

bei Vorhandensein von freien Strömen in der Materie

$\vec{j} = \sigma \vec{E}$  Leiter (Ohm)  $[\sigma] = T^{-1}$

$\sigma_{\text{Kupfer}} \approx 10^{20}$  elektrische Leitfähigkeit  
 $\sigma_{\text{Porzellan}} \approx \frac{1}{\sigma}$  spezifischer elektr. Widerstand

Porzellan: "Nichtleiter"

Formal:  $\sigma = 0$  Nichtleiter

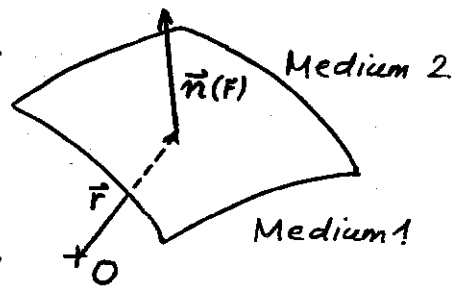
Bemerkungen: Bei ferroelektrischen Materialien (Elektreten) und bei ferromagnetischen Materialien sind die MG nichtlinear ("Hysteresis", "Gedächtnis", Remanenz<sup>\*)</sup>), doch gibt es dann Bereiche für  $\vec{E}$  bzw. für  $\vec{B}$  in denen die MG näherungsweise linear ist mit  $\epsilon \gg 1$  bzw. mit  $\mu \gg 1$ .

<sup>\*)</sup> S. das Beispiel in den Abschnitten XII.3.C, XII.3.D

XI.2.C. Anschlußbedingungen an der Grenzfläche zweier Medien

FG:  $\text{div } \vec{D} = 4\pi \rho$   
 $\text{div } \vec{B} = 0$

$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$   
 $\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$



in integraler Form:

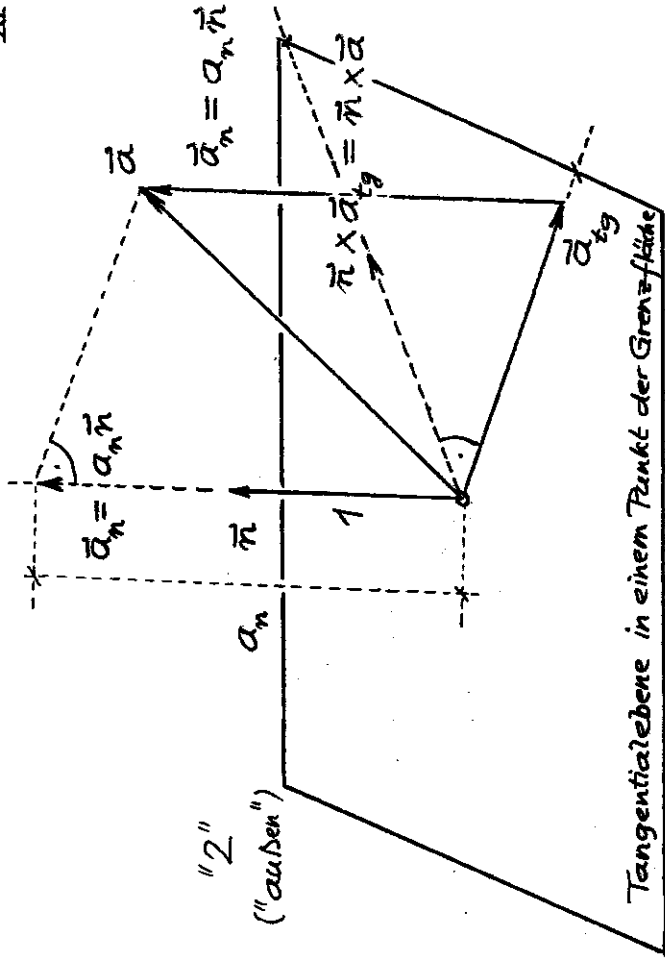
$$\oint_{\mathcal{V}(V)} d^3\vec{r} \cdot \vec{D} = 4\pi \int_V d^3r \rho \quad \oint_{\mathcal{C}(F)} d\vec{r} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_F d^2\vec{f} \cdot \vec{B} \quad (29)$$

$$\oint_{\mathcal{V}(V)} d^3\vec{r} \cdot \vec{B} = 0 \quad \oint_{\mathcal{C}(F)} d\vec{r} \cdot \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \int_F d^2\vec{f} \cdot \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_F d^2\vec{f} \cdot \vec{D}$$

⇒ (Beweis folgt)

Anschlußbedingungen an der Grenzfläche: für beliebige Medien gültig! (FG!)

$\text{Div } \vec{D} \equiv \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 4\pi \sigma$	$\text{Rot } \vec{E} \equiv \vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$
$\text{Div } \vec{B} \equiv \vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$	$\text{Rot } \vec{H} \equiv \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \vec{k}$



"1"  $a_n := \vec{n} \cdot \vec{a}$  ,  $\vec{a}_n := a_n \vec{n}$

$\vec{a}_{tg} := \vec{a} - \vec{a}_n$  , d.h.  $\vec{a} = \vec{a}_{tg} + \vec{a}_n$

$\vec{n} \times \vec{a}_{tg} = \vec{n} \times \vec{a}$  Vektor in der Tangentialebene

$\vec{n} \times \vec{a} = 0 \iff \vec{a}_{tg} = 0$

Falls  $\vec{a}$  bei Durchgang durch Fläche im Flächenpunkt nicht stetig sein muß, kann

$\text{Div } \vec{a} := \vec{n} \cdot (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) = a_{2,n} - a_{1,n}$   
oder (und) "außen minus innen"

$\text{Rot } \vec{a} := \vec{n} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) = \vec{n} \times (\vec{a}_{2,tg} - \vec{a}_{1,tg})$

von 0 bzw.  $\vec{0}$  verschieden sein. Rot  $\vec{a}$  Vektor in der Tangentialebene

- 6 \* Flächenladungsdichte  
 7 \* Flächenstromdichte

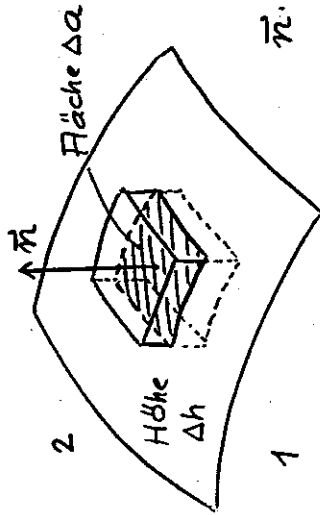
XI-23

Sind  $\sigma$  und  $\vec{k}$  null (z.B. Grenzfläche zweier Dielektrika), so lauten die Anschlussbedingungen

Stetigkeit der  
 Normalkomponenten von  $\vec{D}$  und  $\vec{B}$   
 und der  
 Tangentialkomponenten von  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$

Beweis: "skizziert"

$$\oint_{S(\sigma)} d\vec{r} \cdot \vec{D} = 4\pi \int_{\sigma} d^3r \rho$$



Bis auf höhere Ordnungen in  $\Delta a, \Delta h$  gilt:

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Delta a = 4\pi \int_{-\frac{\Delta h}{2}}^{+\frac{\Delta h}{2}} \rho dh \Delta a$$

$\Delta a \rightarrow 0, \Delta h \rightarrow 0$ :

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 4\pi \sigma$$

mit  $\sigma = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{-\frac{\Delta h}{2}}^{+\frac{\Delta h}{2}} \rho dh$

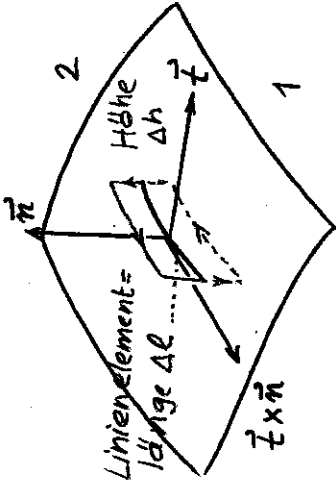
(Physikalisch:  $\int \rho dh$  über "Grenzschicht")

Analog für  $\vec{B}$ , ebenso "unten" analog für  $\vec{E}$ .

XI-23'

Rotorgleichungen:

$\vec{r}$  Einheitsvektor in Tangentialebene  $\perp \vec{z}$   
 Linienelement



$$\oint_{C(F)} d\vec{r} \cdot \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \int_F d^2\vec{r} \cdot \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_F d^2\vec{r} \cdot \vec{D}$$

Bis auf höhere Ordnungen in  $\Delta l, \Delta h$  gilt:

$$(\vec{r} \times \vec{n}) \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \Delta l = \frac{4\pi}{c} \int_{-\frac{\Delta h}{2}}^{+\frac{\Delta h}{2}} \vec{j} \cdot \vec{r} dh \Delta l + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} (\vec{D}_2 \cdot \vec{r} \frac{\Delta h}{2} \Delta l + \vec{D}_1 \cdot \vec{r} \frac{\Delta h}{2} \Delta l)$$

mus für beliebige Linienelemente durch den Flächenpunkt, also für beliebiges  $\vec{r}$ , gelten

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \int_{-\frac{\Delta h}{2}}^{+\frac{\Delta h}{2}} \vec{j} dh$$

$$\Delta l \rightarrow 0, \Delta h \rightarrow 0: \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \vec{k}$$

mit  $\vec{k} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{-\frac{\Delta h}{2}}^{+\frac{\Delta h}{2}} \vec{j} dh$

(Physikalisch:  $\int \vec{j} dh$  über "Grenzschicht")

XI. 3. Materialeigenschaften.  
Dispersionsrelationen

XI. 3. A. Grenzen der Anwendbarkeit der makroskopischen Elektrodynamik.  
Grenzen der Anwendbarkeit des Permeabilitätsbegriffes

Makroskopische Elektrodynamik:

MATERIE ALS KONTINUUM behandelt

a Größenordnung atomarer Abstände in Materie  
(z.B. Gitterkonstante):  $a \sim 1 \text{ \AA}$

R<sub>0</sub> Radius des Mittelungsvolumens für das "Ausmitteln" der Atomistik:

$R_0 \gg a$  erforderlich:  $R_0 \sim 100 \text{ \AA}$

Damit ist es nicht sinnvoll, in der makroskopischen Elektrodynamik elm. Felder zu betrachten, welche sich auf räumlichen Distanzen  $\leq R_0$  merklich ändern.

Bei zeitlich harmonischen freien Quellen:

$\omega$  Kreisfrequenz  
 $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$  Wellenlänge folgt  $\lambda \gtrsim R_0 \gg a$  (31)

$\Rightarrow$  Freie Quellen dürfen sich zeitlich nicht zu rasch ändern:

Frequenzen müssen kleiner sein als Frequenzen langwelliger Röntgenstrahlung

Bemerkungen:

1) Man kann also z.B. Wellenausbreitung für Rundfunk, Mikrowellen, IR, sichtbaren Bereich und UV im Rahmen der makroskop. Elektrodynamik behandeln.

2) Für höhere als die zugelassenen Frequenzen müßte man auch bereits den quantenhaften Charakter des elm. Feldes berücksichtigen (hohe Quantenenergien  $h\nu$ ). •

Permeabilitätsbegriff:

T<sub>Umlauf</sub> "Umlaufzeit" eines Elektrons in einem Atom:

$T_{\text{Umlauf}} \sim \frac{a}{v}$  mit  $m_0^2 \sim \frac{e^2}{a}$   
 $\Rightarrow T_{\text{Umlauf}} \sim \frac{a}{c} \sqrt{\frac{a}{r_e}}$  mit  $r_e = \frac{e^2}{m_0^2 c^2} = 3 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$   
 $\sim 10^{-17} \dots 10^{-16} \text{ s}$

Zur Ausbildung neuer magnetischer Momente als Reaktion auf zeitlich veränderliche freie Felder müssen Zeiten von mehreren Elektronenumläufen zur Verfügung stehen, währenddessen dürfen sich aber die freien Felder nicht merklich ändern.

Bei zeitlich periodischen freien Quellen:

$$T = \frac{\lambda}{c} \gg T_{\text{Umlauf}} \sim \frac{a}{c} \sqrt{\frac{\alpha}{\epsilon}} \sim 10^{-17} \dots 10^{-16}$$

$$\lambda \gg a \sqrt{\frac{\alpha}{\epsilon}} \sim 1000 \text{ \AA} \quad (32)$$

Die Benützung der MG  $\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$  hat nur einen Sinn, wenn die Frequenzen kleiner sind als die Frequenzen aus dem sichtbaren Bereich.

Für zeitlich rascher veränderliche freie Felder hat man  $\vec{H} = \vec{B}$  (also  $\vec{M} = \vec{O}$ ) zu setzen. (Formal:  $\mu = 1$ )

XI.3.B\*: Beziehung zwischen der molekularen Polarisierbarkeit  $\chi_{\text{mol}}$  und der elektrischen Suszeptibilität  $\chi_e$

Elektrostatik der Dielektrika: freie Ladungsdichte zeitunabhängig  $\Rightarrow$  makroskopische Quellen und Felder zeitunabhängig nicht aber die mikroskopischen; deshalb auch mittleres Dipolmoment  $\langle \vec{p}_{\text{mol}} \rangle$  eines herausgegriffenen Moleküls betrachtet

ferner: Substanz soll keine permanenten Dipole enthalten

Wahl des Koordinatenursprungs:

Koordinatenursprung = Ort des herausgegriffenen Moleküls

Dann gilt in weitem Feldstärkenbereich

$$\langle \vec{p}_{\text{mol}} \rangle = \chi_{\text{mol}} \vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{O}) \quad [1]$$



$\langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle(\vec{O}) +$  elstat. Feld in  $\vec{O}$ , welches von allen übrigen Molekülen

des Materiestücks verursacht wird, welche durch Dipole mit Momenten  $\langle \vec{p}_{j,\text{mol}} \rangle$  beschrieben werden

XI-28

Feldbeiträge der anderen Moleküle

am Ort des herausgegriffenen Moleküls:  
(nur Dipolfeldanteile berücksichtigt)

Mit der Abkürzung  $\vec{P}_j \equiv \langle \vec{p}_{j,mol} \rangle$  gilt dann

$$\vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0}) = \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle(\vec{0}) + \sum_j \frac{3(\vec{p}_j \cdot \vec{r}_j) \vec{r}_j - r_j^2 \vec{p}_j}{r_j^5} \quad [2]$$

Kontaktterme sind im Ursprung null!  
 $\vec{r}_j \neq \vec{0}, \forall j$

Außerhalb der "Lorentzkugel" (Mittelungsbereich

für Übergang zur makroskopischen Elektrodynamik)

kann man von der molekularen Struktur absehen

( $R_0 \sim 100 \text{ \AA} \gg a$ ) und die Materie als

polarisiertes Kontinuum betrachten:

$$\vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0}) = \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle(\vec{0}) + \sum_j \frac{3(\vec{p}_j \cdot \vec{r}_j) \vec{r}_j - r_j^2 \vec{p}_j}{r_j^5} \quad 0 < r_j < R_0 \quad [3]$$

$\vec{P}(\vec{r}) \equiv \vec{0}$   
außerhalb  
der Materie

$$+ \int_{r > R_0} d^3r \frac{3(\vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{P}(\vec{r})}{r^5}$$

Beachte: Ursprung liegt nicht im Integrationsbereich,

deshalb im Integranden Kontaktterm

$-\frac{4\pi}{3} \vec{P}(\vec{0}) \delta(\vec{r})$  nicht benötigt.

XI-29

Ziel:  $\vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0})$  - wenn möglich - näherungsweise  
durch  $\vec{E}(\vec{0})$  und  $\vec{P}(\vec{0}) = \chi_e \vec{E}(\vec{0})$   
ausdrücken

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{0}) &= \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle(\vec{0}) + \langle \vec{E}_{\text{mat}} \rangle(\vec{0}) \\ &= \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle(\vec{0}) + \int d^3r \left[ \frac{3(\vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{P}(\vec{r})}{r^5} \right. \\ &\quad \left. \text{ganze Materie einschließen} - \frac{4\pi}{3} \vec{P}(\vec{0}) \delta(\vec{r}) \right] \end{aligned} \quad [4]$$

$$= \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle(\vec{0}) - \frac{4\pi}{3} \vec{P}(\vec{0})$$

$$+ \int d^3r \frac{3(\vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{P}(\vec{r})}{r^5}$$

hier ausrechnen und in  $\vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0})$  einsetzen:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0}) &= \vec{E}(\vec{0}) + \frac{4\pi}{3} \vec{P}(\vec{0}) \\ &+ \sum_j \frac{3(\vec{p}_j \cdot \vec{r}_j) \vec{r}_j - r_j^2 \vec{p}_j}{r_j^5} \quad 0 < r_j < R_0 \end{aligned} \quad [5]$$

$$- \int_{r < R_0} d^3r \frac{3(\vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{P}(\vec{r})}{r^5}$$



$$\int_{r < R_0} d^3r \frac{3(\vec{P}(r) \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{P}(r)}{r^5} \approx \vec{0}$$

(Winkelintegral null) [6]

$\vec{P}(r) \approx \vec{P}(\vec{0}) = \text{konst}$   
(makroskopisches Feld)

Somit:

$$\vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0}) = \vec{E}(\vec{0}) + \frac{4\pi}{3} \vec{P}(\vec{0})$$

[7]

$$+ \underbrace{\sum_{\substack{j \\ 0 < r_j < R_0}} \frac{3(\vec{p}_j \cdot \vec{r}_j)\vec{r}_j - r_j^2 \vec{p}_j}{r_j^5}}_{\text{strukturabhängiger Term}}$$

strukturabhängiger Term

Lorentz: Term ist null für

$\vec{p}_j = \vec{p}, \forall j$ , und einfaches kubisches Gitter; s. Greiner (Ursprung Gitterpunkt!)

Plausible Annahme: Term auch

null für regellose Anordnungen (amorphe Stoffe, Flüssigkeiten, Gase)

"Arbeitshypothese" (Jackson):

Term auch unbedeutend, wenn  $\neq \vec{0}$

XI-31

Damit: Beziehung von Lorentz

$$\vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0}) = \vec{E}(\vec{0}) + \frac{4\pi}{3} \vec{P}(\vec{0})$$

[8]

Mit

$$\vec{P}(\vec{r}) = \chi_e \vec{E}(\vec{r})$$

[9]

und

$$\vec{P}(\vec{0}) = N \langle \vec{p}_{\text{mol}} \rangle$$

[10]

$N$  Anzahl der Moleküle / Volumseinheit

$$\vec{P}(\vec{0}) = N \chi_{\text{mol}} \underbrace{\vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0})}_{\langle \vec{p}_{\text{mol}} \rangle}$$

folgt

$$= N \chi_{\text{mol}} (\vec{E}(\vec{0}) + \frac{4\pi}{3} \vec{P}(\vec{0}))$$

$\Rightarrow$

$$\vec{P}(\vec{0}) = \underbrace{\frac{N \chi_{\text{mol}}}{1 - \frac{4\pi}{3} N \chi_{\text{mol}}}}_{\chi_e} \vec{E}(\vec{0})$$

$$\chi_e = \frac{N \chi_{\text{mol}}}{1 - \frac{4\pi}{3} N \chi_{\text{mol}}}$$

$$= \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \quad (35b)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} N \chi_{\text{mol}} \quad (36b)$$

Clausius-Mosotti  
(mit  $n = \sqrt{\epsilon}$ )

Lorentz-Lorenz!

$$\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} = \frac{4\pi}{3} N \chi_{\text{mol}} \propto \text{Dichte der Substanz}$$

"dielektrische Zustandsgleichung"

gut erfüllt für Gase  $\epsilon = \epsilon(\bar{v})$   
 schlechter für Flüssigkeiten und Festkörper, insbesondere für Stoffe mit großem  $\epsilon$  \*)

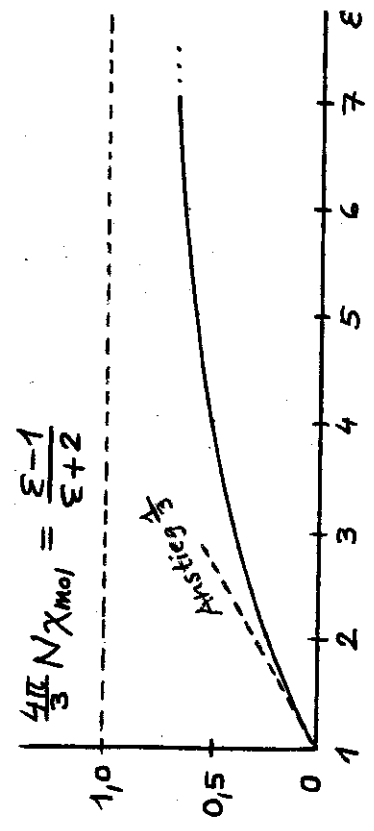
Beziehung

Grund: unphysikalische "Sättigung"

$$\frac{4\pi}{3} N \chi_{\text{mol}} = \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow \infty} 1$$

(maximale Polarizierbarkeit unphysikalisch)

Ursachen des "Versagens":  
 Näherungen, nichtlineare Effekte



\*) Substanzen mit großem  $\epsilon$  sind i.a. polare Substanzen, die wir bei der Ableitung von vornherein ausgeschlossen haben!

XI. 3. C. Orientierungspolarisierbarkeit

Nicht gebracht. (S. Statistische Mechanik.)  
 Nicht Prüfungsstoff.

XI. 3. D. Kramers-Kronig Dispersions-  
relationen

Für zeitlich "sehr rasch veränderliche" <sup>\*)</sup>freie Felder  
macht sich die Trägheit der Materie bemerkbar.

Die Materialgleichung

\*) Substanz =  
spezifisch!

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \chi_e \vec{E}(\vec{r}, t)$$

bzw.

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon \vec{E}(\vec{r}, t), \quad \epsilon = 1 + 4\pi\chi_e$$

ist dann nicht mehr brauchbar: Dispersion!  
Absorption!

Die allgemeinste räumlich lokale, lineare,  
kausale Materialgleichung (für homogene  
isotrope Materie) lautet <sup>\*)</sup>

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau G(\tau) \vec{E}(\vec{r}, t - \tau)$$

"zeitliche  
Dispersion"

bzw.

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) + \int_0^{+\infty} d\tau G(\tau) \vec{E}(\vec{r}, t - \tau)$$

(38)  
Und was ist  
mit  $M$  und  
 $H$  ?  
 $G(\tau)$  Relaxationsfunktion  
 $\tau \in [0, +\infty)$  reellwertige Materialfunktion

<sup>\*)</sup> Wenn der Einfluss von  $\vec{B}$  vernachlässigbar ist!

Man kann auch

$$\vec{P}(F,t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau G(\tau) \vec{E}(F,t-\tau)$$

mit  $G(\tau)$ ,  $\tau \in (-\infty, +\infty)$ , schreiben.

Für eine so definierte Relaxationsfunktion ergibt dann die Kausalitätsforderung

$$G(\tau) = 0 \text{ für } \tau < 0.$$

Da es keinen physikalischen Grund für einen Sprung oder eine andere Unstetigkeit der Materialfunktion  $G(\tau)$  für  $\tau = 0$  gibt, erwarten wir

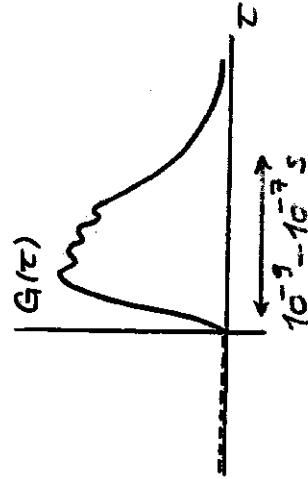
$$\underline{G(0+) = 0.} \quad (\text{Jackson: } G(0-) \neq G(0+) \text{ "wäre unphysikalisch"})$$

Ferner erwarten wir

$$G(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{"eher stark"})^*)$$

Das Zeitintervall, für das  $G(\tau)$  "wesentlich von Null verschieden" ist, ist durch die Größenordnung der Relaxationszeiten der von den freien Feldern in der Materie ausgelösten Prozesse bestimmt:

$$10^{-9} - 10^{-7} \text{ s.}$$



\*) VS: Nichtleiter bzw. Leiter, bei dem ein allfälliger Gleichstrom nicht von  $G(\tau)$  "mitbeschrieben" wird (s. Folie XI-41 Gl. (46)).

$$\vec{P}(F,t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} d\tau G(\tau) \vec{E}(F,t-\tau)$$

Fouriertransformation bzgl. der Zeitvariablen:

$$\begin{aligned} \vec{P}(F,\omega) &= \int_{\mathbb{R}} dt e^{i\omega t} \vec{P}(F,t) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} d\tau G(\tau) e^{i\omega\tau} \int_{\mathbb{R}} dt' e^{i\omega(t-\tau)} \vec{E}(F,t-\tau) \end{aligned}$$

Somit:

$$\vec{P}(F,\omega) = \chi_e(\omega) \vec{E}(F,\omega)$$

$$\chi_e(\omega) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} d\tau e^{i\omega\tau} G(\tau)$$

$$\boxed{\vec{D}(F,\omega) = \epsilon(\omega) \vec{E}(F,\omega)}$$

(40)

$$\begin{aligned} \epsilon(\omega) &= 1 + 4\pi \chi_e(\omega) \\ &= 1 + \int_0^{+\infty} d\tau e^{i\omega\tau} G(\tau) \end{aligned}$$

komplexwertige Dielektrizitätsfunktion  
Dispersionsgesetz des Mediums

Symmetrie von  $\text{Re } \epsilon(\omega)$ ,  $\text{Im } \epsilon(\omega)$   
bzgl.  $\omega \rightarrow -\omega$  (für reelles  $\omega$ )

$$\epsilon(\omega) = 1 + \int_0^{+\infty} dt e^{i\omega t} \underbrace{G(t)}_{\text{reellwertig}}$$

$$\Rightarrow \epsilon^*(\omega) = \epsilon(-\omega)$$

$\text{Re } \epsilon(\omega)$	gerade Funktion
$\text{Im } \epsilon(\omega)$	ungerade Funktion

(für reelles  $\omega$ )

Analytizitätseigenschaften in der komplexen

$\omega$ -Ebene

$\epsilon(\omega)$ ,  $\omega \in \mathbb{C}$ , betrachtet

1)

$$\epsilon(\omega_+ + i\omega_i) = 1 + \int_0^{+\infty} dt e^{i\omega_+ t} \underbrace{G(t)}_{\text{endlich } \forall t} e^{-\omega_i t}$$

Ann.: endlich  $\forall t$

$$G(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \text{ stärker als } \frac{1}{t}$$

$\Rightarrow$  Integral  $\exists$  für  $\omega_i \geq 0$ , also

$\epsilon(\omega)$  in der "oberen" Halbebene und auf der reellen Achse endlich

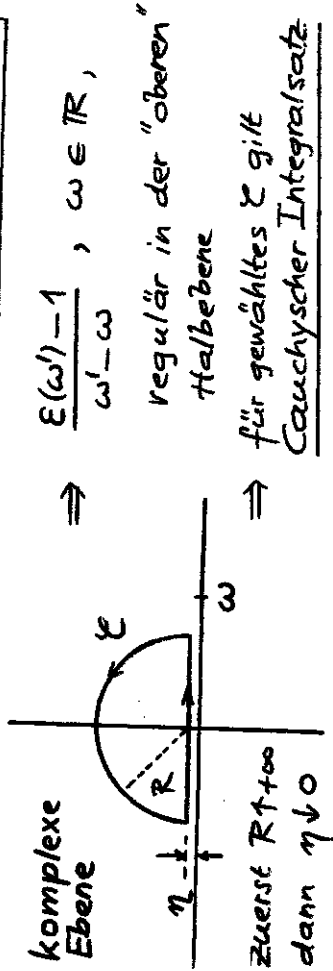
2)

$$\frac{d\epsilon(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega = \omega_+ + i\omega_i} = i \int_0^{+\infty} dt e^{i\omega_+ t} t G(t) e^{-\omega_i t}$$

$\Rightarrow$  Integral  $\exists$  für  $\omega_i > 0$

1) + 2)  $\Rightarrow$

$\epsilon(\omega') - 1$ ,  $\omega' \in \mathbb{C}$ , ist in der "oberen" Halbebene regulär (analytisch) und auf der reellen Achse endlich



$$\Rightarrow \frac{\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega}, \omega \in \mathbb{R}$$

regulär in der "oberen" Halbebene

für gewähltes  $\zeta$  gilt

Cauchyscher Integralsatz

$$\oint_{\zeta} \frac{\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' = 0 \quad \text{für } \omega \in \mathbb{R}$$

Weitere Annahme:  
Taylorentwicklung von  $G(\tau) \exists$  für  $\tau = 0+$

$$G(\tau) = \underbrace{G(0+)}_0 + \tau G'(0+) + \dots, \tau > 0$$

$\Rightarrow$  (kurze elementare Rechnung)

Für große  $|\omega'|$ ,  $\text{Im } \omega' > 0$ , gilt

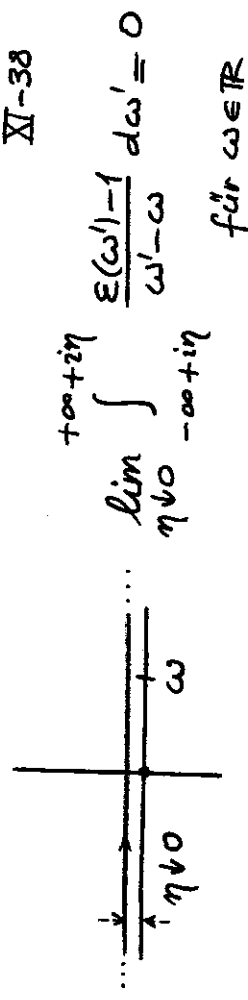
$$\epsilon(\omega') - 1 = -\frac{G'(0+)}{\omega'^2} + O\left(\frac{1}{|\omega'|^3}\right) \quad *)$$

$\Rightarrow$  Integral über Halbkreis ( $\omega' = R e^{i\varphi} + i\eta$ )

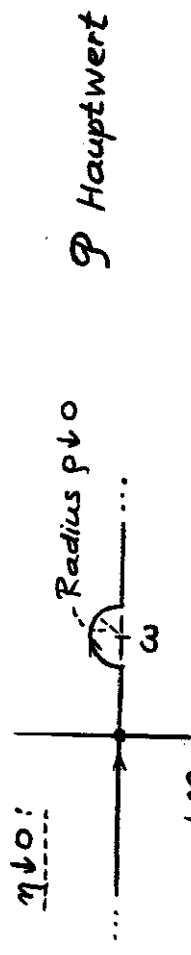
"verschwindet" für  $R \rightarrow +\infty$  wie  $\frac{1}{R^2}$

$$\Rightarrow \int_{-\infty + i\eta}^{+\infty + i\eta} \frac{\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' = 0 \quad \text{für } \omega \in \mathbb{R}$$

\*) "Erwartung": Verhalten gilt auch für reelles  $\omega$ ; s. später



Beachte:  $\epsilon(\omega)$  endlich auf reeller Achse



$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' + \int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' = 0 \quad \text{für } \omega \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d\omega'}{\omega' - \omega} = i d\varphi \iff \begin{cases} \omega' - \omega = \rho e^{i\varphi} \\ d\omega' = i \rho e^{i\varphi} d\varphi \end{cases}$$

Eigenschaften von  $\epsilon(\omega')$ !

Integral  $\int_{\rho_0}^{\rho_1}$  gibt  $i [\epsilon(\omega) - 1] \int_0^{\pi} d\varphi$

Ergebnis:

$$\epsilon(\omega) - 1 = \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega'$$

für reelle  $\omega$

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{i}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega', \quad \omega \text{ reell}$$

$$\text{Re } \epsilon(\omega) + i \text{Im } \epsilon(\omega) = \text{Re } \epsilon(\omega') + i \text{Im } \epsilon(\omega')$$

$$\downarrow \text{Re } \epsilon(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im } \epsilon(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$

$$\downarrow \text{Im } \epsilon(\omega) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Re } \epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' \quad \omega \text{ reell} \quad (44)$$

$$\text{Re } \epsilon(-\omega) = \text{Re } \epsilon(\omega), \quad \text{Im } \epsilon(-\omega) = -\text{Im } \epsilon(\omega) \quad (\omega \text{ reell})$$

$$\begin{aligned} \text{Re } \epsilon(\omega) &= 1 + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\omega' \text{Im } \epsilon(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \\ \text{Im } \epsilon(\omega) &= -\frac{2\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\text{Re } \epsilon(\omega') - 1}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \end{aligned} \quad (45)$$

Kramers-Kronig

Dispersionsrelationen

$$\omega \text{ reell} \geq 0$$

physikal. Frequenzbereich

Bedeutung? Physikal. Zusammenhang zwischen

DISPERSION - (primär) verantwortlich:  $\text{Re } \epsilon(\omega)$

und ABSORPTION (Dissipation von Energie durch dielektrische Verluste) - verantwortlich:  $\text{Im } \epsilon(\omega)$

in einem Medium (s. später).

Leiter

Im Kapitel XIV (Wellen in Materie) wird gezeigt:  
Leiter können (unter bestimmten VS) durch die  
verallgemeinerte Dielektrizitätsfunktion

$$\eta(\omega) = \epsilon(\omega) + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$$

beschrieben werden.

gleiche Analytizitätseigen = zusätzliche  
schaften wie bei Isolatoren Dissipation von  
(da gleiche physikalische Energie (Joulesche  
Mechanismen) Wärme)

Einsetzen von  $\epsilon(\omega) = \eta(\omega) - i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$  in die

Kramers-Kronig Relationen für  $\epsilon(\omega)$  liefert die  
folgenden

Kramers-Kronig Dispersionsrelationen für  $\eta(\omega)$ :

$$\text{Re } \eta(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \omega' \frac{\text{Im } \eta(\omega') - 4\pi\sigma}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

$$\text{Im } \eta(\omega) = \frac{4\pi\sigma}{\omega} - \frac{2\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\text{Re } \eta(\omega') - 1}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

↑

Bemerkung: Vielfach wird dann statt

$\eta(\omega)$  wieder  $\epsilon(\omega)$  geschrieben, d.h. für  
Leiter wird einfach  $\frac{4\pi\sigma}{\omega}$  "zusätzlich" in  
den Imaginärteil von  $\epsilon(\omega)$  "integriert"

(s. z.B. Jackson). In den FG ist dann  
der Term  $\frac{4\pi}{c} \vec{j} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E}$  wegzulassen und

für die entsprechende Relaxationsfunktion

$$\text{gilt dann } G(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow +\infty} 4\pi\sigma \cdot \quad (46)$$

XI. 3. E. Normale und anomale Dispersion.

Summenregeln

Definition: Gilt für alle  $\omega$  aus einem  
Frequenzbereich

$$\frac{d}{d\omega} \text{Re } \epsilon(\omega) > 0 \quad (< 0),$$

so spricht man von einem Frequenzbereich  
mit normaler (anomaler) Dispersion.

In Abschnitt XI.4.C wird gezeigt:

$$\text{Im } \epsilon(\omega) > 0, \quad \forall \omega > 0$$

Definition: Ein Frequenzbereich, in dem  $\text{Im } \epsilon(\omega) \ll \text{Re } \epsilon(\omega)$  gilt, in dem daher  $\text{Im } \epsilon(\omega)$  null gesetzt werden kann, heißt Transparenzbereich der Substanz.

Satz: Transparenzbereiche sind Bereiche mit normaler Dispersion.

Beweis:

$$\text{Re } \epsilon(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\omega' \text{Im } \epsilon(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

mit  $\omega$  aus Transparenzbereich  $\Rightarrow$  Beiträge zum Integral nur für  $\omega'$  außerhalb dieses Frequenzbereiches, d.h. keine Beiträge für  $\omega'$  aus Umgebung von  $\omega \Rightarrow$

$\frac{d}{d\omega}$  und  $\mathcal{P} \int_0^{+\infty}$  vertauschbar  
 "überflüssig"

$$\frac{d}{d\omega} \text{Re } \epsilon(\omega) = \frac{4\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\omega' \text{Im } \epsilon(\omega')}{(\omega'^2 - \omega^2)^2} d\omega' > 0 \bullet$$

Summenregeln

Gezeigt wurde: Für große  $|\omega|$ ,  $\text{Im } \omega > 0$  gilt

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{G'(0)}{\omega^2} + O\left(\frac{1}{\omega^3}\right)$$

"Erwartung": Für reelles  $\omega$  gilt

$$\text{Re } \epsilon(\omega) - 1 \sim_{\omega \rightarrow +\infty} O\left(\frac{1}{\omega^2}\right)$$

gerade Fkt.

$$\text{Im } \epsilon(\omega) \sim_{\omega \rightarrow +\infty} O\left(\frac{1}{\omega^3}\right)$$

ungerade Fkt.

Was können wir für reelles  $\omega$  beweisen?

Satz: Gilt für reelles  $\omega$

$$\text{Im } \epsilon(\omega) \sim_{\omega \rightarrow +\infty} O\left(\frac{1}{\omega^3}\right),$$

so folgt daraus

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} [(\epsilon(\omega) - 1)\omega^2] = -\omega_p^2$$

mit  $\omega_p^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} d\omega' \omega' \text{Im } \epsilon(\omega')$  (51)

$\omega_p$  Plasmafrequenz "1. Summenregel"



Beweis:

$$\text{Re } \epsilon(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\omega' \text{Im } \epsilon(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

wegen  $\omega' \text{Im } \epsilon(\omega') \sim O\left(\frac{1}{\omega'^2}\right)$ :  
 $\omega' \rightarrow +\infty$

$$-\frac{1}{\omega^2} \underbrace{\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \omega' \text{Im } \epsilon(\omega') d\omega'}_{=: \omega_p^2} + O\left(\frac{1}{\omega^4}\right)$$

$$\text{Re } \epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + O\left(\frac{1}{\omega^4}\right) \text{ für große } \omega \quad \checkmark$$

Bemerkungen:

1)  $\omega_p$  heißt Plasmafrequenz (spielt eine Rolle bei Plasmaschwingungen)

2) Zusammen mit

$$\text{Im } \epsilon(\omega) \sim O\left(\frac{1}{\omega^3}\right) \text{ für große } \omega$$

folgt

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \epsilon(\omega) = 1$$

Trägheit der Materie:

Der Polarisationsmechanismus "kommt" bei zu raschen zeitlichen Änderungen der freien Felder mit diesen nicht mehr "mit", keine "Reaktion" mehr.

Experimentell:  $\epsilon(\omega) \rightarrow 1$  am "oberen

Ende" des UV-Bereiches (s. Beispiel NaCl Folie XI-46)  
 [Ende des Anwendungsbereiches der makrosk. Theorie!]

Satz: Gilt für reelles  $\omega$

$$\text{Im } \epsilon(\omega) \sim O\left(\frac{1}{\omega^3}\right), \quad \omega \rightarrow +\infty$$

$$\text{so gilt } \int_0^{+\infty} d\omega [\text{Re } \epsilon(\omega) - 1] = 0 \quad (52)$$

("2. Summenregel", "Superkonvergenzrelation")  
und umgekehrt.

Beweis mit 2. Kramers-Kronig Relation: s. Jackson

Beachte: Die Aussagen der Abschnitte XI.3.D,

XI.3.E wurden modellunabhängig ausgehend von wenigen allgemeinen Annahmen (Kausalität, Taylorentwickelbarkeit von  $G(\tau)$ , Verswinden von  $G(\tau)$  für  $\tau \rightarrow +\infty$ ) abgeleitet!

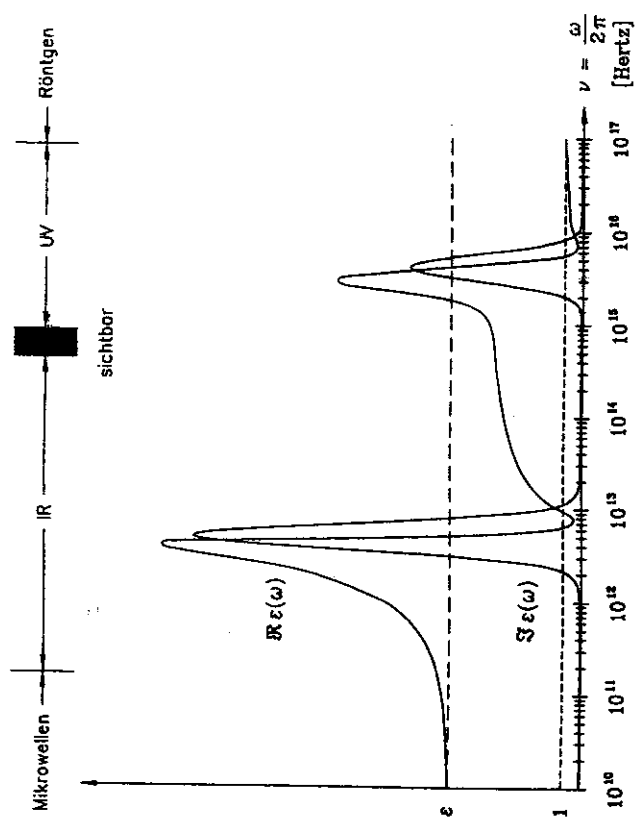
Oszillatormodell

$\omega_0$  Eigenfrequenz der gebundenen Elektronen,  
 $f$  Dämpfungskonstante,  $N$  Elektronen / Volumeneinheit

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

$\omega_p = ?$ ,  $G(\tau) = ?$  usw. SELBST ANSCHAUEN...

Dielektrizitätsfunktion für NaCl



XI.4. Energie- und Impulsbilanz

XI-47

XI.4.A. Vom makroskopischen Feld an den freien Quellen geleistete Arbeit und auf die freien Quellen ausgeübte Kräfte

Makroskopische FG

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi \rho & \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \Rightarrow \quad (54)$$

Leistungsdichte  $\vec{j} \cdot \vec{E}$  der vom makroskopischen Feld an den freien Quellen geleisteten Arbeit

$$\begin{aligned} \vec{j} \cdot \vec{E} &= \frac{c}{4\pi} \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{4\pi} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ 0 &= -\frac{c}{4\pi} \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \frac{1}{4\pi} \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \quad (55)$$

---


$$\vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{c}{4\pi} \underbrace{(\vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H})}_{\operatorname{div} (\vec{E} \times \vec{H})} - \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t})$$

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{div} (\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \quad (57)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Kraftdichte  $\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$  der vom makroskopischen Feld auf die freien Quellen ausgeübten Kräfte

$$\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi} (\operatorname{div} \vec{D}) \vec{E} + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{H} \times \vec{B} - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \times \vec{B} \quad (56)$$

$$\vec{0} = \frac{1}{4\pi} (\operatorname{div} \vec{B}) \vec{H} + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{E} \times \vec{D} + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \times \vec{D}$$

$$\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \operatorname{div} \vec{D} + \vec{H} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{D} \times \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{H})$$

$$(\vec{b} \operatorname{div} \vec{a} - \vec{a} \times \operatorname{rot} \vec{b})_k = \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i b_k) - a_i \frac{\partial b_i}{\partial x_k} - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \times \vec{B})$$

$$(\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B})_k = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{4\pi} (D_i E_k + B_i H_k) - \frac{1}{4\pi} (D_i \frac{\partial E_i}{\partial x_k} + B_i \frac{\partial H_i}{\partial x_k}) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi c} (\vec{D} \times \vec{B})_k \quad (58)$$

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = -\operatorname{div} \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \quad (57)$$

$$(\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B})_k = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{4\pi} (D_i E_k + B_i H_k) - \frac{1}{4\pi} (D_i \frac{\partial E_i}{\partial x_k} + B_i \frac{\partial H_i}{\partial x_k}) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi c} (\vec{D} \times \vec{B})_k \quad (58)$$

— "Problemterme"

rechte Gleichungsseiten n.a. nicht als Summen von reinen "Ableitungstermen" darstellbar, daher Interpretationsproblem! Einfache Verhältnisse nur bei allereinfachsten MG.

Gründe: In allgemeiner Materie gibt es neben der Jouleschen Wärme noch andere dissipative Mechanismen<sup>\*)</sup> (dielektrische Verluste, Ummagnetisierungsverluste usw.), durch welche Wärme entstehen kann.

In inhomogener Materie führt dies zu mechanische Spannungen und Deformationen (Materietransport) sowie zu einem Wärmestrom. Alle diese Beiträge sind noch auf den rechten Gleichungsseiten enthalten!

\*) s. Abschnitt XI.4.C

XI.4.B. Lokale Bilanzgleichungen für lineare <sup>homogene</sup> Medien ohne Dispersion

( $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  oder  $\vec{D} = \vec{\epsilon} \vec{E}$ , analog für  $\vec{H}, \vec{B}$ )  $\epsilon$  bzw.  $\vec{\epsilon}$  und  $\mu$  bzw.  $\vec{\mu}$  dürfen nicht ortsabhängig sein!

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = - \operatorname{div} \underbrace{\frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H})}_{=: \vec{S}_{(mat)}} - \underbrace{\frac{1}{4\pi} (\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t})}_{=: \omega_{(mat)}} \dots \text{gilt auch für } \epsilon(\vec{r}), \mu(\vec{r})$$

$$\begin{aligned} (\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B})_k &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{4\pi} (D_i E_k + B_i H_k) - \frac{1}{4\pi} (D_i \frac{\partial E_i}{\partial x_k} + B_i \frac{\partial H_i}{\partial x_k}) - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (D \times B)_k \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \delta_{ik} \frac{1}{8\pi} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) \dots \text{gilt nicht für } \epsilon(\vec{r}), \mu(\vec{r}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{4\pi} [D_i E_k + B_i H_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})] - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi c} (D \times B)_k \\ &=: T_{(mat)ik}^{(M)} \qquad \qquad \qquad =: g_{(mat)k} \end{aligned}$$

Zusammenfassung: lineare homogene Medien ohne Dispersion  
elm. Energiedichte in Materie

$$\omega_{(mat)}(\vec{r}, t) := \frac{1}{8\pi} [\vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) + \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{H}(\vec{r}, t)] \quad (63)$$

elm. Energiestromdichte in Materie

$$\vec{S}_{(mat)}(\vec{r}, t) := \frac{c}{4\pi} [\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)] \quad (62)$$

lokale Energiebilanz

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \omega_{(mat)} - \operatorname{div} \vec{S}_{(mat)} \quad (64)$$

elm. Impulsdichte in Materie

$$\vec{g}_{(mat)}(\vec{r}, t) := \frac{1}{4\pi c} [\vec{D}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)] \neq \frac{\vec{S}_{(mat)}}{c^2} \quad (66)$$

Maxwell'scher Spannungstensor in Materie  
(= - Impulsstromdichte in Materie)

$$\vec{T}_{(mat)}^{(M)}(\vec{r}, t) := \frac{1}{4\pi} [\vec{D}(\vec{r}, t) \circ \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{B}(\vec{r}, t) \circ \vec{H}(\vec{r}, t)] - \vec{I} \omega_{(mat)}(\vec{r}, t) \quad (65)$$

lokale Impulsbilanz

$$\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{g}_{(mat)} - \vec{\nabla} \cdot (-\vec{T}_{(mat)}^{(M)}) \quad (67)$$

Energie-Impuls-Vierertensor: Minkowskitensor

Bei Anschreiben der Grundgleichungen der makroskopischen Elektrodynamik in Viererschreibweise (s. Kapitel XVI) treten die Größen

$$\frac{1}{c^2} W_{(mat)}, \frac{S_{(mat)i}}{c^2}, g_{(mat)i}, -\frac{1}{c} T_{(mat)ik}$$

als Komponenten des sog. Minkowskitensors auf, welcher als elm. Energie-Impuls-Vierertensor in linearer Materie mit  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$  interpretiert wird:

$$(T_{(mat)}^{ik}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2} W_{(mat)} & \frac{1}{c^2} S_{(mat)1} & \frac{1}{c^2} S_{(mat)2} & \frac{1}{c^2} S_{(mat)3} \\ g_{(mat)1k} & g_{(mat)2k} & g_{(mat)3k} & (-\frac{1}{c} T_{(mat)ik}) \end{pmatrix}$$

Beachte: Dieser Vierertensor ist nicht symmetrisch, was zahlreiche Versuche ausgelöst hat, alternative Ausdrücke abzuleiten.

ABER: Nur Gesamt-Energie-Impuls-Vierertensor eines abgeschlossenen Systems muß symmetrisch sein!

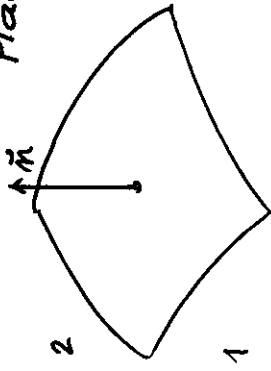
Literatur dazu: H. Miller Elektrodynamik B.I. 1980

XI.4.C. Dissipative Medien

elm. Energiestromdichte in beliebigen Medien

$$\vec{S}_{(mat)}(F,t) = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}(F,t) \times \vec{H}(F,t)] \quad (69)$$

Plausibilitätsbetrachtung dazu:  
Beachte: Grenzbedingungen  
 falls in Grenzfläche kein freier Flächenstrom fließt:



$$\vec{E}_{tg,1} = \vec{E}_{tg,2} \quad [1]$$

$$\vec{H}_{tg,1} = \vec{H}_{tg,2} \quad [2]$$

Ferner:  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a}_n \times \vec{b}_n + \vec{a}_n \times \vec{b}_{tg} + \vec{a}_{tg} \times \vec{b}_n + \vec{a}_{tg} \times \vec{b}_{tg}$

$$\Rightarrow (\vec{E} \times \vec{H})_n = \vec{E}_{tg} \times \vec{H}_{tg} \quad (\vec{a} \times \vec{b})_{tg}$$

Fließt in der Grenzfläche kein freier Flächenstrom, so wird in der Grenzfläche keine Energie dissipiert (keine Joulesche Wärme in der Grenzfläche) und die Normalkomponente von S muß stetig sein, was mit der Beziehung (69) wegen [1], [2] gewährleistet ist.

Demerkung: Ist ein Flächenstrom vorhanden, so besitzt  $\vec{H}_{tg}$  und damit  $S_n$  einen Sprung. Letzterer gibt dann gerade die in der Grenzfläche dissipierte Energie an.  $\bullet$   $\int_{S_1} \vec{H} \times \vec{E} \cdot \vec{n} = \int_{S_2} \vec{H} \times \vec{E} \cdot \vec{n}$

Dielektrische und magnetische Verluste  
in einem Nichtleiter in einem zeitlich harmonischen  
makroskopischen Feld

Gl. (57) für  $\vec{j}(F,t) \equiv \vec{0}$ :

$$\text{div } \vec{S}_{(mat)}(F,t) = \frac{1}{4\pi} \left[ \vec{E}(F,t) \cdot \frac{\partial \vec{D}(F,t)}{\partial t} + \vec{H}(F,t) \cdot \frac{\partial \vec{B}(F,t)}{\partial t} \right] \quad (70)$$

Annahme 1: MG

$$\vec{D}(F,\omega) = \epsilon(\omega) \vec{E}(F,\omega), \quad \vec{H}(F,\omega) = \frac{1}{\mu(\omega)} \vec{B}(F,\omega)$$

Annahme 2: Felder zeitlich harmonisch, also

$$\vec{E}(F,t) = \vec{E}(F) e^{-i\omega t} + c.c., \quad \text{usf.} \quad (71)$$

Stationärer Vorgang! Setzt systematische Energiezufuhr von externen Quellen voraus!

$$\vec{E}(F,t) = \vec{E}(F) e^{-i\omega t} + \vec{E}^*(F) e^{i\omega t}$$

$$\vec{D}(F,t) = \epsilon(\omega) \vec{E}(F) e^{-i\omega t} + \epsilon^*(\omega) \vec{E}^*(F) e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial \vec{D}(F,t)}{\partial t} = -i\omega \epsilon(\omega) \vec{E}(F) e^{-i\omega t} + i\omega \epsilon^*(\omega) \vec{E}^*(F) e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(F,t) \cdot \frac{\partial \vec{D}(F,t)}{\partial t} = i\omega \epsilon^*(\omega) |\vec{E}(F)|^2 - i\omega \epsilon(\omega) \vec{E}^2(F) e^{-2i\omega t} + c.c.$$

Zeitmittel über eine Periode  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\left\langle \vec{E}(F,t) \cdot \frac{\partial \vec{D}(F,t)}{\partial t} \right\rangle = \underbrace{(i\omega \epsilon^*(\omega) + c.c.)}_{2\omega \text{Im} \epsilon(\omega)} |\vec{E}(F)|^2$$

$$-\langle \text{div } \vec{S}_{(mat)}(F,t) \rangle = \frac{1}{4\pi} \left[ \langle \vec{E}(F,t) \cdot \frac{\partial \vec{D}(F,t)}{\partial t} \rangle + \langle \vec{H}(F,t) \cdot \frac{\partial \vec{B}(F,t)}{\partial t} \rangle \right]$$

gibt mit

$$\langle \vec{E}(F,t) \cdot \frac{\partial \vec{D}(F,t)}{\partial t} \rangle = 2\omega \text{Im} \epsilon(\omega) |\vec{E}(F)|^2$$

und (analog)

$$\langle \vec{H}(F,t) \cdot \frac{\partial \vec{B}(F,t)}{\partial t} \rangle = 2\omega \text{Im} \mu(\omega) |\vec{H}(F)|^2$$

$$\text{die folgende Bilanzgleichung: } (= -2\omega \text{Im} \frac{1}{\mu(\omega)} |\vec{B}(F)|^2)$$

$$-\langle \text{div } \vec{S}_{(mat)}(F,t) \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \left[ \text{Im} \epsilon(\omega) |\vec{E}(F)|^2 + \text{Im} \mu(\omega) |\vec{H}(F)|^2 \right] \quad (73)$$

Von den externen Quellen im Zeitmittel pro Zeit- und Volumeneinheit zugeführte Energie

mittlere Wärmeleistungsdichte des (nichtleitenden) Mediums,  $> 0, \forall \omega \neq 0$ , aus thermodynamischen Gründen

Beachte: Im stationären Fall wird natürlich die gesamte zugeführte Energie zur Deckung der Dissipation "verbraucht".

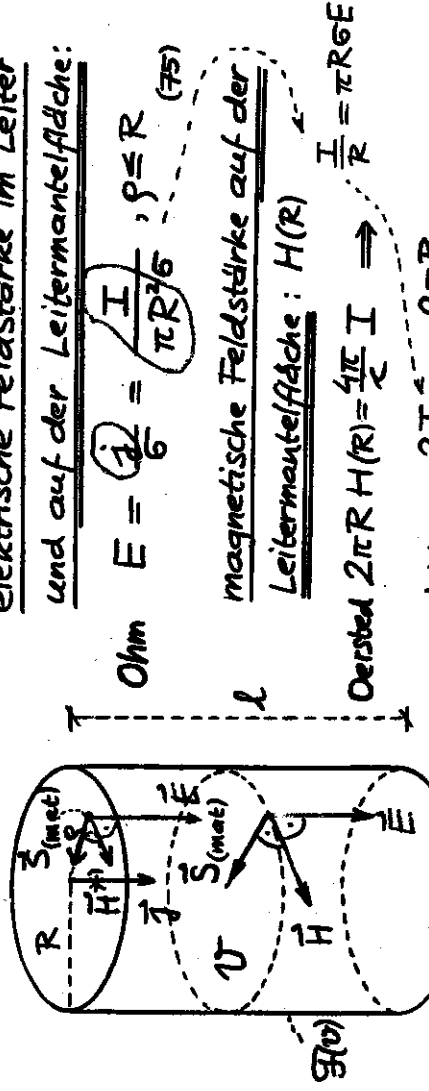
Folgerungen: 1) dielektrische Verluste sind durch  $\text{Im} \epsilon(\omega)$  bestimmt  
 2)  $\text{Im} \epsilon(\omega) > 0, \forall \omega > 0$  (74)

Analoge Aussagen gelten bzgl.  $\mu(\omega)$ , doch kann man für die meisten Dia- und Paramagneta bis in den IR-Bereich  $\mu(\omega) = \mu$  (reell, statischer Wert) setzen, und im sichtbaren und UV-Bereich ist  $\vec{M} \equiv \vec{0}$  also  $\vec{H} \equiv \vec{B}$  zu setzen (s. Abschnitt IX.3.A).

Stromdurchflossener Leiter (Stationärer Strom)

(57):  $\vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\text{div } \vec{S}_{(mat)}(\vec{r})$

Teilstück der Länge  $l$  eines unendlich langen zylindrischen Leiters betrachtet:



elektrische Feldstärke im Leiter und auf der Leitermantelfläche:

Ohm  $E = \frac{j}{\sigma} = \frac{I}{\pi R^2 \sigma}, \rho = R$  (75)

magnetische Feldstärke auf der Leitermantelfläche:  $H(R)$

Oersted  $2\pi R H(R) = \frac{4\pi}{c} I \Rightarrow \frac{I}{R} = \pi R \sigma E$  (76)

$H(R) = \frac{2I}{Rc} = \frac{2\pi R}{c} \sigma E$  (76)

\*) Beachte:  $H(\rho) = H(R) \frac{\rho}{R}$  für  $\rho < R$ .

Energiestromdichte auf der Leitermantelfläche:  $S_{(mat)}(R)$

$S_{(mat)}(R) = \frac{c}{4\pi} E H(R) = \frac{1}{2} R \sigma E^2$  (76a)

Energiebilanz für das Leiterstück der Länge  $l$

$\int_V d^3r \vec{j} \cdot \vec{E} = - \int_V d^3r \text{div } \vec{S}_{(mat)} = - \oint_{S(V)} d^2f \cdot \vec{S}_{(mat)}$  (77)

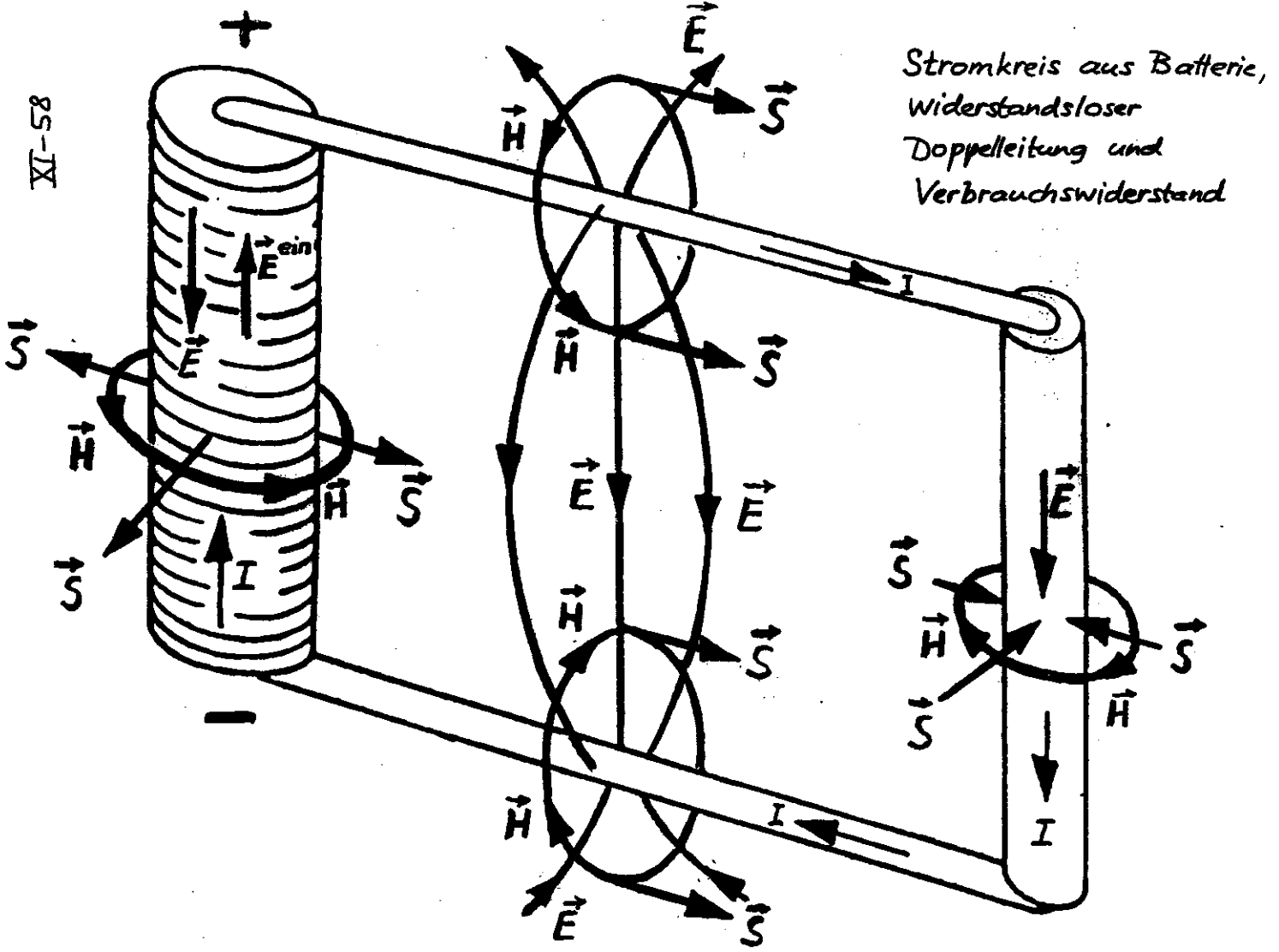
0 auf Grund- und Deckfläche  
 $- d^2f \frac{1}{2} R \sigma E^2$  auf Mante!

RESÜMEE?  $2\pi R l \frac{1}{2} R \sigma E^2$  ✓

Die gesamte im betrachteten Leiterstück in Joulesche Wärme umgewandelte Energie ist aus dem Feld durch die Mantelfläche eingeströmt.

Der Energietransport erfolgt nicht im Leiterinneren, sondern durch das elm. Feld außerhalb des Leiters.

Frage: Wie sehen die Energieströmungsverhältnisse für einen ganzen Stromkreis aus? (Stationärer Fall)



Stromkreis aus Batterie,  
Widerstandsloser  
Doppelleitung und  
Verbrauchswiderstand



XII. ELEKTRO- UND MAGNETOSTATIKXII.1. ElektrostatikXII.1.A. Feld- und Materialgleichungen.Grenzbedingungen

FG:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}) &= 4\pi \rho(\vec{r}) \\ \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) &= \vec{0} \end{aligned} \quad (1)$$

mit

$$\vec{D}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) + 4\pi \vec{P}(\vec{r}) \quad (2a)$$

MG:

innerhalb eines Raumbereiches

mit homogenem isotropem Dielektrikum

$$\vec{P}(\vec{r}) = \chi_e \vec{E}(\vec{r}) \quad \text{bzw.} \quad \vec{D}(\vec{r}) = \epsilon \vec{E}(\vec{r}) \quad (2b)$$

GB an der Grenzfläche zweierMaterialien:

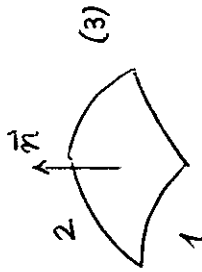
$$\operatorname{Div} \vec{D} \equiv \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 4\pi \sigma$$

$$\operatorname{Rot} \vec{E} \equiv \vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$$

bzw.

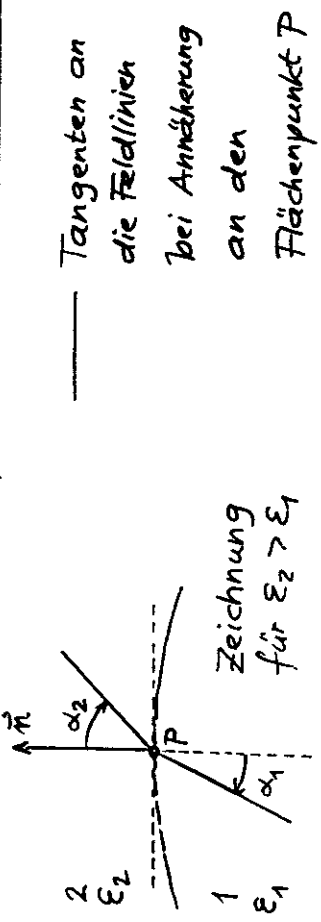
$$D_{2,n} - D_{1,n} = 4\pi \sigma$$

$$\vec{E}_{2,tg} - \vec{E}_{1,tg} = \vec{0}$$



$\sigma$  freie Flächen-  
ladungsdichte

XII-2  
 "Brechung der Feldlinien" für  $\sigma \equiv 0$  und Dielektrika



— Tangenten an die Feldlinien bei Annäherung an den Flächenpunkt P

$$D_{2n} = D_{1n} \Rightarrow \epsilon_2 E_2 \cos \alpha_2 = \epsilon_1 E_1 \cos \alpha_1$$

$$\vec{E}_{2, \text{tg}} = \vec{E}_{1, \text{tg}} \Rightarrow E_2 \sin \alpha_2 = E_1 \sin \alpha_1 \quad (8)$$

$$\frac{\tan \alpha_2}{\epsilon_2} = \frac{\tan \alpha_1}{\epsilon_1} \quad (9)$$

$\epsilon_2 > \epsilon_1$  [ $\epsilon_2 < \epsilon_1$ ]  $\Rightarrow$  "Brechung" der Richtung von  $\vec{D}$  = Richtung von  $\vec{E}$  vom Lot [zum Lot]

Bemerkung: Spricht man von "Brechung der Feldlinien", so muß man beachten, daß zwar die Feldlinien von  $\vec{D}$  alle "durch die Grenzfläche durchgehen", die Feldlinien von  $\vec{E}$  jedoch teilweise an der Grenzfläche (an Polarisationsflächenladungen) enden!

Potential

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \phi(\vec{r}) \quad (4)$$

FG für das Potential innerhalb eines Raumbereiches mit homogener Materie:  
 $\Delta \phi(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho(\vec{r})$  Poissongl. (5)

\*) homogenes isotropes Dielektrikum  
 Lösung:

$$\Delta \phi_{\text{hom}}(\vec{r}) = 0 \quad (7)$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon} \int d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \phi_{\text{hom}}(\vec{r}) \quad (6)$$

betreffender Raumbereich mit homogener Materie  
 $\phi_{\text{hom}}(\vec{r})$  für Erfüllung der Grenzbedingungen (zu anderer Materie oder zum Vakuum) benötigt.

XII.1. B. Lösungsmethoden

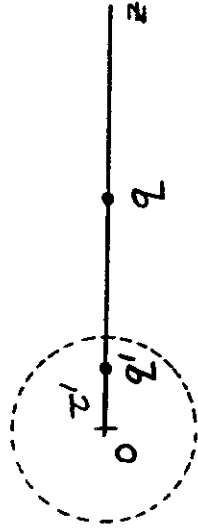
Potentialmethode  
 Bereits skizziert; Beispiel folgt

Bildladungsmethode — NICHT SO UNIVERSSELL!  
 Eigentliches Problem durch Ersatzproblem mit fiktiven Bildladungen ersetzt; Beispiel folgt

Bemerkung "außer Konkurrenz":

"Elementare Bildladungs-methode" (Bildladungen zu Punktladungen ebenfalls Punktladungen u.ä.)  
 auch nicht für so viele Probleme anwendbar wie in Elektrostatik der Leiter.  
 Methode z.B. für dielektrische Kugel + Punktladung nicht zielführend

z.B. für Außenraumproblem bezgl. der Kugel:  
 dielektrische Kugel müßte durch fiktive Punktladung + fiktive Linienladungsverteilung ersetzt werden

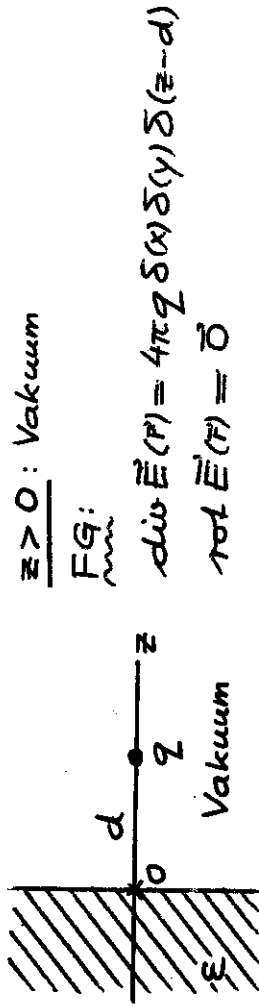


Dabei  $\tau'$  überdies noch z-abhängig!  
 ( $\tau'(z) \propto z \frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2}$ )

XII-4  
XII.1. C. Beispiel zur Bildladungsmethode:

Punktladung im Vakuum vor einem dielektrischen Halbraum

Eigentliches Problem:



z > 0: Vakuum

FG:

$\text{div } \vec{E}(r) = 4\pi q \delta(x) \delta(y) \delta(z-d)$

$\text{rot } \vec{E}(r) = \vec{0}$

Vakuum

z < 0: Dielektrikum

FG:  $\text{div } \vec{D}(r) = 0$

MG:  $\vec{D}(r) = \epsilon \vec{E}(r)$

$\text{rot } \vec{E}(r) = \vec{0}$

$\text{FG} + \text{MG} \Rightarrow \text{FG für } \vec{E}(r): \text{div } \vec{E}(r) = 0 \Rightarrow \rho_p(r) = 0$

$\text{rot } \vec{E}(r) = \vec{0}$

Bemerkung: Allgemein gilt in einem homogenen isotropen Dielektrikum  $\text{div } \vec{D}(r) = \epsilon \text{div } \vec{E}(r)$

$= 4\pi \rho(r)$  und  $\text{div } \vec{E}(r) = 4\pi (\rho(r) + \rho_p(r))$ ,

Woraus  $\rho_p(r) = -\frac{\epsilon-1}{\epsilon} \rho(r)$  folgt.

Asymptotische Bedingung:

$\vec{E}(r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \vec{0}$

Grenzbedingungen:

$\text{Div } \vec{D} = 0$

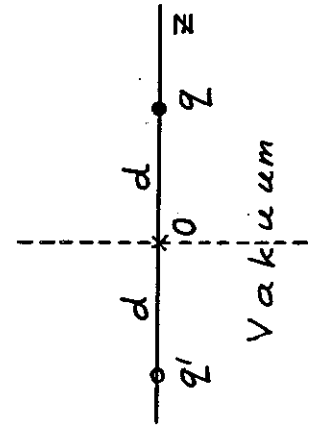
$\text{Rot } \vec{E} = \vec{0}$

für  $z=0$

Ersatzproblem:

XII-5

1) für Ansatz für  $\vec{E}(\vec{r})$  im Raumbereich  $z > 0$ :



Die fiktive Ladung  $q'$  soll also hinsichtlich der Wirkung auf den Halbraum  $z > 0$  das beim eigentlichen Problem bei  $z < 0$  befindliche (durch  $q$  polarisierte!) Dielektrikum "vertreten".

$$\vec{E}(\vec{r}) = q \frac{\vec{r} - d\vec{e}_z}{|\vec{r} - d\vec{e}_z|^3} + q' \frac{\vec{r} + d\vec{e}_z}{|\vec{r} + d\vec{e}_z|^3} \quad \text{für } z > 0 \quad (11)$$

Ansatz erfüllte FG des eigentlichen Problems im Bereich  $z > 0$ :

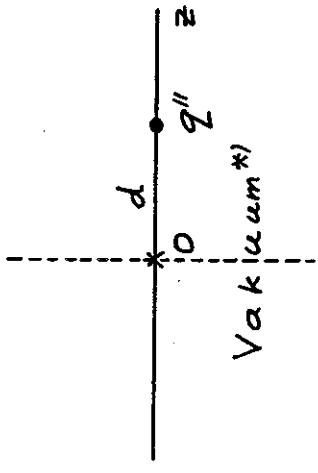
$$\text{div } \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi q \delta(x)\delta(y)\delta(z-d) \quad \checkmark$$

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \quad \checkmark$$

Ansatz erfüllte asymptotische Bedingung für  $z > 0$   $\checkmark$

XII-6

2) für Ansatz für  $\vec{E}(\vec{r})$  im Raumbereich  $z < 0$ :



Die fiktive Ladung  $q''$  soll also hinsichtlich der Wirkung auf den Halbraum  $z < 0$  die beim eigentlichen Problem an dieser Stelle befindliche Ladung  $q$  und das bei  $z < 0$  befindliche (durch  $q$  polarisierte) Dielektrikum "vertreten".

$$\vec{E}(\vec{r}) = q'' \frac{\vec{r} - d\vec{e}_z}{|\vec{r} - d\vec{e}_z|^3} \quad \text{für } z < 0 \quad (13)$$

Ansatz erfüllte FG + MG des eigentlichen Problems im Bereich  $z < 0$ :

$$\text{div } \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad \checkmark$$

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \quad \checkmark$$

Ansatz erfüllte asymptotische Bedingung für  $z < 0$   $\checkmark$

Zu erfüllen bleiben lediglich noch die

Grenzbedingungen des eigentlichen Problems

$\Rightarrow$  Bestimmungsgleichungen für  $q', q''$  in Abhängigkeit von  $q, \epsilon$  (falls kein Widerspruch!)

\*1) man könnte auch ein einheitliches Medium mit  $\epsilon$  nehmen

XII-7

$$\begin{aligned} z < 0: \vec{E}(F) &= \varrho'' \frac{\vec{r} - d\vec{e}_z}{|\vec{r} - d\vec{e}_z|^3} \\ z > 0: \vec{E}(F) &= \varrho' \frac{\vec{r} - d\vec{e}_z}{|\vec{r} - d\vec{e}_z|^3} + \varrho' \frac{\vec{r} + d\vec{e}_z}{|\vec{r} + d\vec{e}_z|^3} \end{aligned}$$

Grenzbedingungen:

Div  $\vec{D} = 0$ , d.h. Stetigkeit der Normal Komponente  
von  $\vec{D}$  für  $z=0$ :

$$z=0: \vec{r} \mp d\vec{e}_z = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y \mp d\vec{e}_z$$

$$|\vec{r} \mp d\vec{e}_z| = \sqrt{x^2 + y^2 + d^2}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \varrho'' \frac{-d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} &= \varrho' \frac{-d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} + \varrho' \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} \\ \Rightarrow -\varepsilon \varrho'' &= -\varrho + \varrho' \end{aligned} \quad (15)$$

Rot  $\vec{E} = \vec{0}$ , d.h. Stetigkeit der Tangential Komponente  
von  $\vec{E}$  für  $z=0$ :

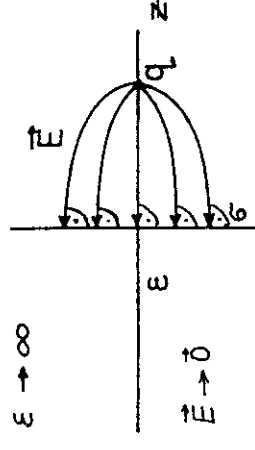
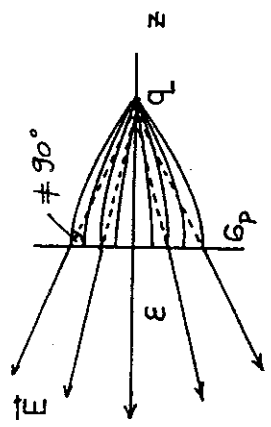
$$\begin{aligned} \varrho'' \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} &= \varrho' \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} + \varrho' \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} \\ \Rightarrow \varrho'' &= \varrho + \varrho' \end{aligned} \quad (14)$$

$$\Rightarrow \varrho' = -\varrho \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}, \quad \varrho'' = \varrho \frac{2}{\varepsilon + 1} \quad (16)$$

$$\varrho' = -\varrho \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}, \quad \varrho'' = \varrho \frac{2}{\varepsilon + 1}$$

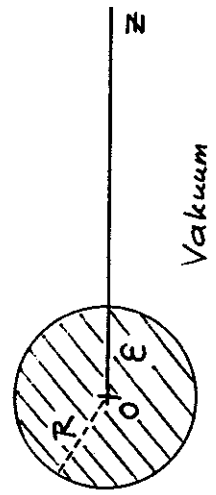
XII-8

Verlauf der  $\vec{E}$ -Feldlinien:  
 $\varepsilon \rightarrow \infty: \varrho' \rightarrow -\varrho$   
 $\varrho'' \rightarrow 0$



Selbst rechnen: 1)  $\sigma_p(\rho) = P_z(\rho, 0)$  (d.h.  $\sigma_p = -\text{Div } \vec{P}$ )  
 2) Kraft auf Punktladung  $q$

XII.1.D. Beispiel zur Potentialmethode:  
Dielektrische Kugel in einem (ursprünglich) homogenen elektrostatischen Feld  $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_z$



asymptotische Bedingung für  $\vec{E}(F)$ :

$$\vec{E}(F) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_z$$

axiale Symmetrie bezgl. z-Achse

Keine freien Ladungen im Endlichen  $\Rightarrow$

Potential genügt für  $r < R$  (Index  $i$ )

und für  $r > R$  (Index  $a$ ) der Laplacegleichung:

$$r < R: \phi(r, \vartheta, \varphi) \equiv \phi_i(r, \vartheta, \varphi)$$

Bemerkung: eigentlich überflüssig, da axiale Symmetrie •

$$\Delta \phi_i(r, \vartheta, \varphi) = 0 \quad (17)$$

$$\Rightarrow \text{(Regularität)} \quad \phi_i(r, \vartheta, \varphi) = - \sum_{l,m} b_{lm} r^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (18)$$

Bemerkung: Entwicklung nach  $P_l(\cos \vartheta)$  würde genügen •

$$r > R: \phi(r, \vartheta, \varphi) \equiv \phi_a(r, \vartheta, \varphi)$$

$$\Delta \phi_a(r, \vartheta, \varphi) = 0 \quad (19)$$

asymptotische Bedingung:

$$\vec{E}_a(r) = -\text{grad} \phi_a(r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} E_0 \vec{e}_z = \text{grad}(E_0 z) \quad (20)$$

$$= -\text{grad}(-E_0 r \cos \vartheta)$$

$$\phi_a(r, \vartheta, \varphi) \underset{r \rightarrow +\infty}{\sim} -E_0 r \cos \vartheta$$

$$\sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}(\vartheta, \varphi)$$

(additive Konstante willkürlich Null gesetzt)

$$\phi_a(r, \vartheta, \varphi) = -\sqrt{\frac{4\pi}{3}} E_0 r Y_{10}(\vartheta) + \sum_{l,m} \frac{a_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta) \quad (21)$$

Damit sind FG + MG + asymptotische Bdg.

berücksichtigt, es sind nur noch die Grenzbedingungen für  $r = R$  zu erfüllen.

Beachte: Da es keine freien Ladungen im Endlichen

gibt, geht  $\epsilon$  nur über die Grenz=

bedingungen ein! •

Grenzbedingungen für  $r = R$ :

$$\text{Div } \vec{D} = 0 \Rightarrow \epsilon \left. \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right|_R = \left. \frac{\partial \phi_a}{\partial r} \right|_R \quad (22a)$$

$$\text{Rot } \vec{E} = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial \phi_i}{\partial \vartheta} \right|_R = \left. \frac{\partial \phi_a}{\partial \vartheta} \right|_R \quad (22b)$$

$$\left. \frac{\partial \phi_i}{\partial \varphi} \right|_R = \left. \frac{\partial \phi_a}{\partial \varphi} \right|_R \quad (22c)$$

(22b) + (22c) kann man wegen (22a)\* durch

$$\phi_i|_R = \phi_a|_R \quad (22d)$$

ersetzen.

\*) Wegen (22a) darf  $\frac{\partial \phi}{\partial r}$  für  $r=R$  nur einen Sprung besitzen!

$$\phi_i(r, \vartheta, \varphi) = - \sum_{\ell m} b_{\ell m} r^\ell Y_{\ell m}(\Omega)$$

$$\phi_a(r, \vartheta, \varphi) = - \sqrt{\frac{4\pi}{3}} E_0 r Y_{10}(\Omega) + \sum_{\ell m} \frac{a_{\ell m}}{r^{\ell+1}} Y_{\ell m}(\Omega)$$

$$\phi_i(R, \vartheta, \varphi) = \phi_a(R, \vartheta, \varphi)$$

$$- \sum_{\ell m} b_{\ell m} R^\ell Y_{\ell m}(\Omega) = - \sqrt{\frac{4\pi}{3}} E_0 R Y_{10}(\Omega) + \sum_{\ell m} \frac{a_{\ell m}}{R^{\ell+1}} Y_{\ell m}(\Omega)$$

$$\epsilon \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \Big|_R = \frac{\partial \phi_a}{\partial r} \Big|_R$$

$$- \epsilon \sum_{\ell m} \ell b_{\ell m} R^{\ell-1} Y_{\ell m}(\Omega) = - \sqrt{\frac{4\pi}{3}} E_0 Y_{10}(\Omega) - \sum_{\ell m} (\ell+1) \frac{a_{\ell m}}{R^{\ell+2}} Y_{\ell m}(\Omega)$$

Koeffizientenvergleich bei den  $Y_{\ell m}(\Omega)$  gibt zwei Gln. für die  $a_{\ell m}, b_{\ell m}$  mit festem  $\ell, m$ :

s. Skriptum; Lösung:

$$a_{\ell m} = b_{\ell m} = 0 \quad \text{für } (\ell, m) \neq (1, 0) \quad (23b)$$

$$a_{10} = \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} R^3 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} E_0, \quad b_{10} = \frac{3}{\epsilon+2} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} E_0 \quad (24b)$$

Einsetzen gibt:

$$\phi_i(r) = - \frac{3}{\epsilon+2} E_0 r \cos \vartheta$$

(25a-1)

$$\phi_a(r) = - E_0 r \cos \vartheta + \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} R^3 E_0 \underbrace{\frac{\cos \vartheta}{r^2}}_{\frac{E_0 \cdot r}{r^3}}$$

Mit

$$\vec{p} = \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} R^3 E_0 \vec{e}_z = \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} R^3 \vec{E}_0 \quad (25b)$$

gilt

$$\phi_a(r) = - E_0 r \cos \vartheta + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (25a-2)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_i(r) &= \frac{3}{\epsilon+2} \vec{E}_0 = \vec{E}_0 - \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \vec{E}_0 \\ \vec{E}_a(r) &= \vec{E}_0 + \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{p}}{r^5} \end{aligned}$$

\*1) verursacht von Polarisationsflächenladungs=dichte auf Kugeloberfläche

Nach außen wirkt die polarisierte dielektrische Kugel wie ein Punktdipol mit Moment  $\vec{p}$  im Kugelmittelpunkt.

$r < R$ : Polarisation  $\vec{P}$

$$\vec{D}_i(\vec{r}) = \epsilon \vec{E}_i(\vec{r}) = \vec{E}_i(\vec{r}) + 4\pi \vec{P}(\vec{r})$$

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \vec{E}_i(\vec{r}), \quad \vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{3}{\epsilon + 2} \vec{E}_0$$

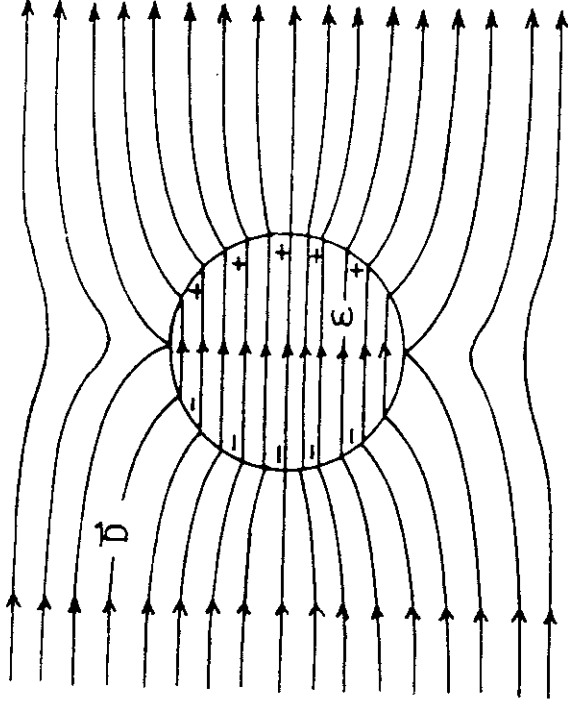
$$\Rightarrow \boxed{\vec{P}(\vec{r}) = \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \vec{E}_0}$$

$$\Rightarrow \int_{\text{Kugel}} d^3r \vec{P}(\vec{r}) = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} R^3 \vec{E}_0 = \vec{p}$$

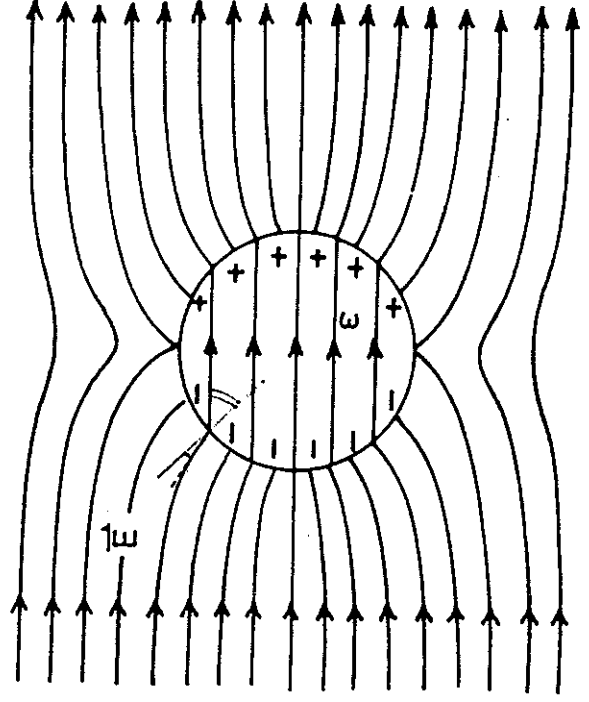
$\vec{p}$  ist also das gesamte induzierte Dipolmoment der dielektrischen Kugel.

$$\oint_P(\vec{r}) = -\text{div} \vec{P}(\vec{r}) = 0$$

$$\oint_S(\vec{r}) = -\text{Div} \vec{P} = P_r(R, \vartheta) \quad \text{selbst ausrechnen!}$$



"Brechungsgesetz" der Feldlinien!





XII. 2. Dielektrika mit linearer Materialgleichung: elektrostatische Energie und elektrostatische Kräfte

Dielektrikum soll isotrop sein, kann aber inhomogen sein:

MG:  $\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r})$

XII. 2. A. Elektrostatische Energie

(XI. 63): Ausdruck gilt auch für  $\epsilon = \epsilon(\vec{r})!$

$W = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \frac{\vec{D}^2(\vec{r})}{\epsilon(\vec{r})}$  (26)

"Serviceleistung" für den nächsten Abschnitt:  
Änderung der Feldenergie bei einer kleinen virtuellen Änderung von  $\rho(\vec{r})$  und  $\epsilon(\vec{r})$   
(z. B. bedingt durch eine virtuelle Verschiebung des Dielektrikums)

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \delta \frac{\vec{D}^2}{\epsilon} = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \left[ \frac{2\vec{D} \cdot \delta \vec{D}}{\epsilon} - \frac{\vec{D}^2 \delta \epsilon}{\epsilon^2} \right]$$
  
$$\vec{E} \cdot \delta \vec{D} = -\text{grad } \phi \cdot \delta \vec{D} = -\nabla(\phi \delta \vec{D}) + \underbrace{\phi \text{div } \delta \vec{D}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} + \underbrace{\phi \delta \rho}_{\substack{\downarrow \\ 4\pi \delta \rho}}$$
  
$$2\vec{E} \cdot \delta \vec{D} - \vec{E}^2 \delta \epsilon$$

$$-\delta W = -\int d^3r \phi(\vec{r}) \delta \rho(\vec{r}) + \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{E}^2(\vec{r}) \delta \epsilon(\vec{r})$$

XII. 2. B. Kraftdichte im Dielektrikum

Betrachtet wird eine ortsabhängige virtuelle Verschiebung  $\delta \vec{S}(\vec{r})$  der Materie, d. h. nicht eine Verschiebung der Materie als starres Ganzes.

Bilanz:  $f(\vec{r})$  (gesuchte) Kraftdichte im Dielektrikum, abhängig von  $\vec{E}(\vec{r}), \rho(\vec{r}), \epsilon(\vec{r}), \dots$

$\int d^3r \vec{f}(\vec{r}) \cdot \delta \vec{S}(\vec{r}) = -\delta W$  (29)

Arbeit der Kraft  
am Volumenelement  
 $d^3r$  bei der virtuellen

Verschiebung  $\delta \vec{S}(\vec{r})$ ,  
integriert über den  
ganzen Raum  
vom Feld an der Materie  
bei der virtuellen  
Verschiebung insgesamt  
geleistete Arbeit

\*1) formal:  
 $\delta \vec{S}(\vec{r})!$

Ziel:  $-\delta W$  auf die Form  $-\delta W = \int d^3r \vec{a}(\vec{r}) \cdot \delta \vec{S}(\vec{r})$   
bringen  $\Rightarrow \vec{f}(\vec{r}) = \vec{a}(\vec{r})$  "ablesen":

Abnahme der gesamten  
Feldenergie

Zusammenhang zwischen  $\delta E(F)$  und  $\delta S(F)$ :

Ein solcher Zusammenhang läßt sich nur unter der Annahme herstellen, daß  $\epsilon$  eine eindeutige Funktion der Massendichte  $\sigma$  ist: "dielektrische Zustandsgleichung"  $\epsilon = \epsilon(\sigma)$  (z.B. Clausius-Mossoff Beziehung)

Dann folgt

$$\delta E(F) = \frac{d\epsilon}{d\sigma}(F) \delta \sigma(F) \quad (32b)$$

mit

$$\delta \sigma(F) = - \operatorname{div}(\sigma(F) \delta S(F)) \quad (30b)$$

aus, reicht nur dann zur eindeutigen Bestimmung von  $f(F)$ :

Wenn beliebige ortsabhängige Verschiebungen zugelassen werden. Bei ortsunabhängigem  $\delta S$  hätte man

$$\int d^3r [f(F) + \operatorname{grad} \psi(F)] \cdot \delta S$$

$$= \int d^3r f(F) \cdot \delta S + \int d^3r \operatorname{grad} \psi(F) \cdot \delta S$$

und man könnte nur die Gesamtkraft

$$\nabla(\psi(F) \delta S)$$

$$\int d^3r f(F)$$

berechnen. •

für beliebiges außerhalb des Dielektrikums verschwindendes  $\psi(F)$

Zusammenhang zwischen  $\delta \rho(F)$  und  $\delta S(F)$ :

$\Delta V$  ... beliebiger raumfester Volumsbereich

$$- \int_{\Delta V} d^3r \delta \rho(F) = \oint_{F(\Delta V)} d^2f \cdot \rho(F) \delta S(F) \quad (\text{Isolator!}) \quad (30a')$$

$$\text{Abnahme der Ladung in } \Delta V = \int_{\Delta V} d^3r \operatorname{div}(\rho(F) \delta S(F))$$

$\Delta V$  beliebig

$$\Rightarrow \delta \rho(F) = - \operatorname{div}(\rho(F) \delta S(F)) \quad (31)$$

Zusammenfassung:  $\int d^3r \vec{f}(\vec{r}) \cdot \delta \vec{s}(\vec{r}) = -\delta W$

$$= - \int d^3r \phi \delta \rho + \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{E}^2 \delta \epsilon$$

$$\underbrace{- \text{div}(\rho \delta \vec{s})}_{\downarrow 0} \quad \underbrace{- \frac{d\epsilon}{d\sigma} \text{div}(\sigma \delta \vec{s})}_{\downarrow 0}$$

$$= \int d^3r \phi \underbrace{\vec{\nabla}(\rho \delta \vec{s})}_{\downarrow 0} - \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{E}^2 \underbrace{\frac{d\epsilon}{d\sigma} \vec{\nabla}(\sigma \delta \vec{s})}_{\downarrow 0}$$

$$\underbrace{\vec{\nabla}(\phi \rho \delta \vec{s})}_{\downarrow 0} - \rho \delta \vec{s} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \phi}_{-\vec{E}} \quad \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{E}^2 \frac{d\epsilon}{d\sigma} \sigma \delta \vec{s})}_{\downarrow 0} - \sigma \delta \vec{s} \cdot \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{E}^2 \frac{d\epsilon}{d\sigma})}_{\downarrow 0}$$

$$= \int d^3r \left[ \rho(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) + \frac{\sigma(\vec{r})}{8\pi} \vec{\nabla} \left( \vec{E}^2(\vec{r}) \frac{d\epsilon}{d\sigma}(\vec{r}) \right) \right] \cdot \delta \vec{s}(\vec{r})$$

"ablesen":  $\vec{f}(\vec{r})$  (33a)

2. Term:

$$\vec{\nabla} \epsilon(\vec{r}) \leftarrow - \frac{1}{8\pi} \vec{E}^2(\vec{r}) \left( \frac{d\epsilon}{d\sigma}(\vec{r}) \vec{\nabla} \sigma(\vec{r}) \right) + \frac{1}{8\pi} \vec{\nabla} \left( \vec{E}^2(\vec{r}) \frac{d\epsilon}{d\sigma}(\vec{r}) \sigma(\vec{r}) \right)$$

XII-19

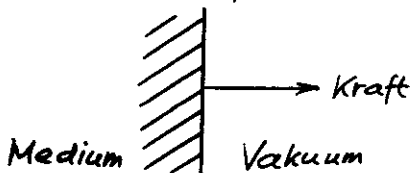
$$\vec{f}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) - \frac{1}{8\pi} \vec{E}^2(\vec{r}) \text{grad} \epsilon(\vec{r}) + \frac{1}{8\pi} \text{grad} \left( \vec{E}^2(\vec{r}) \frac{d\epsilon}{d\sigma}(\vec{r}) \sigma(\vec{r}) \right)$$

(33b)

"erwartete" Kraftwirkung  
auf die wahren  
Ladungen

wirksam, wo  $\epsilon$   
räumlich variiert:

- 1) bei inhomogenem Medium  
im Inneren und auf  
Oberfläche
- 2) bei homogenem Medium  
nur auf Oberfläche,  
wo  $\epsilon$  "springt"



trägt nichts zur Gesamtkraft

$$\int d^3r \vec{f}(\vec{r}) = \vec{F}$$

bei, da  $\sigma(\vec{r}) \equiv 0$  "außerhalb";  
gibt Elektrostriktion  
(Form- und Volumsänderung  
im elektrostatischen Feld)

XII-20

Bemerkung: Der Maxwell'sche Spannungstensor  
 Gl. (XI. 65) wurde unter der Annahme eines  
homogenen linearen Mediums abgeleitet und  
 daher liefert er gemäß

$$f_k(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x_i} T_{ik}^{(mat)}(\vec{r}) \quad (34a)$$

in der Elektrostatik auch nur den 1. Term, d.h.

$$\rho(\vec{r}) E_k(\vec{r}).$$

Mit der nun gefundenen "neuen" Kraftdichte  
 kann man für die Elektrostatik isotroper  
 inhomogener Dielektrika ( $\epsilon = \epsilon(\vec{r})$ ) einen  
 für isotrope inhomogene Medien gültigen

Tensor  $\underline{T}^{(mat)}(\vec{r})$  ableiten (s. Becker/Sauter Bd1).

XII. 2. C. Beispiel: Homogenes Dielektrikum  
 in einem Plattenkondensator

Dielektrikum nur teilweise eingeschoben:

Feldenergieänderung bei Verschiebung  
des Dielektrikums

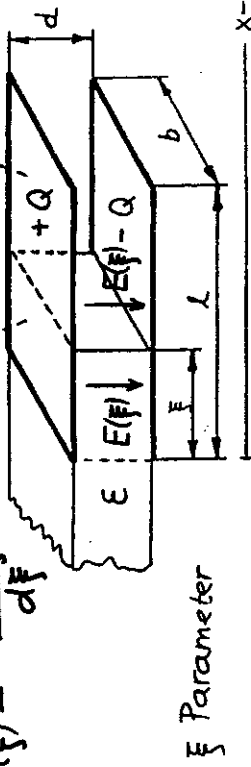
Kraft auf das Dielektrikum

Fall 1: Gesamtladung  $+Q, -Q$  auf den  
Platten konstant gehalten

LW 1:  $W(\vec{r}), \quad G'(\vec{r}) = \frac{\epsilon E(\vec{r})}{4\pi} \quad G(\vec{r}) = \frac{E(\vec{r})}{4\pi} \quad *$

$$F_x(\vec{r}) = -\frac{dW(\vec{r})}{d\vec{r}}$$

Platten "groß"  
 (Randeffekte  
 vernachlässigt)



Ladung  $Q$  über Platte nicht mehr gleichmäßig

verteilt: Flächenladungsdichte  $\sigma'(\vec{r}) = \epsilon \sigma(\vec{r})$

(Beachte: Feldstärke im eingeschobenen Teil des

Dielektrikums wie im Vakuum wegen  $\text{Rot } \vec{E} = 0$ .)

$$Q = \int \epsilon \sigma'(\vec{r}) + (L - \xi) b \sigma(\vec{r})$$

$$= \frac{1}{4\pi} E(\vec{r}) b [\underbrace{\epsilon \xi + (L - \xi)}_{L + (\epsilon - 1)\xi}] = \text{fest}$$

$\Rightarrow$

$$E(\vec{r}) = 4\pi Q \frac{1}{b} \frac{1}{L + (\epsilon - 1)\xi} \quad (36)$$

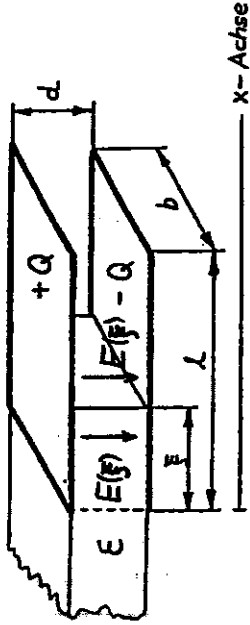
Wird mit wachsendem  $\xi$  kleiner

\* Formel  $\text{Div } \vec{D} = 4\pi \rho$  einmal für Grenzfläche  
 Leiter-Dielektrikum und einmal für Grenzfläche  
 Leiter-Vakuum verwendet

Feldenergie: Energiedichte  $\frac{1}{8\pi} \epsilon D$  XII-23

$$W(\xi) = \frac{1}{8\pi} [\epsilon E^2(\xi) \xi b d + E^2(\xi) (\ell - \xi) b d]$$

$$W(\xi) = \frac{1}{8\pi} E^2(\xi) b d [\ell + (\epsilon - 1)\xi] \quad (35)$$



$$W(\xi) = \frac{1}{8\pi} 16\pi^2 Q^2 \frac{1}{b^2} \frac{1}{[\ell + (\epsilon - 1)\xi]^2} [\ell + (\epsilon - 1)\xi] b d$$

$$W(\xi) = 2\pi Q^2 \frac{d}{b} \frac{1}{\ell + (\epsilon - 1)\xi} \quad (37)$$

Wird mit wachsendem  $\xi$  kleiner

Kraft auf das Dielektrikum:  $F_x \delta \xi = -\delta W$ , also

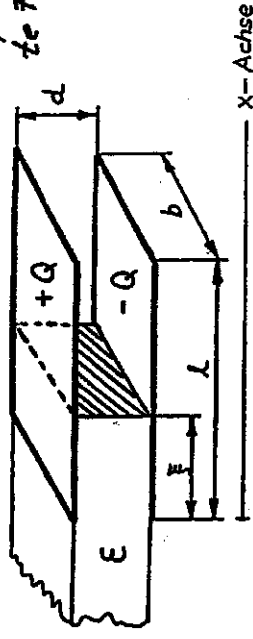
$$F_x(\xi) = -\frac{dW(\xi)}{d\xi} = 2\pi Q^2 \frac{d}{b} \frac{\epsilon - 1}{[\ell + (\epsilon - 1)\xi]^2} > 0 \quad (38)$$

Wird mit wachsendem  $\xi$  kleiner

XII-24  
Nur Beitrag von Steilkante  $x = \xi$ !  
(Flächenkraft auf schraffierte Fläche)

$$LW2: F_x(\xi) = b d \int_0^\ell dx f_x(x, \xi)$$

$$f_x(x, \xi) = -\frac{1}{8\pi} E^2(\xi) \frac{\partial E(x, \xi)}{\partial x}$$



$$E(x, \xi) = \epsilon \Theta(\xi - x) + \Theta(x - \xi)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E(x, \xi)}{\partial x} = -\epsilon \delta(\xi - x) + \delta(x - \xi)$$

$$= -(\epsilon - 1) \delta(x - \xi) \quad (39)$$

$$f_x(x, \xi) = \frac{1}{8\pi} E^2(\xi) (\epsilon - 1) \delta(x - \xi)$$

$$F_x(\xi) = \frac{1}{8\pi} E^2(\xi) (\epsilon - 1) b d \quad (40)$$

Mit

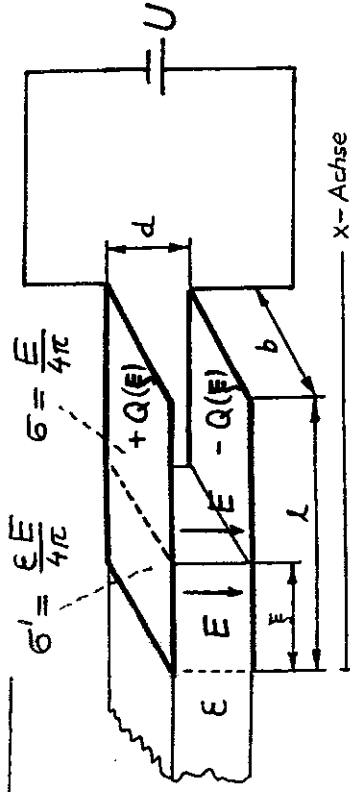
$$E^2(\xi) = 16\pi^2 Q^2 \frac{1}{b^2} \frac{1}{[\ell + (\epsilon - 1)\xi]^2}$$

folgt wieder

$$F_x(\xi) = 2\pi Q^2 \frac{d}{b} \frac{\epsilon - 1}{[\ell + (\epsilon - 1)\xi]^2} \quad \checkmark$$

Fall 2: Spannung U konstant gehalten

$\Rightarrow E = \frac{U}{d}$  ändert sich mit wachsendem  $F$  nicht



(43)  
 $Q(F) = \frac{1}{4\pi} E b [\ell + (\epsilon - 1)F] = \frac{1}{4\pi} U \frac{b}{d} [\ell + (\epsilon - 1)F]$

nimmt mit wachsendem  $F$  zu, d.h. Batterie "liefert" Ladung "nach"

Verschiebung um  $\delta F$ :

Ladung erhöht sich um

$\delta Q = \frac{1}{4\pi} U \frac{b}{d} (\epsilon - 1) \delta F \Rightarrow$

Batterie führt die Energie

$\delta E_B = U \delta Q = \frac{1}{4\pi} U^2 \frac{b}{d} (\epsilon - 1) \delta F$

zu

Feldenergie:

$W(F) = \frac{1}{8\pi} E^2 b d [\ell + (\epsilon - 1)F] = \frac{1}{8\pi} U^2 \frac{b}{d} [\ell + (\epsilon - 1)F] \quad (44)$

Wird mit wachsendem  $F$  größer!

Kraft auf das Dielektrikum: Formel von Fall 1 LWS2

$F_x = \frac{1}{8\pi} E^2 (\epsilon - 1) b d = \frac{1}{8\pi} U^2 \frac{b}{d} (\epsilon - 1)$

bleibt bei wachsendem  $F$  unverändert

Beachte: HIER

$F_x = + \frac{dW(F)}{dF}$

Verschiebung um  $\delta F$ :  $\delta E_B = \frac{1}{4\pi} U^2 \frac{b}{d} (\epsilon - 1) \delta F$

Feldenergie  $W(F) = \frac{1}{8\pi} U^2 \frac{b}{d} [\ell + (\epsilon - 1)F]$  erhöht sich um

$\delta W = \frac{1}{8\pi} U^2 \frac{b}{d} (\epsilon - 1) \delta F = \frac{1}{2} \delta E_B$

und am Dielektrikum wird die Arbeit

$\delta A = F_x \delta F = \frac{1}{8\pi} U^2 \frac{b}{d} (\epsilon - 1) \delta F = \frac{1}{2} \delta E_B$

(gegen eine das Dielektrikum im Gleichgewicht haltende Kraft, z.B. Feder) geleistet

XII. 3. Magnetostatik

XII. 3. A. Feld- und Materialgleichungen.

Grenzbedingungen

FG:

$$\text{div } \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

$$\text{rot } \vec{H}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

mit

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r}) - 4\pi \vec{M}(\vec{r}) \quad (46a)$$

MG:

z.B. innerhalb eines Raumbereiches mit homogenem isotropen Dia- oder Paramagnetikum

$$\vec{M}(\vec{r}) = \chi_m \vec{H}(\vec{r}) \quad \text{bzw.} \quad \vec{M}(\vec{r}) = \chi_m \vec{B}(\vec{r})$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu} \vec{B}(\vec{r}) \quad (46b)$$

GB an der Grenzfläche zweier

Materialien:

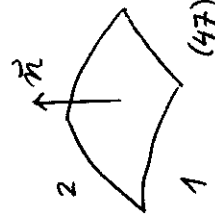
$$\text{Div } \vec{B} \equiv \vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

$$\text{Rot } \vec{H} \equiv \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \vec{k}$$

bzw.

$$B_{2n} - B_{1n} = 0$$

$$H_{2tg} - H_{1tg} = \frac{4\pi}{c} \vec{k} \times \vec{n}$$



$\vec{k}$  freie

Flächenstromdichte

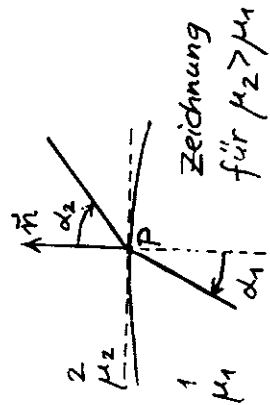
"Brechung der Feldlinien" für  $\vec{k} \equiv \vec{0}$  und Dia- bzw. Paramagnetika

Tangenten an

die Feldlinien bei

Anänderung an den

Flächenpunkt P



$$B_{2n} = B_{1n} \implies B_2 \cos \alpha_2 = B_1 \cos \alpha_1$$

$$\vec{H}_{2tg} = \vec{H}_{1tg} \implies \frac{1}{\mu_2} B_2 \sin \alpha_2 = \frac{1}{\mu_1} B_1 \sin \alpha_1 \quad (52)$$

$$\frac{\tan \alpha_2}{\mu_2} = \frac{\tan \alpha_1}{\mu_1} \quad (53)$$

Kommentar analog wie bei Dielektrika.

Vektorpotential

$$\text{div } \vec{B}(\vec{r}) = 0 \implies \vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) \quad (48)$$

FG für das Vektorpotential innerhalb eines Raumbereiches mit homogener Materie:

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{c} \mu \vec{j}(\vec{r}) \quad (49b)$$

<sup>\*)</sup> homogenes isotropes Dia- oder Paramagnetikum

Beachte: Auf der "Ebene der Potentiale" hat

$$\text{man } \epsilon \leftrightarrow \frac{1}{\mu} \cdot$$

$$\Delta \vec{A}_{\text{hom}}(\vec{r}) = \vec{0} \quad (51)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{A}'_{\text{hom}}(\vec{r}) \quad (50)$$

betreffender Raumbereich mit homogener Materie

$\vec{A}_{\text{hom}}(\vec{r})$  für Erfüllung der Grenzbedingungen (zu anderer Materie oder zum Vakuum) benötigt.

XII. 3. B. Lösungsmethoden

Methode der direkten Integration der

FG für  $\vec{H}, \vec{B}$  unter Berücksichtigung der MG

Integrale Form der FG  $\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$

(Stokesscher Satz); anwendbar bei hoher

Symmetrie (z.B. unendlich langer Strom =

durchflossener kreiszylindrischer Leiter)

Vektorpotentialmethode

Bereits skizziert.

Methode des skalaren magnetischen Potentials

Sind im Endlichen keine freien Ströme vorhanden

(Beispiel: dia- oder paramagnetischer Körper

in einem [von freien Strömen im Unendlichen

verursachten] [ursprünglich] homogenen Feld  $\vec{B}_0$ ,

so gilt  $\text{rot } \vec{H}(\vec{r}) = \vec{0}$  und man kann

ein magnetisches skalares Potential einführen:

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\text{grad } \phi_M(\vec{r}) \quad (54)$$

Bildstrommethode - NUR IN SONDERFÄLLEN

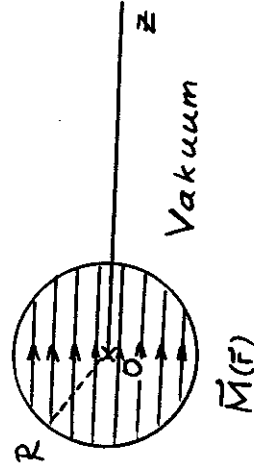
ANWENDBAR

Eigentliches Problem durch Ersatzproblem mit fiktiven Strömen ersetzt.

XII. 3. C. Homogen magnetisierte Kugel

Vorgegeben

$$\vec{M}(\vec{r}) = \begin{cases} M\vec{e}_z & \text{für } r < R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases} \quad (55)$$



Gefragt: Das von dieser magnetisierten Kugel für  $r < R$  und  $r > R$  verursachte Magnetfeld.



Kommentar: Was haben wir uns physikalisch vorzustellen?

Mehrere Möglichkeiten:

Fall 1: Kugel ist Permanentmagnet

Die MG  $\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$  gilt dann nicht.

Die im folgenden berechneten Felder sind die vorhandenen Gesamtfelder, da es keine weiteren "Feldverursacher" gibt (auch nicht im Unendlichen).

Fall 2: Dia- oder paramagnetische Kugel in äußerem

Es gilt die MG  $\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$ . Magnetfeld

Die im folgenden berechneten Felder sind nicht die vorhandenen Gesamtfelder. Die Kugel kann nur dann eine Magnetisierung  $\vec{M} \neq \vec{0}$  besitzen, wenn sie in ein (ursprünglich) homogenes äußeres Magnetfeld  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$  gebracht wurde.

Zu dem im folgenden berechneten  $\vec{B}$ -Feld (verursacht von der magnetisierten Kugel) ist daher  $\vec{B}_0$  (verursacht von freien Strömen im Unendlichen) zu addieren (FS linear!).

Ferner muss die durch  $\vec{B}_0$  induzierte Magnetisierung durch  $\vec{B}_0$  und  $\mu$  ausgedrückt werden können ( $\vec{H} = \vec{0}$  für  $\vec{B}_0 = \vec{0}$ ). Damit

lassen sich auch die vorhandenen Gesamtfelder durch  $\vec{B}_0$  und  $\mu$  ausdrücken.

Fall 2: Beispiel in Abschnitt XII.3.D fortgesetzt.

Fall 3: Ferromagnetische Kugel in äußerem Magnetfeld

Die MG  $\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$  gilt nicht, sie ist durch einen nicht/linearen Zusammenhang zu ersetzen.

Ansonst ist alles weitgehend analog wie im Fall 2, doch kann eine Restmagnetisierung nach "Ausschalten" (Zurücknehmen) des äußeren Magnetfeldes  $\vec{B}_0$  zurückbleiben, womit man beim Fall 1 ist.

Fall 3: Beispiel in Abschnitt XII.3.D fortgesetzt.

Berechnung des von der homogen magnetisierten Kugel verursachten Feldes

$$\text{r. K. R. : FG} \quad \text{div } \vec{B}_i(\vec{r}) = 0$$

$$\text{rot } \vec{H}_i(\vec{r}) = \vec{0} \quad \vec{H}_i(\vec{r}) = \vec{B}_i(\vec{r}) - 4\pi \vec{M}$$

$$\Rightarrow \vec{H}_i(\vec{r}) = -\text{grad } \phi_{M_i}(\vec{r}) \quad (56)$$

$$\text{div } \vec{H}_i(\vec{r}) = -\Delta \phi_{M_i}(\vec{r}) = \underbrace{\text{div } \vec{B}_i(\vec{r})}_{\text{FG: } 0} - 4\pi \underbrace{\text{div } \vec{M}}_0$$

$$\Delta \phi_{M_i}(\vec{r}) = 0 \quad \text{da homogen magnetisiert} \quad (59)$$

$$\Delta \phi_{Mi}(\vec{r}) = 0$$

Ansatz (gedankliche "Anleihe" bei XII.1.D):

$$\phi_{Mi}(\vec{r}) = \underbrace{br \cos \vartheta}_z \quad (60a)$$

$r > R$ : FG

$$\text{div } \vec{B}_a(\vec{r}) = 0$$

$$\text{rot } \vec{B}_a(\vec{r}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_a(\vec{r}) = -\text{grad } \phi_{Ma}(\vec{r}) \quad (5b)$$

$$\Delta \phi_{Ma}(\vec{r}) = 0 \quad (5c)$$

Ansatz (gedankliche "Anleihe" bei XII.1.D):

$$\phi_{Ma}(\vec{r}) = \frac{a}{r^2} \cos \vartheta = a \frac{z}{r^3} \quad (60b)$$

asymptotische Bedingung:

$$\vec{B}_a(\vec{r}) \xrightarrow[r \rightarrow +\infty]{} \vec{0} \quad \checkmark$$

Grenzbedingungen für  $r=R$ :

$$\text{Div } \vec{B} = 0 \Rightarrow B_{i,r} = B_{a,r}$$

$$H_{i,r} + 4\pi M_r = B_{a,r} \quad (61a)$$

$$-\frac{\partial \phi_{Mi}}{\partial r} \Big|_R + 4\pi M \cos \vartheta = -\frac{\partial \phi_{Ma}}{\partial r} \Big|_R$$

$$M_r = \vec{M} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = M \vec{e}_z \cdot \frac{\vec{r}}{r} \cos \vartheta$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{0} \Rightarrow H_{i,\vartheta} = B_{a,\vartheta}$$

$$(H_{i,\varphi} = B_{a,\varphi})$$

Bemerkung:

Gleichwertig:

$$(61a) \text{ plus } -\frac{\partial \phi_{Mi}}{\partial \vartheta} \Big|_R = -\frac{\partial \phi_{Ma}}{\partial \vartheta} \Big|_R \quad (61b)$$

$$\phi_{Mi}(R, \vartheta) = \phi_{Ma}(R, \vartheta)$$

$$\phi_{Mi}(\vec{r}) = br \cos \vartheta, \quad \phi_{Ma}(\vec{r}) = \frac{a}{r^2} \cos \vartheta$$

$$-\frac{\partial \phi_{Mi}}{\partial r} \Big|_R + 4\pi M \cos \vartheta = -\frac{\partial \phi_{Ma}}{\partial r} \Big|_R$$

$$-\frac{\partial \phi_{Mi}}{\partial \vartheta} \Big|_R = -\frac{\partial \phi_{Ma}}{\partial \vartheta} \Big|_R$$

$$\Rightarrow -b \cos \vartheta + 4\pi M \cos \vartheta = \frac{2a}{R^3} \cos \vartheta \quad (62a)$$

$$bR \sin \vartheta = \frac{a}{R^2} \sin \vartheta$$

$$\Rightarrow a = \frac{4\pi R^3}{3} M, \quad b = \frac{4\pi}{3} M \quad (62b)$$

$$\phi_{Mi}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{3} M r \cos \vartheta$$

$$\phi_{Ma}(\vec{r}) = \frac{4\pi R^3}{3} \frac{M \cos \vartheta}{r^2}$$

bzw. mit

$$\vec{m} := \frac{4\pi R^3}{3} \vec{M} \quad (63b)$$

$$\phi_{Ma}(\vec{r}) = \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

gesamtes magnetisches Dipolmoment der Kugel

$$(63a-2)$$

$$(63a-1)$$

$$\phi_{Mi}(r) = \overbrace{\frac{4\pi}{3} M r \cos \vartheta}^z$$

$$\vec{H}_i(r) = -\text{grad } \phi_{Mi}(r) = -\frac{4\pi}{3} \vec{M}$$

$$\vec{B}_i(r) = \vec{H}_i(r) + 4\pi \vec{M} = +\frac{8\pi}{3} \vec{M}$$

$$\vec{H}_i = -\frac{4\pi}{3} \vec{M} \quad \vec{B}_i = \frac{8\pi}{3} \vec{M}$$

homogen (64)

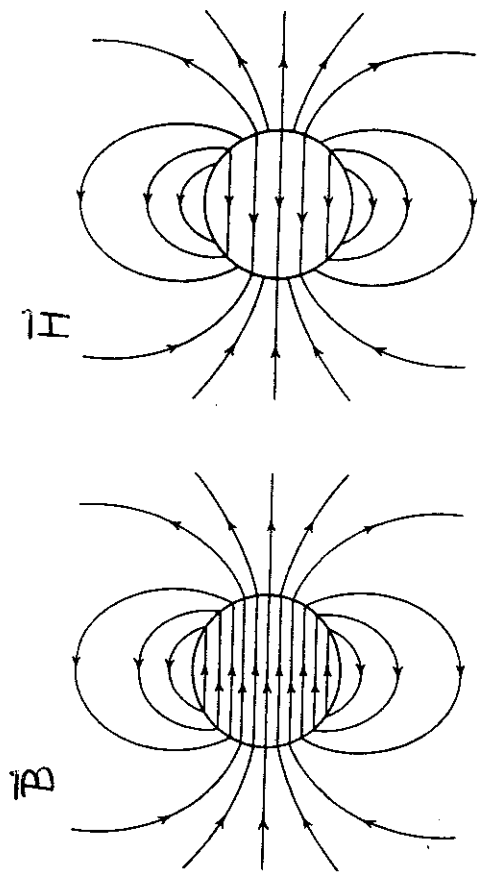
$$\phi_{Ma}(r) = \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B}_a(r) = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{m}}{r^5}$$

Dipolfeld

$$\vec{j}_M(r) = c \text{rot } \vec{M}(r) = \vec{0}$$

$$\vec{K}_M(\vartheta) = c \text{Rot } \vec{M} = -c (\vec{r} \times \vec{M}) \Big|_R \text{ selbst ausrechnen!}$$



$$\text{Rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{K}_M(\vartheta) \quad \text{Div } \vec{H} = -4\pi \text{Div } \vec{M} = 4\pi M_p(\vartheta) = 4\pi M \cos \vartheta$$

XII. 3. D. Dia-, para- oder ferromagnetische Kugel in einem (ursprünglich) homogenen magnetostatischen Feld  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$

Das (von freien Strömen im Unendlichen verursachte) Feld  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$  "induziert" in einer magnetisierbaren Kugel eine Magnetisierung  $\vec{M}(r) = M \vec{e}_z$ .

(S. die analoge elektrostatische Problemstellung in Abschnitt VII. 1. D.):  $\vec{M}[\vec{B}_0]$

Der Zusammenhang zwischen  $\vec{M}$  und  $\vec{B}_0$  ist natürlich für ein Ferromagnetikum ein anderer als für ein Dia- oder Paramagnetikum; s. später  
Gemeinsam gilt:

Gesamtes Magnetfeld: FG linear  $\Rightarrow$

(66-1)

$$\vec{B}_i = \vec{B}_0 + \frac{8\pi}{3} \vec{M} \quad \text{homogen}$$

$$\vec{B}_a(r) = \vec{B}_0 + \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{m}}{r^5}$$

$\vec{M}[\vec{B}_0]$   
 $\vec{m}[\vec{B}_0]$   
 $\vec{m} = \frac{4\pi R^3}{3} \vec{M}$

$\uparrow$  verursacht von freien Strömen im Unendlichen  
 $\uparrow$  verursacht von Magnetisierungsstrom  $\vec{K}_M(\vartheta)$  auf Kugeloberfläche, d.h. von magnetisierter Kugel

$$\vec{H}_i = \vec{B}_i - 4\pi \vec{M} = \vec{B}_0 - \frac{4\pi}{3} \vec{M}$$

homogen

Nun Fallunterscheidung nötig:

Dia- oder paramagnetische Kugel

MG:  $\vec{B}_i = \mu \vec{H}_i$  1) linear (67)  
2) eindeutig

$$\Rightarrow \vec{B}_0 + \frac{8\pi}{3} \vec{M} = \mu \left( \vec{B}_0 - \frac{4\pi}{3} \vec{M} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{M}[\vec{B}_0]: \vec{M} = \frac{3}{4\pi} \frac{\mu-1}{\mu+2} \vec{B}_0 \quad \begin{matrix} \mu < 1 \text{ dia-} \\ \mu > 1 \text{ para-} \end{matrix} \quad (69)$$

$$\vec{m}[\vec{B}_0]: \vec{m} = \frac{\mu-1}{\mu+2} R^3 \vec{B}_0 \quad (*)$$

$$\vec{B}_i = \frac{3\mu}{\mu+2} \vec{B}_0 \quad *) \quad \vec{H}_i = \frac{3}{\mu+2} \vec{B}_0$$

$$\vec{B}_a(r) = \vec{B}_0 + \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{m}}{r^5} \quad \text{mit } \vec{m} \text{ Gl. (*)}$$

Bei "Zurücknehmen" von  $\vec{B}_0$  auf null wird  $\vec{M} = \vec{0}$  und  $\vec{B} = \vec{0}$  im ganzen Raum.

$$*) \vec{B}_i = \frac{3}{1+\frac{2}{\mu}} \vec{B}_0$$

MG:  $\vec{B}_i = \vec{B}_i(\vec{H}_i)$  bzw.  $\vec{H}_i = \vec{H}_i(\vec{B}_i)$  (70)

1) komplizierte nichtlineare Funktion; experimentell:

"Magnetisierungskurve"

2) für gegebenes  $H_i$  gibt es i.a.

Zwei Werte von  $B_i$  (und umgekehrt),

welcher Wert zu nehmen ist, hängt

von der "Vorgeschichte" (Vergangenheit)

der Probe ab: "Magnetisierungskurve"

zeigt "Hysteresis"

(66):

$$\vec{B}_i = \vec{B}_0 + \frac{8\pi}{3} \vec{M}$$

Elimination

$$\vec{H}_i = \vec{B}_0 - \frac{4\pi}{3} \vec{M} \quad | \cdot 2$$

von  $\vec{M}$

$$\vec{B}_i + 2\vec{H}_i = 3\vec{B}_0 \quad (71)$$

$$\text{MG: } \vec{B}_i = \vec{B}_i(\vec{H}_i) \quad \Rightarrow$$

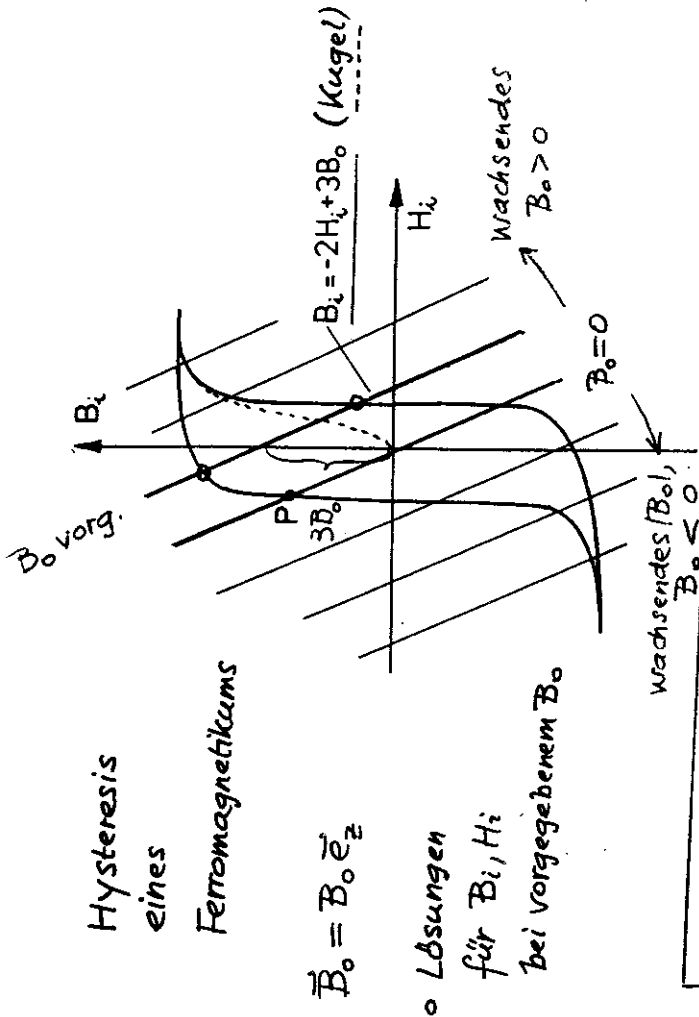
$\vec{B}_i, \vec{H}_i$  zu gegebenem  $\vec{B}_0$ :

Zwei Lösungspaare, von denen je nach

"Vorgeschichte" das eine oder das

andere zu nehmen ist

Hat man das zu gegebenem  $\vec{B}_0$  gehörige  $\vec{B}_i$  (und  $\vec{H}_i$ ), so kann man das zu  $\vec{B}_0$  gehörige  $\vec{M}$  z.B. aus  $\frac{8\pi}{3} \vec{M} = \vec{B}_i - \vec{B}_0$  berechnen.



Bei "Zurücknehmen" von  $\vec{B}_0$  auf  $\vec{B}_0 = \vec{0}$  bleibt eine Restmagnetisierung und ein zugehöriges Magnetfeld  $\vec{B}, \vec{H}$ . Ließ man beispielsweise zuerst in  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ ,  $B_0 > 0$  anwachsen und dann auf  $B_0 = 0$  zurückgehen, so landet man im Punkt P der Hysteresis-Kurve.

XII.4. Nichtleitende magnetisierbare Materie mit linearer Materialgleichung: magnetostatische Energie und Kraftdichte

Materie soll isotrop sein, kann aber inhomogen sein:

MG:  $\vec{B}(\vec{r}) = \mu(\vec{r}) \vec{H}(\vec{r})$

Für nichtleitende Materie gilt im Bereich der Materie  $\text{rot } \vec{H}(\vec{r}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{H}(\vec{r}) = -\text{grad } \phi_H(\vec{r})$

XII.4.A, XII.4.B: Vollkommen analog zur Elektrostatik!

$W = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \frac{D^2(\vec{r})}{\epsilon(\vec{r})}$

$W = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{H}(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \frac{B^2(\vec{r})}{\mu(\vec{r})}$  (72)

$\delta W = \int d^3r \phi(\vec{r}) \delta \rho(\vec{r}) - \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{E}^2(\vec{r}) \delta \epsilon(\vec{r})$

$\delta W = -\frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{H}^2(\vec{r}) \delta \mu(\vec{r})$  (74)

$$\vec{f}(\vec{r}) = \rho \vec{E}(\vec{r}) - \frac{1}{8\pi} \vec{E}^2(\vec{r}) \text{grad } \epsilon(\vec{r}) + \frac{1}{8\pi} \text{grad} (\vec{E}^2(\vec{r}) \frac{d\epsilon}{d\sigma}(\vec{r}) \sigma(\vec{r}))$$



$$\vec{f}(\vec{r}) = -\frac{1}{8\pi} \vec{H}^2(\vec{r}) \text{grad } \mu(\vec{r}) + \frac{1}{8\pi} \text{grad} (\vec{H}^2(\vec{r}) \frac{d\mu}{d\sigma}(\vec{r}) \sigma(\vec{r})) \quad (77b)$$

Magnetostraktion

Bezüglich des Maxwellschen Spannungstensors  
 $\underline{\underline{T}}_{(mat)}(\vec{r})$  in der Magnetostatik für  
isotrope inhomogene Materie ( $\mu = \mu(\vec{r})$ )  
 gilt ein analoger Kommentar wie bei den  
 Dielektrika.

XIII. ELEKTROTECHNIK: LINEARE STROMKREISE  
MIT OHMSCHEN WIDERSTÄNDEN, KONDENSATOREN,  
INDUKTIONSSPULEN UND SPANNUNGSQUELLEN  
IM QUASISTATIONÄREN FALL

FRAGE: Wie kommt man von

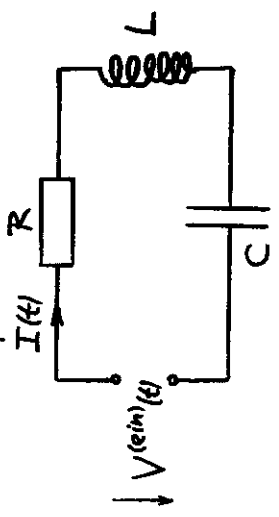
$$\begin{aligned} \text{div } \vec{D}(\vec{r}, t) &= 4\pi \rho(\vec{r}, t) \\ \text{div } \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0 \\ \text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{H}(\vec{r}, t) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{D}(\vec{r}, t) &= \epsilon \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\mu} \vec{B}(\vec{r}, t) \\ \vec{j}(\vec{r}, t) &= \sigma \vec{E}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

Brauchbar für  
 $\omega \lesssim 10^{12} \text{ Hz}$ .

(Techn. Wechselströme:  
 $\omega \lesssim 20 \text{ kHz} = 2 \cdot 10^4 \text{ Hz}$ )

für den einfachen Stromkreis



"allgem. Ohmsches Gesetz"

$$RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I(t') dt' = V^{(ein)}(t) \quad ?$$

auf

# XIII.1. Das quasistationäre elektromagnetische Feld

## XIII.1.A\*. Grundgleichungen

### 1) Lokalisierte Quellverteilung im Vakuum

In Coulombbeziehung gilt (s. Abschnitt II.2.C):

$$\underline{\underline{\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_C(\vec{r}, t) + \vec{E}_T(\vec{r}, t)}}$$

C... longitudinaler oder Coulomb-  
anteile

T... transversaler oder induzierter  
Anteil

mit

$\text{div } \vec{E}_C(\vec{r}, t) = 4\pi \rho(\vec{r}, t)$ $\text{rot } \vec{E}_C(\vec{r}, t) = \vec{0}$ $\text{div } \vec{E}_T(\vec{r}, t) = 0$ $\text{rot } \vec{E}_T(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$	$\text{div } \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$ $\text{rot } \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}$
--	--

XIII-2

Potentiale:  $\phi_C(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{A}_T(\vec{r}, t)$  mit  $\text{div } \vec{A}_T(\vec{r}, t) = 0$

$$\vec{E}_C(\vec{r}, t) = -\text{grad } \phi_C(\vec{r}, t)$$

$$\Delta \phi_C(\vec{r}, t) = -4\pi \rho(\vec{r}, t)$$

$$\vec{E}_T(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_T(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\phi_C(\vec{r}, t) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{rot } \vec{A}_T(\vec{r}, t)$$

$$\square \vec{A}_T(\vec{r}, t) = -\frac{4\pi}{c} \left[ \vec{j}(\vec{r}, t) - \frac{1}{4\pi} \text{grad } \frac{\partial \phi_C(\vec{r}, t)}{\partial t} \right]$$

$$=: \vec{j}_T(\vec{r}, t)$$

$$\vec{A}_T(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}_T(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

quasistationärer Fall

d charakteristische Liniendimension der Quellverteilung

$\omega$  charakteristische Kreisfrequenz für die zeitliche Änderung der Quellverteilung,  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$  zugehörige Wellenlänge

ANNAHME  $d \ll \lambda$

z.B.: LW-Bereich:  $\omega \sim 10^6 \text{ Hz} = 1 \text{ MHz}$ ,  $d \ll 2 \text{ km}$

UKW-Bereich:  $\omega \sim 10^9 \text{ Hz} = 1 \text{ GHz}$ ,  $d \ll 2 \text{ m}$

XIII-3

⇒ Retardierung für Aufpunkte in nicht zu großer Entfernung von der Quellverteilung und insbesondere innerhalb der Quellverteilung vernachlässigbar, d.h.

$$\Rightarrow \vec{A}_T(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}_T(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Welcher Vernachlässigung in den FG für  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  entspricht dies? Es bedeutet, daß

$$\Delta \vec{A}_T(\vec{r}, t) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_T(\vec{r}, t)$$

gilt, also Vernachlässigung von

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_T(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_T(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

gegen den in  $\frac{4\pi}{c} \vec{j}_T(\vec{r}, t)$  enthaltenen Term  $\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_c(\vec{r}, t)}{\partial t}$

$$\frac{4\pi}{c} \vec{j}_T(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \text{grad} \frac{\partial \phi_c(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

nur Coulombanteil des Maxwellterms!

⇒ Grundgleichungen für den quasistationären Fall (Vakuum)

$\text{div} \vec{E}_c(\vec{r}, t) = 4\pi \rho(\vec{r}, t)$ $\text{rot} \vec{E}_c(\vec{r}, t) = \vec{0}$ $\text{div} \vec{E}_T(\vec{r}, t) = 0$ $\text{rot} \vec{E}_T(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$	$\text{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$ $\text{rot} \vec{B}(\vec{r}, t) = \underbrace{\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t)}_{\frac{4\pi}{c} \vec{j}_T(\vec{r}, t)} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_c(\vec{r}, t)}{\partial t}$
--	--

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_c(\vec{r}, t) + \vec{E}_T(\vec{r}, t)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_c(\vec{r}, t) &= -\text{grad} \phi_c(\vec{r}, t) & \text{mit } \phi_c(\vec{r}, t) &= \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ \vec{E}_T(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_T(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \text{rot} \vec{A}_T(\vec{r}, t) \end{aligned} \right\} \text{mit } \vec{A}_T(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}_T(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Weg:  $\rho \rightarrow \phi_c \rightarrow \vec{E}_c$ ,  $\vec{j}, \vec{E}_c \rightarrow \vec{j}_T \rightarrow \vec{A}_T \rightarrow \vec{E}_T, \vec{B}$



2) Materie mit linearen MG, freie und gebundene Quellen lokalisiert

XIII-6

MG:  $\vec{P}(\vec{r}, t) = \chi_e \vec{E}(\vec{r}, t)$

quasistationärer Fall

konsequenterweise von  $\rho_p(\vec{r}, t) = -\text{div} \vec{P}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{j}_p(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{P}(\vec{r}, t)}{\partial t}$

ebenfalls nur Coulombanteil beibehalten

Dann gilt ( $\rho, \vec{j}$  freie Quellen):

$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_c(\vec{r}, t) + \vec{E}_T(\vec{r}, t)$

$\chi_e \frac{\partial \vec{E}_c(\vec{r}, t)}{\partial t} + \chi_e \frac{\partial \vec{E}_T(\vec{r}, t)}{\partial t}$   
 $-\chi_e \text{div} \vec{E}_c(\vec{r}, t) - \chi_e \text{div} \vec{E}_T(\vec{r}, t)$

FG:

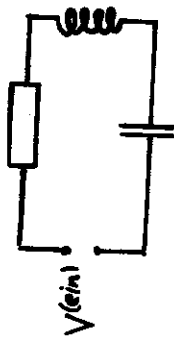
$\text{div} \vec{D}_c(\vec{r}, t) = 4\pi \rho(\vec{r}, t)$   
 $\text{rot} \vec{E}_c(\vec{r}, t) = \vec{0}$   
 $\text{div} \vec{E}_T(\vec{r}, t) = 0$   
 $\text{rot} \vec{E}_T(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$   
 $\text{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$   
 $\text{rot} \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}_c(\vec{r}, t)}{\partial t}$   
 $=: \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t)$

MG:  $\vec{D}_c(\vec{r}, t) = \epsilon \vec{E}_c(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu} \vec{B}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{j}(\vec{r}, t) = \sigma \vec{E}(\vec{r}, t)$

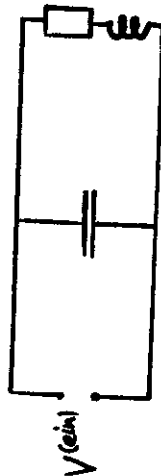
XIII-7

Diese Gleichungen bilden die physikalische Basis für die (näherungsweise) Behandlung elektrotechnischer Stromkreise.

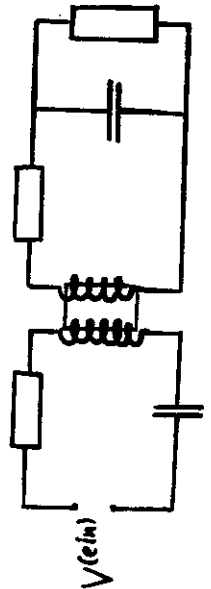
Einfachster Fall: ein linearer Stromkreis ohne Verzweigungen; z.B.



"Nächstkomplizierter" Fall: ein linearer Stromkreis mit Verzweigungen; z.B.



Allgemeiner Fall: mehrere, untereinander induktiv oder (und) kapazitiv gekoppelte Stromkreise mit oder ohne Verzweigungen; z.B.



Beachte: Die Forderung der Quasistationarität bedeutet für  $d \sim 1m \Rightarrow \omega \lesssim 10 \text{ MHz}$ .

XIII. 1. B\* Linearer Stromkreis ohne Verzweigungen

Wegen  $\text{rot } \vec{H}(r,t) = \frac{4\pi}{c} \vec{J}(r,t)$

ist die durch

$$\vec{J}(r,t) = \vec{j}(r,t) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}_c(r,t)}{\partial t}$$

definierte "Stromdichte" quellenfrei:

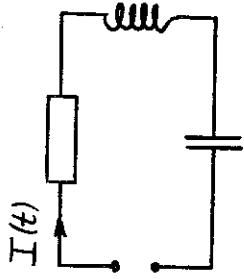
$$\text{div } \vec{J}(r,t) = 0$$

⇒

Die durch

$$I(t) = \int_{\text{Querschnitt}} d^2\vec{f} \cdot \vec{J}(r,t)$$

definierte "Stromstärke" ist für gegebenes  $t$  für jeden Querschnitt gleich (Querschnitt = Drahtquerschnitt bzw. Querschnitt eines Kondensators) [Umlaufsinn festlegen!]



Bemerkung zu  $\vec{J}(r,t)$ : Grund für "..."

$$\vec{J}(r,t) = \underbrace{\vec{j}(r,t)}_{\text{Coulombanteil des Polarisationsstromes}} + \underbrace{\frac{\partial \vec{P}_c(r,t)}{\partial t} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}_c(r,t)}{\partial t}}_{\text{Coulombanteil des Maxwelltermes (des "Verschiebungsstromes" des Vakuums)}}$$

$$\vec{j}_{P,c}(r,t)$$

Coulombanteil des Polarisationsstromes

Coulombanteil des Maxwelltermes

(des "Verschiebungsstromes" des Vakuums)

Coulombanteil des sog. "Verschiebungsstromes" im Medium

Ferner ist wegen

$$\text{rot } \vec{E}_c(r,t) = \vec{0}$$

Gilt nur für  $\vec{E}_c$  nicht für  $\vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_T$ !

$$\oint \vec{E}_c(r,t) \cdot d\vec{r} = 0 \quad \text{für einen}$$

beliebigen geschlossenen Weg, insbesondere bei Integration über den (über die Spannungsquelle) geschlossenen Stromkreis

Die "integralen" Beziehungen

$$I(t) = \int_{\text{Querschnitt}} d^2\vec{f} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) \quad \text{gleich f\u00fcr alle Querschnitte}$$

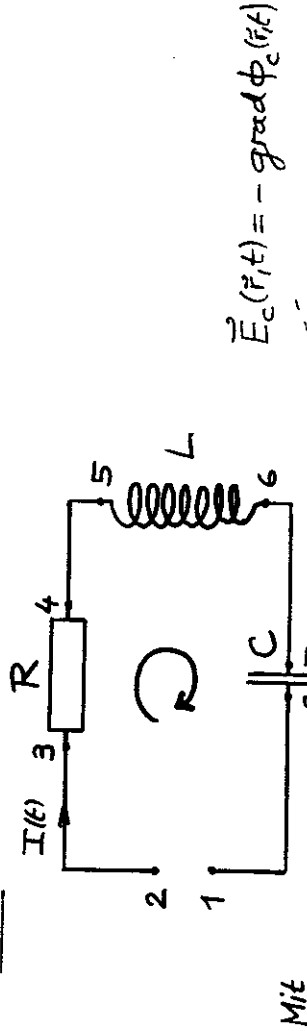
$$\oint \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = 0 \quad \text{bei Integration l\u00e4ngs des Stromkreises inklusive Spannungsquelle}$$

n\u00fctzen wir f\u00fcr die Ableitung des sog.

allgemeinen Ohmschen Gesetzes

$$RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I(t') dt' = V^{(ein)}(t)$$

aus.



$$\int_1^8 \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} \equiv \int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^5 + \int_5^6 + \int_6^7 + \int_7^8 + \int_8^1 = - \int_1^2$$

Mit  $\vec{E}_c(\vec{r}, t) = -\text{grad } \phi_c(\vec{r}, t)$   
 zu: "Summe aller Spannungsabf\u00e4lle <sup>\*)</sup> an Leitungen, Ohmschen Widerst\u00e4nden, Induktionsspulen und Kondensatoren = eingepre\u00dfte Spannung"; s. sp\u00e4ter <sup>\*) bzgl.  $\phi_c(\vec{r}, t)$</sup>

Spannungsquelle

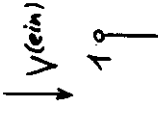
(hier)

Der interne Aufbau wird nicht behandelt und daher wird nicht berechnet. Vielmehr wird

$$-\int_1^2 \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = \phi_{c2}(t) - \phi_{c1}(t) =: V^{(ein)}(t)$$

gesetzt.

Symbolisch:



Bemerkung: Ist es nicht m\u00f6glich, eine solche Beziehung (n\u00e4herungsweise) anzuschreiben, so steht dem betreffenden Element des Stromkreises nicht der Name "Spannungsquelle" zu. Die Frage der Realisierung ist eine andere. •

Zuleitungsdr\u00e4hte, Ohmscher Widerstand,

Induktionsspule und Kondensator

F\u00fcr diese "Wegst\u00fccke" wird  $\int_i \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r}$  berechnet,

was aber nur unter weiteren N\u00e4herungsannahmen m\u00f6glich ist.

Näherungsannahmen:

1) In den Zuleitungsdrähten, Ohmschen Widerständen und Spulendrähten wird

$$\vec{J}(r,t) = \vec{j}(r,t) = \sigma (\vec{E}_c(r,t) + \vec{E}_T(r,t))$$

gesetzt, d.h. der "Verschiebungsstrom" wird gegen den Leitungsstrom vernachlässigt.

Physikalisch bedeutet dies die Vernachlässigung der Kapazität dieser Stromkreisteile.

Bemerkung: Für einen Wechselstrom gilt ( $\omega$  Kreisfrequenz)

$$\left| \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| = \left| \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right| = \frac{\epsilon \omega}{4\pi \sigma}$$

die Näherung ist also für

$$\omega \ll \frac{4\pi \sigma}{\epsilon} \sim 10^{18} \text{ Hz für metallische Leiter}$$

gerechtfertigt. Wegen der Forderung der Quasistationarität mussten wir aber schon für  $d \sim 1 \text{ m}$  die Erfüllung von  $\omega \ll 10 \text{ MHz} = 10^7 \text{ Hz}$  verlangen. ●

2) In den Zuleitungsdrähten und

Spulendrähten wird die Leitfähigkeit gegenüber jener in den Ohmschen Widerständen als so groß angenommen, daß in den Zuleitungs- und Spulendrähten

$$\vec{E}(r,t) = \vec{E}_c(r,t) + \vec{E}_T(r,t) = \vec{0}$$

gesetzt werden kann.

Physikalisch bedeutet dies die Vernachlässigung des Ohmschen Widerstandes dieser Stromkreisteile.

3) In den Zuleitungsdrähten wird überdies

$$\vec{E}_T(r,t) = \vec{0}$$

gesetzt.

Physikalisch bedeutet dies die Vernachlässigung der Auswirkungen der Induktion auf die Zuleitungen (Skinneffekt und Induktivität)

Bemerkung: In Abschnitt XII.3.C wird gezeigt, daß der Skinneffekt für einen Kupferdraht mit 1 mm Durchmesser vernachlässigt werden kann, wofem  $\omega \ll 10 \text{ kHz} = 10^4 \text{ Hz}$  ist.

Für  $\omega \gtrsim 20 \text{ kHz}$  spricht man i.a. von Hochfrequenztechnik.

4) Die Ohmschen Widerstände seien an solchen Stellen in den Stromkreis eingebaut, daß man (unter den angenommenen Bedingungen für die betrachteten Frequenzen) auch in ihnen

$$\vec{E}_T(\vec{r}, t) = \vec{0}$$

setzen kann.

Physikalisch bedeutet dies die Vernachlässigung der Induktion in den Ohmschen Widerständen.

5) Auch die Kondensatoren seien an solchen Stellen eingebaut, daß man zwischen ihren Platten

$$\vec{E}_T(\vec{r}, t) = \vec{0}$$

setzen kann.

Zuleitungsdrahte

$$\left. \begin{array}{l} 2) \\ 3) \end{array} \right\} \vec{E}_c(\vec{r}, t) = \vec{0}$$



$$\Rightarrow \int_j^k \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = \phi_{cj}(t) - \phi_{ck}(t) = 0$$

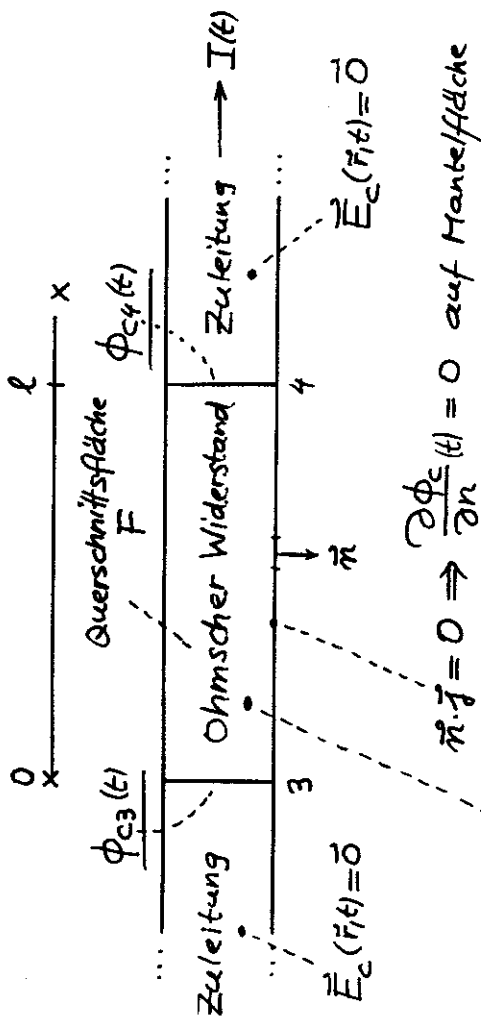
kein Spannungsabfall bezgl.  $\phi_c(\vec{r}, t)$

Ohmscher Widerstand



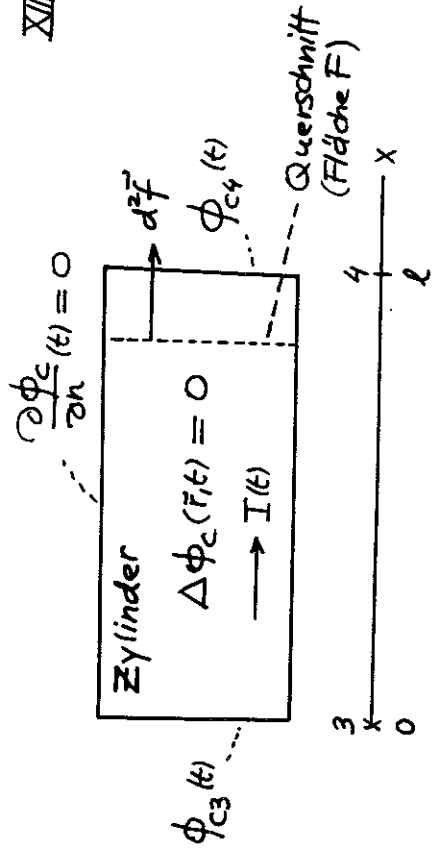
$$\int_3^4 \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = \phi_{c3}(t) - \phi_{c4}(t) = ?$$

Spezialfall betrachtet: Kreiszyylindergeometrie



$$n \cdot j = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi_c}{\partial n}(t) = 0 \text{ auf Mantelfläche}$$

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{j}(\vec{r}, t) &= \text{div } \vec{j}(\vec{r}, t) = \sigma \text{ div } \vec{E}_c(\vec{r}, t) \\ &= -\sigma \Delta \phi_c(\vec{r}, t) = 0 \end{aligned}$$



Zeige selbst: Daraus folgt, daß im Inneren des Ohmschen Widerstandes

ein homogenes zeitabhängiges Feld

$$\vec{E}_c(r,t) = \frac{1}{l} [\phi_{c3}(t) - \phi_{c4}(t)] \vec{e}_x$$

herrscht. ( $\phi_c = \phi_c(x,t)$  lineare Fkt. von x)

$$\Rightarrow \int_3^4 \vec{E}_c(r,t) \cdot d\vec{r} = \phi_{c3}(t) - \phi_{c4}(t) \quad \text{Werten wir schon...}$$

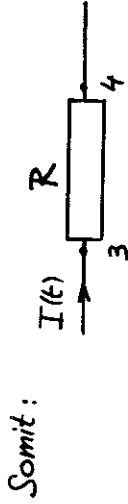
Damit können wir aber auch den Zusammenhang zwischen Spannungsabfall am Widerstand und Stromstärke I(t) herstellen:

$$I(t) = \int_{\text{Querschnitt}} d^2\vec{f} \cdot \vec{j}(r,t) = \int_{\text{Querschnitt}} d^2\vec{f} \cdot \vec{j}(r,t)$$

$$= \sigma \int_{\text{Querschnitt}} d^2\vec{f} \cdot \vec{E}_c(r,t) = \sigma F \frac{1}{l} [\phi_{c3}(t) - \phi_{c4}(t)] =: \frac{1}{R} \cdot R \text{ Ohmscher Widerstand (Zylinder)}$$

$$\phi_{c3}(t) - \phi_{c4}(t) = RI(t)$$

Ohmsches Gesetz im engeren Sinne



$$\int_3^4 \vec{E}_c(r,t) \cdot d\vec{r} = \phi_{c3}(t) - \phi_{c4}(t) = RI(t)$$

Spannungsabfall am Ohmschen Widerstand

InduktionsspuLe



im Spulendraht gemäß Näherung 2) (s. XIII-13)

$$\vec{E}(r,t) = \vec{E}_c(r,t) + \vec{E}_T(r,t) = \vec{0} \quad \text{gilt, somit:}$$

$$\int_5^6 \vec{E}_c(r,t) \cdot d\vec{r} = - \int_5^6 \vec{E}_T(r,t) \cdot d\vec{r}$$

Der technisch konstruktive Sinn einer "Induktions-Spule" besteht darin, im unmittelbaren Spulenbereich ein großes "induziertes" Feld  $\vec{E}_T(r,t)$  zu "erzeugen", während  $\vec{E}_T(r,t)$  außerhalb der Spule vernachlässigbar klein ist - ausgenommen bei der induktiven

Koppelung an einen anderen Stromkreis,  
 wo das "Hinauswirken" beabsichtigt ist  
 und durch einen gemeinsamen magnetisierbaren  
 Spulenkern mit einer Induktionsspule des  
 anderen Stromkreises erzielt wird.

Deshalb kann man statt  $\int_5^6 \vec{E}_T(r,t) \cdot d\vec{F}$

→  $\oint \vec{E}_T(r,t) \cdot d\vec{F}$  schreiben, wobei der Weg

durch den Spulendraht von "5" nach "6"

durch einen beliebigen Weg außerhalb der

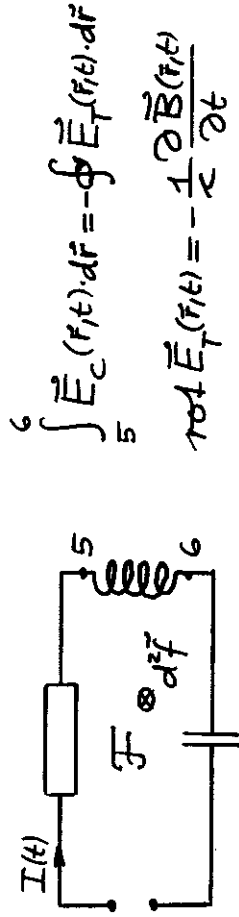
Spule verlaufenden Weg geschlossen wird.

Auf Grund der Näherungsannahmen 3), 4), 5)

und einer analogen Annahme für die

Spannungsquelle kann man auch über

den gegebenen Stromkreis integrieren:



⇒  $\oint \vec{E}_T(r,t) \cdot d\vec{F} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \underbrace{\int d^2\vec{F} \cdot \vec{B}(r,t)}_{\Phi(t) \text{ magnetischer Fluss durch } \vec{F}} =: V(\text{ind})$

In der Magnetostatik (stationärer Strom) hatten wir in Abschnitt IV.3

div B(r) = 0

rot B(r) = 4π J(r)

⇒ für Stromkreis gilt  $\frac{1}{c} \Phi = LI$

mit dem Selbstinduktionskoeffizienten

$L = \frac{1}{c^2} \oint \oint \frac{d\vec{F} \cdot d\vec{F}'}{|\vec{F} - \vec{F}'|}$

HIER GILT:

div B(r,t) = 0

rot H(r,t) = 4π J(r,t)

$\vec{B}(r,t) = \mu \vec{H}(r,t)$

⇒ für Stromkreis gilt

$\frac{1}{c} \Phi(t) = LI(t)$

mit

$L = \frac{\mu}{c^2} \oint \oint \frac{d\vec{F} \cdot d\vec{F}'}{|\vec{F} - \vec{F}'|}$

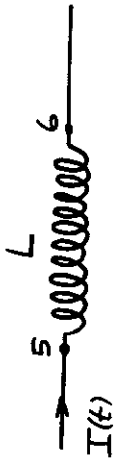
Bemerkung: Unter den gegebenen Bedingungen

ist der Selbstinduktionskoeffizient L des

Stromkreises (näherungsweise) der Spule

zuzuordnen, weshalb man L zur Spule schreibt.

Somit:

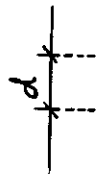


$$\int_5^6 \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = \phi_{c5}(t) - \phi_{c6}(t)$$

$$= \frac{1}{\epsilon} \frac{d\Phi(t)}{dt} = -V^{(ind)}(t) = L \frac{dI(t)}{dt}$$

Kondensator Spezialfall betrachtet: Plattenkondensator

$$\int_7^8 \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = \phi_{c7}(t) - \phi_{c8}(t)$$



$$I(t) = \int_{P_2} d^2\vec{f} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{P_2} d^2\vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{D}_c(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{P_2} d^2\vec{f} \cdot \underbrace{\frac{\vec{D}_c(\vec{r}, t)}{4\pi}}_{d^2\vec{f} \cdot \epsilon(\vec{r}, t)}$$

$$Q_1(t) = Q(t) \quad Q_2(t) = -Q(t)$$

$$\Rightarrow Q(t) = - \int_{t_0}^t I(t') dt'$$

mit  $Q(t_0) = 0$

In der Elektrostatik hatten wir in Abschnitt III-3

$$\text{div } \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\rho$$

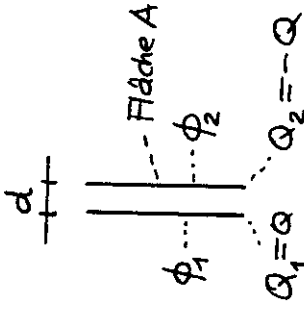
$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$$

$\Rightarrow$  für Plattenkondensator gilt

$$Q = C (\phi_1 - \phi_2)$$

mit der Kapazität

$$C = \frac{A}{4\pi d}$$



HIER GILT:

$$\text{div } \vec{D}_c(\vec{r}, t) = 4\pi\rho(\vec{r}, t)$$

$$\text{rot } \vec{E}_c(\vec{r}, t) = \vec{0}$$

$$\vec{D}_c(\vec{r}, t) = \epsilon \vec{E}_c(\vec{r}, t)$$

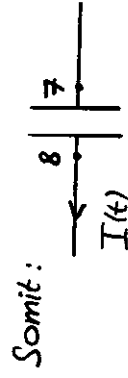
$\Rightarrow$  für Plattenkondensator folgt

$$Q(t) = C (\phi_1(t) - \phi_2(t))$$

mit

$$C = \frac{\epsilon A}{4\pi d}$$

$$\phi_2(t) \parallel \phi_1(t)$$

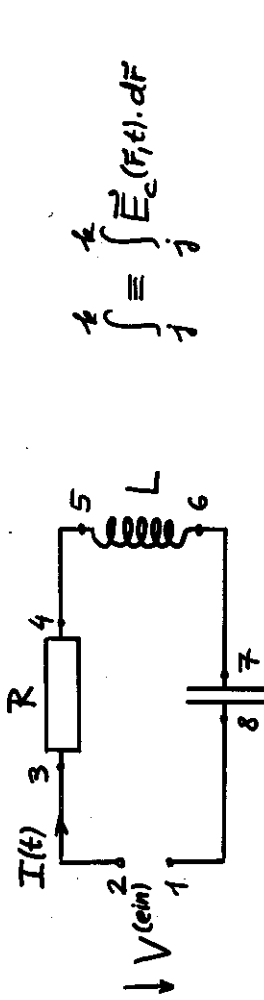


$$\text{Somit: } \int_7^8 \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = \phi_{c7}(t) - \phi_{c8}(t)$$

$$= -\frac{1}{C} Q(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I(t') dt'$$



Zusammenfassung:



$$\int_1^2 \equiv \int_2^1 \equiv \int_1^2 \vec{E}_e(F,t) \cdot d\vec{F}$$

$$\int_3^2 + \int_4^3 + \int_5^4 + \int_6^5 + \int_7^6 + \int_8^7 = 0$$

$$\int_2^3 \equiv 0 \quad \int_3^4 \equiv RI(t) \quad \int_4^5 \equiv 0 \quad \int_5^6 \equiv L \frac{dI(t)}{dt} \quad \int_6^7 \equiv 0 \quad \int_7^8 \equiv \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I(t') dt'$$

$$= - \int_1^2 V^{(ein)}(t)$$

$$RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I(t') dt' = V^{(ein)}(t) \quad (18)$$

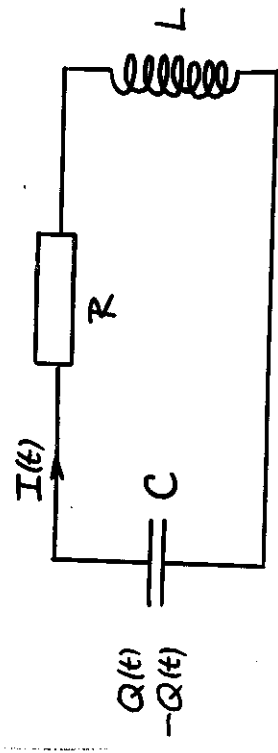
allgemeines Ohmsches "Gesetz"

$t_0 \dots$  Kondensator ungeladen

XIII.1.C. Beispiel: Kondensatorentladung

Über Ohmschen Widerstand und Induktionsspule

(in Serie geschaltet)



$$RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} - \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I(t') dt' = 0 \quad (19a)$$

AB.:  $Q(0) = \int_0^{t_0} I(t') dt' = Q_0, \quad I(0) = 0$

$$\Rightarrow L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = 0 \quad (19b)$$

Ansatz:  $I(t) = e^{-\alpha t} \quad (20)$

charakteristische Gl.:

$$L\alpha^2 - R\alpha + \frac{1}{C} = 0 \quad (21a)$$

Lösungen:

$$\alpha_{1/2} = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (21b)$$

(Definitionen:  $= \delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$  ; s. XIII-23)

Definitionen:

$$\delta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (22)$$

Fall 1:  $\delta \geq \omega_0$ : aperiodische Entladung

$$\delta > \omega_0: \quad \underline{I(t) = e^{-\delta t} \left[ I_1 e^{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} + I_2 e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} \right]} \quad (23a)$$

$\delta = \omega_0$  (Grenzfall):

$$\underline{I(t) = (A + Bt) e^{-\delta t}}$$

Fall 2:  $\delta < \omega_0$ : gedämpfte periodische Entladung

$$\underline{I(t) = I_p e^{-\delta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t + \varphi_p)} \quad (23b)$$

$\delta \ll \omega_0$ : schwache Dämpfung

$$I(t) \approx I_p e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \varphi_p)$$

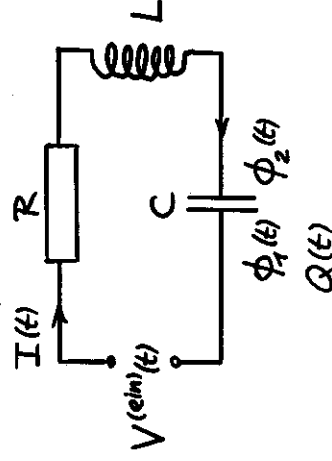
Bemerkung: Die Bestimmung der Integrations=

konstanten  $I_1, I_2$  bzw.  $A, B$  bzw.  $I_p, \varphi_p$

erfolgt mit Hilfe der  $AB$ . ●

### XIII. 1. D\* Energiesatz

(s. Skriptum XIII. 2. B 1. Teil.)



$$I(t) \cdot \left[ RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} + [\phi_2(t) - \phi_1(t)] \right] = V^{(ein)}(t) \quad (31a)$$

$$\underline{RI^2(t) + LI(t) \frac{dI(t)}{dt} + I(t) [\phi_2(t) - \phi_1(t)] = I(t) V^{(ein)}(t)}$$

$$\frac{dQ_2(t)}{dt} = - \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{d}{dt} C [\phi_2(t) - \phi_1(t)] \quad (31b)$$

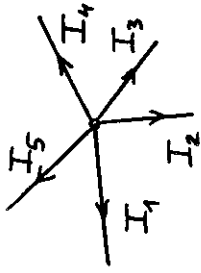
$$\boxed{I(t) V^{(ein)}(t) = RI^2(t) + \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} LI^2(t) + \frac{1}{2} C [\phi_2(t) - \phi_1(t)]^2 \right\}} \quad (32)$$

1... von der Spannungsquelle in der Zeiteinheit zugeführte Energie (von der Spannungsquelle zugeführte Leistung)

2... in der Zeiteinheit als Joulesche Wärme dissipierte Energie

3... Zunahme der gespeicherten Feldenergie in der Zeiteinheit (vgl. mit den Gln. (III.53) und (IV.48))





$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 0$$

2) Aus  $\oint \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = 0$  für einen beliebigen geschlossenen Weg

und den für Ohmsche Widerstände, Induktionsspulen und Kondensatoren für die Spannungsabfälle

$$\int \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = \phi_{c_j}(t) - \phi_{c_k}(t)$$

gefundenen Ausdrücken folgt:

2. Kirchhoffsches Gesetz ("Maschensatz"):

In einer geschlossenen Stromschleife ("Masche") innerhalb eines Netzwerkes ist die Summe der Spannungsabfälle an Ohmschen, induktiven und kapazitiven Widerständen gleich der Summe der eingepprägten Spannungen:

$$\sum_m Z_m(\omega) I_m = \sum_l V_l^{(ein)} \tag{27}$$

[Umlaufsinn!]

Dabei ist:

$I_m$  der durch den Teilwiderstand  $Z_m(\omega)$  fließende Teilstrom

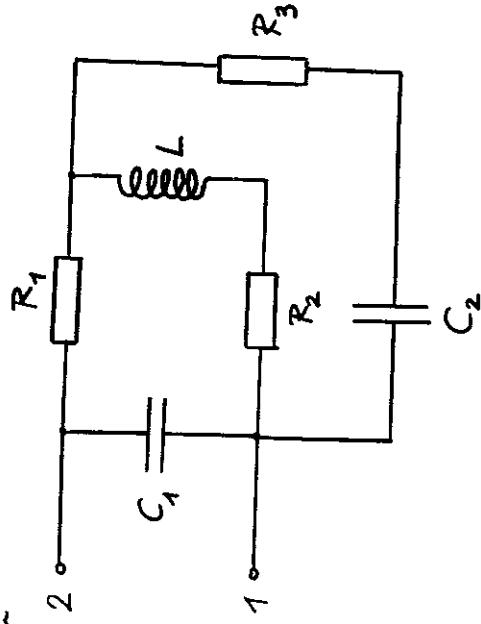
$$Z_m(\omega) = \begin{cases} R & \text{für einen Ohmschen Widerstand} \\ i\omega L & \text{für eine Induktionsspule} \\ \frac{1}{i\omega C} & \text{für einen Kondensator} \end{cases}$$

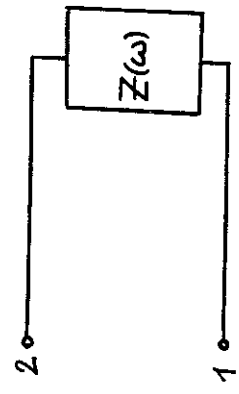
Beispiele: s. Abschnitt XIII.2.C - also später (28)

Passiver Zweipol

Beliebig verzweigtes lineares Netzwerk, welches nur "passive Elemente", d.h. Ohmsche Widerstände, Induktionsspulen und Kondensatoren enthält, und zwei offene Enden (Anschlüsse) besitzt.

Z.B.:





$$Z(\omega) = R(\omega) + iX(\omega)$$

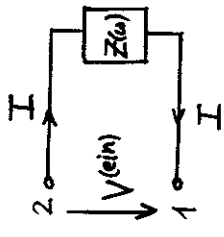
Wirkwiderstand, Resistanz  
Blindwiderstand, Reaktanz

komplexer Gesamt-  
widerstand, Impedanz  
des passiven Zweipols

Bei Anlegen einer Spannungsquelle an den Polen 1,2 gilt dann:

$$Z(\omega) I = V^{(ein)}$$

allgemeines Ohmsches Gesetz  
bzw.  $I = Y(\omega) V^{(ein)}$



mit

$$Y(\omega) = \frac{1}{Z(\omega)} = G(\omega) + iB(\omega)$$

(29a)

Admittanz  
elektrischer Leitwert,  
Wirkleitwert, Konduktanz  
Blindleitwert, Suszeptanz

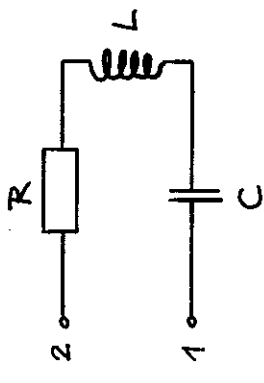
$|Z(\omega)|$  Scheinimpedanz,  $|Y(\omega)|$  Scheinleitwert

Darstellung von  $Z(\omega) = R(\omega) + iX(\omega)$

in der komplexen Ebene als Kurve mit  $\omega$  als

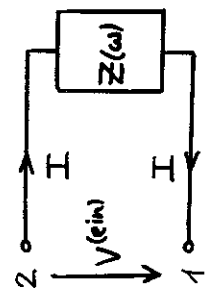
Kurvenparameter: "Ortskurve" für den Zweipol

Beispiel: Berechne alle hier definierten Größen und zeichne die Ortskurve für den Fall



XIII. 2. B. Wirkleistung und Blindleistung einer Spannungsquelle an einem passiven Zweipol

$$I(t) = I_0 e^{i\omega t}, \quad V^{(ein)}(t) = V_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t} \quad (33)$$



$I_0, V_0$  reell  $> 0$   
 $\frac{V_0}{I_0}$ ,  $\varphi$  durch  $Z(\omega)$  bestimmt (s. später)

von der Spannungsquelle zugeführte Leistung (in der Zeiteinheit zugeführte Energie)

$$P(t) = \text{Re} I(t) \cdot \text{Re} V^{(ein)}(t)$$

$$= I_0 \cos \omega t \cdot V_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

(34)

$$= I_0 V_0 \cos \varphi \cos^2 \omega t - I_0 V_0 \sin \varphi \sin \omega t \cos \omega t$$

$P(t) = I_0 V_0 \cos \varphi \cos^2 \omega t - I_0 V_0 \sin \varphi \sin^2 \omega t$   
 $2P_{\text{Wirk}}$  ; s. unten  $2P_{\text{Blind}}$  ; s. unten  
 Von der Spannungsquelle im Zeitmittel über eine Periode zugeführte Leistung = Wirkleistung

$$P_{\text{Wirk}} := \langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} I_0 V_0 \cos \varphi \quad (36)$$

effektive Stromstärke und Spannung

$$I_{\text{eff}} := \sqrt{\langle (\text{Re } I(t))^2 \rangle} = I_0 \sqrt{\langle \cos^2 \omega t \rangle} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad (37)$$

$$V_{\text{eff}} := \sqrt{\langle (\text{Re } V(t))^2 \rangle} = V_0 \sqrt{\langle \cos^2 (\omega t + \varphi) \rangle} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow P_{\text{Wirk}} = I_{\text{eff}} V_{\text{eff}} \cos \varphi \quad (38)$$

Blindleistung

$$P_{\text{Blind}} := \langle \text{Re } V^{(\text{ein})}(t) \cdot \text{Re } \frac{dI(t)}{d(\omega t)} \rangle = \dots \text{ (s. Unter-  
lagen)}$$

$$= \frac{1}{2} I_0 V_0 \sin \varphi$$

$$P_{\text{Blind}} = I_{\text{eff}} V_{\text{eff}} \sin \varphi \quad (39)$$

$$P(t) = P_{\text{Wirk}} (1 + \cos 2\omega t) - P_{\text{Blind}} \sin 2\omega t$$

"tatsächlich zugeführt" "pendelt"

Zusammenhang zwischen Phasenverschiebung  $\varphi$  und komplexem Widerstand des passiven Zweipols

$$V^{(\text{ein})} = Z(\omega) I = (R(\omega) + iX(\omega)) I$$

$$V_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t} = \underbrace{\sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)}}_{|Z(\omega)| \text{ Scheinimpedanz}} e^{i \arctan \frac{X(\omega)}{R(\omega)}} I_0 e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} V_{\text{eff}} = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} I_{\text{eff}} \quad (40)$$

$$\tan \varphi = \frac{X(\omega)}{R(\omega)}$$

$$\Rightarrow \sin \varphi = \frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

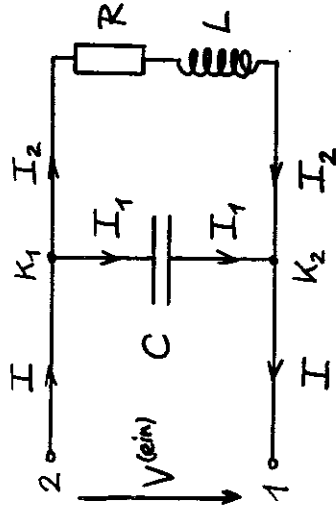
$$V_{\text{eff}} = \sqrt{R^2 + X^2} I_{\text{eff}}$$

$$V_{\text{eff}} \cos \varphi = R I_{\text{eff}}, \quad V_{\text{eff}} \sin \varphi = X I_{\text{eff}}$$

$$P_{\text{Wirk}} = I_{\text{eff}} V_{\text{eff}} \cos \varphi = R I_{\text{eff}}^2 \quad \text{Wirkwiderstand} \quad R(\omega)$$

$$P_{\text{Blind}} = I_{\text{eff}} V_{\text{eff}} \sin \varphi = X I_{\text{eff}}^2 \quad \text{Blindwiderstand} \quad X(\omega) \quad (41)$$

XIII.2.C. Beispiel: Parallelresonanzkreis



Knotensatz:

Knoten  $K_1$ :  $I = I_1 + I_2$

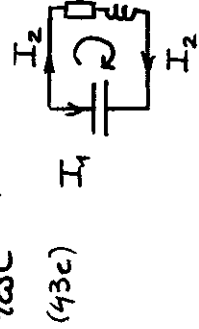
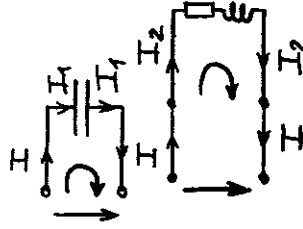
Knoten  $K_2$ :  $I = I_1 + I_2$

Maschensatz:

Masche  $M_1$ :  $\frac{1}{i\omega C} I_1 = V^{(ein)}$  (43a)

Masche  $M_2$ :  $RI_2 + i\omega LI_2 = V^{(ein)}$  (43b)

Masche  $M_3$ :  $RI_2 + i\omega LI_2 - \frac{1}{i\omega C} I_1 = 0$  (43c)



$(R + i\omega L)I_2 + i\frac{1}{\omega C}I_1 = 0$   
 $\parallel$   
 $I - I_1$

$(R + i\omega L)I = [R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})]I_1$

$V^{(ein)} = -i\frac{1}{\omega C}I_1 = \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{R + i\omega L}}I$  (44)

$\Rightarrow Z(\omega) = \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{R + i\omega L}}$  Impedanz

$Y(\omega) = i\omega C + \frac{1}{R + i\omega L}$  Admittanz

Mit  $\tau := RC$ ,  $\omega_0 := \frac{1}{\sqrt{LC}}$  (45b)

folgt

$Z(\omega) = \frac{R}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + \tau^2\omega^2} + i \underbrace{\frac{\omega L (1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + \tau^2\omega^2}}_{X(\omega) \text{ Reaktanz}}$  (45a)

$Y(\omega) = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + i \underbrace{(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2})}_{B(\omega) \text{ Suszeptanz}}$  (46)

$\underbrace{\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}}_{G(\omega) \text{ Konduktanz}}$

# XIV. ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN IN MATERIE

XIV-1  
XIV.1. Wellenausbreitung in linearen homogenen und isotropen Medien mit  $\rho(\vec{r},t) \equiv 0$  in der Materie

## XIV.1.A. Telegraphengleichungen

Annahme: Dispersion der Dielektrizität und Permeabilität vernachlässigbar (Frequenzen unterhalb IR-Bereich)

MG: 
$$\vec{D}(\vec{r},t) = \epsilon \vec{E}(\vec{r},t), \quad \vec{B}(\vec{r},t) = \mu \vec{H}(\vec{r},t)$$

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \sigma \vec{E}(\vec{r},t)$$
(1)

Einsetzen in die FG gibt dann für Raumbereiche mit  $\rho(\vec{r},t) \equiv 0$  für  $\vec{E}(\vec{r},t), \vec{H}(\vec{r},t)$ :

$\text{div } \vec{E}(\vec{r},t) = 0$	$\text{rot } \vec{E}(\vec{r},t) = -\mu \frac{\partial \vec{H}(\vec{r},t)}{\partial t}$
$\text{div } \vec{H}(\vec{r},t) = 0$	$\text{rot } \vec{H}(\vec{r},t) = \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{E}(\vec{r},t) + \epsilon \frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}$

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E}$$
(2)

$$= -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$
 analog  $\text{rot rot } \vec{H}$

$$*) \vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H})$$

III  $\vec{S}_{(mat)}$

XIV-2

$$\Delta \vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

$$\Delta \vec{H}(\vec{r},t) = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}(\vec{r},t)}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{H}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

(3)

Telegraphengleichungen  
Isolatoren / metallische Leiter

notwendige Bdn. für die Erfüllung der FG+MG

Isolatoren

$\sigma = 0$

$$\Delta \vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t^2}$$

$$\Delta \vec{H}(\vec{r},t) = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}(\vec{r},t)}{\partial t^2}$$

(4)

Wellengleichungen

Wellen - Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$
(5)

Bemerkung: Die Telegraphengleichungen spielen bei der Behandlung der Wellenausbreitung längs Drähten eine Rolle (vs. hinreichend große Wellenlängen)



XIV. 1. B. Berücksichtigung der Dispersion.

Fouriertransformation bzgl. der Zeitvariablen

MG:

$$\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \epsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega), \quad \vec{B}(\vec{r}, \omega) = \mu(\omega) \vec{H}(\vec{r}, \omega)$$

$$\vec{j}(\vec{r}, \omega) = \sigma \vec{E}(\vec{r}, \omega)$$

(6)

Einsetzen in die bzgl. t Fouriertransf. FG gibt dann für Raumgebiete mit  $\rho(\vec{r}, t) \equiv 0$  für  $\vec{E}(\vec{r}, \omega), \vec{H}(\vec{r}, \omega)$ :

$$\text{div } \vec{E}(\vec{r}, \omega) = 0 \quad \text{rot } \vec{E}(\vec{r}, \omega) = i \frac{\omega \mu(\omega)}{c} \vec{H}(\vec{r}, \omega) \quad (8)$$

$$\text{div } \vec{H}(\vec{r}, \omega) = 0 \quad \text{rot } \vec{H}(\vec{r}, \omega) = \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{E}(\vec{r}, \omega) - i \frac{\omega \epsilon(\omega)}{c} \vec{E}(\vec{r}, \omega)$$

$$= -i \frac{\omega}{c} (\epsilon(\omega) + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}) \vec{E}(\vec{r}, \omega)$$

$$=: \eta(\omega)$$

Definition: verallgemeinerte Dielektrizitätsfunktion

$$\eta(\omega) = \epsilon(\omega) + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$$

(9)

(8)  $\Rightarrow$  (Rotorbildung in den Rotorgln.)

$$\left[ \Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \eta(\omega) \mu(\omega) \right] \vec{E}(\vec{r}, \omega) = \vec{0}$$

$$\left[ \Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \eta(\omega) \mu(\omega) \right] \vec{H}(\vec{r}, \omega) = \vec{0}$$

(10)

(notwendige Bedgn. für Erfüllung der FG + MG)

XIV. 1. C. Monochromatische "ebene Wellen"

mit Kreisfrequenz  $\omega$

$$\text{div } \vec{E}(\vec{r}, \omega) = 0 \quad \text{rot } \vec{E}(\vec{r}, \omega) = i \frac{\omega}{c} \mu(\omega) \vec{H}(\vec{r}, \omega)$$

$$\text{div } \vec{H}(\vec{r}, \omega) = 0 \quad \text{rot } \vec{H}(\vec{r}, \omega) = -i \frac{\omega}{c} \eta(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega)$$

Ansatz: monochromatische "ebene Welle"

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.} \quad (11a)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.} \quad (11b)$$

Entspricht einer Fourierkomponente.  
 $\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$  für Wirkung auf 1. Term  $\Rightarrow$

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad \vec{k} \times \vec{E}_0 = \frac{\omega}{c} \mu(\omega) \vec{H}_0$$

$$\vec{k} \cdot \vec{H}_0 = 0 \quad \vec{k} \times \vec{H}_0 = -\frac{\omega}{c} \eta(\omega) \vec{E}_0$$

(13)

Gln. (13) dann und nur dann widerspruchsfrei, wenn

$$\vec{k}^2 \equiv \vec{k} \cdot \vec{k} \equiv k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \eta(\omega) \mu(\omega) \quad \text{i.a. komplex!}$$

Dispersionsbeziehung

(14)

Beachte: Im Fall des Vakuums war  $\vec{k}$  ein reeller Vektor ( $\vec{k} = k \vec{n}$  mit reellem  $k$  und einem reellen Einheitsvektor  $\vec{n}$ ) und es war  $\vec{k}, \vec{E}, \vec{B} = \vec{H}$  ein orthog. Dreibein mit  $|\vec{E}| = |\vec{B}|$  und  $\vec{E}, \vec{B}$  in Phase.

"Ebene Welle" ist also für komplexes  $\vec{k}$  nicht mehr (unglücklicher) als ein Name: man spricht im Falle eines

komplexen  $\vec{k}$ -Vektors auch von einer

"inhomogenen ebenen Welle".

$$\begin{aligned} 4) \quad \vec{k} \cdot \vec{k} &= k_r^2 - k_i^2 + 2i k_r k_i = \frac{\omega^2}{c^2} \eta(\omega) \mu(\omega) \\ &= k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( \epsilon(\omega) + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right) \mu(\omega) \end{aligned}$$

zeigt:

Dann und nur dann, wenn

$$\sigma = 0, \quad \epsilon(\omega), \mu(\omega) \text{ reell}$$

d.h.: Isolator und  $\omega$  aus Transparenzbereich

gilt, ist  $k = \sqrt{k^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon(\omega)\mu(\omega)}$  reell und

$\vec{k}$  reell ist möglich (s. Bemerkung 5!)

Für reelles  $\vec{k}$  hat man es dann mit einer ungedämpften "gewöhnlichen ebenen Welle mit Ausbreitungsrichtung  $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k}$  (reeller

Einheitsvektor) zu tun, und aus

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0, \quad \vec{k} \times \vec{E}_0 = \frac{\omega}{c} \mu(\omega) \vec{H}_0$$

folgt  $\vec{k}, \vec{E}, \vec{H}^+$  orthogonales Dreiein

(Rechtssystem) mit  $\vec{E}, \vec{H}^+$  in Phase und

$$|\vec{H}| = \sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{\mu(\omega)}} |\vec{E}| \quad (|\vec{B}| = \sqrt{\epsilon(\omega)\mu(\omega)} |\vec{E}|)^+ \text{ bzw. } \vec{B}$$

Für festes  $t$  halten  $\vec{E}, \vec{B}$  in allen Punkten einer festen Ebene  $\perp \vec{n}$  gleiche Werte: ebene Welle

HIER:

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad \vec{k} \times \vec{E}_0 = \frac{\omega}{c} \mu(\omega) \vec{H}_0$$

$$\vec{k} \cdot \vec{H}_0 = 0 \quad \vec{k} \times \vec{H}_0 = -\frac{\omega}{c} \eta(\omega) \vec{E}_0$$

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = k^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \eta(\omega) \mu(\omega)$$

$$\vec{k} = k_r + i k_i \quad \text{i.a. komplexer Vektor} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = k^2 = k_r^2 - k_i^2 + 2i k_r k_i = \frac{\omega^2}{c^2} \eta(\omega) \mu(\omega)$$

$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = e^{i k_r \vec{r}} \cdot e^{-k_i \vec{r}}$$

$$1) \quad |\vec{E}_0| \neq |\vec{H}_0|$$

$$2) \quad \vec{E}_0, \vec{H}_0 \quad \text{i.a. nicht "in Phase"}$$

$$3) \quad \text{Ebenen } \perp \vec{k}_r = \text{Ebenen konstanter Phase}$$

$$\text{Ebenen } \perp \vec{k}_i = \text{Ebenen konstanter Amplitude} \quad (\text{Betrag})$$

(falls  $k_i \neq 0$ )

Flächen, auf denen für festes  $t$  die

Feldstärken selbst überall gleich sind,

sind i.a. nicht einmal Ebenen!

5) Die FG + MG besitzen aber auch im Fall

$$\sigma = 0, \quad \epsilon(\omega), \quad \mu(\omega) \text{ reell}$$

$$\Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{k} = k_r^2 - k_i^2 + 2i k_r k_i$$

$$= k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \mu(\omega) \quad \text{reell} > 0$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{k^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon(\omega) \mu(\omega)} \quad \text{reell}$$

"inhomogene ebene Wellen" als Lösungen;

in  $\vec{k} = k_r + i k_i$

muß dann lediglich  $\vec{k}_r \cdot \vec{k}_i = 0$  erfüllt sein.

Eine derartige "ebene Welle" spielt bei der

Totalreflexion an der Grenzfläche zweier

Dielektrika eine Rolle. (Exponentielles Abklingen

in Richtung von  $\vec{k}_i$  ohne Dissipation!)

Verallgemeinerter Brechungsindex

Definition: verallgemeinerter Brechungsindex

$$p(\omega) = \sqrt{\eta(\omega) \mu(\omega)} = n(\omega) + i \kappa(\omega) \tag{15}$$

$\Rightarrow$   $\text{Re } p(\omega)$   $\text{Im } p(\omega)$

$k = \frac{\omega}{c} p(\omega)$  Dispersionsbeziehung

(16)

Spezialfall:

$$\sigma = 0, \quad \epsilon(\omega), \quad \mu(\omega) \text{ reell}$$

$$\Rightarrow p(\omega) = n(\omega) \quad (\kappa(\omega) = 0) \tag{17}$$

$$k = \frac{\omega}{c} n(\omega) \quad \text{mit} \quad n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega) \mu(\omega)}$$

### XIV. 2. Reflexion, Brechung und Totalreflexion

an der ebenen Grenzfläche zweier

Dielektrika (monochromatische Wellen,

$\omega$  aus Transparenzbereich beider Medien)

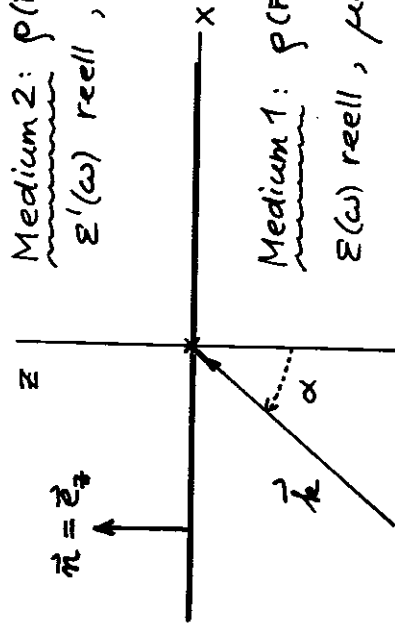
Medium 2:  $p(r,t) \equiv 0$

$$\epsilon'(\omega) \text{ reell}, \quad \mu'(\omega) = 1, \quad \sigma' = 0$$

ebene Grenzfläche  $\sigma(r,t) \equiv 0$

Medium 1:  $p(r,t) \equiv 0$

$$\epsilon(\omega) \text{ reell}, \quad \mu(\omega) = 1, \quad \sigma = 0$$



Vorgegeben:

einfallende Welle = "gewöhnliche"

monochromatische ebene Welle

( $\vec{k}$  reeller Vektor)

Wahl des

$$\vec{k} = k (\sin \alpha, 0, \cos \alpha), \quad \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Koordinaten-  
systems!

XIV. 2.A. Ansatz. Reflexions- und Brechungsgesetz

XIV-9

Einfallende Welle (vorgegeben)

$$\begin{aligned} \vec{E}(r,t) &= \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c. \\ \vec{D}(r,t) &= \vec{D}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c. \\ \vec{H}(r,t) &= \vec{H}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c. = \vec{B}(r,t) \end{aligned} \quad (19a)$$

mit

$$\vec{k} = k (\sin \alpha, 0, \cos \alpha), \quad \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

reeller Einheitsvektor,  
gibt Ausbreitungsrichtung an

$$\text{ebenfalls reell: } k = \frac{\omega}{c} n(\omega), \quad n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)}$$

(20-1), (21-1)

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$$

$$\vec{D}_0 = \epsilon(\omega) \vec{E}_0$$

$$\vec{H}_0 = \frac{c}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}_0)$$

(22-1)

Erfüllt FG + MG im Medium 1.

Ansatz im Medium 1:

XIV-10

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(r,t) &= \vec{E}(r,t) + \vec{E}''(r,t) \\ \vec{D}_1(r,t) &= \vec{D}(r,t) + \vec{D}''(r,t) \\ \vec{H}_1(r,t) &= \vec{H}(r,t) + \vec{H}''(r,t) = \vec{B}_1(r,t) \end{aligned}$$

---  
einfallende + reflektierte Welle

mit der vorgegebenen einfallenden Welle und der zu bestimmenden

reflektierten Welle

$$\begin{aligned} \vec{E}''(r,t) &= \vec{E}_0'' e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c. \\ \vec{D}''(r,t) &= \vec{D}_0'' e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c. \\ \vec{H}''(r,t) &= \vec{H}_0'' e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c. \end{aligned} \quad (19b)$$

mit

$$k'' = k = \frac{\omega}{c} n(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon(\omega)} \quad (20-2)$$

$$\vec{k}'' \cdot \vec{E}_0'' = 0$$

$$\vec{D}_0'' = \epsilon(\omega) \vec{E}_0''$$

$$\vec{H}_0'' = \frac{c}{\omega} (\vec{k}'' \times \vec{E}_0'')$$

FG + MG  
linear!

(22-2)

Erfüllt FG + MG im Medium 1  $\Rightarrow$  auch Ansatz für Gesamtfelder erfüllt FG + MG im Medium 1.

Ansatz im Medium 2:

$$\begin{aligned} \vec{E}_2(F,t) &= \vec{E}'_0(F,t) = \vec{E}'_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.} \\ \vec{D}_2(F,t) &= \vec{D}'_0(F,t) = \vec{D}'_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.} \\ \vec{H}_2(F,t) &= \vec{H}'_0(F,t) = \vec{H}'_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (19c)$$

mit

$$\begin{aligned} \vec{k}' &= \frac{\omega}{c} n'(\omega), \quad n'(\omega) = \sqrt{\epsilon'(\omega)} & (20-3) \\ \vec{k}' \cdot \vec{E}'_0 &= 0 & (21-3) \end{aligned}$$

$$\vec{D}'_0 = \epsilon'(\omega) \vec{E}'_0$$

$$\vec{H}'_0 = \frac{c}{\omega} (\vec{k}' \times \vec{E}'_0) \quad (22-3)$$

Erfüllt FG + MG im Medium 2.

Bemerkungen:

$\vec{k}'$ : Vorerst nur  $\vec{k}' \cdot \vec{r}' \equiv k'^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n'^2(\omega)$  bekannt,

"Rest" muß aus Anschlußbdgn. bestimmt werden

Ergebnis wird sein (s. später):

a) falls  $n'(\omega) > n(\omega)$ :  $\vec{k}'$  stets reeller Vektor

⇒ Welle im Medium 2 "gewöhnliche"  
ebene Welle: gebrochene Welle,  
da Lichtbrechung an Grenzfläche

Bemerkungen:

1)  $\vec{k}''$ : Vorerst nur  $\vec{k}'' \cdot \vec{r}'' \equiv k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\omega)$  bekannt, "Rest" muß noch bestimmt werden (Anschlußbdgn.!)

Ergebnis:  $\vec{k}''$  reeller Vektor ⇒ reflektierte Welle stets "gewöhnliche" ebene Welle (s. später)

$\vec{E}''_0$ : muß ebenfalls aus Anschlußbedingungen bestimmt werden, wobei auch noch  $\vec{k}'' \cdot \vec{E}''_0 = 0$  erfüllt werden muß

2) FG linear  
MG linear  
Anschlußbdgn. linear  
Fouriertransformation linear } ⇒ alle Teilwellen müssen gleiche Frequenz besitzen

Ansatz im Skriptum mit  $\omega, \omega', \omega''$  möglich, aber nicht erforderlich.

Anschlussbedingungen

Stetigkeit der Normalkomponenten = z-Komponenten von  $\vec{D}$  (keine freien Flächenladungen) und  $\vec{B} = \vec{H}$

$$\epsilon(\omega) [\vec{E}(r,t) + \vec{E}''(r,t)] \cdot \vec{e}_z = \epsilon'(\omega) \vec{E}'(r,t) \cdot \vec{e}_z \quad (23a)$$

$$[\vec{H}(r,t) + \vec{H}''(r,t)] \cdot \vec{e}_z = \vec{H}'(r,t) \cdot \vec{e}_z \quad (23b)$$

Nur jeweils Terme mit  $\vec{e}$  ist einsetzen! für  $z=0, \forall x,y,t$

Stetigkeit der Tangentialkomponenten = x-, y-Komponenten von  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  (keine freien Flächenströme)

$$[\vec{E}(r,t) + \vec{E}''(r,t)] \times \vec{e}_z = \vec{E}'(r,t) \times \vec{e}_z \quad (23c)$$

$$[\vec{H}(r,t) + \vec{H}''(r,t)] \times \vec{e}_z = \vec{H}'(r,t) \times \vec{e}_z \quad (23d)$$

für  $z=0, \forall x,y,t$

Bemerkung:  $\neq$  Die Erfüllung für  $\forall t$  ist gewährleistet, wenn die Bagn. für irgendein  $t$  (z.B.  $t=0$ ) erfüllt sind, da sich  $\vec{e}$  ist "herauskürzt".

Hätte man in  $\vec{E}, \vec{E}'', \vec{E}'$  Frequenzen

$\omega, \omega', \omega''$  angesetzt, hätte man hier aus der

Forderung  $\forall t \Rightarrow \omega'' = \omega' = \omega$  erhalten. • (25)

b) falls  $n'(\omega) < n(\omega)$ :

Fallunterscheidung:

b1)  $\alpha < \arcsin \frac{n'(\omega)}{n(\omega)} \Rightarrow \vec{k}'$  reeller Vektor

$\Rightarrow$  Welle im Medium 2 "gewöhnliche"

ebene Welle: gebrochene Welle,

da Lichtbrechung an Grenzfläche

b2)  $\alpha > \arcsin \frac{n'(\omega)}{n(\omega)} \Rightarrow \vec{k}' = \vec{k}_r' + i\vec{k}_i'$

komplexer Vektor (mit  $\vec{k}_r' \cdot \vec{k}_i' = 0$ )

$\Rightarrow$  Welle im Medium 2 "inhomogene

ebene Welle": Lichttaut im Medium 2,

Totalreflexion

Spricht man auch in diesem Fall von

"Brechung" und "gebrochener Welle",

So sollte man Anführungszeichen anbringen.

$\vec{E}'_0$ : muß ebenfalls aus Anschlussbedingungen

bestimmt werden, wobei noch die

Nebenbedingung  $\vec{k}' \cdot \vec{E}'_0 = 0$  erfüllt

werden muß



Reflexions- und Brechungsgesetze

Notwendige Bedingungen für die Erfüllung der Anschlussbedingungen folgen aus der

Forderung

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{i\vec{k}''\cdot\vec{r}} = e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}} \quad \text{für } z=0, \quad \forall x,y \quad (24)$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, welche die Berechnung von  $\vec{k}''$ ,  $\vec{k}'$  gestatten, so sind die Anschlussbedingungen für  $\forall x,y$  erfüllt, wofem sie (mit den gefundenen  $\vec{k}''$ ,  $\vec{k}'$ ) für  $x=y=0$  erfüllt sind ("Heraus Kürzen")

aller e-Potenzen. Zu erfüllen bleiben dann also noch

$$\begin{aligned} \epsilon(\omega) (\vec{E}_0 + \vec{E}_0'') \cdot \vec{e}_z &= \epsilon'(\omega) \vec{E}_0' \cdot \vec{e}_z \\ (\vec{H}_0 + \vec{H}_0'') \cdot \vec{e}_z &= \vec{H}_0' \cdot \vec{e}_z \\ (\vec{E}_0 + \vec{E}_0'') \times \vec{e}_z &= \vec{E}_0' \times \vec{e}_z \\ (\vec{H}_0 + \vec{H}_0'') \times \vec{e}_z &= \vec{H}_0' \times \vec{e}_z \end{aligned}$$

mit  $\vec{k}'$ ,  $\vec{k}''$  von "oben"

mit  $\vec{H}_0 = \frac{c}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}_0)$ ,  $\vec{H}_0'' = \frac{c}{\omega} (\vec{k}'' \times \vec{E}_0'')$   
 $\vec{H}_0' = \frac{c}{\omega} (\vec{k}' \times \vec{E}_0')$ ,  $\vec{k}'' \cdot \vec{E}_0'' = \vec{k}' \cdot \vec{E}_0' = 0$

Damit hat man dann notwendige und hinreichende Bdg.

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{i\vec{k}''\cdot\vec{r}} = e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}}, \quad z=0, \forall x,y$$

$$\Rightarrow ((\vec{k} \times \vec{e}_z = \vec{k}'' \times \vec{e}_z = \vec{k}' \times \vec{e}_z) \quad (26)$$

d.h.:

$$k_x'' = k_x' = k_x$$

$$k_y'' = k_y' = k_y = 0 \quad (\text{Wahl des KS})$$

Konsequenzen

1)  $\vec{k}''$

$$\vec{k} = (k_x, 0, k_z) = k (\sin\alpha, 0, \cos\alpha) \quad \text{gegeben (27-1)}$$

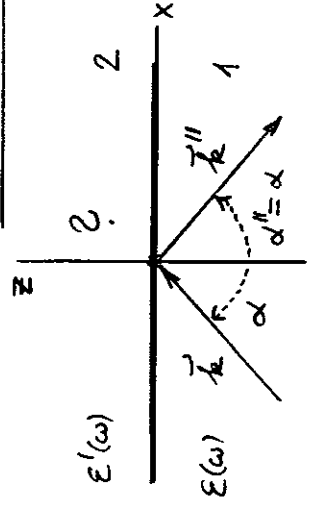
$$\vec{k}'' = (k_x, 0, k_z'') \quad \text{gefragt}$$

$$\vec{k}'' \cdot \vec{k}'' = k_x'^2 + k_z''^2 = k^2 = k_x^2 + k_z^2 \Rightarrow$$

$$k_z'' = (+) k_z$$

$$\vec{k}'' = k (\sin\alpha, 0, -\cos\alpha) \quad \text{Reflexionsgesetz}$$

$\vec{k}''$  reeller Vektor  $\Rightarrow$  reflektierte Welle  
 "gewöhnliche" ebene Welle



2)  $\vec{k}' = (k_x, 0, k_z) = k (\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$  gegeben

$\vec{k}' = (k_x, 0, k_z)$  gefragt

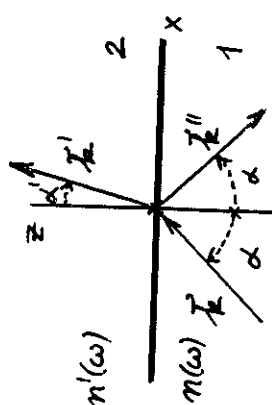
$$\vec{k}' \cdot \vec{k}' = k_x^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\omega), \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\omega)$$

$$\Rightarrow k^2 \sin^2\alpha + k_z^2 = k^2 \frac{n^2(\omega)}{n^2(\omega)}$$

$$k_z^2 = k^2 \left( \frac{n^2(\omega)}{n^2(\omega)} - \sin^2\alpha \right)$$

a) falls  $n'(\omega) > n(\omega)$  Medium 2 "optisch dichter"

$$\Rightarrow \frac{n'(\omega)}{n(\omega)} > 1 \quad k_z' \text{ reell}$$



$\vec{k}'$  reeller Vektor  $\Rightarrow$   
Welle im Medium 2  
 = gebrochene Welle  
 "gewöhnliche" ebene Welle

$$\vec{k}' = k' (\sin\alpha', 0, \cos\alpha')$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{n'(\omega)}{n(\omega)} \quad \text{Brechungsgesetz}$$

mit  $k' \sin\alpha' = k \sin\alpha$  (27-3)

Brechung "zum Lot"

(37b)

$$k_z'^2 = k^2 \left( \frac{n^2(\omega)}{n^2(\omega)} - \sin^2\alpha \right)$$

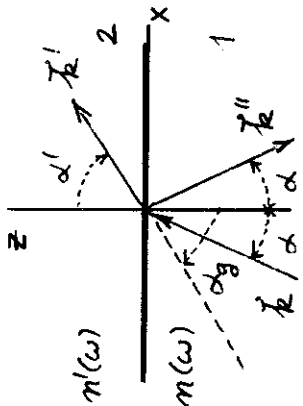
b) falls  $n'(\omega) < n(\omega)$  Medium 2 "optisch dünner"

$$\Rightarrow \frac{n'(\omega)}{n(\omega)} < 1$$

b1) Einfallswinkel kleiner als Grenzwinkel der Totalreflexion

$$\alpha < \alpha_g := \arcsin \frac{n'(\omega)}{n(\omega)} \quad (51)$$

$$\Rightarrow \frac{n'(\omega)}{n(\omega)} = \sin\alpha_g > \sin\alpha \quad k_z' \text{ reell}$$



$\vec{k}'$  reeller Vektor  $\Rightarrow$   
Welle im Medium 2  
 = gebrochene Welle  
 "gewöhnliche" ebene Welle

Rest wie bei Fall a)

$$\vec{k}' = k' (\sin\alpha', 0, \cos\alpha') \quad (27-3)$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{n'(\omega)}{n(\omega)} \quad \text{Brechungsgesetz} \quad (37b)$$

Brechung "vom Lot"

$\alpha \uparrow \alpha_g \Rightarrow \alpha' \uparrow \frac{\pi}{2}$  "streifender Ausfall" der gebrochenen Welle

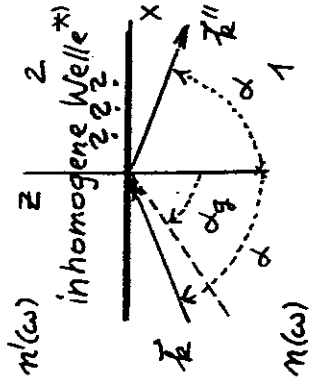


$$k_z^2 = k^2 \left( \frac{n^2(\omega)}{n^2(\omega)} - \sin^2 \alpha \right)$$

b2) Einfallswinkel größer als Grenzwinkel der Totalreflexion

$$\alpha > \alpha_g = \arcsin \frac{n'(\omega)}{n(\omega)}$$

$$\Rightarrow \frac{n'(\omega)}{n(\omega)} = \sin \alpha_g < \sin \alpha \quad k_z \text{ imaginär}$$



$k'$  kein reeller Vektor  $\Rightarrow$   
 Welle im Medium 2  
 ("gebrogene Welle") ist  
 "inhomogene Welle":

\* "Lichttaut" Diskussion später:  
 "Totalreflexion"

$$k' = (k \sin \alpha, 0, k'_z)$$

$$k'_z = (\pm) i k \sqrt{\sin^2 \alpha - \frac{n'^2(\omega)}{n^2(\omega)}}$$

Vorzeichenwahl so, dass  $k'_z$  in positive z-Richtung zeigt: inhomogene Welle klingt dann in positive z-Richtung exponentiell ab.

Ferner gilt  $k'_r = k \sin \alpha \vec{e}_x$ , inhomogene Welle läuft also in positive x-Richtung, und es gilt wie erforderlich  $k'_r \cdot k'_z = 0$ .

"Trick", mit dem man es vermeidet, die weitere Auswertung der Anschlussbedingungen für die Fälle a), b1) einerseits, b2) andererseits getrennt durchführen zu müssen

$k'_z = k' \sin \alpha', 0, \cos \alpha'$  (27-3)

$\frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} = \frac{n'(\omega)}{n(\omega)}$  "Brechungsgesetz" (31b)

formal auch im Fall b2) (Totalreflexion) verwendet

Beachte: Für  $n'(\omega) < n(\omega)$  und

$$\sin \alpha > \sin \alpha_g = \frac{n'(\omega)}{n(\omega)} \quad \text{gilt}$$

$$\frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} = \frac{n'(\omega)}{n(\omega)} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} > 1 \quad \alpha' \text{ komplex!} \quad (52a)$$

Da aber Sinus und Cosinus analytische Funktionen im Komplexen sind, ist es erlaubt, in allen Rechnungen obigen Ausdruck für  $k'_z$  sowie das "Brechungsgesetz" auch für komplexes  $\alpha'$  zu benutzen.

$$k'_r \cdot k'_z = k'^2 (\sin^2 \alpha' + \cos^2 \alpha') = k'^2 \quad \checkmark$$

$$k'_x = k_x \quad \checkmark \quad k'^2 = k^2 \left( \frac{n'^2}{n^2} - \sin^2 \alpha \right) \quad \checkmark$$

Die Fallunterscheidung muss dann erst bei der Diskussion der Endergebnisse getroffen werden!

XIV. 2.B. Anschlussbedingungen für die komplexen Amplitudenvektoren

(23):

$$\begin{aligned} \epsilon(\omega) (\vec{E}_0 + \vec{E}_0'') \cdot \vec{e}_z &= \epsilon'(\omega) \vec{E}_0' \cdot \vec{e}_z \\ (\vec{H}_0 + \vec{H}_0'') \cdot \vec{e}_z &= \vec{H}_0' \cdot \vec{e}_z \\ (\vec{E}_0 + \vec{E}_0'') \times \vec{e}_z &= \vec{E}_0' \times \vec{e}_z \\ (\vec{H}_0 + \vec{H}_0'') \times \vec{e}_z &= \vec{H}_0' \times \vec{e}_z \end{aligned}$$

$\vec{H}_0 + \vec{H}_0'' = \vec{H}_0'$

mit

$$\begin{aligned} \vec{H}_0 &= \frac{c}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}_0), \quad \vec{H}_0'' = \frac{c}{\omega} (\vec{k}'' \times \vec{E}_0'') \\ \vec{H}_0' &= \frac{c}{\omega} (\vec{k}' \times \vec{E}_0') \end{aligned}$$

(s. (27)

und (29))

$$\begin{aligned} \vec{k} &= k (\sin \alpha, 0, \cos \alpha) \\ \vec{k}'' &= k (\sin \alpha, 0, -\cos \alpha) \\ \vec{k}' &= k' (\sin \alpha', 0, \cos \alpha') \end{aligned}$$

$$k' = k \frac{n'(\omega)}{n(\omega)}, \quad \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} = \frac{n'(\omega)}{n(\omega)} = \frac{k'}{k}$$

$$(\vec{k} \cdot \vec{E}_0 =) \vec{k}'' \cdot \vec{E}_0'' = \vec{k}' \cdot \vec{E}_0' = 0$$

bzw.

$$\begin{aligned} \epsilon(\omega) (\vec{E}_0 + \vec{E}_0'') \cdot \vec{e}_z &= \epsilon'(\omega) \vec{E}_0' \cdot \vec{e}_z \\ (\vec{E}_0 + \vec{E}_0'') \cdot \vec{e}_x &= \vec{E}_0' \cdot \vec{e}_x \\ (\vec{E}_0 + \vec{E}_0'') \cdot \vec{e}_y &= \vec{E}_0' \cdot \vec{e}_y \\ (\vec{k} \times \vec{E}_0) + (\vec{k}'' \times \vec{E}_0'') &= \vec{k}' \times \vec{E}_0' \end{aligned}$$

(32)

(33)

(34)

$\vec{H}_0 + \vec{H}_0'' = \vec{H}_0'$

mit

$$\begin{aligned} \vec{k} &= k (\sin \alpha, 0, \cos \alpha) \\ \vec{k}'' &= k (\sin \alpha, 0, -\cos \alpha) \\ \vec{k}' &= k' (\sin \alpha', 0, \cos \alpha') \end{aligned}$$

$$\frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} = \frac{k'}{k} = \frac{n'(\omega)}{n(\omega)}$$

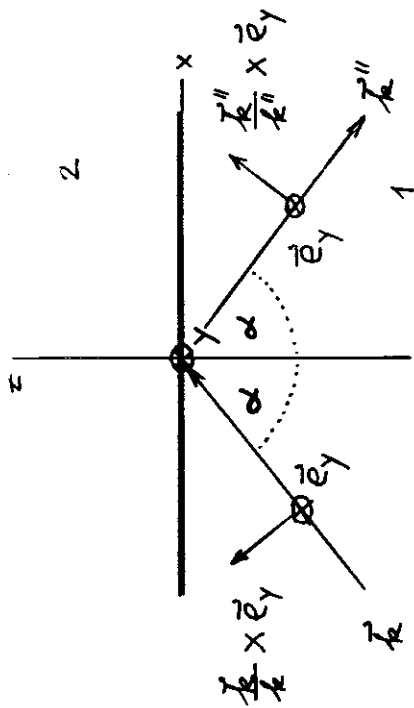
$$(\vec{k} \cdot \vec{E}_0 =) \vec{k}'' \cdot \vec{E}_0'' = \vec{k}' \cdot \vec{E}_0' = 0$$

Zerlegung von  $\vec{E}_0, \vec{E}_0''$  in Komponenten parallel und senkrecht zur Einfallsebene

$$\vec{E}_0 = E_s \vec{e}_y + E_p \left( \frac{\vec{k}}{k} \times \vec{e}_y \right) \tag{35}$$

$$\vec{E}_0'' = E_s'' \vec{e}_y + E_p'' \left( \frac{\vec{k}''}{k''} \times \vec{e}_y \right) \tag{37-1}$$

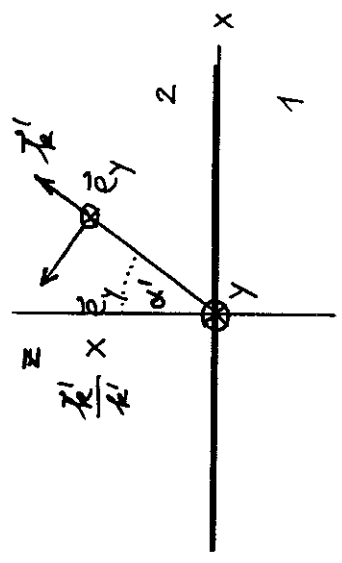
Damit  $\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0, \vec{k}'' \cdot \vec{E}_0'' = 0$  "automatisch" erfüllt.



Zerlegung von  $\vec{E}'_0$  in eine Komponente parallel und senkrecht zur Einfallsebene, falls  $\vec{k}' = \text{reeller Vektor}$  (Brechung):

$$\vec{E}'_0 = E'_s \vec{e}_y + E'_p \left( \frac{\vec{k}'}{k'} \times \vec{e}_y \right) \quad (37-2)$$

Damit  $\vec{k}' \cdot \vec{E}'_0 = 0$  "automatisch" erfüllt.



Falls  $\vec{k}' = \text{komplexer Vektor}$  (Totalreflexion):

Formal ebenfalls (37-2) verwendet, damit auch wieder  $\vec{k}' \cdot \vec{E}'_0 = 0$  gewährleistet, aber Zeichnung obsolet;  $E'_p$  dann als "Parallelkomponente" bezeichnet, aber keine anschauliche Bedeutung.

$$\vec{E}_0 = E_s \vec{e}_y + E_p \left( \frac{\vec{k}}{k} \times \vec{e}_y \right) \Rightarrow \vec{k} = k (\sin \alpha, 0, \cos \alpha), \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{e}_x = E_p \left( \frac{\vec{k}}{k} \times \vec{e}_y \right) \cdot \vec{e}_x = E_p \frac{k}{k} \cdot \underbrace{(\vec{e}_y \times \vec{e}_x)}_{-\vec{e}_z} = -E_p \cos \alpha \quad (36-1)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_0 \cdot \vec{e}_x &= -E_p \cos \alpha \\ \vec{E}_0 \cdot \vec{e}_y &= E_s \\ \vec{E}_0 \cdot \vec{e}_z &= E_p \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = E_s (\vec{k} \times \vec{e}_y) + E_p \left[ \vec{k} \times \left( \frac{\vec{k}}{k} \times \vec{e}_y \right) \right] = -k \vec{e}_y \quad (36-2)$$

$$\begin{aligned} (\vec{k} \times \vec{E}_0) \cdot \vec{e}_x &= -E_s k \cos \alpha \\ (\vec{k} \times \vec{E}_0) \cdot \vec{e}_y &= -E_p k \\ (\vec{k} \times \vec{E}_0) \cdot \vec{e}_z &= E_s k \sin \alpha \end{aligned}$$

Analoge Formeln mit

- $\vec{E}_0 \rightarrow \vec{E}''_0, \vec{k} \rightarrow \vec{k}''$   
 $k \rightarrow k'' = k, \sin \alpha \rightarrow \sin \alpha = \sin \alpha$   
 $\cos \alpha \rightarrow -\cos \alpha = -\cos \alpha \quad (36-2)$

$$2) \vec{E}_0 \rightarrow \vec{E}'_0, \vec{k} \rightarrow \vec{k}'$$

$$k \rightarrow k', \sin \alpha \rightarrow \sin \alpha'$$

$$\cos \alpha \rightarrow \cos \alpha' \quad (38-1)$$

Auswertung der Anschlussbedingungen für  $\vec{E}_0, \vec{E}''_0, \vec{E}'_0$

a) zuerst Stetigkeit der Tangentialkomponenten  
 Von  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$

$$(33): (\vec{E}_0 + \vec{E}''_0) \cdot \vec{e}_x = \vec{E}'_0 \cdot \vec{e}_x$$

$$(\vec{E}_0 + \vec{E}''_0) \cdot \vec{e}_y = \vec{E}'_0 \cdot \vec{e}_y$$

gibt

$$\boxed{\begin{aligned} (-E_p + E''_p) \cos \alpha &= -E'_p \cos \alpha' & (39a) \\ E_s + E''_s &= E'_s & (39b) \end{aligned}}$$

$$(34): (\vec{k} \times \vec{E}_0) \cdot \vec{e}_x + (\vec{k}'' \times \vec{E}''_0) \cdot \vec{e}_x = (\vec{k}' \times \vec{E}'_0) \cdot \vec{e}_x$$

$$(\vec{k} \times \vec{E}_0) \cdot \vec{e}_y + (\vec{k}'' \times \vec{E}''_0) \cdot \vec{e}_y = (\vec{k}' \times \vec{E}'_0) \cdot \vec{e}_y$$

gibt

$$\left. \begin{aligned} (-E_s + E''_s) k \cos \alpha &= -E'_s k' \cos \alpha' \\ (-E_p - E''_p) k &= -E'_p k' \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{k'}{k}$$

$$\boxed{\begin{aligned} (E_s - E''_s) \sin \alpha' \cos \alpha &= E'_s \sin \alpha \cos \alpha' & (40a) \\ (E_p + E''_p) \sin \alpha' &= E'_p \sin \alpha & (40b) \end{aligned}}$$

$E_p, E_s, \alpha$  gegeben  $\Rightarrow \alpha'$  durch  
Formel für  $k'$  und Brechungsgesetz  
(ohne oder mit " ") gegeben

$E''_p, E''_s, E'_p, E'_s$  sind zu berechnen

Wir haben schon 4 komplexe lineare inhomogene  
Gln. für diese 4 komplexen Unbekannten,  
womit diese schon eindeutig bestimmt sind.

b) Stetigkeit der Normalkomponenten von  
 $\vec{D}$  und  $\vec{B} = \vec{H}$

Falls die Lösungsansätze für die Feldstärken  
in den Medien 1, 2 nicht zum Widerspruch  
führen sollen (womit sie wertlos wären),  
müssen diese Anschlussbedingungen  
zu Gln. führen, welche zu den bereits  
erhaltenen Gln. redundant sind.

Das ist tatsächlich der Fall.

XIV. 2. C. Fresnelsche Formeln

Parallelkomponenten

$$\begin{aligned} (E_p - E_p'') \cos \alpha &= E_p' \cos \alpha' \\ (E_p + E_p'') \sin \alpha' &= E_p' \sin \alpha \end{aligned}$$

⇒ (elementare Rechnung; s. Skriptum)

(42), (48-1)

$$\begin{aligned} E_p'' &= E_p \frac{n' \cos \alpha - n \cos \alpha'}{n' \cos \alpha + n \cos \alpha'} = E_p \frac{\tan(\alpha - \alpha')}{\tan(\alpha + \alpha')} \\ E_p' &= E_p \frac{2n \cos \alpha}{n' \cos \alpha + n \cos \alpha'} = E_p \frac{2 \sin \alpha' \cos \alpha}{\sin(\alpha + \alpha') \cos(\alpha - \alpha')} \end{aligned}$$

Fresnelsche Formeln für die

Parallelkomponenten  $n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)}$ ,  $n'(\omega) = \sqrt{\epsilon'(\omega)}$

(43), (47-1)

Normalkomponenten bzgl. der Einfallsebene

$$\begin{aligned} E_s + E_s'' &= E_s' \\ (E_s - E_s'') \sin \alpha \cos \alpha &= E_s' \sin \alpha \cos \alpha' \end{aligned}$$

⇒ Fresnelsche Formeln für "Senkrecht"-komponenten

(45), (48-2)

$$\begin{aligned} E_s'' &= E_s \frac{n \cos \alpha - n' \cos \alpha'}{n \cos \alpha + n' \cos \alpha'} = -E_s \frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')} \\ E_s' &= E_s \frac{2n \cos \alpha}{n \cos \alpha + n' \cos \alpha'} = E_s \frac{2 \sin \alpha' \cos \alpha}{\sin(\alpha + \alpha')} \end{aligned}$$

(46), (47-2)

(32):  $\underbrace{\epsilon(\omega)}_{n^2(\omega)} (\underbrace{\vec{E}_0 + \vec{E}_0''}_{(E_p + E_p'') \sin \alpha} \cdot \vec{e}_z) = \underbrace{\epsilon'(\omega)}_{n'^2(\omega)} \underbrace{\vec{E}_0'}_{E_p' \sin \alpha'} \cdot \vec{e}_z$

gibt mit

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{n'(\omega)}{n(\omega)} = \frac{k'}{k}$$

wieder Gl. (40b) (Stetigkeit der y-Komponente von  $\vec{H}$ ):

$$(E_p + E_p'') \sin \alpha' = E_p' \sin \alpha \quad \checkmark$$

(34):  $\underbrace{(k \times \vec{E}_0) \cdot \vec{e}_z}_{E_s k \sin \alpha} + \underbrace{(k'' \times \vec{E}_0'') \cdot \vec{e}_z}_{E_s'' k' \sin \alpha} = \underbrace{(k' \times \vec{E}_0') \cdot \vec{e}_z}_{E_s' k' \sin \alpha'}$

gibt mit

$$k \sin \alpha = k' \sin \alpha' \quad \checkmark$$

wieder Gl. (39b) (Stetigkeit der y-Komponente von  $\vec{E}$ ):

$$E_s + E_s'' = E_s' \quad \checkmark$$

$\langle f \rangle$  Zeitmittel von  $f(t)$  über eine Periode  $\frac{2\pi}{\Omega}$

Definition:

Reflexionskoeffizient

$$R = \frac{\langle -S_z'' \rangle}{\langle S_z \rangle}$$

Transmissionskoeffizient

$$T = \frac{\langle S_z' \rangle}{\langle S_z \rangle} \quad (48a)$$

Satz: Es gilt

$$R = \frac{|\vec{E}_0''|^2}{|\vec{E}_0|^2} = \frac{|\vec{E}_p''|^2 + |\vec{E}_s''|^2}{|\vec{E}_p|^2 + |\vec{E}_s|^2}$$

$$T = 1 - R$$

Beweis: 1)  $S_z = \frac{c}{4\pi} (E_x H_y - E_y H_x)$  einf. Welle

$$E_x H_y = E_{0x} H_{0y}^* + E_{0x} H_{0y} e^{2i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c.$$

$$\langle E_x H_y \rangle = E_{0x} H_{0y}^* + c.c.$$

$$\langle S_z \rangle = \frac{c}{4\pi} (\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^*)_z + c.c.$$

$$\langle S_z \rangle = \frac{c}{4\pi} (\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^*)_z + c.c. \quad \text{--- reell!}$$

$$\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^* = \vec{E}_0 \times \frac{c}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}_0^*)$$

$$= \frac{c}{\omega} [k |\vec{E}_0|^2 - \vec{E}_0^* (\vec{k} \cdot \vec{E}_0)]$$

$$(\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^*)_z = \frac{c}{\omega} \underbrace{k \cos \alpha}_{n(\omega)} |\vec{E}_0|^2 \quad \text{reell}$$

$$\langle S_z \rangle = \frac{c}{2\pi} n(\omega) \cos \alpha |\vec{E}_0|^2$$

$$\langle -S_z'' \rangle = \frac{c}{2\pi} n(\omega) \cos \alpha |\vec{E}_0''|^2$$

(Bei Reflexion und Brechung analog)

$$\Rightarrow R = \frac{|\vec{E}_0''|^2}{|\vec{E}_0|^2} \quad \checkmark \quad T = \frac{n'(\omega) \cos \alpha'}{n(\omega) \cos \alpha} \frac{|\vec{E}_0'|^2}{|\vec{E}_0|^2}$$

2)  $S_{1z} = S_{2z}$  für Grenzfläche  $z=0$   
 (Stetigkeit von  $\vec{E}_{tg}$  und  $\vec{H}_{tg}$ )

$$\Rightarrow \langle S_{1z} \rangle = \langle S_{2z} \rangle \quad \text{für Grenzfläche } z=0$$

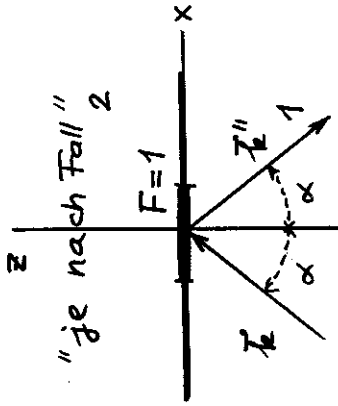
Zeige selbst:  $S_z'$

$$\langle S_{1z} \rangle = \langle S_z \rangle + \langle S_z'' \rangle$$

Interferenzterm ist null!

$$\Rightarrow \langle S_z \rangle + \langle S_z'' \rangle = \langle S_z' \rangle \quad (48c)$$

(da alle Terme von  $z$  unabhängig - S. oben - muß man nicht mehr "für  $z=0$ " dazusagen)



"je nach Fall" 2

Bemerkung:

Alle hier für

$R, T$  ange-

schriebenen

Formeln gelten

allgemein

(Brechung oder Totalreflexion).

(48b), (48d)

$$\begin{aligned} \langle S'_z \rangle &= \langle S_z \rangle + \langle S''_z \rangle \\ &= \langle S_z \rangle - \langle -S''_z \rangle \quad \left| \cdot \frac{1}{\langle S_z \rangle} \right. \\ T &= 1 - R \quad \checkmark \end{aligned} \quad (48d)$$

XIV.2.D. Reflexion unter dem Brewsterwinkel

Reflexion

$$E''_p = E_p \frac{\tan(\alpha - \alpha')}{\tan(\alpha + \alpha')}, \quad E''_s = -E_s \frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')} \quad (49)$$

$\alpha + \alpha' = \frac{\pi}{2}$  ( $\alpha$  heißt dann Brewsterwinkel  $\alpha_B$ ;  
s. später)

$$\Rightarrow \tan(\alpha + \alpha') = +\infty$$

$$E''_p = 0$$

Somit gilt für Reflexion unter dem Brewsterwinkel:

Ist die einfallende Welle linear polarisiert mit Schwingungsrichtung parallel zur Einfallsebene

( $E_s = 0$ ), so gibt es überhaupt keine reflektierte Welle.

In allen anderen Fällen gibt es eine reflektierte Welle und diese ist linear polarisiert mit Schwingungsrichtung senkrecht zur Einfallsebene.

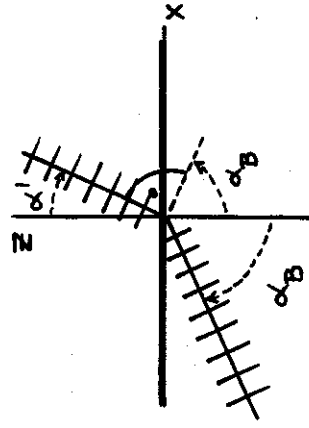
Formel für den Brewsterwinkel

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha' = \frac{\pi}{2} &\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = \tan \alpha \\ &= \frac{n'(\omega)}{n(\omega)} \end{aligned}$$

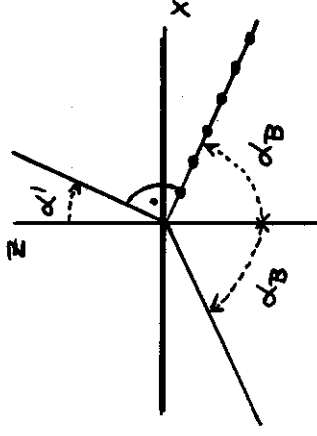
$$\Rightarrow \alpha_B = \arctan \frac{n'(\omega)}{n(\omega)} \in [0, \frac{\pi}{2}) \quad (50)$$

(Gl. besitzt für beliebige  $n', n$  eine Lösung\*)

Zeichnung für  $n'(\omega) > n(\omega)$ :



Interpretation!

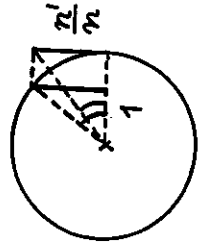


Erzeugung linear polarisierter Strahlung!

\*1) Beachte: Im Fall  $n'(\omega) < n(\omega)$  gilt

$$\alpha_B < \alpha_g, \text{ da}$$

$$\sin \alpha_g = \tan \alpha_B = \frac{n'}{n} < 1.$$



XIV. 2. E\* Totalreflexion

$$n'(\omega) < n(\omega)$$

$$\alpha > \alpha_g = \arcsin \frac{n'(\omega)}{n(\omega)}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha > \sin \alpha_g = \frac{n'}{n}$$

$$k' = k (\sin \alpha, 0, \pm i \sqrt{\sin^2 \alpha - \frac{n'^2}{n^2}}) = k'_r + i k'_i, \quad k'_r \cdot k'_i = 0$$

inhomogene Welle im (optisch dünneren) Medium 2

$$e^{i(k' \cdot r - \omega t)} = e^{-k \sqrt{\sin^2 \alpha - \frac{n'^2}{n^2}} z} = e^{i(k \sin \alpha \cdot x - \omega t)} \quad (53)$$

Mit der Geschwindigkeit für  $z > 0$

$$v_{Ph}' = \frac{\omega}{k \sin \alpha} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon(\omega)}} \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon(\omega)}} \frac{\sin \alpha_g}{\sin \alpha} < \frac{c}{\sqrt{\epsilon(\omega)}}$$

in positive x-Richtung "laufende", in z-Richtung mit der Eindringtiefe

$$\delta' = \frac{1}{k \sqrt{\sin^2 \alpha - \frac{n'^2}{n^2}}} = \frac{\sin \alpha_g}{\sqrt{\epsilon(\omega)} \frac{\omega}{c}} \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha_g}$$

exponentiell abklingende Welle.  $k' = \frac{2\pi}{\lambda'}$

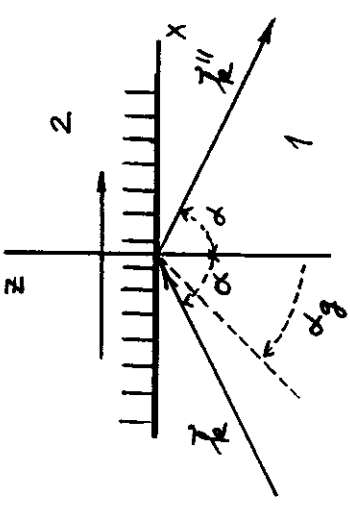
1)  $\alpha \downarrow \alpha_g: v_{Ph}' \uparrow \frac{c}{\sqrt{\epsilon(\omega)}}, \delta' \uparrow \infty$

2)  $\alpha$  nicht zu nahe bei  $\alpha_g$  (einige Winkelminuten):  $\delta' \sim \lambda'$  "Lichthaut"

$$R=1, T=0 \text{ "Totalreflexion"}$$

kein Energiestrom durch die Grenzfläche!

Beweis: Fresnelformeln (42), (45)



$$E_p'' = E_p \frac{n' \cos \alpha - n \cos \alpha'}{n' \cos \alpha + n \cos \alpha'}$$

$$E_s'' = E_s \frac{n \cos \alpha - n' \cos \alpha'}{n \cos \alpha + n' \cos \alpha'}$$

$$k'_r = k' (\sin \alpha, 0, \cos \alpha')$$

$$= k (\sin \alpha, 0, i \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha_g})$$

$$\Rightarrow k'_r \cos \alpha' = i k \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha_g}$$

$$k \sin \alpha_g \cos \alpha' = i \sqrt{\left(\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_g}\right)^2 - 1} \quad (52b)$$

$\Rightarrow$  Faktoren bei  $E_p, E_s$  besitzen die Form

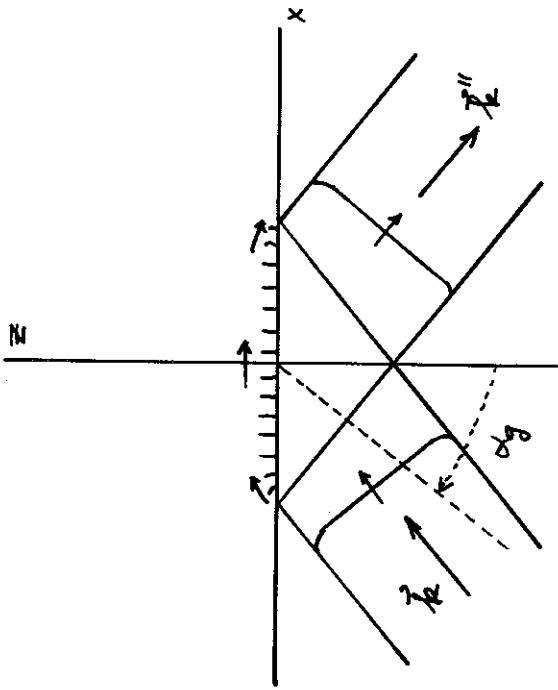
$$\frac{a-ib}{a+ib} = e^{-2i \arctan \frac{b}{a}} \quad (a, b \text{ bei } E_p, E_s \text{ verschieden!})$$

$$\Rightarrow |E_p''| = |E_p|, |E_s''| = |E_s| \quad (54)$$

$$\Rightarrow R = \frac{|E_p''|^2 + |E_s''|^2}{|E_p|^2 + |E_s|^2} = 1, T = 1 - R = 0$$

Frage: Wie kam die im Medium 2 in x-Richtung strömende Energie ins Medium 2 hinein?





Bemerkung: Die Ergebnisse unserer Rechnungen gelten in den Randzonen der Strahlen, in denen deformierte Wellenfronten vorliegen, nicht.

XIV.3. Elektrodynamik in homogenen isotropen Leitern, speziell in Metallen

XIV.3.A. "Verschwinden" einer freien Raumladung = Verteilung

Satz: In einem Materievolumen mit elektrisch leitender homogener Materie, für die die MG

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \epsilon \vec{E}(\vec{r},t), \quad \vec{j}(\vec{r},t) = \sigma \vec{E}(\vec{r},t)$$

gelten, kann es keine permanente von null verschiedene freie Raumladungsdichte geben.

Beweis:

$$\text{div } \vec{D}(\vec{r},t) = 4\pi \rho(\vec{r},t), \quad \vec{D}(\vec{r},t) = \epsilon \vec{E}(\vec{r},t)$$

$$\text{div } \vec{j}(\vec{r},t) + \frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} = 0, \quad \vec{j}(\vec{r},t) = \sigma \vec{E}(\vec{r},t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} = -\sigma \text{div } \vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \rho(\vec{r},t) \quad (57)$$

$$\Rightarrow \rho(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},0) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{mit } \tau = \frac{\epsilon}{4\pi\sigma} \quad (58)$$

Die Relaxationszeit  $\tau$  ist für Metalle extrem kurz:

$$\tau_{\text{Kupfer}} \sim 10^{-19} \text{ s} \leftrightarrow \tau_{\text{UV}} \sim 10^{-16} \text{ s}$$

Bemerkung: Eine allfällige Nettoladung findet sich auf der Oberfläche wieder.

XIV.3.B. "Ebene Wellen" in Leitern.  
"Metalloptik"

Wiederholung von Abschnitt XIV.1.C:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.}$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.}$$

$$\vec{k} = \vec{k}_r + i\vec{k}_i$$

$$\vec{k} \cdot \vec{k} \equiv k^2 = k_r^2 - k_i^2 + 2i\vec{k}_r \cdot \vec{k}_i$$

$$k = \frac{\omega}{c} \rho(\omega) \quad \text{Dispersionsbeziehung}$$

$$\rho(\omega) = n(\omega) + i\kappa(\omega) = \sqrt{\eta(\omega) \mu(\omega)} \quad \begin{matrix} \text{Verallgem.} \\ \text{Brechungsindex} \end{matrix}$$

$$\eta(\omega) = \epsilon(\omega) + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \quad \begin{matrix} \text{verallgemeinerte} \\ \text{Dielektrizitätsfunktion} \end{matrix}$$

$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$	$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \frac{\omega}{c} \mu(\omega) \vec{H}_0$
$\vec{k} \cdot \vec{H}_0 = 0$	$\vec{k} \times \vec{H}_0 = -\frac{\omega}{c} \eta(\omega) \vec{E}_0$

Annahme:  $\epsilon(\omega), \mu(\omega)$  reell

$p = n + i\kappa = \sqrt{\left(\epsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}\right) \mu}$  "verallgemeinerter Brechungsindex" (60)

"Brechungsindex" "Extinktionskoeffizient"

⇒ (elementare Zwischenrechnung; s. Unterlagen)

$n^2(\omega) = \frac{1}{2} \mu(\omega) \left( \sqrt{\epsilon^2(\omega) + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)^2} + \epsilon(\omega) \right)$
$\kappa^2(\omega) = \frac{1}{2} \mu(\omega) \left( \sqrt{\epsilon^2(\omega) + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)^2} - \epsilon(\omega) \right)$

(61)  $n^2, \kappa^2$  für  $\sigma = 0!$

Bemerkung: Falls  $\mu(\omega)$  reell, aber  $\epsilon(\omega)$  nicht reell, definiert man oft eine reelle frequenzabhängige Leitfähigkeit durch

$$\frac{4\pi\sigma(\omega)}{\omega} := \text{Im } \epsilon(\omega) + \frac{4\pi\sigma}{\omega}$$

Dann gelten analoge Beziehungen zu (61), aber mit

$$\epsilon(\omega) \rightarrow \text{Re } \epsilon(\omega), \quad \sigma \rightarrow \sigma(\omega).$$

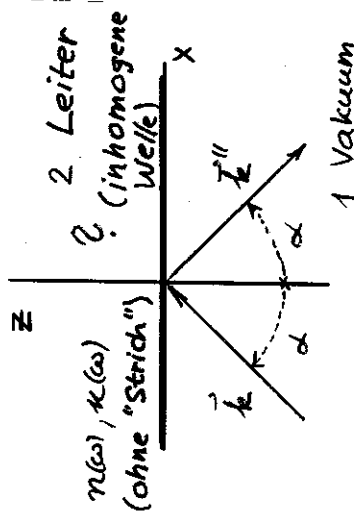
$$n^2 = \frac{1}{2} \mu \left( \sqrt{\epsilon^2 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)^2} + \epsilon \right)$$

$$\kappa^2 = \frac{1}{2} \mu \left( \sqrt{\epsilon^2 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)^2} - \epsilon \right)$$

Metalle:  $\frac{4\pi\sigma}{\omega} \gg \epsilon$  für  $\omega \leq 10^{16}$  Hz (bis Sichtbaren Bereich)

$$n^2(\omega) \approx \kappa^2(\omega) \approx \frac{2\pi\sigma}{\omega} \mu(\omega) \quad (62)$$

Reflexion und Brechung an einer ebenen Grenzfläche Vakuum-Leiter



Ansätze für

$$\vec{E}(r,t), \vec{E}''(r,t), \vec{E}'(r,t)$$

wie in Abschnitt XIV.2.A,

aber mit

$$k = k'' = \frac{\omega}{c}$$

$$k' = \frac{\omega}{c} (n(\omega) + i\kappa(\omega)) \quad (63)$$

⇒ Reflexionsgesetz unverändert ✓

"Brechungsgesetz" formal unverändert,  $\frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} = \frac{k'}{k}$

wenn man  $k'$  formal gleich ansetzt

$$\vec{k} = k (\sin \alpha, 0, \cos \alpha) \rightarrow \vec{k}' \cdot \vec{k}'' = k'^2 \cdot v$$

$\vec{k}' = k' (\sin \alpha', 0, \cos \alpha')$  komplexer Vektor

$\sin \alpha' = \frac{\sin \alpha}{n(\omega) + i\kappa(\omega)}$	komplex
--	---------

(64a)

Rechnungen viel komplizierter als bei Dielektrikum, deshalb beschränken wir uns auf die Diskussion von

$$e^{i(k'z - \omega t)} \quad (\text{inhomogene Welle!})$$

$$k' = k'(\sin \alpha', 0, \cos \alpha')$$

$$i k' z = i k' \sin \alpha' \cdot x + i k' \cos \alpha' \cdot z$$

$$k' \sin \alpha' = \frac{\omega}{c} \sin \alpha'$$

$$\cos \alpha' = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha'} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \alpha'}{n + i\kappa}\right)^2}$$

$$=: q e^{i\theta} = q (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Wurzel im komplexen zweideutig  $\Rightarrow$

Bestimmungsgleichungen für  $q, \theta$  (zweideutig):

$$q^2 \cos 2\theta = 1 - \left(\frac{\sin \alpha'}{n^2 + \kappa^2}\right)^2 (n^2 - \kappa^2) \quad (68)$$

$$q^2 \sin 2\theta = 2n\kappa \left(\frac{\sin \alpha'}{n^2 + \kappa^2}\right)^2 \quad q, \theta \text{ von } \alpha \text{ abhängig!}$$

Beachte: Hier wären noch  $n, \kappa$  durch die komplizierten Ausdrücke in  $\epsilon, \mu$  und  $\sigma$  zu ersetzen! ●

\*1) s. Unterlagen

$$i k' z = i \frac{\omega}{c} \sin \alpha' \cdot x + i k' \cos \alpha' \cdot z$$

$$\frac{k' \cos \alpha'}{c} = \frac{\omega}{c} (n + i\kappa) q (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$= \frac{\omega}{c} q [(n \cos \theta - \kappa \sin \theta) + i(n \sin \theta + \kappa \cos \theta)]$$

$$\frac{i k' z}{c} = e^{-i(\omega t - k' z)} \left[ \frac{\omega}{c} q (n \sin \theta + \kappa \cos \theta) \right]$$

$$e^{i(k'z - \omega t)} = e^{-i(\omega t - k' z)} \left[ \frac{\omega}{c} q (n \sin \theta + \kappa \cos \theta) \right]$$

$$\cdot e^{i\left\{ \frac{\omega}{c} [\sin \alpha' \cdot x + q (n \cos \theta - \kappa \sin \theta) z] - \omega t \right\}}$$

$n(\omega), \kappa(\omega), q(\omega, \alpha'), r(\omega, \alpha)$  (65)  
 $\uparrow$  von  $\alpha$  abhängig

Lösung der Gl. für  $q, \theta$  so gewählt, dass

$$q (n \sin \theta + \kappa \cos \theta) > 0 \text{ ist.}$$

$$\delta = \delta(\alpha) = \frac{c}{\omega q (n \sin \theta + \kappa \cos \theta)} \quad \text{Eindringtiefe}$$

Nach elementarer Rechnung findet

man, wenn man  $\mu(\omega) = 1$  setzt

für schlechte Leiter, d.h.  $\frac{4\pi\sigma}{\omega} \ll \epsilon$

$$\delta(\alpha) \approx \frac{c}{2\pi\sigma} \sqrt{\epsilon - \sin^2 \alpha} \rightarrow +\infty \quad \text{Eindringtiefe groß}$$

$\alpha$  fest:  $\delta$  wird mit wachsendem  $\sigma$  kleiner

$\sigma$  fest:  $\delta$  wird mit wachsendem  $\alpha$  kleiner

für sehr gute Leiter (Metalle), d.h.  $\frac{4\pi\sigma}{\omega} \gg \epsilon$

$$\delta(\phi) \approx \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}$$

sehr klein (s. auch "Skinneffekt" in Abschnitt XIV.3.C)

$$e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega t)} = e^{-\frac{\omega}{c} z} [n \sin \alpha + \kappa \cos \alpha] z \cdot e^{i \left\{ \frac{\omega}{c} [n \sin \alpha \cdot x + z (n \cos \alpha - \kappa \sin \alpha) z] - \omega t \right\}}$$

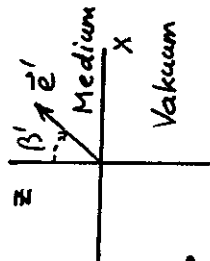
1) Ebenen konstanter Amplitude (maximaler Betrag von  $\vec{E}$ ) parallel zur Grenzebene

2) t fest: Ebenen konstanter Phase:

$$n \sin \alpha \cdot x + z (n \cos \alpha - \kappa \sin \alpha) z = \text{konst.} \quad (66a)$$

Normalenrichtung dieser Ebenen gibt

Ausbreitungsrichtung  $\vec{e}'$  der inhomogenen Welle:

$$\vec{e}' = (n \sin \beta', 0, \cos \beta') = \frac{1}{\sqrt{n^2 \sin^2 \alpha + z^2 (n \cos \alpha - \kappa \sin \alpha)^2}} \cdot (n \sin \alpha, 0, z (n \cos \alpha - \kappa \sin \alpha)) \Rightarrow \frac{n \sin \alpha}{n \sin \beta'} \text{ berechnet}$$


(66b)

x-Komponente:

Brechungsgesetz für die Phasenebenen:

$$\frac{n \sin \alpha}{n \sin \beta'} = \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha + z^2 (\alpha) (n \cos \alpha - \kappa \sin \alpha)^2} \quad (67)$$

"rechte Seite" formal: "von  $\alpha$  abhängiger Brechungsindex"

Abermals: Nach elementarer Rechnung findet man,

wenn man  $\mu(\omega) = 1$  setzt:

für schlechte Leiter:

$$\frac{n \sin \alpha}{n \sin \beta'} \approx \frac{\sqrt{\epsilon}}{1 - \frac{\epsilon}{\epsilon - n^2 \sin^2 \alpha}} \frac{1}{8} \left( \frac{4\pi\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2$$

$\sigma = 0$ : Dielektrikum

$\alpha' = \beta'$ , gewöhnliches Brechungsgesetz

$$\frac{n \sin \alpha}{n \sin \beta'} = n \quad (\text{Übergang Vakuum} \rightarrow \text{Dielektrikum})$$

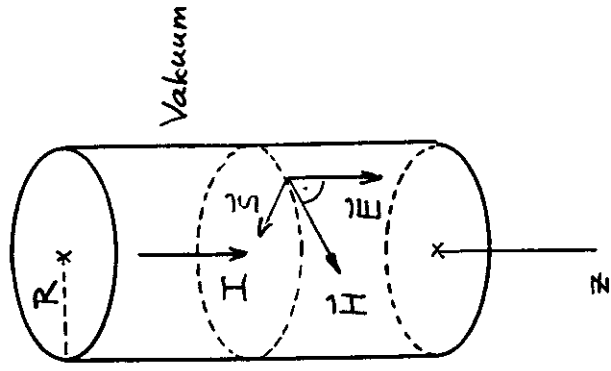
$\alpha$  fest:  $\beta'$  wird mit wachsendem  $\sigma$  kleiner

für sehr gute Leiter (Metalle):

$$\frac{n \sin \alpha}{n \sin \beta'} \approx \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}} \Rightarrow n \sin \beta' \approx \frac{n \sin \alpha}{\sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}} \approx \beta' \approx 0$$

Welle läuft bei beliebigem  $\alpha$  praktisch in z-Richtung!

XIV. 3. C. Skineffekt für einen von einem Wechselstrom durchflossenen kreiszylinderförmigen metallischen Leiter



Feld an der Oberfläche qualitativ wie bei einer senkrecht auf ein Metall auftreffenden und eindringenden elm. Welle.  
Deshalb (für  $\mu=1$ ) wieder Eindringtiefe

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}$$

erwartet, falls  $\delta \ll R$  gilt.

Wenn  $\vec{J}(\vec{r},t) = \sigma \vec{E}(\vec{r},t)$  gilt, bedeutet dies, daß im Falle  $\delta \ll R$  der Strom I nur in einer dünnen Oberflächenschicht fließt: "Skineffekt".

Annahme: MG  
 $\vec{D}(\vec{r},t) = \epsilon \vec{E}(\vec{r},t)$ ,  $\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{B}(\vec{r},t)$   
 $\vec{J}(\vec{r},t) = \sigma \vec{E}(\vec{r},t)$  ( $\omega \lesssim 10^{12}$  Hz)

gelten  $\Rightarrow (\rho = 0)$   
Telegraphengleichung (s. Gl. (3a))

$$\Delta \vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t} \quad (69)$$

gilt metallischer Leiter (und nicht zu hohe Frequenzen):  
 $\frac{4\pi\sigma}{\omega} \gg \epsilon \Rightarrow$  im Leiter Vernachlässigbar  
( $\omega \lesssim 10^{16}$  Hz)

Ansatz für  $\vec{E}$ -Feld im Draht:

$$\rho \leq R: \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\rho, \phi, z, t) = (E(\rho) e^{-i\omega t} + c.c.) \vec{e}_z \quad (70)$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right\} E(\rho) = -i\omega \frac{4\pi\epsilon}{c^2} E(\rho)$$

$$\left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + i \frac{4\pi\sigma\omega}{c^2} \right\} E(\rho) = 0 \quad (71)$$

$=: \frac{z}{\delta^2}$  (dann  $\delta$  wie oben)

$$\left\{ \frac{d^2}{dp^2} + \frac{1}{p} \frac{d}{dp} + \alpha^2 \right\} E(p) = 0$$

$$\parallel \frac{1}{p} \frac{d}{dp} \rho \frac{d}{dp} \Rightarrow \alpha = \frac{1+i}{\delta} \quad (73)$$

Lsgsbasis:  $J_0(\alpha p), N_0(\alpha p)$  (Besselfunktn.)

$J_0(0) = 1$  Singulär für  $p=0$   
(auch für komplexes  $\alpha$ )

$$\Rightarrow E(\rho) = E(0) J_0\left(\frac{1+i}{\delta} \rho\right)$$

bzw. wenn man statt  $E(0)$  das experimentell zugängliche Feld  $E(R)$  einführt:

$$E(\rho) = E(R) \frac{J_0\left(\frac{1+i}{\delta} \rho\right)}{J_0\left(\frac{1+i}{\delta} R\right)}$$

mit (72)  
 $\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}$

$\Rightarrow$  Gesamtstrom durch den Leiter

$$I(t) = I e^{-i\omega t} + c.c.$$

(Beachte: Zeitfaktor  $e^{-i\omega t}$  — anders als in Elektrotechnik!)

$$I = \int \text{Querschnitt} d^2f \sigma E(\rho) = 2\pi\sigma \int_0^R d\rho \rho E(\rho) \quad (74a)$$

S. ganz oben:  $-\frac{\delta^2}{2i} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dE(\rho)}{d\rho} \right)$

$$I = -\frac{\delta^2}{2i} 2\pi\sigma \rho \left. \frac{dE(\rho)}{d\rho} \right|_0^R$$

$$I = i\pi\sigma \delta^2 R E'(R)$$

Definition: komplexer Widerstand eines Drahtstückes der Länge  $l$

$$Z(\omega) = \frac{E(R)l}{I} \quad (74b)$$

Bemerkung: Im Gleichstromfall wäre  $E(R) = E(0) = E$  und  $E \cdot l$  der Spannungsabfall  $U$ .

$$\Rightarrow Z(\omega) = -i \frac{l}{\pi R \sigma \delta^2} \frac{E(R)}{E'(R)}$$

Vergleich mit Gleichstromwiderstand<sup>†)</sup>

$$Z(0) = \frac{l}{\pi R^2 \sigma} \quad (77)$$

$$\Rightarrow \frac{Z(\omega)}{Z(0)} = -i \frac{R}{\delta^2} \frac{E(R)}{E'(R)}$$

<sup>†)</sup>  $Z(0)$  geschrieben, da Buchstabe  $R$  schon "vergeben"

Skineffekt für  $\delta \ll R$

$$E(\rho) = E(R) \frac{J_0\left(\frac{1+i}{\delta}\rho\right)}{J_0\left(\frac{1+i}{\delta}R\right)}, \quad J_0((1+i)\xi) \propto \frac{e^{-2\xi}}{1\xi} \quad \xi \rightarrow +\infty$$

⇒ für jene  $\rho$ , für die  $E(\rho)$  merklich von null verschieden ist (Oberflächenschicht) gilt

$$E(\rho) \approx E(R) e^{-\frac{R-\rho}{\delta}} e^{i\frac{R-\rho}{\delta}} \quad (75)$$

↑  
Rechtfertigung der Bezeichnung Eindringtiefe für  $\delta$

$$\Rightarrow E'(R) = \frac{1-i}{\delta} E(R)$$

$$\frac{E(R)}{E'(R)} = \frac{\delta}{1-i} = \frac{(1+i)\delta}{2}$$

$$\frac{Z(\omega)}{Z(0)} = -i \frac{R}{\delta^2} \frac{E(R)}{E'(R)} = \frac{1-i}{2} \frac{R}{\delta(\omega)} \quad (78)$$

Starke Erhöhung des Ohmschen Widerstandes durch den Skineffekt und zusätzlicher induktiver Widerstand (Zeitfaktor  $e^{-i\omega t}$  !)

Kupfer:  $\sigma \approx 5 \cdot 10^{17} \text{ s}^{-1} \Rightarrow \delta = \frac{7}{\sqrt{f}} \text{ cm}$  (f Frequenz)

f	50 Hz	5 kHz	0,5 MHz	50 MHz
$\delta$	1 cm	1 mm	0,1 mm	0,01 mm

XV. INTERFERENZ UND BEUGUNG  
ELEKTROMAGNETISCHER WELLEN

XV.1. Interferenzerscheinungen

XV.1.1. Intensity einer monochromatischen Welle. Interferenz von elm. Wellen

Wellenausbreitung im Vakuum oder in einem Medium mit  $\sigma = 0$ ,  $\epsilon(\omega)$ ,  $\mu(\omega)$  reell  
( $\omega$  aus Transparenzbereich) betrachtet

Definition: Intensität einer monochromatischen Welle  
$$I(\vec{r}) = \langle |\vec{S}(\vec{r}, t)| \rangle \quad (2)$$

$\langle \dots \rangle$  Zeitmittel über Periode  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Satz: Für die Intensität einer (gewöhnlichen, d.h. homogenen) monochromatischen ebenen Welle  
$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c.$$
  
gilt 
$$I = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{\mu(\omega)}} |2\vec{E}_0|^2 \quad (2a)$$



Beweis: Nach Abschnitt XIV.1.C gilt für eine solche Welle

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c.$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c.$$

mit  $\vec{k}$  reeller Vektor,  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \mu(\omega)$

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$$

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \frac{\omega}{c} \mu(\omega) \vec{H}_0$$

Mit  $\vec{k} = k \vec{n} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon(\omega) \mu(\omega)} \vec{n}$

$\vec{n}$  reeller Einheitsvektor (Ausbreitungsrichtung) folgt also

$$\vec{n} \cdot \vec{E}_0 = 0, \quad \vec{H}_0 = \sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{\mu(\omega)}} (\vec{n} \times \vec{E}_0)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t) = (\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^*) + (\vec{E}_0 \times \vec{H}_0) e^{2i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c.$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{\mu(\omega)}} [\vec{E}_0 \times (\vec{n} \times \vec{E}_0^*)] = \sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{\mu(\omega)}} |\vec{E}_0|^2 \vec{n} + c.c.$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{\mu(\omega)}} \vec{E}_0^2 \vec{n}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{\mu(\omega)}} (|\vec{E}_0|^2 + \vec{E}_0^2) e^{2i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c.) \vec{n}$$

$$|\vec{S}(\vec{r}, t)|$$

$$= \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{\mu(\omega)}} (|\vec{E}_0|^2 + \vec{E}_0^2) e^{2i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c.)$$

$$I = \langle |\vec{S}(\vec{r}, t)| \rangle = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{\mu(\omega)}} 2 |\vec{E}_0|^2$$

$$I = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{\mu(\omega)}} |2\vec{E}_0|^2 \quad \checkmark$$

"Maß" für die Intensität ist also  $|\vec{E}_0|^2$

Überlagerung von mehreren monochromatischen ebenen Wellen gleicher Frequenz und Ausbreitungsrichtung

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{l=1}^N \vec{E}_0^{(l)} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c. \quad (3), (4)$$

$$\vec{E}_0 = \sum_{\ell=1}^N \vec{E}_0^{(\ell)} \Rightarrow$$

$$|\vec{E}_0|^2 = \sum_{\ell=1}^N \vec{E}_0^{(\ell)} \cdot \sum_{m=1}^N \vec{E}_0^{(m)*}$$

$$= \sum_{\ell=1}^N |\vec{E}_0^{(\ell)}|^2 + \sum_{\substack{\ell, m=1 \\ \ell < m}}^N (\vec{E}_0^{(\ell)} \cdot \vec{E}_0^{(m)*} + c.c.) \quad (5)$$

$$I = \sum_{\ell=1}^N I^{(\ell)} + \underbrace{\frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{\mu(\omega)}} \sum_{\substack{\ell, m=1 \\ \ell < m}}^N (\vec{E}_0^{(\ell)} \cdot \vec{E}_0^{(m)*} + c.c.)}_{\text{Interferenzterm} \approx 0}$$

Beispiel: 2 linear polarisierte Teilwellen

$$\vec{E}_0^{(\ell)} = a_\ell e^{i\delta_\ell} \vec{e}_\ell, \quad \ell=1,2 \quad (6)$$

$$|\vec{E}_0|^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\delta_1 - \delta_2) \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2$$

Sonderfälle: 1)  $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$  keine Interferenz (7')

$$2) \vec{e}_1 = \vec{e}_2 = \vec{e}$$

$$|\vec{E}_0|^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\delta_1 - \delta_2) \quad (7)$$

$$|\vec{E}_0|^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\delta_1 - \delta_2)$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\delta_1 - \delta_2)$$

$$\delta_1 - \delta_2 = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots:$$

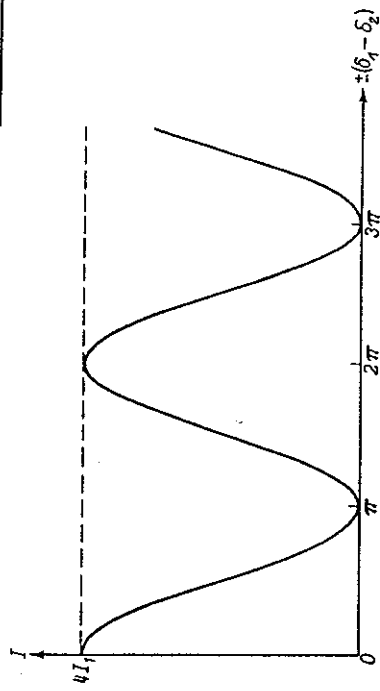
$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$$

$$\delta_1 - \delta_2 = \pm \pi, \pm 3\pi, \dots:$$

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

2.1) Spezialfall:  $a_2 = a_1 \Rightarrow I_2 = I_1$

$$I = 2I_1 [1 + \cos(\delta_1 - \delta_2)] = 4I_1 \cos^2 \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}$$



↑  
↑

totale Auslöschung

## XV. 1. B. Erzeugung von interferenzfähigen (kohärenten) e/m. Wellen

Voraussetzung für (beobachtbare) Interferenz  
 sind feste Phasenbeziehungen der überlagerten Wellen. Fluktuieren in einem Ausdruck wie

$$I = \sum_{l=1}^N I^{(l)} + \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{\mu(\omega)}} \sum_{\substack{l,m=1 \\ l < m}}^N (\vec{E}_0^{(l)} \cdot \vec{E}_0^{(m)*} + \text{c.c.})$$

die Phasen der Teilwellen rein statistisch, so erhält man

$$I = \sum_{l=1}^N I^{(l)}$$

und man spricht von einer inkohärenten Überlagerung.

In der Rundfunk- und Mikrowellentechnik (bis zu mm-Wellen "herab") kann man durch elektronische Steuerung der Sender erreichen, daß e/m. Wellen mit festen Phasenbeziehungen erzeugt werden, die von verschiedenen Sendern (Quellen) abgestrahlt werden.

In der Laseroptik ist dasselbe durch stimulierte Emission von Lasern möglich.

ABER:

Konventionelle Lichtquellen emittieren rein statistisch in Emissionsakten von  $\Delta t \sim 10^{-9} - 10^{-8}$  s endliche Wellenzüge der Länge  $\Delta l \sim 30 \text{ cm} - 3 \text{ m}$  ( $\Delta l$  Kohärenzlänge).

Bemerkung: Aus dem Fourierintegral folgt  $\Delta l \cdot \Delta k \geq 1$ , d.h. ein endlich langer Wellenzug kann nur "fast monochromatisch" (quasimono-chromatisch) sein. Ist  $\Delta \omega$  die Breite der Spektralen Verteilung, so ist ein typischer Wert von  $\frac{\Delta \omega}{\omega}$  etwa

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} \sim 10^{-6} \quad \bullet$$

Überlagert man also in der konventionellen Optik Licht von mehreren Quellen, so handelt es sich stets um eine inkohärente Überlagerung.

Eine kohärente Überlagerung (Interferenz) kann man nur erhalten, wenn man Licht einer einzigsten Lichtquelle benützt:

Durch Spiegelanordnungen, halbdurchlässige Spiegel, Reflexion an Platten und Keilen, Schirmen mit Öffnungen etc. wird ein von einer einzigsten Lichtquelle stammendes Lichtbündel in mehrere Teile zerlegt und nach Zurücklegung verschiedener optischer Wege (s. unten)  $\int n ds$  wieder zusammengeführt ( $n$  Brechungsindex).

Die feste Phasendifferenz ist dann durch die optische Wegdifferenz bestimmt. Damit aber Interferenz möglich ist, muß letztere kleiner sein als die Kohärenzlänge  $\Delta l$ .

Optische Weglänge

Gelangt Licht längs des Weges  $\tau$  von A nach B und ist  $n$  der (möglicherweise längs  $\tau$  variable) Brechungsindex, so gilt

$$\begin{aligned} \text{Optische Weglänge von A nach B längs } \tau \\ = \int_A^B n ds \end{aligned} \quad (10')$$

Phasendifferenz zweier interferierender Wellenzüge bei der Interferenz

A ... Ort der Lichtquelle  
 B ... Ort an dem es zur Interferenz kommt

$$\delta_1 - \delta_2 = \frac{\omega}{c} \left( \int_A^B n ds - \int_A^B n ds \right)$$

Wie sieht man das einfach?

Ebene monochromatische Welle in x-Richtung betrachtet:

$$e^{i(kx - \omega t)} = e^{i \frac{\omega}{c} (nx - ct)} \quad (8)$$

( $e^{-i\omega t}$  ändert sich für beide Wellenzüge gleich)

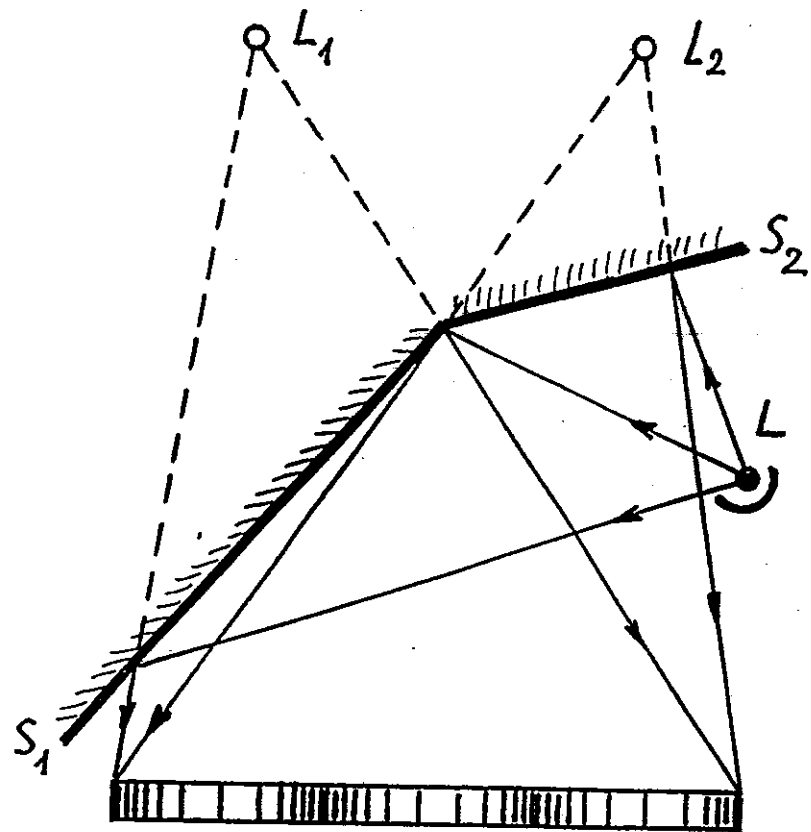


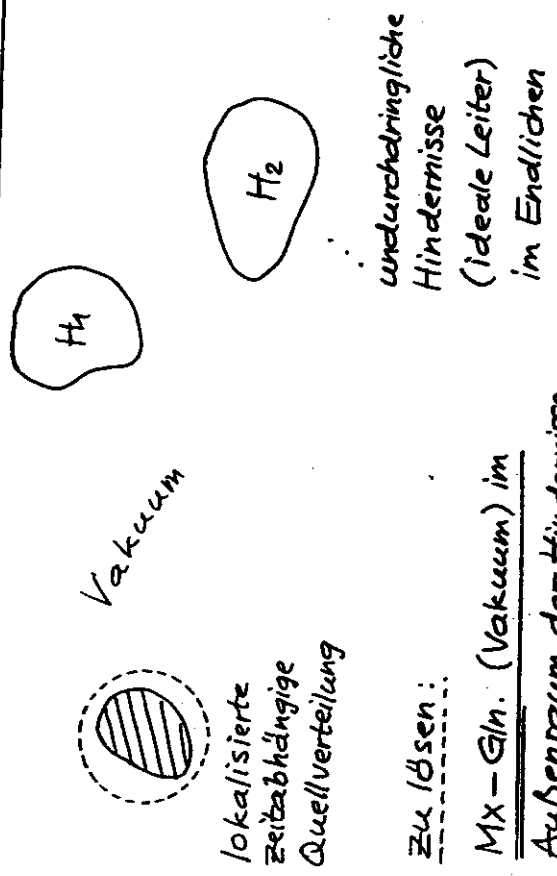
Fig. 15.1 Fresnel'scher Spiegelversuch (durch die Spiegel  $S_1$  bzw.  $S_2$  wird die Lichtquelle  $L$  zu zwei scheinbaren Lichtquellen  $L_1$  und  $L_2$ , die kohärentes Licht aussenden)

XV.2. Beugungstheorie

Beugungsproblem in der Maxwelltheorie

a) im weiteren Sinn

Bestimmung des elm. Feldes einer lokalisierten  
Zeitabhängigen Quellverteilung im Vakuum bei  
Anwesenheit undurchdringlicher Hindernisse.



Zu lösen:

MX-Gln. (Vakuum) im Außenraum der Hindernisse

mit RB  $D_n = 0, \vec{E}_{tg} = \vec{0}$  auf Oberflächen der Hindernisse

und Abstrahlungsbedingung (asymptotisch nur auslaufende Wellen)\*)

\*1) Hier nicht angedr. s. Stumpf/Schuler, Elektrodynamik, Vieweg 1973, Abschnitt 12.6.

Stationärer Fall

Quellen und Felder zeitlich harmonisch  
(eingeschwungener Zustand)

Für den stationären Fall gibt es einen Existenz-  
und Eindeutigkeitsatz sowie exakte Lösungen  
für ein einziges kugelförmiges oder ein  
einziges Zylinderförmiges Hindernis:

b) im engeren Sinn

- Quelle = "Lichtquelle" (Strahlungsquelle)

d.h. Quellverteilung so weit von Hindernissen  
entfernt, daß im Bereich der Hindernisse nur  
mehr Wellenfeld (Strahlungsfeld) berücksichtigt  
werden muß

- Lineardimensionen der Hindernisse und  
Abstände zwischen den Hindernissen  
groß gegen die Wellenlänge(n) der von  
der "Lichtquelle" emittierten Strahlung

⇒ "Lichtintensität" kann im Bereich der Hindernisse  
und "hinter" den Hindernissen in niedrigster  
Näherung nach den Gesetzen der  
geometrischen Optik berechnet werden

Aufgabe der Beugungstheorie ist dann die  
Berechnung der "Lichtintensität" in der Nähe  
der geometrischen Schattengrenzen, wo die  
geometrische Optik versagt und es zu  
typischen Interferenzmustern kommt.

Beugung im engeren Sinn: Viele Näherungsverfahren  
wurden entwickelt.

Einfachstes Näherungsverfahren (neben Huygensschem  
Prinzip): Skalares Kirchhoffverfahren: anwendbar  
für ebene Beugungsschirme mit Öffnungen, Berech-  
nung der "Lichtintensität" aus einer skalaren  
Feldfunktion ("Lichterregung").

Bemerkung: Unter den Annahmen der Beugung  
im engeren Sinn spielen Polarisationseinflüsse  
auf die Intensität keine merkliche Rolle, weshalb  
die Beschreibung durch Vektorfelder nicht  
unerlässlich ist. ●

XV. 2.A. Skalares Kirchhoffverfahren

$\mu(\vec{r}, t)$  "Lichterregung" (Feldfunktion) komplexwertig

FG in quellenfreien Raumbereichen (POSTULAT)

$$\square \mu(\vec{r}, t) = 0$$

(11)

Stationärer Fall

zeitlich harmonische "Lichtquelle", eingeschwungener Zustand

$$\mu(\vec{r}, t) = \mu(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (12)$$

"Lichtintensität" (POSTULAT)

$$I(\vec{r}) = |\mu(\vec{r})|^2$$

(11): in quellenfreien Raumbereichen

$$(\Delta + k^2) \mu(\vec{r}) = 0$$

(13)

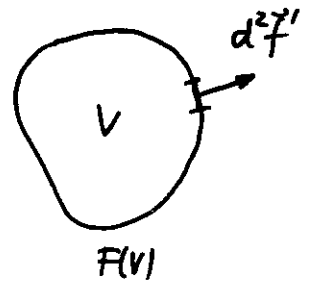
mit

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Kirchhoffidentität

2. Greenscher Satz (s. Gl. (I.12b))

$$\int_V d^3r' [\mu(\vec{r}') \Delta' \chi(\vec{r}') - \chi(\vec{r}') \Delta' \mu(\vec{r}')] = \oint_{F(V)} d^2\vec{f}' [\mu(\vec{r}') \vec{\nabla}' \chi(\vec{r}') - \chi(\vec{r}') \vec{\nabla}' \mu(\vec{r}')]$$



Wahl:  $\mu(\vec{r}')$  "Lichterregung"

$$\chi(\vec{r}') = G(\vec{r}, \vec{r}')$$

↑  
Parameter

irgendeine Greenfunktion des Helmholtzoperators mit der Eigenschaft  $G(\vec{r}', \vec{r}) = G(\vec{r}, \vec{r}')$ , d.h.

$$(\Delta + k^2) G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (14)$$

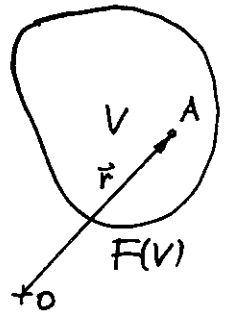
bzw.

$$(\Delta' + k^2) G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

XV-16

$$\int_V d^3r' [\underbrace{\mu(\vec{r}') \Delta' G(\vec{r}, \vec{r}')}_{-4\pi \delta(\vec{r}-\vec{r}') - k^2 G(\vec{r}, \vec{r}')} - \underbrace{G(\vec{r}, \vec{r}') \Delta' \mu(\vec{r}')}_{-k^2 \mu(\vec{r}')}]$$

VS: keine Quellen in V



$$= \oint_{F(V)} d^2f' \cdot [\mu(\vec{r}') \vec{\nabla}' G(\vec{r}, \vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{\nabla}' \mu(\vec{r}')] \quad \text{L}$$

⇒ für Punkte  $\vec{r}$  innerhalb des quellenfreien Volumens V gilt

$$\mu(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{F(V)} d^2f' \cdot [G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{\nabla}' \mu(\vec{r}') - \mu(\vec{r}') \vec{\nabla}' G(\vec{r}, \vec{r}')] \quad (15)$$

Wahl von Kirchhoff : Greenfunktion für den unendlichen Raum

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (16)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}' G(\vec{r}, \vec{r}') = -ik \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \left( 1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (16a)$$

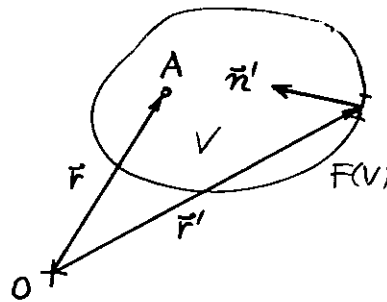
XV-17

Einsetzen gibt mit  $d^2f' = -\vec{n}' d^2f'$  die

Kirchhoffidentität

$$\mu(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{F(V)} d^2f' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \left[ \frac{\partial \mu(\vec{r}')}{\partial n'} + ik \left( 1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \frac{\vec{n}' \cdot (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \mu(\vec{r}') \right] \quad (17)$$

Lichtquelle



Beachte:

1)  $\frac{e^{i(k|\vec{r}-\vec{r}'| - \omega t)}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$  kann als Kugelwelle interpretiert werden, die vom Punkt  $\vec{r}'$  zum Aufpunkt  $\vec{r}$  "läuft": Huygens!

2) Jede Lösung der inhomogenen Helmholtzgleichung für eine beliebige Quellfunktion und beliebige RB und asymptotische Bdg. erfüllt für Punkte  $\vec{r}$  in einem quellenfreien Volumen V Gl. (17) identisch. Deshalb Kirchhoffidentität!



Kirchhoffverfahren

Kirchhoffs Überlegung: "Wüßte ich für eine Beugungsanordnung die exakten Randwerte  $u(F')$  und  $\frac{\partial u(F')}{\partial n'}$  auf einer geschlossenen Fläche  $F$ , in deren Innerem keine Lichtquelle ist, so könnte ich aus der Identität (17) die exakte

Lichterregung  $u(F)$  für Aufpunkte im Inneren von  $F$  berechnen." (Stimmt  $\checkmark$ ) Weiter:

"Gelingt es mir, aus physikalischen Überlegungen für die Randwerte von  $u(F')$  und  $\frac{\partial u(F')}{\partial n'}$  gute Näherungswerte zu finden\*, so wird das Einsetzen in die Identität (17) gute Näherungswerte für  $u(F)$  für Aufpunkte im Inneren von  $F$  liefern." ("Wird" ist nicht gewährleistet, nur "kann".)

Bemerkung: Die Helmholtzgleichung gestattet nicht die simultane Vorgabe von Funktion und Normalableitung auf einer geschlossenen Oberfläche. (Überbestimmung). Ersetzt man die exakten Randwerte durch näherungsweise, so ist nicht

\*1) d.h. Werte, die ich für gute Näherungswerte halte!

gewährleistet, daß sich für Punkte im Inneren auch nur eine geringfügige Änderung ergibt, da auf Grund der Überbestimmung Stabilität nicht gewährleistet ist. Darin besteht der "mathematische Mangel Nr.1" des Kirchhoffverfahrens.

Kirchhoffsche "Standardanordnung", für die Kirchhoff Näherungsannahmen für die Randwerte angegeben hat, auf die daher das

Kirchhoffsche Verfahren anwendbar ist:

ebener undurchdringlicher Beugungsschirm

(idealer Leiter) mit einer oder mehreren

Öffnungen und der Lichtquelle auf einer

Seite des Schirms; gesucht ist die

Lichtintensität auf der anderen Seite des

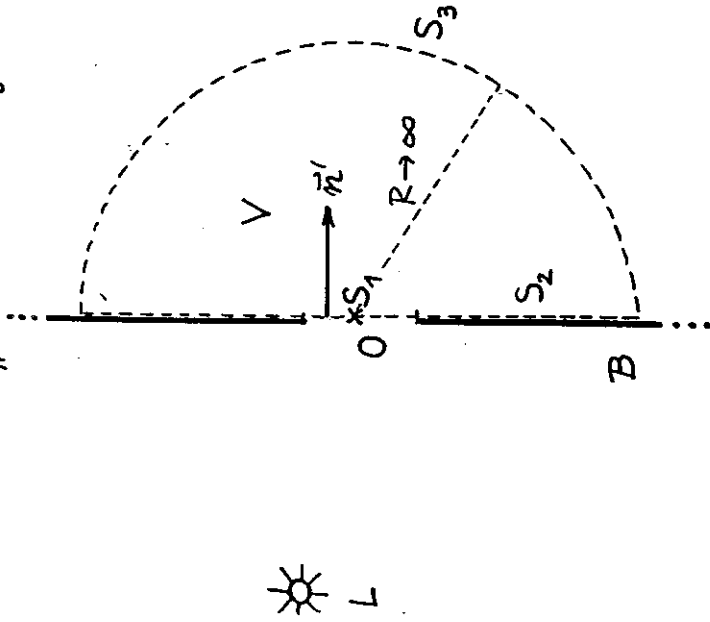
Beugungsschirmes



Lichtquelle

Lichtintensität?

Kirchhoffsche Näherungsannahmen



1)  $S_1$  (Öffnung): für  $u(F')$ ,  $\frac{\partial u(F')}{\partial n'}$  werden jene

Werte genommen, die dort vorliegen würden, wenn es überhaupt keinen Beugungsschirm gäbe (ungestörte von  $L$  einfallende Welle)

2)  $S_2$  (unmittelbar hinter dem undurchdringlichen Schirmteil):

es wird  $u(F') = 0$ ,  $\frac{\partial u(F')}{\partial n'} = 0$  gesetzt

3)  $S_3$  (Halbkugeloberfläche mit  $R \rightarrow \infty$ ):

$$u(F') \underset{r' \rightarrow \infty}{\sim} f(\vartheta, \varphi) \frac{e^{ikr'}}{r'}$$

Bemerkungen:

1) In den Abbildungen wird immer nur eine Öffnung gezeichnet, es können aber auch mehrere Öffnungen vorhanden sein.

2) Ist  $d$  die Lineardimension der Öffnung, so muß  $d \gg \lambda$

gelten (Beugungsproblem im engeren Sinn!)

Unter dieser VS ist die Kirchhoffsche Annahme 1) physikalisch plausibel. Eine merkliche Abweichung

von den "ungestörten" Werten ist nur in einer kleinen Randzone der Öffnung zu erwarten.

3) Sind mehrere Öffnungen vorhanden, so muß die Lineardimension jeder Öffnung  $\gg \lambda$  sein und auch die Abstände der Öffnungen müssen  $\gg \lambda$  sein.

4) Die "unproblematischste" Annahme ist 3).

Sie ersetzt die Abstrahlungsbedingung der MX-Theorie.

5) Auch die Annahme 2) ( $u=0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial n'}=0$  auf  $S_2$ , d.h. unmittelbar hinter dem undurchlässigen Schirmteil) leuchtet physikalisch

ein.

ABER: Mathematisch ist diese Annahme mit der Helmholtzgleichung nicht verträglich:  
 "mathematischer Mangel Nr. 2 des Kirchhoff-Verfahrens".

Ist nämlich  $u(\vec{r})$  und  $\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n'}$  auf einem beliebigen endlichen Teilstück von  $F(V)$  null und ist  $u$  Lösung der Helmholtzgleichung, so folgt  $u(\vec{r}) \equiv 0$  für  $\forall \vec{r}$  in  $V$ !

Trotz der mathematischen Inkonsistenzen erhält man aber mit dem Kirchhoffverfahren Ergebnisse, die mit dem Experiment sehr gut übereinstimmen.

"Verstehen" kann man das insofern, als ein modifiziertes Kirchhoffverfahren, das die "mathematischen Mängel Nr. 1, 2" der originalen Kirchhoffverfahrens nicht aufweist, praktisch dieselben Ergebnisse liefert: s. Jackson Abschnitt 9.8

Man setzt dabei in Gl. (15) nicht die Greensche Funktion für den unendlichen Raum, sondern die Dirichletsche Greenfunktion  $G_D(\vec{r}, \vec{r}')$  ein und

erhält als modifizierte Kirchhoffidentität

$$u(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{F(V)} d^2f' u(\vec{r}') - \frac{\partial G_D(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'}$$

Die Kirchhoffschen Annahmen 1), 2) können dann durch entsprechende Annahmen für  $u(\vec{r}')$  allein ersetzt werden, sodass die mathematischen Inkonsistenzen beseitigt sind! S. auch Folie XV-29!

Einsetzen der Kirchhoffschen Annahmen in die Kirchhoffidentität

$$\oint_{F(V)} = \int_{S_1} + \int_{S_2} + \int_{S_3}$$

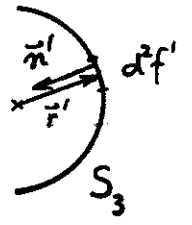
|| 0 wegen 2)

wie  $\frac{1}{R}$  gegen null wegen 3)

Beweis: nächste Seite

ungestörte Werte  $u_0(\vec{r}')$ ,  $\frac{\partial u_0(\vec{r}')}{\partial n'}$  einsetzen!

Für Punkte  $\vec{r}'$  auf  $S_3$  gilt für  $R=r' \rightarrow \infty$ :



$$\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \left\{ \underbrace{-\frac{\partial u(\vec{r}')}{\partial n'}}_{\frac{\partial u(\vec{r}')}{\partial r'}} - ik \left(1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \underbrace{\frac{\vec{n}' \cdot (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{-\frac{r'_z}{r'}} u(\vec{r}') \right\} \underbrace{d^2f'}_{r'^2 d\Omega'}$$

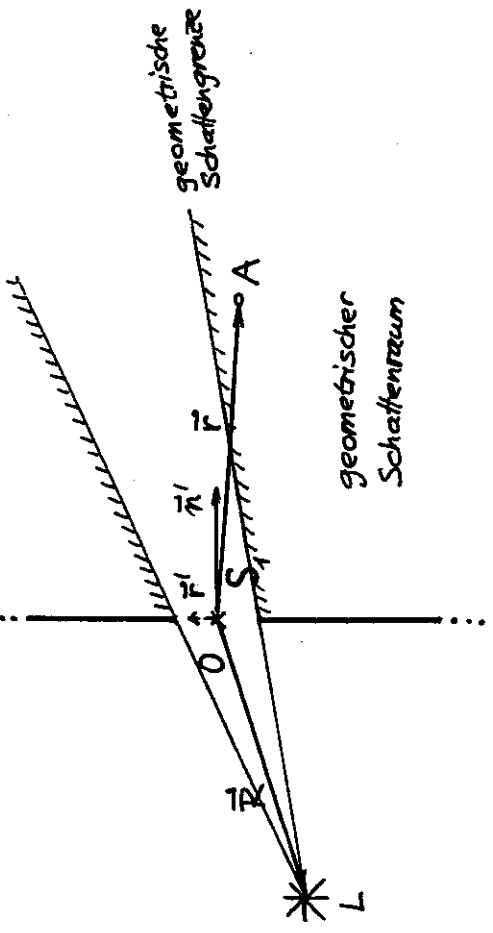
$$\underset{r' \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{ikr'}}{r'} \left\{ \left( ik - \frac{1}{r'} \right) f(\Omega') \frac{e^{ikr'}}{r'} + O\left(\frac{1}{r'^3}\right) - ik \left(1 + \frac{i}{kr'}\right) \left[ f(\Omega') \frac{e^{ikr'}}{r'} + O\left(\frac{1}{r'^2}\right) \right] \right\} r'^2 d\Omega'$$

$$\underset{r' \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{ikr'}}{r'} \underbrace{O\left(\frac{1}{r'^2}\right) r'^2 d\Omega'}_{O(1)} \quad \checkmark$$

$$u(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_1} d^2f' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \left[ \frac{\partial u_0(\vec{r}')}{\partial n'} + ik \left(1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \frac{\vec{n}' \cdot (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} u_0(\vec{r}') \right]$$

(18)

Punktförmige Lichtquelle angenommen



Damit "Lichtregung" im Punkt  $\vec{r}'$  der Öffnung (und in infinitesimaler Umgebung) gemäß Kirchhoffannahme 1)

$$u_0(\vec{r}') = A_0 \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (19)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u_0(\vec{r}')}{\partial n'} = \underbrace{\vec{n}' \cdot \text{grad}' u_0(\vec{r}')}_{(19a)}$$

$$= A_0 \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \underbrace{\left( -ik + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right)}_{(-ik) \left( 1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|} \right)}$$

$$u(\vec{r}) = -\frac{ik}{4\pi} A_0 \int_{S_1} d^2f' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{r}'|}}{|\vec{R}-\vec{r}'|} \cdot$$

$$\cdot \left[ \left(1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \frac{\vec{n}' \cdot (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \left(1 + \frac{i}{k|\vec{R}-\vec{r}'|}\right) \frac{\vec{n}' \cdot (\vec{R}-\vec{r}')}{|\vec{R}-\vec{r}'|} \right]$$

⇒ Reziprozitätssatz der Kirchhoffschen Beugungstheorie

Setzt man die Lichtquelle in den Punkt  $\vec{r}$ , so "erzeugt" Sie im Punkt  $\vec{R}$  die gleiche Intensität  $I = |u|^2$  wie die im Punkt  $\vec{R}$  befindliche Lichtquelle im Punkt  $\vec{r}$  "erzeugt".

Kirchhoffsche Beugungsformel

Weitere Annahmen: (A1)  $R \gg d$  und  $r \gg d$

(A2) Beschränkung auf Aufpunkte  $\vec{r}$ , welche nicht bzw. nicht zu weit im geometrischen Schattenraum liegen

Beachte:  $d \gg \lambda$  wurde schon bisher vorausgesetzt.

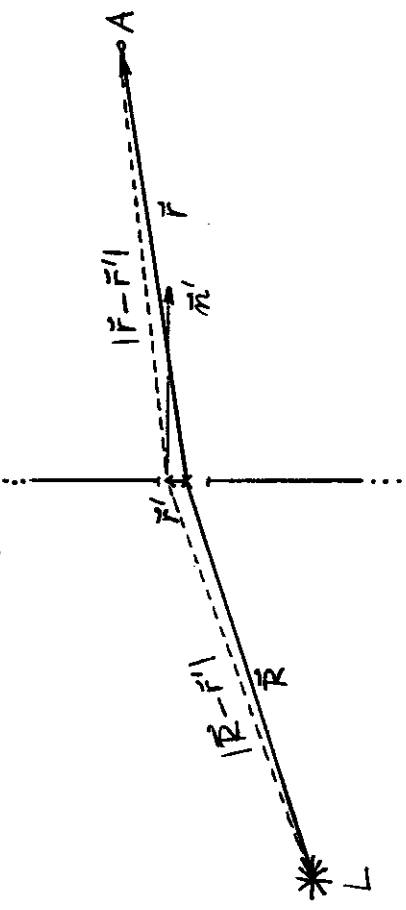
$$R \gg d \gg \lambda, \quad r \gg d \gg \lambda \Rightarrow \frac{\lambda}{|\vec{R}-\vec{r}'|} \approx 1$$

$$1 + \frac{i}{k|\vec{R}-\vec{r}'|} = 1 + \frac{i}{2\pi} \frac{\lambda}{|\vec{R}-\vec{r}'|} \approx 1$$

$$1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|} = 1 + \frac{i}{2\pi} \frac{\lambda}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx 1$$

(21)

für alle Punkte  $\vec{r}'$  der Öffnung und alle ins Auge gefassten Aufpunkte  $\vec{r}$



2) Wegen  $d \gg \lambda$  variieren  $|\vec{R}-\vec{r}'|$ ,  $|\vec{r}-\vec{r}'|$  über die Öffnung um viele Wellenlängen, sodass

$$e^{ik|\vec{R}-\vec{r}'|}, e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (k = \frac{2\pi}{\lambda})$$

über die Öffnung stark oszillieren,

wegen im Integral die Faktoren  $\frac{1}{|\vec{R}-\vec{r}'|}, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

$$\frac{1}{|\vec{R}-\vec{r}'|} \approx \frac{1}{R}, \quad \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{1}{r}$$

gesetzt werden können.

Analog kann für  $\vec{r}'$  in der Öffnung

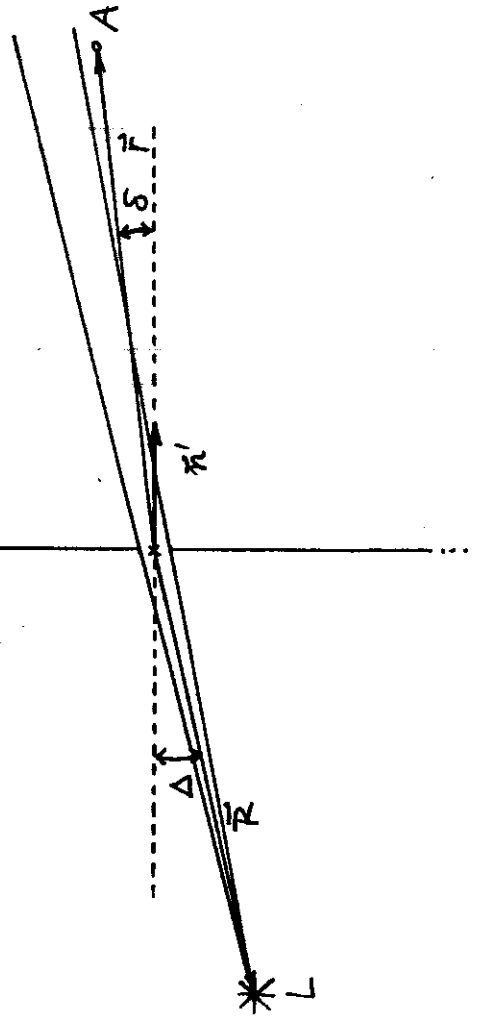
$$\frac{\vec{n}' \cdot (\vec{R} - \vec{r}')}{|\vec{R} - \vec{r}'|} \approx \frac{\vec{n}' \cdot \vec{R}}{R}, \quad \frac{\vec{n}' \cdot (\vec{r}' - \vec{F}')}{|\vec{r}' - \vec{F}'|} \approx \frac{\vec{n}' \cdot \vec{r}}{r}$$

gesetzt werden.

Wegen der Beschränkung auf Aufpunkte A, welche nicht weit im geometrischen Schattenraum bzw. nicht weit im geometrischen Schattenraum liegen, gilt überdies

$$\frac{\vec{n}' \cdot \vec{r}}{r} \approx - \frac{\vec{n}' \cdot \vec{R}}{R} \quad (23)$$

(d.h.  $\cos \delta \approx \cos \Delta$ )



Zusammenfassung:

$$u(\vec{r}) = - \frac{ik}{4\pi} A_0 \int_{S_1} d^2f' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{f}'|}}{|\vec{r}-\vec{f}'|} \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{f}'|}}{|\vec{R}-\vec{f}'|}$$

aus Integral  $\vec{r}$   $\vec{R}$

$$\cdot \left[ \underbrace{\left(1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{f}'|}\right)}_1 \frac{\vec{n}' \cdot (\vec{r}-\vec{f}')}{|\vec{r}-\vec{f}'|} - \underbrace{\left(1 + \frac{i}{k|\vec{R}-\vec{f}'|}\right)}_1 \frac{\vec{n}' \cdot (\vec{R}-\vec{f}')}{|\vec{R}-\vec{f}'|} \right]$$

$\frac{\vec{n}' \cdot \vec{r}}{r}$   $-\frac{\vec{n}' \cdot \vec{R}}{R}$

Bemerkung: Formel (24) wird auch mit dem

modifizierten Kirchhoffverf. erhalten!

aus Integral

$$2 \vec{n}' \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Kirchhoffsche Beugungsformel

$$u(\vec{r}) = - \frac{ik}{2\pi} \left( \vec{n}' \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right) \frac{A_0}{rR} \int_{S_1} d^2f' e^{ik(|\vec{r}-\vec{f}'| + |\vec{R}-\vec{f}'|)}$$

XV. 2. B. Komplementäre Beugungsschirme. Babinet'sches Theorem

Definition: Zwei Beugungsschirme  $B_1, B_2$  heißen komplementär, wenn  $B_2$  undurchdringlich ist, wo  $B_1$  eine Öffnung besitzt, und dort eine Öffnung hat, wo  $B_1$  undurchdringlich ist.

Die folgenden Aussagen gelten im Rahmen der skalaren Kirchhofftheorie unter der allgemeinen

VS  $d \gg \lambda$  und den Kirchhoffschen Annahmen 1), 2), 3),

aber ohne weitere Annahmen (etwa bzgl.  $r, \vec{r}$ ), d.h. unter Zugrundelegung von Gl. (18):

$$u_1(\vec{r}) \stackrel{||}{=} u_2(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_2} d^2 f' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \left[ \frac{\partial u_0(\vec{r}')}{\partial n'} + ik \left( 1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \frac{\vec{n}' \cdot (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} u_0(\vec{r}') \right]$$

Aus dieser Beziehung und der Kirchhoffidentität für  $u_0$  (Gl. (17) mit  $u = u_0$ ) folgt das

Babinet'sche Theorem (25)  
 $u_0(\vec{r}) = u_1(\vec{r}) + u_2(\vec{r})$

ohne Beugungsschirm  $B_1$  für komplementären Schirm  $B_2$

Was hat man davon?

Eine Aussage erhält man daraus immer dann, wenn in einer Situation für den Aufpunkt A mit dem Ortsvektor  $\vec{r}$  eine der 3 Größen  $u_0(\vec{r}), u_1(\vec{r}), u_2(\vec{r})$  null ist.

Beispiel 1: Angenommen hinter dem Schirm  $B_1$  sei am Aufpunkt  $\vec{r}$  die "Lichterregung"  $u_1$  null:

$$u_1(\vec{r}) = 0 \quad (\vec{r} \text{ fester Aufpunkt})$$

$$\Rightarrow u_2(\vec{r}) = u_0(\vec{r}), \quad I_2(\vec{r}) = I_0(\vec{r})$$

D.h.: Stellt man statt  $B_1$  den komplementären Schirm  $B_2$  auf, so hat man im betreffenden Aufpunkt  $\vec{r}$  eine bestimmte Intensität  $I_2(\vec{r})$ . Entfernt man  $B_2$ , so ändert sich die Intensität in diesem Aufpunkt nicht!

Beispiel 2: Das von einer punktförmigen Lichtquelle ausgehende Licht wird durch eine "Vorbende" auf einen bestimmten Raumwinkel eingeschränkt.

Die Öffnung der "Vorbende" sei so groß, daß die Beugung vernachlässigt werden kann, und man dementsprechend auf einem Auffänger

eine scharf ausgeleuchtete Fläche hat (geometrischer Schatten ohne beobachtbare Interferenzen).

XV. 2. C. Fraunhoferbeugung

Kirchhofsche Beugungsformel (24):

$$u(F) = -\frac{ik}{2\pi} (\vec{n} \cdot \vec{F}) \frac{A_0}{rR} \int_{S_1} d^2f' e^{ik(|\vec{r}-\vec{r}'| + |\vec{R}-\vec{r}'|)}$$

Wurde unter den Annahmen

$$R, r \gg d \gg \lambda \quad (*)$$

abgeleitet. Unter diesen Annahmen ist aber auch eine Entwicklung von  $|\vec{R}-\vec{r}'|$ ,  $|\vec{r}-\vec{r}'|$  für Punkte der Öffnung nach Potenzen von  $\frac{r'}{R}$  bzw.  $\frac{r'}{r}$  möglich:

$$|\vec{R}-\vec{r}'| = \sqrt{(\vec{R}-\vec{r}')^2} = \sqrt{R^2 - 2\vec{R}\cdot\vec{r}' + r'^2} \quad \text{gibt}$$

$$|\vec{R}-\vec{r}'| = R - \frac{\vec{R}\cdot\vec{r}'}{R} + \frac{R^2 r'^2 - (\vec{R}\cdot\vec{r}')^2}{2R^3} + \dots \quad (27')$$

↳ Fraunhoferbeugung

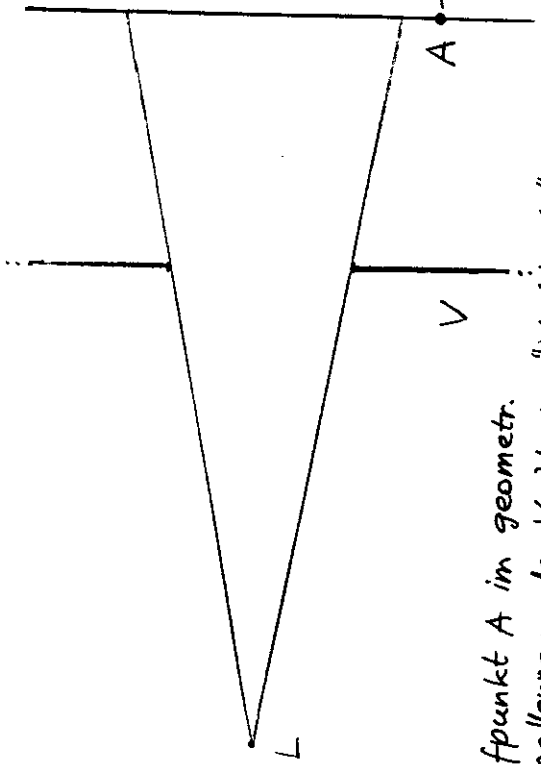
und analog

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = r - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r} + \frac{r^2 r'^2 - (\vec{r}\cdot\vec{r}')^2}{2r^3} + \dots \quad (27'')$$

↳ Fraunhoferbeugung

Definition: Von Fraunhoferbeugung spricht man, wenn es genügt, in den Entwicklungen (27'), (27'') die ersten zwei Terme zu berücksichtigen.

Beachte: Die Erfüllung der Bdg'n. (\*) reicht dafür nicht aus! Es muß dafür mehr erfüllt sein, u. zwar

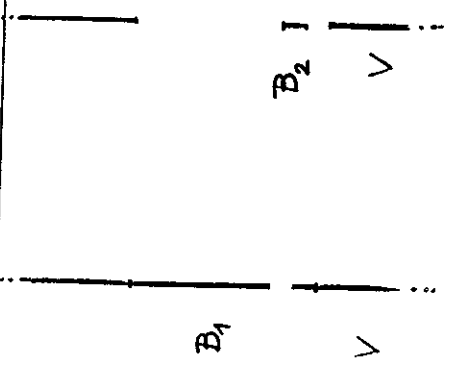


Aufpunkt A im geometr. Schattenraum der Vorblende: "Vorblende" Auffänger

⇒  $u_1(F) = -u_2(F)$

$I_1(F) = I_2(F)$ ,  $\forall F$  im geometrischen Schattenraum der Vorblende (26)

⇒ gleiches Beugungsmuster auf dem Auffänger im Schattenbereich der Vorblende, wenn man in die Öffnung der Vorblende einmal einen Beugungsschirm  $B_1$  und einmal den dazu komplementären Schirm  $B_2$  einsetzt; z.B.





$$\boxed{\frac{R}{d}, \frac{r}{d} \gg \frac{d}{\lambda} \gg 1} \quad (**)$$

Nur center dieser VS ist der Zusatzterm

$$k \left[ \frac{R^2 r'^2 - (R \cdot r')^2}{2R^3} + \frac{r^2 r'^2 - (r \cdot r')^2}{2r^3} \right]$$

im Argument der Exponentialfunktion für Punkte der Öffnung sicher "klein" und daher vernachlässigbar:

$$k \frac{r^2 r'^2 - (r \cdot r')^2}{2r^3} \Big|_{\max} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{r^2 r'^2 (1 - \cos^2(k \cdot r \cdot r'))}{2r^3} \Big|_{\max}$$

$$= \frac{r'}{\lambda} \frac{r'}{r} \pi \sin^2(k \cdot r \cdot r') \Big|_{\max} \quad r' \leq \frac{d}{2}$$

$$\approx \frac{d}{\lambda} \frac{\pi}{4} \sin^2(k \cdot r \cdot r') \ll \frac{\pi}{4}, \text{ analog 1. Term}$$

$$\ll 1$$

Gilt also (\*\*), so kann man im Integranden setzen:

$$|\bar{r} - \bar{r}'| + |\bar{r} - \bar{r}'| \approx r + R - \frac{\bar{r} \cdot \bar{r}'}{r} - \frac{\bar{r} \cdot \bar{r}'}{R} \quad (28)$$

$$e^{ik[|\bar{r} - \bar{r}'| + |\bar{r} - \bar{r}'|]} \approx e^{ikr} e^{ikR} e^{-ik(\frac{\bar{r} \cdot \bar{r}'}{r} + \frac{\bar{r} \cdot \bar{r}'}{R})} \cdot \bar{r}'$$

(aus Integral)

Fraunhoferbeugung

$$u(\bar{r}) = -\frac{ik}{2\pi} A_0 \frac{e^{ikR}}{R} \frac{e^{ikr}}{r} (\bar{n}' \cdot \frac{\bar{r}}{r}) \int_{S_1} d\bar{r}' e^{-ik(\frac{\bar{r} \cdot \bar{r}'}{r} + \frac{\bar{r} \cdot \bar{r}'}{R})} \cdot \bar{r}'$$

Interpretation!  $u_0(\vec{0})$  Konsistenz (29) mit Kirchhoffannahme 3)

Rechtecksöffnung

$$\frac{\bar{r}}{r} =: (\alpha, \beta, \gamma) = (\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r})$$

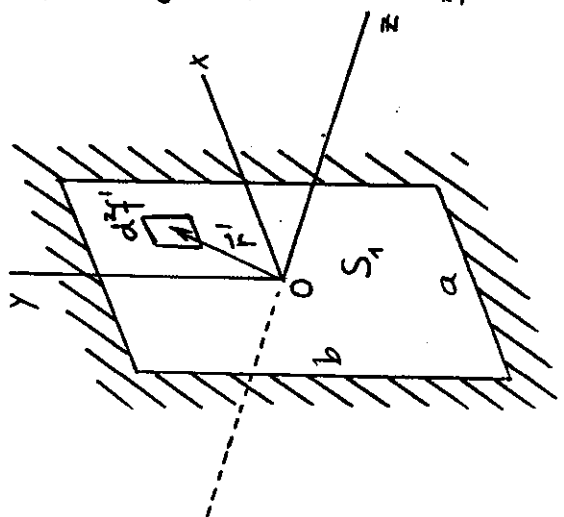
$$\bar{n}' = (0, 0, 1)$$

$$d^2 \bar{r}' = dx' dy'$$

$$S_1 \dots z' = 0$$

$$x' \in [-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}]$$

$$y' \in [-\frac{b}{2}, +\frac{b}{2}]$$



Annahme: Lichtquelle auf z-Achse

$$\frac{\bar{R}}{R} = (0, 0, -1), \quad \bar{R} \cdot \bar{r}' = 0$$

$$\Rightarrow \bar{n}' \cdot \frac{\bar{r}}{r} = \gamma, \quad (\frac{\bar{r}}{r} + \frac{\bar{R}}{R}) \cdot \bar{r}' \Big|_{z'=0} = \alpha x' + \beta y'$$

$$u(\bar{r}) = -\frac{ik}{2\pi} A_0 \frac{e^{ikR}}{R} \frac{e^{ikr}}{r} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dx' \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy' e^{-ik(\alpha x' + \beta y')} e^{-ik\beta y'}$$

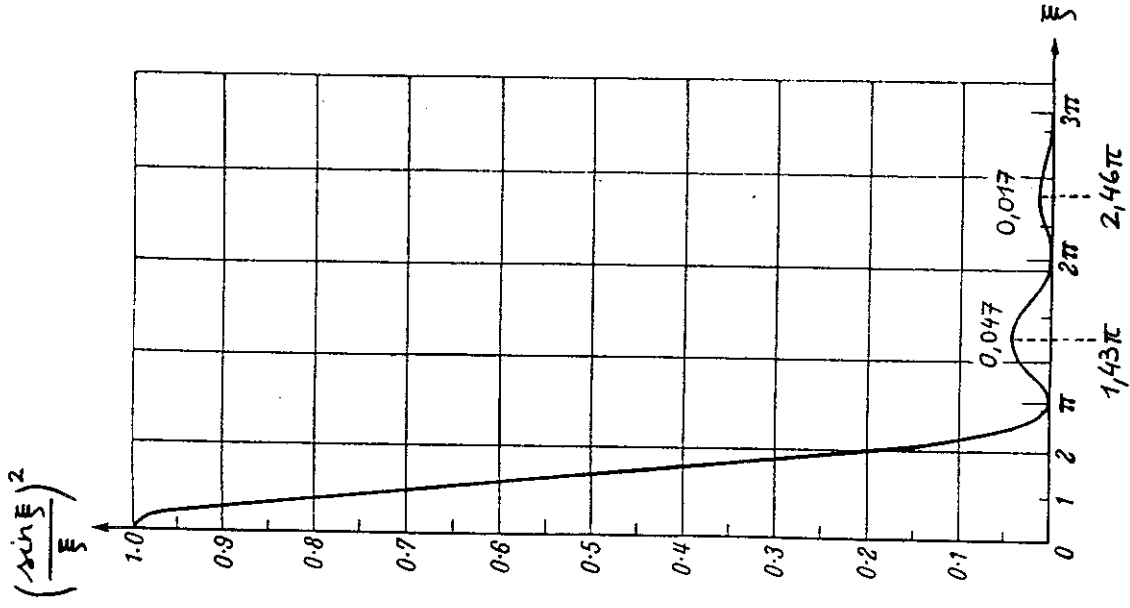
Auf ebener "Aufänger parallel zur Schirmebene (Ebene z=z\_0) in "ferner Fernzone":

r nur schwach richtungsabhängig (≈ z\_0)  
 γ nur schwach richtungsabhängig (≈ 1)

für Richtungen  $\frac{\bar{r}}{r} \approx (0, 0, 1)$

Intensitätsverlauf auf Auffänger

$$I(\alpha, \beta) = C \frac{I_0}{\lambda} \left( \frac{\sin \frac{\pi \alpha a}{\lambda}}{\frac{\pi \alpha a}{\lambda}} \right)^2 \left( \frac{\sin \frac{\pi \beta b}{\lambda}}{\frac{\pi \beta b}{\lambda}} \right)^2 \quad (31)$$



s. das  
Beugungsbild  
Seite XV-43

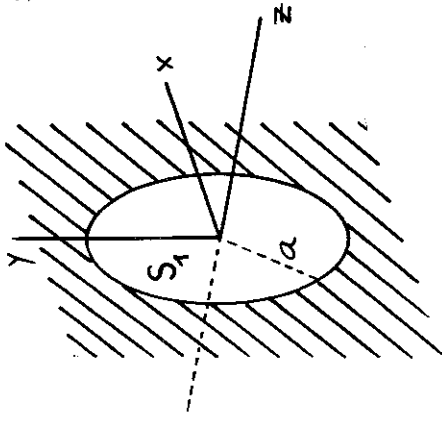
Die Intensität ist null entlang den zur y-Achse parallelen Linien

$$\frac{\pi \alpha a}{\lambda} = n_1 \pi \text{ bzw. } \frac{x}{r} = \alpha = n_1 \frac{\lambda}{a}, \quad n_1 = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (31a')$$

und entlang den zur x-Achse parallelen Linien

$$\frac{x}{r} = \beta = n_2 \frac{\lambda}{b}, \quad n_2 = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Kreisöffnung



Annahme: Lichtquelle auf der z-Achse  $\Rightarrow$  axiale Symmetrie  
bzgl. z-Achse  
Auffänger parallel zur Schirmebene  $\Rightarrow$  es genügt, die Intensität für Punkte in Richtungen

$$\vec{r} = (\alpha, 0, r) \text{ zu berechnen}$$

$$\vec{r}' = (0, 0, 1), \quad d^2 r' = \rho' d\rho' d\varphi', \quad S_1 \dots z' = 0$$

$$\vec{r}' \cdot \vec{r} = r \approx 1 \quad \varphi' \in [0, 2\pi] \quad \rho' \in [0, a]$$

$$\left( \frac{r}{r'} + \frac{r'}{r} \right) \cdot \vec{r}' \Big|_{z'=0} = \alpha \rho' \cos \varphi'$$

$$u(F) = -\frac{i k}{2\pi} A_0 \frac{e^{i k R}}{R} \frac{e^{i k r}}{r} \int_0^a \int_0^{2\pi} \rho' d\rho' d\varphi' e^{-i k \alpha \rho' \cos \varphi'} \quad (32a)$$

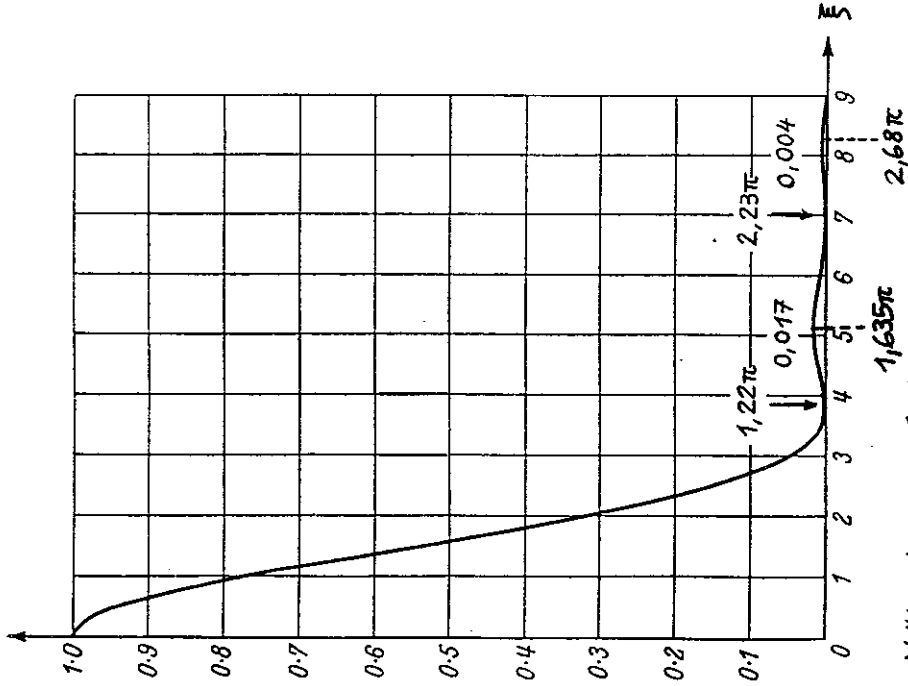
$| \dots |^2$  analog wie bei Rechtecksöffnung  $\approx$  konst.

$$\int_0^{\xi} d\eta \eta J_0(\eta) = \xi J_1(\xi) \quad \frac{2\pi \alpha \rho'}{\lambda} \quad (32b)$$

$\Rightarrow$  Intensitätsverlauf auf Auffänger

$$I(\alpha) = C \left( \frac{2 J_1 \left( \frac{2\pi \alpha a}{\lambda} \right)}{\frac{2\pi \alpha a}{\lambda}} \right)^2 \quad (33)$$

$$\left(\frac{2J_1(x)}{x}\right)^2$$



1. Intensitätsminimum bei

$$\frac{2\pi\alpha}{\lambda} = 1,22\pi \quad \text{bzw.} \quad \frac{x}{r} = \alpha = 0,61 \frac{\lambda}{a} \quad (33a)$$

s. das Beugungsbild Seite XV-43

### XV. 2. D. Fresnelbeugung

Definition: Von Fresnelbeugung spricht man, wenn in den Entwicklungen (27'), (27) die ersten drei Terme berücksichtigt werden müssen.

Fresnelbeugung liegt vor, wenn zwar

$$R, r \gg d \gg \lambda$$

erfüllt ist, Lichtquelle und Aufpunkt aber nicht so weit von der Schirmöffnung weg sind, wie dies für Fraunhoferbeugung verlangt wurde. (D.h., daß  $\frac{R}{d}, \frac{r}{d} \gg \frac{d}{\lambda}$  nicht erfüllt ist.)

Man hat dann in die Kirchhoffsche Beugungsformel (24) im Integranden

$$|\bar{r}-\bar{r}'| + |\bar{R}-\bar{r}'| \approx r + R - \frac{\bar{r} \cdot \bar{r}'}{r} - \frac{\bar{R} \cdot \bar{r}'}{R} + \frac{r^2 r'^2 - (\bar{r} \cdot \bar{r}')^2}{2r^3} + \frac{R^2 r'^2 - (\bar{R} \cdot \bar{r}')^2}{2R^3} \quad (34)$$

einzusetzen.

Fresnelbeugung

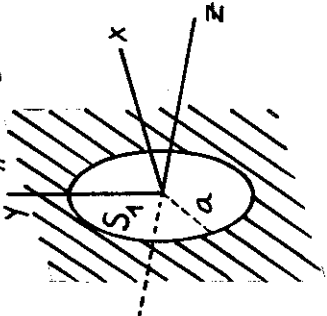
$$u(P) = -\frac{ik}{2\pi} A_0 \frac{e^{ikR}}{R} \frac{e^{ikr}}{r} - (n' \cdot \bar{r}) \cdot$$

$$\cdot \int_{S_1} d^2f' e^{-ik(\bar{r} + \frac{\bar{R}}{R}) \cdot \bar{r}'} e^{ik(\frac{1}{2r} + \frac{1}{2R})r'^2} - ik \left( \frac{(\bar{r} \cdot \bar{r}')^2}{2r^3} + \frac{(\bar{R} \cdot \bar{r}')^2}{2R^3} \right) e$$

Fresnelbeugung: auch für geometrisch einfache Öffnungen (Rechteck, Kreis) sehr kompliziert

Einfaches Beispiel:

Kreisöffnung



Annahmen:

- 1) Lichtquelle auf der z-Achse
- 2) Aufpunkt auf der z-Achse

$$\vec{R} = (0, 0, -1)$$

$$\vec{r} = (0, 0, 1)$$

$$\vec{r}' = (0, 0, 1)$$

$$\Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{r}' = 1, \quad \vec{R} \cdot \vec{r}' = 0, \quad \vec{r} \cdot \vec{r}' = 0$$

$$\vec{r} = (0, 0, r), \quad u(\vec{r}) = u(r)$$

$$u(r) = -\frac{ik}{2\pi} A_0 \frac{e^{ikr}}{r} \int_{S_1} d^2f' e^{ik \left( \frac{1}{2r} + \frac{1}{2R} \right) r'^2} \quad (36)$$

$$d^2f' = \rho' d\rho' d\varphi', \quad S_1 \dots z'=0, \quad \varphi' \in [0, 2\pi], \quad \rho' \in [0, a]$$

$r'^2 = \rho'^2$  auf  $S_1$

$$u(r) = -\frac{ik}{2\pi} A_0 \frac{e^{ikr}}{r} \int_0^a d\rho' \rho' e^{ik \left( \frac{1}{2r} + \frac{1}{2R} \right) \rho'^2}$$

$$\frac{1}{ik \left( \frac{1}{2r} + \frac{1}{2R} \right)} \left( e^{ik \left( \frac{1}{2r} + \frac{1}{2R} \right) a^2} - 1 \right)$$

$$u(r) = -A_0 \frac{e^{ik(r+R)}}{rR} \frac{rR}{r+R} \left( e^{ik \frac{r+R}{2rR} a^2} - 1 \right)$$

$$|e^{i\Phi} - 1|^2 = 4 \sin^2 \frac{\Phi}{2}$$

Intensitätsverlauf längs der z-Achse  
für  $r, R \gg a \gg \lambda$

$$I(r) = |A_0|^2 \left( \frac{2 \sin \frac{\pi a^2 (r+R)}{2\lambda r R}}{r+R} \right)^2 \quad (37)$$

$$\frac{\pi a^2 (r+R)}{2\lambda r R} = n\pi \quad \text{bzw.} \quad a^2 \frac{r+R}{rR} = 2n\lambda, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow I(r) = 0 \quad \text{Dunkelheit}$$

Beachte:

1) Es dürfen natürlich für gegebenes  $R, a$  mit  $R \gg a \gg \lambda$  nur solche  $n \in \mathbb{N}$  eingesetzt werden, für welche  $r \gg a$  erfüllt ist.

2) Unter den Bedingungen der Fraunhoferbeugung gilt

$$0 < \frac{\pi a^2 (r+R)}{2\lambda r R} = \frac{\pi}{2} \frac{a}{\lambda} \left( \frac{a}{r} + \frac{a}{R} \right) \ll \frac{\pi}{2} \Rightarrow I(r) \neq 0$$

Fresnelsche Zonenlinse

$I(r) = 0$  falls  $a^2 \frac{r+R}{rR} = 2n\lambda$ ,  $n \in \mathbb{N}$  (38)

Ist  $a^2 \frac{r+R}{2rR}$  hinreichend groß (z.B.  $\sim 10$ )

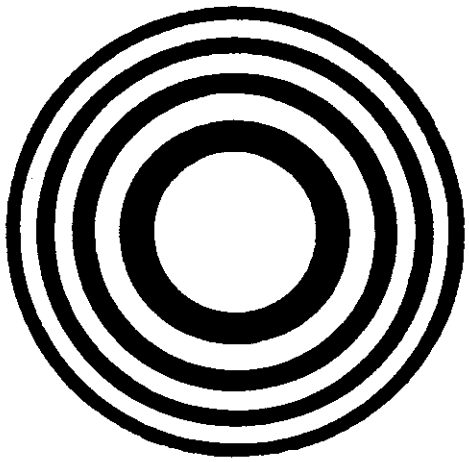
wobei  $r, R \gg a \gg \lambda$  erfüllt sein muß, so kann

man durch Abdeckung geeigneter Kreisringzonen

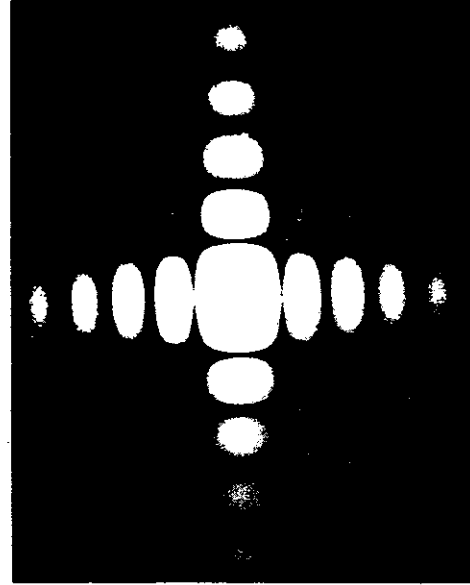
die Helligkeit im Aufpunkt ähnlich steigern wie

wenn man eine geeignete Sammellinse in die Öffnung

gibt.

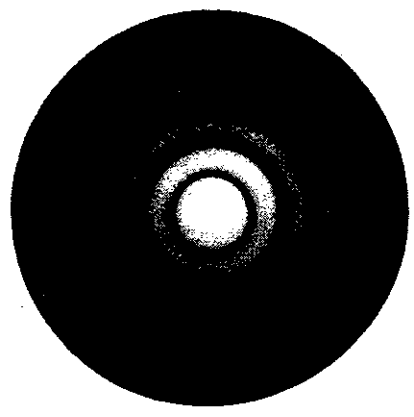


z.B.:  $\frac{a}{\lambda} = 1000$ ,  $\frac{r}{a} = \frac{R}{a} = 100$



geometrische  
Schatten =  
Grenze?

Fig. 8.10. FRAUNHOFER diffraction pattern of a rectangular aperture  $8 \text{ mm} \times 7 \text{ mm}$ , magnification  $50\times$ , mercury yellow light  $\lambda = 5790 \text{ \AA}$ . To show the existence of the weak secondary maxima the central portion was overexposed. (After H. LIPSON, C. A. TAYLOR, and B. J. THOMPSON.)



geometrische  
Schatten =  
Grenze?

Fig. 8.12. FRAUNHOFER diffraction pattern of a circular aperture (the AIRY pattern)  $6 \text{ mm}$  in diameter, magnification  $50\times$ , mercury yellow light  $\lambda = 5790 \text{ \AA}$ . To show the existence of the weak subsidiary maxima, the central portion was overexposed. (After H. LIPSON, C. A. TAYLOR, and B. J. THOMPSON.)