FOLIEN VON D. GRAU ZUR VORLESUNG "ELEKTRODYNAMIK UND RELATIVITÄTSTHEORIE"

nach dem Skriptum von H. Nowotny

Kapitel 15

Skineffekt für $\delta \ll R$

$$E(\rho) = E(R)\,\frac{J_0\left(\frac{1+i}{\delta}\rho\right)}{J_0\left(\frac{1+i}{\delta}R\right)}\ , \quad J_0((1+i)\xi) \underset{\xi\to+\infty}{\propto} \frac{e^{-i\xi}\,e^{\xi}}{\sqrt{\xi}}$$

$\Rightarrow$ für jene ρ, für die $E(\rho)$ merklich von null verschieden ist (Oberflächenschicht) gilt

$$E(\rho) \approx E(R)\, e^{-\frac{R-\rho}{\delta}}\ e^{i\frac{R-\rho}{\delta}} \qquad (75)$$

Rechtfertigung der Bezeichnung Eindringtiefe für δ

$$\Rightarrow \quad E'(R) = \frac{1-i}{\delta}\,E(R)$$

$$\frac{E(R)}{E'(R)} = \frac{\delta}{1-i} = \frac{(1+i)\delta}{2}$$

$$\frac{Z(\omega)}{Z(0)} = -i\,\frac{R}{\delta^2}\,\frac{E(R)}{E'(R)} = \frac{1-i}{2}\,\frac{R}{\delta(\omega)} \qquad (78)$$

Starke Erhöhung des Ohmschen Widerstandes durch den Skineffekt und zusätzlicher induktiver Widerstand (Zeitfaktor $e^{-i\omega t}$!)

Kupfer: $\sigma \approx 5\cdot 10^{17}\ s^{-1} \Rightarrow \delta = \frac{7}{\sqrt{f}}$ cm (f Frequenz)

f	50 Hz	5 kHz	0,5 MHz	50 MHz
δ	1 cm	1 mm	0,1 mm	0,01 mm

XV. INTERFERENZ UND BEUGUNG ELEKTROMAGNETISCHER WELLEN

XV.1. Interferenzerscheinungen

XV.1.A*. Intensität einer monochromatischen Welle. Interferenz von elm. Wellen

Wellenausbreitung im Vakuum oder in einem Medium mit $\sigma = 0$, $\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$ reell (ω aus Transparenzbereich) betrachtet

Definition: Intensität einer monochromatischen Welle

$$I(\vec{r}) = \langle |\vec{S}(\vec{r},t)| \rangle \qquad (2)$$

$\langle \ldots \rangle$ Zeitmittel über Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Satz: Für die Intensität einer (gewöhnlichen, d.h. homogenen) monochromatischen ebenen Welle

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + c.c.$$

gilt

$$\boxed{I = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\mu(\omega)}}\,|2\vec{E}_0|^2} \qquad (2a)$$

Beweis: Nach Abschnitt XIV.1.C gilt für eine solche Welle

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + c.c.$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + c.c.$$

mit $\vec{k}$ reeller Vektor , $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\mu(\omega)$

$$\vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0$$

$$\vec{k}\times\vec{E}_0 = \frac{\omega}{c}\mu(\omega)\vec{H}_0 .$$

Mit $\vec{k} = k\vec{n} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}\;\vec{n}$

$\vec{n}$ reeller Einheitsvektor (Ausbreitungs= richtung)

folgt also

$$\vec{n}\cdot\vec{E}_0 = 0 \;, \quad \vec{H}_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\mu(\omega)}}\,(\vec{n}\times\vec{E}_0)$$

$$\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t) = \underbrace{(\vec{E}_0\times\vec{H}_0^*)}_{\sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\mu(\omega)}}\left[\vec{E}_0\times(\vec{n}\times\vec{E}_0^*)\right] = \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\mu(\omega)}}\,|\vec{E}_0|^2\vec{n}} + \underbrace{(\vec{E}_0\times\vec{H}_0)}_{\sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\mu(\omega)}}\,\vec{E}_0^2\,\vec{n}}\, e^{2i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + c.c.$$

$$\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t)$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\mu(\omega)}}\left(|\vec{E}_0|^2 + \vec{E}_0^{\,2}\, e^{2i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + c.c.\right)\vec{n}$$

$$|\vec{S}(\vec{r},t)|$$

$$= \frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\mu(\omega)}}\left(|\vec{E}_0|^2 + \vec{E}_0^{\,2}\, e^{2i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + c.c.\right)$$

$$I = \langle|\vec{S}(\vec{r},t)|\rangle = \frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\mu(\omega)}}\; 2|\vec{E}_0|^2$$

$$I = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\mu(\omega)}}\;|2\vec{E}_0|^2 \quad \checkmark$$

"Maß" für die Intensität ist also $|\vec{E}_0|^2$

Überlagerung von mehreren monochromatischen ebenen Wellen gleicher Frequenz und Ausbreitungs= richtung

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \underbrace{\sum_{\ell=1}^{N}\vec{E}_0^{(\ell)}}_{\vec{E}_0}\; e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + c.c. \qquad (3),(4)$$

$$\vec{E}_o = \sum_{\ell=1}^{N} \vec{E}_o^{(\ell)} \quad \Rightarrow$$

$$|\vec{E}_o|^2 = \sum_{\ell=1}^{N} \vec{E}_o^{(\ell)} \cdot \sum_{m=1}^{N} \vec{E}_o^{(m)*}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{N} |\vec{E}_o^{(\ell)}|^2 + \sum_{\substack{\ell,m=1 \\ \ell<m}}^{N} \left(\vec{E}_o^{(\ell)} \cdot \vec{E}_o^{(m)*} + c.c. \right) \qquad (5)$$

$$I = \underbrace{\sum_{\ell=1}^{N} I^{(\ell)}}_{>0} + \underbrace{\frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\mu(\omega)}} \sum_{\substack{\ell,m=1 \\ \ell<m}}^{N} \left(\vec{E}_o^{(\ell)} \cdot \vec{E}_o^{(m)*} + c.c. \right)}_{\text{Interferenzterm } \gtreqless 0}$$

$I \geq 0$

Beispiel: 2 linear polarisierte Teilwellen

$$\vec{E}_o^{(\ell)} = \underbrace{a_\ell}_{>0} e^{i\delta_\ell} \vec{e}_\ell \quad , \ \ell = 1,2 \qquad (6')$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{E}_o|^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos(\delta_1 - \delta_2)\, \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \qquad (7')$$

Sonderfälle: 1) $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ keine Interferenz

2) $\vec{e}_1 = \vec{e}_2 = \vec{e}$

$$|\vec{E}_o|^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos(\delta_1 - \delta_2) \qquad (7)$$

$$|\vec{E}_o|^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos(\delta_1 - \delta_2)$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\delta_1 - \delta_2)$$

$\delta_1 - \delta_2 = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$:

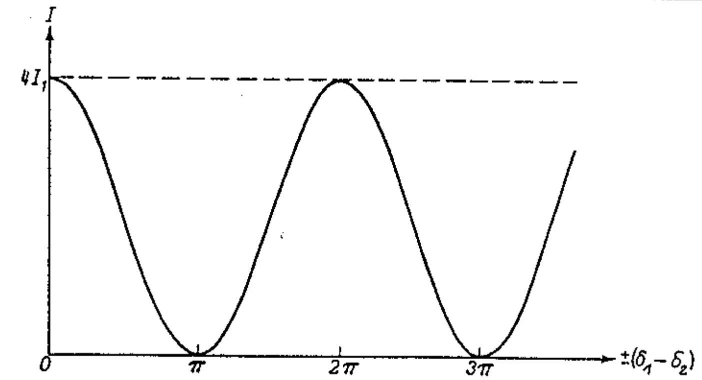
$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$$

$\delta_1 - \delta_2 = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$:

$$I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

2.1) Spezialfall: $a_2 = a_1 \Rightarrow I_2 = I_1$

$$I = 2 I_1 [1 + \cos(\delta_1 - \delta_2)] = 4 I_1 \cos^2 \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}$$



totale Auslöschung

XV. 1.B. Erzeugung von interferenz=fähigen (kohärenten) elm. Wellen

Voraussetzung für (beobachtbare) Interferenz sind feste Phasenbeziehungen der überlagerten Wellen. Fluktuieren in einem Ausdruck wie

$$I = \sum_{\ell=1}^{N} I^{(\ell)} + \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\mu(\omega)}} \sum_{\substack{\ell,m=1\\ \ell<m}}^{N} \left(\vec{E}_0^{(\ell)} \cdot \vec{E}_0^{(m)*} + c.c.\right)$$

die Phasen der Teilwellen rein statistisch, so erhält man

$$I = \sum_{\ell=1}^{N} I^{(\ell)}$$

und man spricht von einer inkohärenten Überlagerung.

In der Rundfunk- und Mikrowellentechnik (bis zu mm-Wellen "herab") kann man durch elektronische Steuerung der Sender erreichen, daß elm. Wellen mit festen Phasenbeziehungen erzeugt werden, die von verschiedenen Sendern (Quellen) abgestrahlt werden.

In der Laseroptik ist dasselbe durch stimulierte Emission von Lasern möglich.

ABER:

Konventionelle Lichtquellen emittieren rein statistisch in Emissionsakten von $\Delta t \sim 10^{-9} - 10^{-8}\,s$ endliche Wellenzüge der Länge $\Delta \ell \sim 30\,cm - 3\,m$ ($\Delta \ell$ Kohärenzlänge).

Bemerkung: Aus dem Fourierintegral folgt $\Delta \ell \cdot \Delta k \gtrsim 1$, d.h. ein endlich langer Wellenzug kann nur "fast monochromatisch" (quasimono=chromatisch) sein. Ist $\Delta\omega$ die Breite der spektralen Verteilung, so ist ein typischer Wert von $\frac{\Delta\omega}{\omega}$ etwa

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \sim 10^{-6}.$$

Überlagert man also in der konventionellen Optik Licht von mehreren Quellen, so handelt es sich stets um eine inkohärente Überlagerung.

Eine kohärente Überlagerung (Interferenz) kann man nur erhalten, wenn man Licht einer einzigen Lichtquelle benützt:

Durch Spiegelanordnungen, halbdurchlässige Spiegel, Reflexion an Platten und Keilen, Schirmen mit Öffnungen etc. wird ein von einer einzigen Lichtquelle stammendes Lichtbündel in mehrere Teile zerlegt und nach Zurücklegung verschiedener optischer Wege (s. unten) $\int n\,ds$ wieder zusammengeführt (n Brechungsindex).

Die feste Phasendifferenz ist dann durch die optische Wegdifferenz bestimmt.

Damit aber Interferenz möglich ist, muß letztere kleiner sein als die Kohärenzlänge Δl.

Optische Weglänge

Gelangt Licht längs des Weges $\mathcal{C}$ von A nach B und ist n der (möglicherweise längs $\mathcal{C}$ variable) Brechungsindex, so gilt

$$\boxed{\text{Optische Weglänge von } A \text{ nach } B \text{ längs } \mathcal{C} = \oint_A^B n\,ds} \qquad (10')$$

Phasendifferenz zweier interferierender Wellenzüge bei der Interferenz

A ... Ort der Lichtquelle

B ... Ort an dem es zur Interferenz kommt

$$\delta_1 - \delta_2 = \frac{\omega}{c}\left(\oint_{1\,A}^{B} n\,ds - \oint_{2\,A}^{B} n\,ds \right)$$

Wie sieht man das einfach?

Ebene monochromatische Welle in x-Richtung betrachtet:

$$e^{i(kx-\omega t)} = e^{i\frac{\omega}{c}(\underbrace{nx}-ct)} \qquad (8)$$

($e^{-i\omega t}$ ändert sich für beide Wellenzüge gleich)

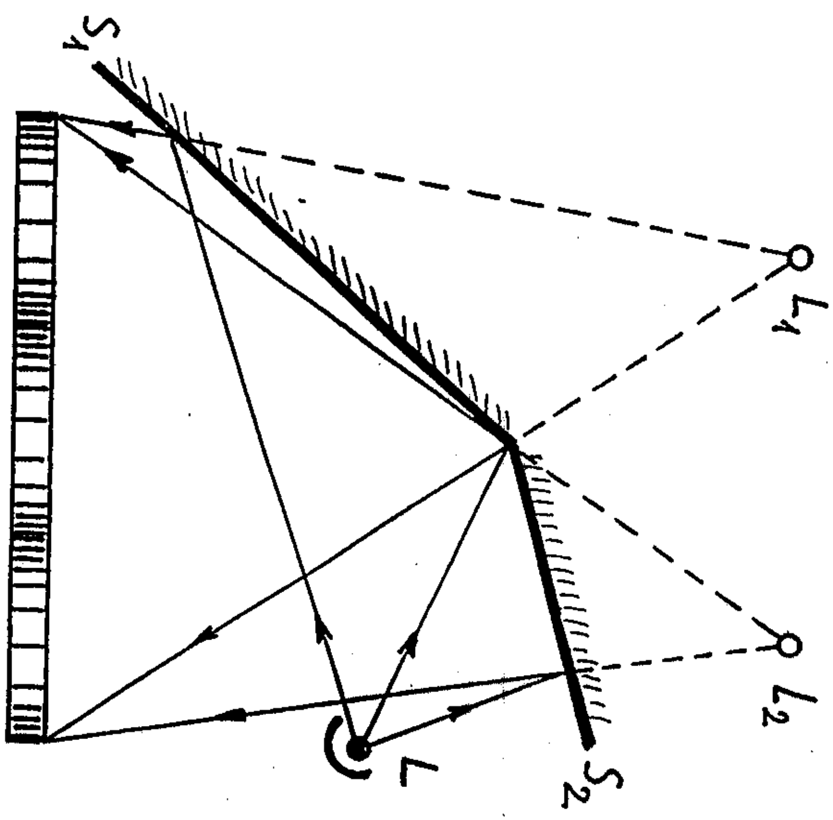


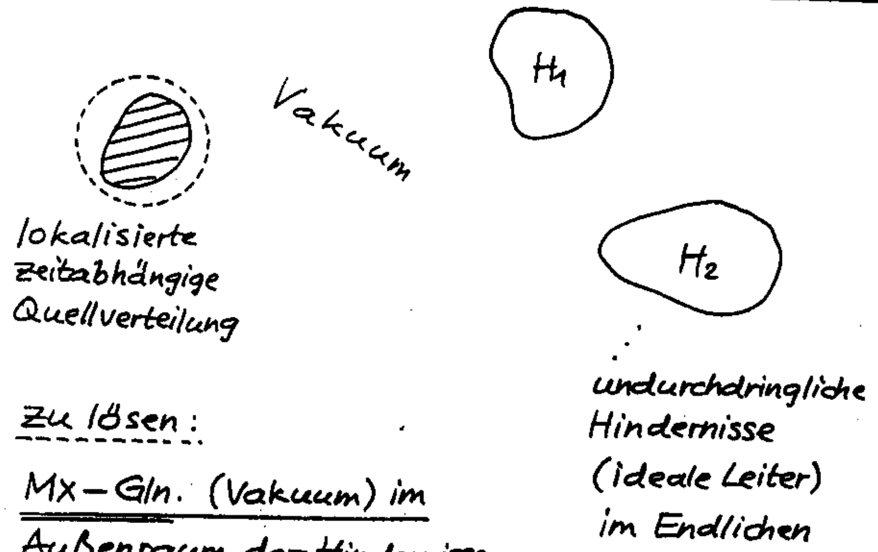
Fig. 15.1 Fresnelscher Spiegelversuch (durch die Spiegel S_1 bzw. S_2 wird die Lichtquelle L zu zwei scheinbaren Lichtquellen L_1 und L_2, die kohärentes Licht aussenden)

XV.2. Beugungstheorie

Beugungsproblem in der Maxwelltheorie

a) im weiteren Sinn

> Bestimmung des elm. Feldes einer lokalisierten zeitabhängigen Quellverteilung im Vakuum bei Anwesenheit undurchdringlicher Hindernisse.



zu lösen:

Mx-Gln. (Vakuum) im Außenraum der Hindernisse

mit RB $B_n = 0$, $\vec{E}_{tg} = \vec{0}$ auf Oberflächen der Hindernisse

und Abstrahlungsbedingung (asymptotisch nur auslaufende Wellen)*)

---

*) Hier nicht angeschrieben; s. Stumpf/Schuler, Elektrodynamik, Vieweg 1973, Abschnitt 12.6.

Stationärer Fall

Quellen und Felder zeitlich harmonisch
(eingeschwungener Zustand)

> Für den stationären Fall gibt es einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz sowie exakte Lösungen für ein einziges kugelförmiges oder ein einziges zylinderförmiges Hindernis.

b) im engeren Sinn

- Quelle = "Lichtquelle" (Strahlungsquelle)
  d.h. Quellverteilung so weit von Hindernissen entfernt, daß im Bereich der Hindernisse nur mehr Wellenfeld (Strahlungsfeld) berücksichtigt werden muß
- Lineardimensionen der Hindernisse und Abstände zwischen den Hindernissen groß gegen die Wellenlänge(n) der von der "Lichtquelle" emittierten Strahlung

⇒ "Lichtintensität" kann im Bereich der Hindernisse und "hinter" den Hindernissen in niedrigster Näherung nach den Gesetzen der geometrischen Optik berechnet werden

> Aufgabe der Beugungstheorie ist dann die Berechnung der "Lichtintensität" in der Nähe der geometrischen Schattengrenzen, wo die geometrische Optik versagt und es zu typischen Interferenzmustern kommt.

Beugung im engeren Sinn: viele Näherungsverfahren wurden entwickelt.

Einfachstes Näherungsverfahren (neben Huygensschem Prinzip): Skalares Kirchhoffverfahren: anwendbar für ebene Beugungsschirme mit Öffnungen, Berechnung der "Lichtintensität" aus einer skalaren Feldfunktion ("Lichterregung").

Bemerkung: Unter den Annahmen der Beugung im engeren Sinn spielen Polarisationseinflüsse auf die Intensität keine merkliche Rolle, weshalb die Beschreibung durch Vektorfelder nicht unerläßlich ist. ●

XV. 2. A. Skalares Kirchhoffverfahren

$u(\vec{r},t)$ "Lichterregung" (Feldfunktion) komplexwertig

FG in quellenfreien Raumgebieten (POSTULAT)

$$\boxed{\Box u(\vec{r},t) = 0} \tag{11}$$

Stationärer Fall

zeitlich harmonische "Lichtquelle", eingeschwungener Zustand

$$u(\vec{r},t) = u(\vec{r})\, e^{-i\omega t} \tag{12}$$

"Lichtintensität" (POSTULAT)

$$\boxed{I(\vec{r}) = |u(\vec{r})|^2}$$

(11): in quellenfreien Raumgebieten

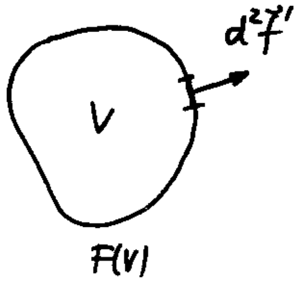
$$\boxed{(\Delta + k^2)\, u(\vec{r}) = 0} \tag{13}$$

mit

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Kirchhoffidentität

2. Greenscher Satz (s. Gl. (I.12b))



$$\int_V d^3r' \left[u(\vec{r}')\,\Delta' \chi(\vec{r}') - \chi(\vec{r}')\,\Delta' u(\vec{r}')\right]$$

$$= \oint_{F(V)} d^2\vec{f}' \cdot \left[u(\vec{r}')\,\vec{\nabla}' \chi(\vec{r}') - \chi(\vec{r}')\,\vec{\nabla}' u(\vec{r}')\right]$$

Wahl: $u(\vec{r}')$ "Lichterregung"

$\chi(\vec{r}') = G(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Parameter}}}{\vec{r}},\vec{r}')$ irgendeine Greenfunktion des Helmholtzoperators mit der Eigenschaft $G(\vec{r}',\vec{r}) = G(\vec{r},\vec{r}')$, d.h.

$$(\Delta + k^2)\, G(\vec{r},\vec{r}') = -4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

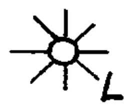
$$\text{bzw.} \quad (\Delta' + k^2)\, G(\vec{r},\vec{r}') = -4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{14}$$

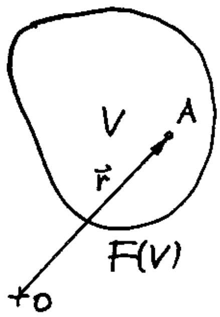
XV-16

$$\int_V d^3r' \left[u(\vec r')\,\underbrace{\Delta' G(\vec r,\vec r')}_{-4\pi\,\delta(\vec r-\vec r')-\cancel{k^2 G(\vec r,\vec r')}} - G(\vec r,\vec r')\,\underbrace{\Delta' u(\vec r')}_{-\cancel{k^2 u(\vec r')}}\right]$$

<u>VS</u>: keine Quellen in V

$$= \oint_{F(V)} d^2\vec f' \cdot \left[u(\vec r')\,\vec\nabla' G(\vec r,\vec r') - G(\vec r,\vec r')\,\vec\nabla' u(\vec r')\right]$$





$\Rightarrow$ für Punkte $\vec r$ innerhalb des quellenfreien Volumens V gilt

$$\boxed{u(\vec r) = \frac{1}{4\pi}\oint_{F(V)} d^2\vec f' \cdot \left[G(\vec r,\vec r')\,\vec\nabla' u(\vec r') - u(\vec r')\,\vec\nabla' G(\vec r,\vec r')\right]} \qquad (15)$$

<u>Wahl von Kirchhoff</u>: <u>Greenfunktion für den unendlichen Raum</u>

$$G(\vec r,\vec r') = \frac{e^{ik|\vec r-\vec r'|}}{|\vec r-\vec r'|} \qquad (16)$$

$$\Rightarrow \quad \vec\nabla' G(\vec r,\vec r') = -ik\,\frac{e^{ik|\vec r-\vec r'|}}{|\vec r-\vec r'|}\left(1+\frac{i}{k|\vec r-\vec r'|}\right)\frac{\vec r-\vec r'}{|\vec r-\vec r'|} \qquad (16a)$$

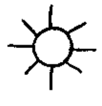
XV-17

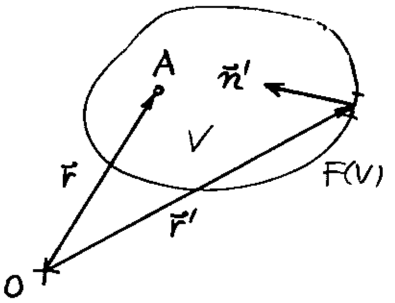
Einsetzen gibt mit $d^2\vec f' = -\vec n'\,d^2 f'$ die

<u>Kirchhoffidentität</u>

$$\boxed{u(\vec r) = -\frac{1}{4\pi}\oint_{F(V)} d^2 f'\,\frac{e^{ik|\vec r-\vec r'|}}{|\vec r-\vec r'|}\left[\frac{\partial u(\vec r')}{\partial n'} + ik\left(1+\frac{i}{k|\vec r-\vec r'|}\right)\frac{\vec n'\cdot(\vec r-\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}\,u(\vec r')\right]} \qquad (17)$$

Lichtquelle





<u>Beachte</u>:

1) $\dfrac{e^{i(k|\vec r-\vec r'|-\omega t)}}{|\vec r-\vec r'|}$ kann als Kugelwelle interpretiert werden, die vom Punkt $\vec r'$ zum Aufpunkt $\vec r$ "läuft": <u>Huygens</u>!

2) <u>Jede Lösung der inhomogenen Helmholtzgleichung für eine beliebige Quellfunktion und beliebige RB und asymptotische Bdgn. erfüllt für Punkte $\vec r$ in einem quellenfreien Volumen V</u> <u>Gl. (17) identisch.</u>
Deshalb Kirchhoffidentität!

Kirchhoffverfahren

Kirchhoffs Überlegung: "Wüßte ich für eine Beugungs=anordnung die exakten Randwerte $u(\vec{r}\,')$ und $\frac{\partial u(\vec{r}\,')}{\partial n'}$ auf einer geschlossenen ~~Fläche~~ Fläche F, in deren Innerem keine Lichtquelle ist, so könnte ich aus der Identität (17) die exakte Lichterregung $u(\vec{r})$ für Aufpunkte im Inneren von F berechnen." (Stimmt ✓) Weiter:

"Gelingt es mir, aus physikalischen Überlegungen für die Randwerte von $u(\vec{r}\,')$ und $\frac{\partial u(\vec{r}\,')}{\partial n'}$ gute Näherungswerte zu finden*), so wird das Einsetzen in die Identität (17) gute Näherungswerte für $u(\vec{r})$ für Aufpunkte im Inneren von F liefern." ("Wird" ist nicht gewährleistet, nur "kann".)

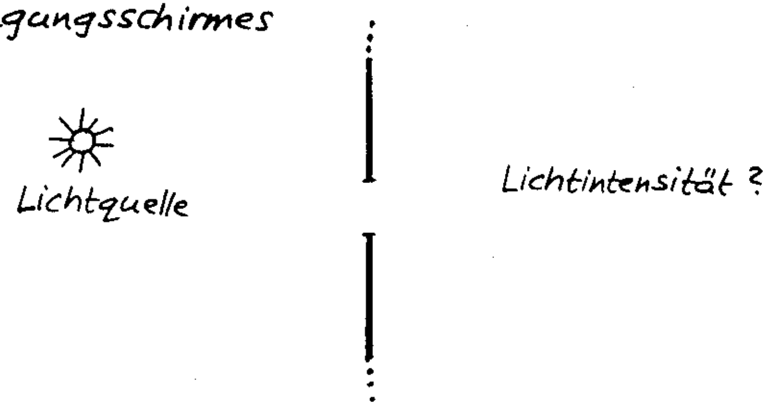
Bemerkung: Die Helmholtzgleichung gestattet nicht die simultane Vorgabe von Funktion und Normal=ableitung auf einer geschlossenen Oberfläche. (Überbestimmung). Ersetzt man die exakten Rand=werte durch näherungsweise, so ist nicht

*) d.h. Werte, die ich für gute Näherungswerte halte!

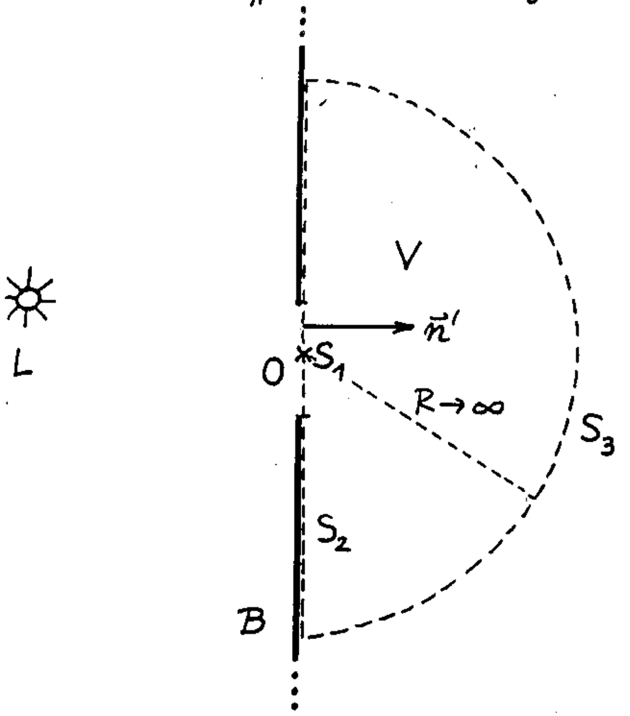
gewährleistet, daß sich für Punkte im Inneren auch nur eine geringfügige Änderung ergibt, da auf Grund der Überbestimmung Stabilität nicht gewährleistet ist.

Darin besteht der "mathematische Mangel Nr. 1" des Kirchhoffverfahrens.

Kirchhoffsche "Standardanordnung", für die Kirchhoff Näherungsannahmen für die Randwerte angegeben hat, auf die daher das Kirchhoffsche Verfahren anwendbar ist: ebener undurchdringlicher Beugungsschirm (idealer Leiter) mit einer oder mehreren Öffnungen und der Lichtquelle auf einer Seite des Schirms; gesucht ist die Lichtintensität auf der anderen Seite des Beugungsschirmes



Kirchhoffsche Näherungsannahmen



1) S_1 (Öffnung): für $u(\vec{r}')$, $\frac{\partial u(\vec{r}')}{\partial n'}$ werden jene Werte genommen, die dort vorliegen würden, wenn es überhaupt keinen Beugungsschirm gäbe (ungestörte von L einfallende Welle)

2) S_2 (unmittelbar hinter dem undurchdringlichen Schirmteil): es wird $u(\vec{r}')=0$, $\frac{\partial u(\vec{r}')}{\partial n'}=0$ gesetzt

3) S_3 (Halbkugelfläche mit $R\to\infty$):

$$u(\vec{r}') \underset{r'\to\infty}{\sim} f(\vartheta',\varphi')\,\frac{e^{ikr'}}{r'}$$

Bemerkungen:

1) In den Abbildungen wird immer nur eine Öffnung gezeichnet, es können aber auch mehrere Öffnungen vorhanden sein.

2) Ist d die Lineardimension der Öffnung, so muß

$$d \gg \lambda$$

gelten (Beugungsproblem im engeren Sinn!) Unter dieser VS ist die Kirchhoffsche Annahme 1) physikalisch plausibel. Eine merkliche Abweichung von den "ungestörten" Werten ist nur in einer kleinen Randzone der Öffnung zu erwarten.

3) Sind mehrere Öffnungen vorhanden, so muß die Lineardimension jeder Öffnung $\gg \lambda$ sein und auch die Abstände der Öffnungen müssen $\gg \lambda$ sein.

4) Die "unproblematischste" Annahme ist 3). Sie ersetzt die Abstrahlungsbedingung der Mx-Theorie.

5) Auch die Annahme 2) ($u=0$, $\frac{\partial u}{\partial n'}=0$ auf S_2, d.h. unmittelbar hinter dem undurchlässigen Schirmteil) leuchtet physikalisch

ein.

ABER: Mathematisch ist diese Annahme mit der Helmholtzgleichung nicht verträglich: "mathematischer Mangel Nr. 2 des Kirchhoff=verfahrens".

Ist nämlich $u(\vec{r}')$ und $\frac{\partial u(\vec{r}')}{\partial n'}$ auf einem beliebigen endlichen Teilstück von $F(V)$ null und ist u Lösung der Helmholtzgleichung, so folgt $u(\vec{r}) \equiv 0$ für $\forall \vec{r}$ in V!

Trotz der mathematischen Inkonsistenzen erhält man aber mit dem Kirchhoffverfahren Ergebnisse, die mit dem Experiment sehr gut übereinstimmen.

"Verstehen" kann man das insofern, als ein modifiziertes Kirchhoffverfahren, das die "mathematischen Mängel Nr. 1, 2" des originalen Kirchhoffverfahrens nicht aufweist, praktisch dieselben Ergebnisse liefert: s. Jackson Abschnitt 9.8

Man setzt dabei in Gl. (15) nicht die Greensche Funktion für den unendlichen Raum, sondern die Dirichletsche Greenfunktion $G_D(\vec{r}, \vec{r}')$ ein und

erhält als modifizierte Kirchhoffidentität

$$u(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{F(V)} d^2f' \, u(\vec{r}') \, \frac{\partial G_D(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \, .$$

Die Kirchhoffschen Annahmen 1), 2) können dann durch entsprechende Annahmen für $u(\vec{r}')$ allein ersetzt werden, sodaß die mathematischen Inkonsistenzen beseitigt sind! S. auch Folie XV-29!

Einsetzen der Kirchhoffschen Annahmen in die Kirchhoffidentität

$$\oint_{F(V)} = \int_{S_1} + \underbrace{\int_{S_2}}_{=\,0 \text{ wegen 2)}} + \int_{S_3}$$

S_1: ungestörte Werte $u_0(\vec{r}')$, $\frac{\partial u_0(\vec{r}')}{\partial n'}$ einsetzen!

S_3: wie $\frac{1}{R}$ gegen null wegen 3)

Beweis: nächste Seite

<u>Für Punkte $\vec{r}\,'$ auf S_3 gilt für $R = r' \to \infty$:</u>

$$\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\Big\{\underbrace{-\frac{\partial u(\vec{r}\,')}{\partial n'}}_{\frac{\partial u(\vec{r}\,')}{\partial r'}} - ik\Big(1+\frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\Big)\underbrace{\frac{\vec{n}\,'\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}_{\frac{-\frac{\vec{r}\,'}{r'}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}\underbrace{u(\vec{r}\,')}_{f(\Omega')\frac{e^{ikr'}}{r'}+O(\frac{1}{r'^2})}\Big\}\underbrace{d^2f'}_{r'^2 d\Omega'}$$

$$\underset{r'\to\infty}{\sim}\frac{e^{ikr'}}{r'}\Big\{\Big(ik-\frac{1}{r'}\Big)f(\Omega')\frac{e^{ikr'}}{r'}+O\Big(\frac{1}{r'^3}\Big)-\underbrace{ik\Big(1+\frac{i}{kr'}\Big)}_{ik-\frac{1}{r'}}\Big[f(\Omega')\frac{e^{ikr'}}{r'}+O\Big(\frac{1}{r'^2}\Big)\Big]\Big\}r'^2 d\Omega$$

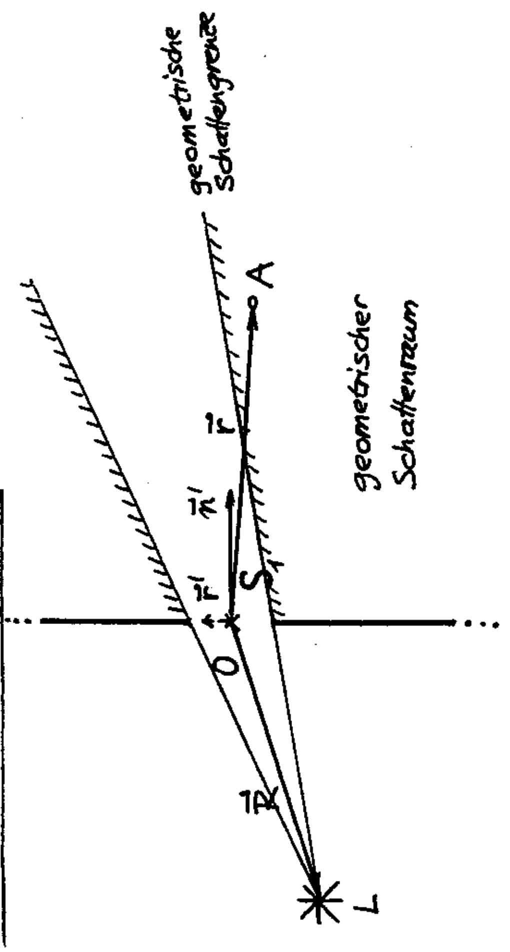
$$\underset{r'\to\infty}{\sim}\frac{e^{ikr'}}{r'}\underbrace{O\Big(\frac{1}{r'^2}\Big)r'^2}_{O(1)}d\Omega' \quad \checkmark$$

bekannt bekannt

$\Longrightarrow$

$$\boxed{u(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int_{S_1} d^2f'\,\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\Big[\frac{\partial u_0(\vec{r}\,')}{\partial n'}+ik\Big(1+\frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\Big)\frac{\vec{n}\,'\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}u_0(\vec{r}\,')\Big]} \qquad (18)$$

<u>Punktförmige Lichtquelle angenommen</u>



Damit <u>"Lichterregung" im Punkt $\vec{r}\,'$ der Öffnung</u> (und in infinitesimaler Umgebung) <u>gemäß Kirchhoffannahme 1)</u>

$$\boxed{u_0(\vec{r}\,') = A_0\,\frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{R}-\vec{r}\,'|}} \qquad (19)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u_0(\vec{r}\,')}{\partial n'} = \vec{n}\,'\cdot\mathrm{grad}'\,u_0(\vec{r}\,') \qquad (19a)$$

$$= A_0\frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{R}-\vec{r}\,'|}\underbrace{\Big(-ik+\frac{1}{|\vec{R}-\vec{r}\,'|}\Big)}_{(-ik)\left(1+\frac{i}{k|\vec{R}-\vec{r}\,'|}\right)}\frac{\vec{n}\,'\cdot(\vec{R}-\vec{r}\,')}{|\vec{R}-\vec{r}\,'|}$$

$$u(\vec r) = -\frac{ik}{4\pi} A_0 \int_{S_1} d^2 r' \, \frac{e^{ik|\vec r-\vec r'|}}{|\vec r-\vec r'|} \, \frac{e^{ik|\vec R-\vec r'|}}{|\vec R-\vec r'|} \, \bullet$$
$$\bullet \left[\left(1+\frac{i}{k|\vec r-\vec r'|}\right) \frac{\vec n' \cdot (\vec r-\vec r')}{|\vec r-\vec r'|} - \left(1+\frac{i}{k|\vec R-\vec r'|}\right) \frac{\vec n' \cdot (\vec R-\vec r')}{|\vec R-\vec r'|} \right] \tag{20}$$

$\Rightarrow$ Reziprozitätssatz der Kirchhoffschen Beugungstheorie

> Setzt man die Lichtquelle in den Punkt $\vec r$, so "erzeugt" sie im Punkt $\vec R$ die gleiche Intensität $I = |u|^2$ wie die im Punkt $\vec R$ befindliche Lichtquelle im Punkt $\vec r$ "erzeugt".

Kirchhoffsche Beugungsformel

Weitere Annahmen: (A1) $R \gg d$ und $r \gg d$

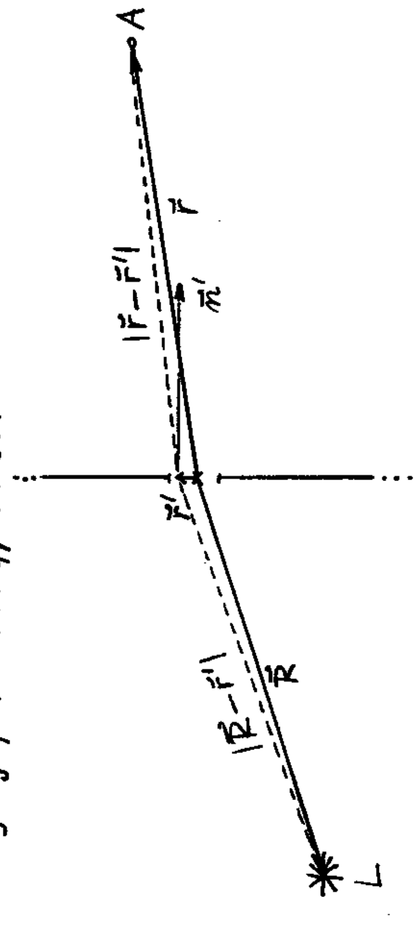
(A2) Beschränkung auf Aufpunkte $\vec r$, welche nicht bzw. nicht zu weit im geometrischen Schattenraum liegen

Beachte: $d \gg \lambda$ wurde schon bisher vorausgesetzt.

$R \gg d \gg \lambda$, $r \gg d \gg \lambda$ $\Rightarrow$

1) $$1 + \frac{i}{k|\vec R-\vec r'|} = 1 + \frac{i}{2\pi} \frac{\lambda}{|\vec R-\vec r'|} \approx 1 \qquad \left(\frac{\lambda}{|\vec R-\vec r'|} \approx \frac{\lambda}{R}\right)$$
$$1 + \frac{i}{k|\vec r-\vec r'|} = 1 + \frac{i}{2\pi} \frac{\lambda}{|\vec r-\vec r'|} \approx 1 \tag{21}$$

für alle Punkte $\vec r'$ der Öffnung und alle ins Auge gefaßten Aufpunkte $\vec r$



2) Wegen $d \gg \lambda$ variieren $|\vec R-\vec r'|$, $|\vec r-\vec r'|$ über die Öffnung um viele Wellenlängen, sodaß

$$e^{ik|\vec R-\vec r'|}, \; e^{ik|\vec r-\vec r'|} \qquad \left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$$

über die Öffnung stark oszillieren, wogegen im Integral die Faktoren $\frac{1}{|\vec R-\vec r'|}$, $\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}$

$$\frac{1}{|\vec R-\vec r'|} \approx \frac{1}{R}, \quad \frac{1}{|\vec r-\vec r'|} \approx \frac{1}{r}$$

gesetzt werden können.

Analog kann für $\vec{r}\,'$ in der Öffnung

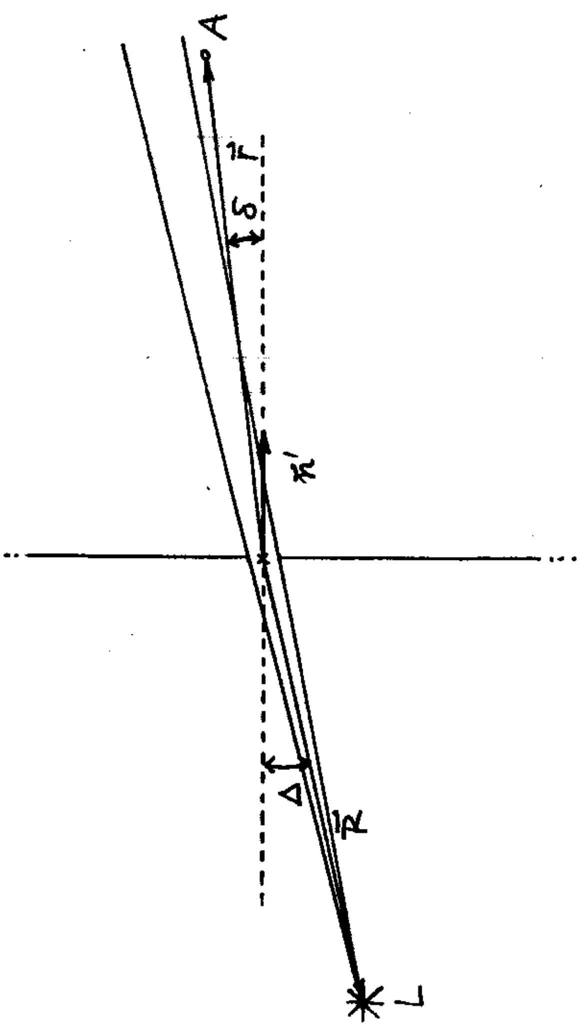
$$\frac{\vec{n}\,'\cdot(\vec{R}-\vec{r}\,')}{|\vec{R}-\vec{r}\,'|} \approx \frac{\vec{n}\,'\cdot\vec{R}}{R} \quad , \quad \frac{\vec{n}\,'\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \approx \frac{\vec{n}\,'\cdot\vec{r}}{r}$$

gesetzt werden.

Wegen der Beschränkung auf Aufpunkte A, welche nicht im geometrischen Schattenraum bzw. nicht weit im geometrischen Schattenraum liegen, gilt überdies

$$\frac{\vec{n}\,'\cdot\vec{r}}{r} \approx -\frac{\vec{n}\,'\cdot\vec{R}}{R} \tag{23}$$

(d.h. $\cos\delta \approx \cos\Delta$)



Zusammenfassung:

$$u(\vec{r}) = -\frac{ik}{4\pi} A_0 \int_{S_1} d^2f' \; \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{\underbrace{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}_{\to\, r}} \; \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{r}\,'|}}{\underbrace{|\vec{R}-\vec{r}\,'|}_{\to\, R}} \; \cdot$$

aus Integral

$$\cdot \underbrace{\left[\underbrace{\left(1+\frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)}_{\to\, 1} \underbrace{\frac{\vec{n}\,'\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}_{\to\, \frac{\vec{n}\,'\cdot\vec{r}}{r}} - \underbrace{\left(1+\frac{i}{k|\vec{R}-\vec{r}\,'|}\right)}_{\to\, 1} \underbrace{\frac{\vec{n}\,'\cdot(\vec{R}-\vec{r}\,')}{|\vec{R}-\vec{r}\,'|}}_{\to\, -\frac{\vec{n}\,'\cdot\vec{r}}{r}} \right]}_{\to\, 2\vec{n}\,'\cdot\frac{\vec{r}}{r}}$$

aus Integral

Bemerkung: Formel (24) wird auch mit dem modifizierten Kirchhoffverf. erhalten!

Kirchhoffsche Beugungsformel

$$\boxed{u(\vec{r}) = -\frac{ik}{2\pi}\left(\vec{n}\,'\cdot\frac{\vec{r}}{r}\right)\frac{A_0}{rR}\int_{S_1} d^2f' \; e^{ik(|\vec{r}-\vec{r}\,'| + |\vec{R}-\vec{r}\,'|)}} \tag{24}$$

XV. 2.B. Komplementäre Beugungs=schirme. Babinetsches Theorem

> **Definition**: Zwei Beugungsschirme $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ heißen komplementär, wenn $\mathcal{B}_2$ undurch=dringlich ist, wo $\mathcal{B}_1$ eine Öffnung besitzt, und dort eine Öffnung hat, wo $\mathcal{B}_1$ undurchdringlich ist.

Die folgenden Aussagen gelten im Rahmen der skalaren Kirchhofftheorie unter der allgemeinen VS $d \gg \lambda$ und den Kirchhoffschen Annahmen 1), 2), 3), aber ohne weitere Annahmen (etwa bzgl. r, $\frac{\vec{r}}{r}$), d.h. unter Zugrundelegung von Gl. (18):

$$u(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int_{S_{1,2}} d^2f' \; \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\left[\frac{\partial u_0(\vec{r}')}{\partial n'} + ik\left(1+\frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)\frac{\vec{n}'\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,u_0(\vec{r}')\right]$$

$$u(\vec{r}) \equiv u_{1,2}(\vec{r})$$

Aus dieser Beziehung und der Kirchhoffidentität für u_0 (Gl. (17) mit $u = u_0$) folgt das Babinetsche Theorem

$$\boxed{\underbrace{u_0(\vec{r})}_{\text{ohne Beugungsschirm}} = \underbrace{u_1(\vec{r})}_{\text{für Schirm } \mathcal{B}_1} + \underbrace{u_2(\vec{r})}_{\text{für komplementären Schirm } \mathcal{B}_2}} \qquad (25)$$

Was hat man davon?

Eine Aussage erhält man daraus immer dann, wenn in einer Situation für den Aufpunkt A mit dem Ortsvektor $\vec{r}$ eine der 3 Größen $u_0(\vec{r}), u_1(\vec{r}), u_2(\vec{r})$ null ist.

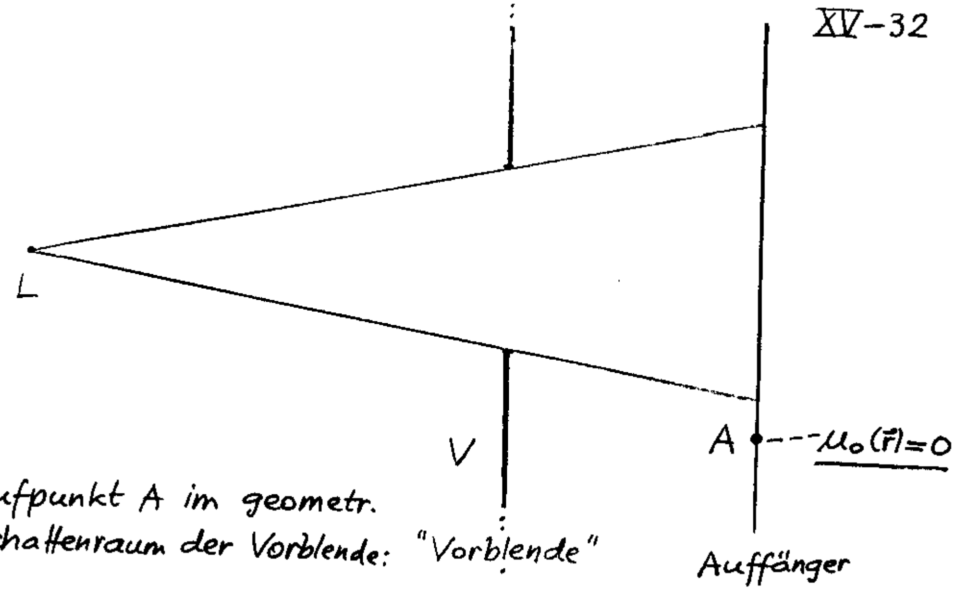
Beispiel 1: Angenommen hinter dem Schirm $\mathcal{B}_1$ sei am Aufpunkt $\vec{r}$ die "Lichterregung" u_1 null:

$$u_1(\vec{r}) = 0 \qquad (\vec{r} \text{ fester Aufpunkt})$$

$$\Rightarrow \quad u_2(\vec{r}) = u_0(\vec{r}) \quad , \quad I_2(\vec{r}) = I_0(\vec{r})$$

D.h.: Stellt man statt $\mathcal{B}_1$ den komplementären Schirm $\mathcal{B}_2$ auf, so hat man im betreffenden Aufpunkt $\vec{r}$ eine bestimmte Intensität $I_2(\vec{r})$. Entfernt man $\mathcal{B}_2$, so ändert sich die Intensität in diesem Aufpunkt nicht!

Beispiel 2: Das von einer punktförmigen Lichtquelle ausgehende Licht wird durch eine "Vorblende" auf einen bestimmten Raumwinkel eingeschränkt.
Die Öffnung der "Vorblende" sei so groß, daß die Beugung an ihr vernachlässigt werden kann, und man dementsprechend auf einem Auffänger eine scharf ausgeleuchtete Fläche hat (geometri=scher Schatten ohne beobachtbare Interferenzen).

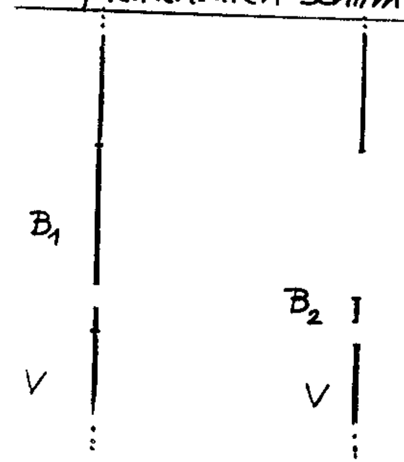


Aufpunkt A im geometr. Schattenraum der Vorblende: "Vorblende"

$\Rightarrow \quad u_1(\vec{r}) = -u_2(\vec{r})$

$\underline{I_1(\vec{r}) = I_2(\vec{r})}$, $\underline{\underline{\forall \vec{r}}}$ im geometrischen Schattenraum der Vorblende (26)

$\Rightarrow$ gleiches Beugungsmuster auf dem Auffänger im Schattenbereich der Vorblende, wenn man in die Öffnung der Vorblende einmal einen Beugungsschirm B_1 und einmal den dazu komplementären Schirm B_2 einsetzt; z.B.



XV. 2. C. Fraunhoferbeugung

Kirchhoffsche Beugungsformel (24):

$$u(\vec{r}) = -\frac{ik}{2\pi}\left(\vec{n}'\cdot\frac{\vec{r}}{r}\right)\frac{A_0}{rR}\int_{S_1} d^2f'\, e^{ik(|\vec{r}-\vec{r}'|+|\vec{R}-\vec{r}'|)}$$

Wurde unter den Annahmen

$$\boxed{R, r \gg d \gg \lambda} \qquad (*)$$

abgeleitet. Unter diesen Annahmen ist aber auch eine Entwicklung von $|\vec{R}-\vec{r}'|$, $|\vec{r}-\vec{r}'|$ für Punkte der Öffnung nach Potenzen von $\frac{r'}{R}$ bzw. $\frac{r'}{r}$ möglich:

$|\vec{R}-\vec{r}'| = \sqrt{(\vec{R}-\vec{r}')^2} = \sqrt{R^2 - 2\vec{R}\cdot\vec{r}' + r'^2}$ gibt

$$|\vec{R}-\vec{r}'| = R - \frac{\vec{R}\cdot\vec{r}'}{R} + \underbrace{\frac{R^2r'^2 - (\vec{R}\cdot\vec{r}')^2}{2R^3}}_{\to \text{ Fraunhoferbeugung}} + \dots \qquad (27')$$

und analog

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = r - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r} + \underbrace{\frac{r^2r'^2 - (\vec{r}\cdot\vec{r}')^2}{2r^3}}_{\to \text{ Fraunhoferbeugung}} + \dots \qquad (27)$$

Definition: Von Fraunhoferbeugung spricht man, wenn es genügt, in den Entwicklungen (27'), (27) die ersten zwei Terme zu berücksichtigen.

Beachte: Die Erfüllung der Bdgn. (*) reicht dafür nicht aus! Es muß dafür mehr erfüllt sein, u. zwar

$$\boxed{\frac{R}{d}, \frac{r}{d} \gg \frac{d}{\lambda} \gg 1} \qquad (**)$$

Nur unter dieser VS ist der Zusatzterm

$$k\left[\frac{R^2 r'^2 - (\vec{R}\cdot\vec{r}')^2}{2R^3} + \frac{r^2 r'^2 - (\vec{r}\cdot\vec{r}')^2}{2r^3}\right]$$

im Argument der Exponentialfunktion für Punkte der Öffnung sicher "klein" und daher vernachlässigbar:

$$k\,\frac{r^2 r'^2 - (\vec{r}\cdot\vec{r}')^2}{2r^3}\Bigg|_{max} = \frac{2\pi}{\lambda}\,\frac{r^2 r'^2\left(1-\cos^2(\sphericalangle\,\vec{r},\vec{r}')\right)}{2r^3}\Bigg|_{max}$$

$$= \frac{r'}{\lambda}\,\frac{r'}{r}\,\pi \sin^2(\sphericalangle\,\vec{r},\vec{r}')\Big|_{max} \qquad r' \lesssim \frac{d}{2}$$

$$\lesssim \underbrace{\frac{\frac{d}{\lambda}}{\frac{r}{d}}}_{\ll 1}\,\frac{\pi}{4}\underbrace{\sin^2(\sphericalangle\,\vec{r},\vec{r}')}_{\leq 1} \ll \frac{\pi}{4}, \text{ analog 1. Term}$$

Gilt also (**), so kann man im Integranden setzen:

$$|\vec{r}-\vec{r}'| + |\vec{R}-\vec{r}'| \approx r + R - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r} - \frac{\vec{R}\cdot\vec{r}'}{R} \qquad (28)$$

$$e^{ik[|\vec{r}-\vec{r}'|+|\vec{R}-\vec{r}'|]} \approx e^{ikr}\,e^{ikR}\,e^{-ik\left(\frac{\vec{r}}{r}+\frac{\vec{R}}{R}\right)\cdot\vec{r}'}$$

(aus Integral)

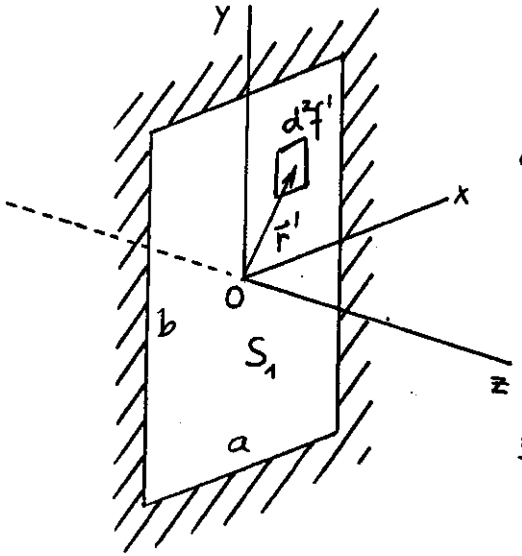
Fraunhoferbeugung

$$\boxed{u(\vec{r}) = -\frac{ik}{2\pi}\underbrace{A_0\frac{e^{ikR}}{R}}_{u_0(\vec{0})}\,\frac{e^{ikr}}{r}\,\left(\vec{n}'\cdot\frac{\vec{r}}{r}\right)\int_{S_1} d^2f'\,e^{-ik\left(\frac{\vec{r}}{r}+\frac{\vec{R}}{R}\right)\cdot\vec{r}'}}$$

Interpretation!

Konsistenz (29) mit Kirchhoffannahme 3)

Rechtecksöffnung



$$\frac{\vec{r}}{r} =: (\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$$

$$\vec{n}' = (0,0,1)$$

$$d^2f' = dx'dy'$$

$S_1 \ldots\ z' = 0$

$$x' \in \left[-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}\right]$$

$$y' \in \left[-\frac{b}{2}, +\frac{b}{2}\right]$$

Annahme: Lichtquelle auf z-Achse

$$\frac{\vec{R}}{R} = (0,0,-1), \quad \vec{R}\cdot\vec{r}' = 0$$

$$\Rightarrow \vec{n}'\cdot\frac{\vec{r}}{r} = \gamma, \quad \left(\frac{\vec{r}}{r}+\frac{\vec{R}}{R}\right)\cdot\vec{r}'\Big|_{z'=0} = \alpha x' + \beta y'$$

$$u(\vec{r}) = -\frac{ik}{2\pi}A_0\frac{e^{ikR}}{R}\,\frac{e^{ikr}}{r}\,\gamma\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dx'\,e^{-ik\alpha x'}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy'\,e^{-ik\beta y'}$$

Auf ebenem "Auffänger" parallel zur Schirmebene (Ebene $z = z_0$ in "ferner Fernzone"):

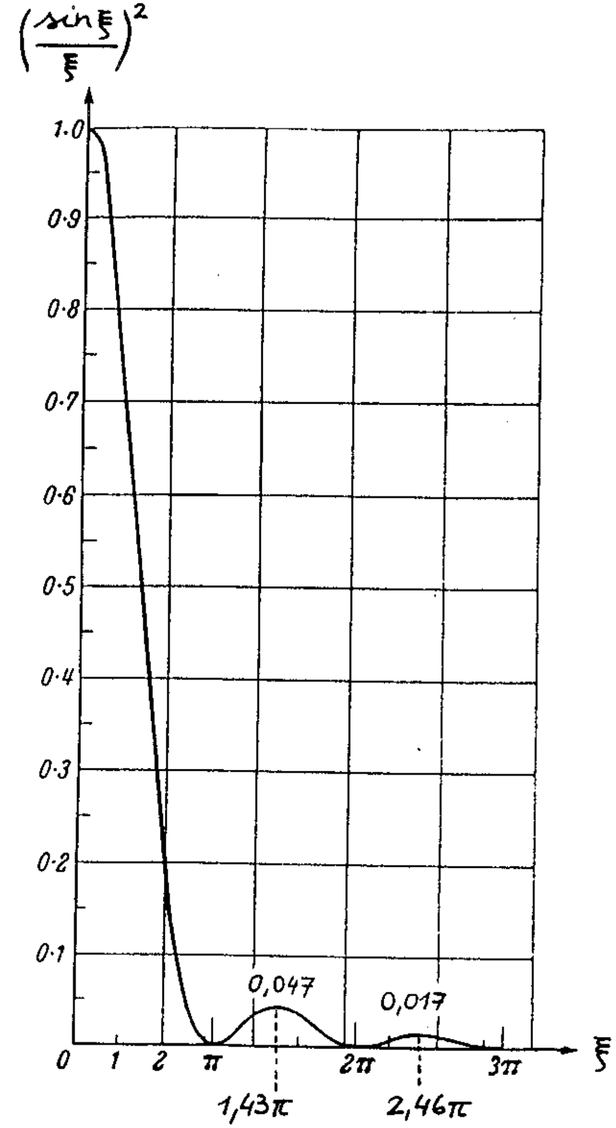
r nur schwach richtungsabhängig ($\approx z_0$)

γ nur schwach richtungsabhängig (≈ 1)

für Richtungen $\frac{\vec{r}}{r} \approx (0,0,1)$

Intensitätsverlauf auf Auffänger

$$I(\alpha,\beta) = \underset{I(0,0)}{C}\left(\frac{\sin\frac{\pi\alpha a}{\lambda}}{\frac{\pi\alpha a}{\lambda}}\right)^2\left(\frac{\sin\frac{\pi\beta b}{\lambda}}{\frac{\pi\beta b}{\lambda}}\right)^2 \qquad (31')$$



s. das Beugungsbild Seite XV-43

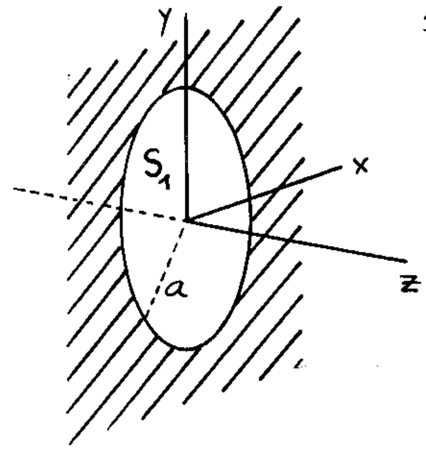
Die Intensität ist null entlang den zur y-Achse parallelen Linien

$$\frac{\pi\alpha a}{\lambda} = n_1\pi \quad \text{bzw.} \quad \frac{x}{r} = \alpha = n_1\frac{\lambda}{a} \quad , n_1 = \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (31a')$$

und entlang den zur x-Achse parallelen Linien

$$\frac{y}{r} = \beta = n_2\frac{\lambda}{b} \quad , n_2 = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Kreisöffnung



Annahme: Lichtquelle auf der z-Achse $\Rightarrow$ axiale Symmetrie bzgl. z-Achse

Auffänger parallel zur Schirmebene

$\Rightarrow$ es genügt, die Intensität für Punkte in Richtungen

$$\frac{\vec{r}}{r} = (\alpha, 0, \gamma) \quad \text{zu berechnen}$$

$$\vec{n}' = (0,0,1) \;,\; d^2f' = \rho' d\rho' d\varphi' \;,\; S_1 \ldots z' = 0, \quad \varphi' \in [0, 2\pi), \quad \rho' \in [0, a]$$

$$\vec{n}' \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \gamma \approx 1$$

$$\left(\frac{\vec{r}}{r} + \frac{\vec{R}}{R}\right) \cdot \vec{r}'\Big|_{z'=0} = \alpha x' = \alpha\rho'\cos\varphi'$$

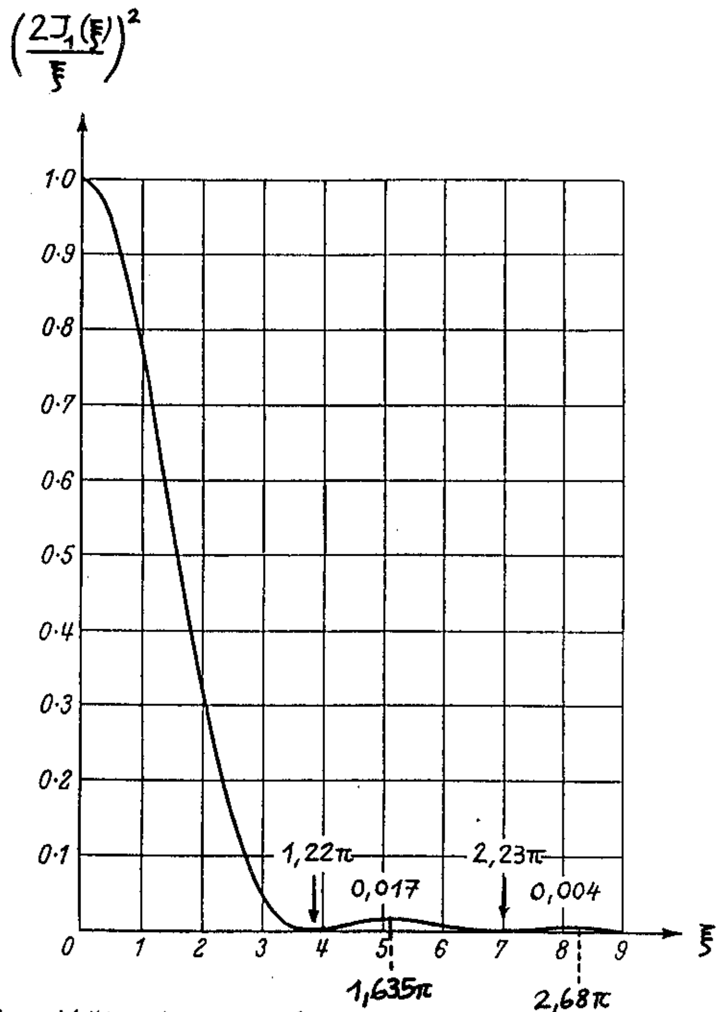
$$u(F) = \underbrace{-\frac{ik}{2\pi} A_0 \frac{e^{ikR}}{R} \frac{e^{ikr}}{r} \gamma}_{} \int_0^a d\rho'\rho' \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi'\, e^{-ik\alpha\rho'\cos\varphi'}}_{2\pi J_0(\underbrace{k\alpha\rho'}_{\frac{2\pi\alpha\rho'}{\lambda}})} \qquad (32a)$$

$|\ldots|^2$ analog wie bei Rechtecksöffnung $\approx$ konst.

$$\int_0^\xi d\eta\, \eta\, J_0(\eta) = \xi J_1(\xi) \qquad (32b)$$

$\Rightarrow$ Intensitätsverlauf auf Auffänger

$$I(\alpha) = C\left(\frac{2J_1\left(\frac{2\pi\alpha a}{\lambda}\right)}{\frac{2\pi\alpha a}{\lambda}}\right)^2 \qquad (33)$$



1. Intensitätsminimum bei

$$\frac{2\pi\alpha a}{\lambda} = 1{,}22\pi \quad \text{bzw.} \quad \frac{x}{r} = \alpha = 0{,}61\,\frac{\lambda}{a} \tag{33a}$$

s. das Beugungsbild Seite XV - 43

XV. 2. D. Fresnelbeugung

Definition: Von Fresnelbeugung spricht man, wenn in den Entwicklungen (27'), (27) die ersten drei Terme berücksichtigt werden müssen.

Fresnelbeugung liegt vor, wenn zwar

$$R, r \gg d \gg \lambda$$

erfüllt ist, Lichtquelle und Aufpunkt aber nicht so weit von der Schirmöffnung weg sind, wie dies für Fraunhoferbeugung verlangt wurde. (D.h., daß $\frac{R}{d}, \frac{r}{d} \gg \frac{d}{\lambda}$ nicht erfüllt ist.)

Man hat dann in die Kirchhoffsche Beugungsformel (24) im Integranden

$$|\vec r - \vec r'| + |\vec R - \vec r'| \approx r + R - \frac{\vec r\cdot\vec r'}{r} - \frac{\vec R\cdot\vec r'}{R} + \frac{r^2 r'^2 - (\vec r\cdot\vec r')^2}{2r^3} + \frac{R^2 r'^2 - (\vec R\cdot\vec r')^2}{2R^3} \tag{34}$$

einzusetzen.

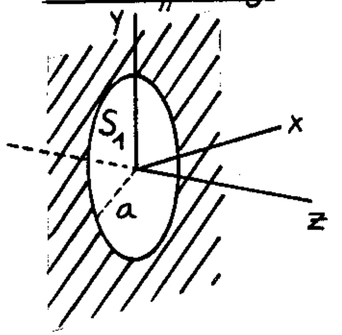
Fresnelbeugung

$$\boxed{u(\vec r) = -\frac{ik}{2\pi} A_0 \frac{e^{ikR}}{R}\frac{e^{ikr}}{r}\left(\vec n'\cdot\frac{\vec r}{r}\right)\cdot \int_{S_1} d^2f'\, e^{-ik\left(\frac{\vec r}{r}+\frac{\vec R}{R}\right)\cdot\vec r'}\, e^{ik\left(\frac{1}{2r}+\frac{1}{2R}\right)r'^2}\, e^{-ik\left(\frac{(\vec r\cdot\vec r')^2}{2r^3}+\frac{(\vec R\cdot\vec r')^2}{2R^3}\right)}} \tag{35}$$

Fresnelbeugung: auch für geometrisch einfache Öffnungen (Rechteck, Kreis) sehr kompliziert

Einfaches Beispiel:

Kreisöffnung



Annahmen:

1) Lichtquelle auf der z-Achse
2) Aufpunkt auf der z-Achse

$$\frac{\vec{R}}{R} = (0,0,-1)$$

$$\frac{\vec{r}}{r} = (0,0,1)$$

$$\vec{n}' = (0,0,1)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{n}'\cdot\frac{\vec{r}}{r} = 1\,, \quad \vec{R}\cdot\vec{r}\,' = 0\,, \quad \vec{r}\cdot\vec{r}\,' = 0$$

$$\vec{r} = (0,0,r)\,, \quad u(\vec{r}) = u(r)$$

$$u(r) = -\frac{ik}{2\pi} A_0 \frac{e^{ikR}}{R}\frac{e^{ikr}}{r}\int_{S_1} d^2f'\, e^{ik\left(\frac{1}{2r}+\frac{1}{2R}\right)r'^2} \qquad (36)$$

$$d^2f' = \rho' d\rho' d\varphi'\,, \quad S_1 \ldots z' = 0\,, \quad \varphi' \in [0,2\pi)\,, \rho' \in [0,a]$$

$$\Downarrow$$

$$r'^2 = \rho'^2 \text{ auf } S_1$$

$$u(r) = -\cancel{ik} A_0 \frac{e^{ikR}}{R}\frac{e^{ikr}}{r}\underbrace{\int_0^a d\rho'\rho'\, e^{ik\left(\frac{1}{2r}+\frac{1}{2R}\right)\rho'^2}}_{\frac{1}{\cancel{ik}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{R}\right)}\left(e^{ik\left(\frac{1}{2r}+\frac{1}{2R}\right)a^2}-1\right)}$$

$$u(r) = -A_0 \frac{e^{ik(r+R)}}{\cancel{rR}}\frac{\cancel{rR}}{r+R}\left(e^{ik\frac{r+R}{2rR}a^2}-1\right)$$

$$\left|e^{i\xi}-1\right|^2 = 4\sin^2\frac{\xi}{2}$$

Intensitätsverlauf längs der z-Achse für $r, R \gg a \gg \lambda$

$$I(r) = |A_0|^2\left(\frac{2\sin\frac{\pi a^2(r+R)}{2\lambda rR}}{r+R}\right)^2 \qquad (37)$$

$$\frac{\pi a^2(r+R)}{2\lambda rR} = n\pi \quad \text{bzw.} \quad a^2\frac{r+R}{rR} = 2n\lambda\,, \; n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow I(r) = 0 \quad \text{Dunkelheit}$$

Beachte:

1) Es dürfen natürlich für gegebenes R, a mit $R \gg a \gg \lambda$ nur solche $n \in \mathbb{N}$ eingesetzt werden, für welche $r \gg a$ erfüllt ist.

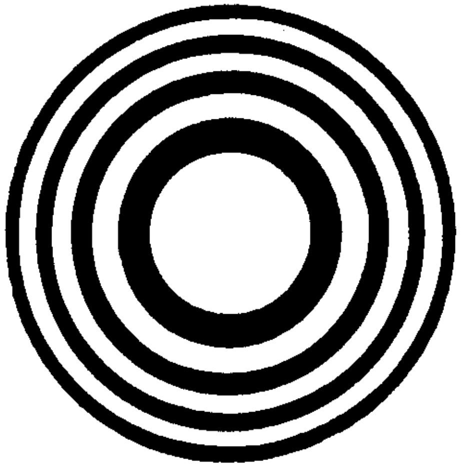
2) Unter den Bedingungen der Fraunhoferbeugung gilt

$$0 < \frac{\pi a^2(r+R)}{2\lambda rR} = \frac{\pi}{2}\frac{a}{\lambda}\left(\frac{a}{r}+\frac{a}{R}\right) \ll \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow I(r) \neq 0.$$

Fresnelsche Zonenlinse

$$I(r) = 0 \quad \text{falls} \quad a^2 \frac{r+R}{rR} = 2n\lambda \;, \; n \in \mathbb{N} \qquad (38)$$

Ist $\frac{a^2}{\lambda}\frac{r+R}{2rR}$ hinreichend groß (z.B. ~ 10) wobei $r, R \gg a \gg \lambda$ erfüllt sein muß[+)], so kann man durch Abdeckung geeigneter Kreisringzonen die Helligkeit im Aufpunkt ähnlich steigern wie wenn man eine geeignete Sammellinse in die Öffnung gibt.



+) z.B.: $\frac{a}{\lambda} = 1000$, $\frac{r}{a} = \frac{R}{a} = 100$

Aus Born / Wolf : Principles of Optics

geometrische Schatten= grenze ?

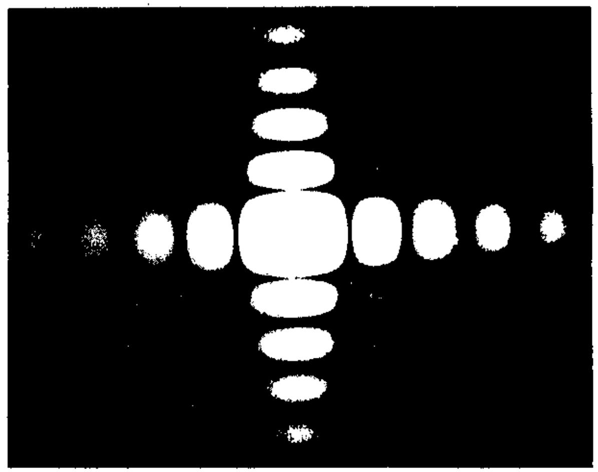


Fig. 8.10. FRAUNHOFER diffraction pattern of a rectangular aperture 8 mm × 7 mm, magnification 50×, mercury yellow light $\lambda = 5790$ Å. To show the existence of the weak secondary maxima the central portion was overexposed. (After H. LIPSON, C. A. TAYLOR, and B. J. THOMPSON.)

geometrische Schatten= grenze ?

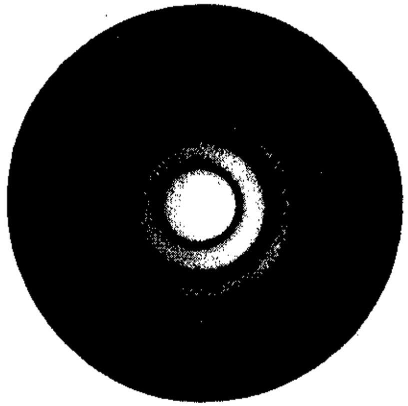


Fig. 8.12. FRAUNHOFER diffraction pattern of a circular aperture (the AIRY pattern) 6 mm in diameter, magnification 50×, mercury yellow light $\lambda = 5790$ Å. To show the existence of the weak subsidiary maxima, the central portion was overexposed. (After H. LIPSON, C. A. TAYLOR, and B. J. THOMPSON.)