FOLIEN VON D. GRAU ZUR VORLESUNG "ELEKTRODYNAMIK UND RELATIVITÄTSTHEORIE"

nach dem Skriptum von H. Nowotny

Kapitel 14

XIV. ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN IN MATERIE

XIV. 1. Wellenausbreitung in linearen homogenen und isotropen Medien mit $\rho(\vec{r},t) \equiv 0$ in der Materie

XIV. 1. A. Telegraphengleichungen

Annahme: Dispersion der Dielektrizität und Permeabilität vernachlässigbar (Frequenzen unterhalb IR-Bereich)

MG:

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{D}(\vec{r},t) = \varepsilon\vec{E}(\vec{r},t)\ , \ \vec{B}(\vec{r},t) = \mu\vec{H}(\vec{r},t)\\ \vec{j}(\vec{r},t) = \sigma\vec{E}(\vec{r},t)\end{gathered}} \qquad (1)$$

Einsetzen in die FG gibt dann für Raumgebiete mit $\rho(\vec{r},t) \equiv 0$ für $\vec{E}(\vec{r},t), \vec{H}(\vec{r},t)$*):

$$\boxed{\begin{array}{l|l} \operatorname{div}\vec{E}(\vec{r},t) = 0 & \operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{H}(\vec{r},t)}{\partial t} \\ \operatorname{div}\vec{H}(\vec{r},t) = 0 & \operatorname{rot}\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{4\pi\sigma}{c}\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}\end{array}} \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = \operatorname{grad}\underbrace{\operatorname{div}\vec{E}}_{0} - \Delta\vec{E}$$

$$= -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{4\pi\sigma}{c}\vec{E} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

analog $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H}$

*) $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E}\times\vec{H})$
$\equiv \vec{S}_{(mat)}$

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta\vec{E}(\vec{r},t) &= \cancel{\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t^2}} + \cancel{\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}}\\ \Delta\vec{H}(\vec{r},t) &= \cancel{\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}(\vec{r},t)}{\partial t^2}} + \cancel{\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\vec{H}(\vec{r},t)}{\partial t}}\end{aligned}} \qquad (3)$$

Telegraphengleichungen

Isolatoren /
metallische Leiter ---

notwendige Bdgn. für die Erfüllung der FG+MG

Isolatoren

$$\sigma = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned}\Delta\vec{E}(\vec{r},t) &= \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t^2}\\ \Delta\vec{H}(\vec{r},t) &= \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}(\vec{r},t)}{\partial t^2}\end{aligned}} \qquad (4)$$

Wellengleichungen

Wellen-Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \qquad (5)$$

Bemerkung: Die Telegraphengleichungen spielen bei der Behandlung der Wellenausbreitung längs Drähten eine Rolle (VS: hinreichend große Wellenlängen)

XIV. 1.B. Berücksichtigung der Dispersion.

Fouriertransformation bzgl. der Zeitvariablen

MG:

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{D}(\vec{r},\omega)=\varepsilon(\omega)\vec{E}(\vec{r},\omega)\ ,\quad \vec{B}(\vec{r},\omega)=\mu(\omega)\vec{H}(\vec{r},\omega)\\ \vec{j}(\vec{r},\omega)=\sigma\vec{E}(\vec{r},\omega)\end{gathered}} \qquad (6)$$

Einsetzen in die bzgl. t fouriertransf. FG gibt dann für Raumgebiete mit $\rho(\vec{r},t)\equiv 0$ für $\vec{E}(\vec{r},\omega), \vec{H}(\vec{r},\omega)$:

$$\begin{aligned}&\mathrm{div}\,\vec{E}(\vec{r},\omega)=0 &\quad &\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r},\omega)=i\,\frac{\omega\mu(\omega)}{c}\,\vec{H}(\vec{r},\omega)\\ &\mathrm{div}\,\vec{H}(\vec{r},\omega)=0 & &\mathrm{rot}\,\vec{H}(\vec{r},\omega)=\frac{4\pi\sigma}{c}\,\vec{E}(\vec{r},\omega)-i\,\frac{\omega\varepsilon(\omega)}{c}\,\vec{E}(\vec{r},\omega)\\ & & &\qquad =-i\,\frac{\omega}{c}\underbrace{\left(\varepsilon(\omega)+i\,\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)}_{=:\,\eta(\omega)}\vec{E}(\vec{r},\omega)\end{aligned} \qquad (8)$$

Definition: verallgemeinerte Dielektrizitätsfunktion

$$\eta(\omega)=\varepsilon(\omega)+i\,\frac{4\pi\sigma}{\omega} \qquad (9)$$

(8) $\Longrightarrow$ (Rotorbildung in den Rotorgln.)

$$\boxed{\begin{aligned}\left[\Delta+\frac{\omega^2}{c^2}\eta(\omega)\mu(\omega)\right]\vec{E}(\vec{r},\omega)&=\vec{0}\\ \left[\Delta+\frac{\omega^2}{c^2}\eta(\omega)\mu(\omega)\right]\vec{H}(\vec{r},\omega)&=\vec{0}\end{aligned}} \qquad (10)$$

(notwendige Bdgn. für Erfüllung der FG + MG)

XIV. 1.C. Monochromatische "ebene Wellen" mit Kreisfrequenz ω

$$\begin{aligned}&\mathrm{div}\,\vec{E}(\vec{r},\omega)=0 &\quad &\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r},\omega)=i\,\frac{\omega}{c}\,\mu(\omega)\,\vec{H}(\vec{r},\omega)\\ &\mathrm{div}\,\vec{H}(\vec{r},\omega)=0 & &\mathrm{rot}\,\vec{H}(\vec{r},\omega)=-i\,\frac{\omega}{c}\,\eta(\omega)\,\vec{E}(\vec{r},\omega)\end{aligned}$$

Ansatz: monochromatische "ebene Welle"

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}+c.c. \qquad (11a)$$

$$\vec{H}(\vec{r},t)=\vec{H}_0\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}+c.c. \qquad (11b)$$

Entspricht einer Fourierkomponente.
$\vec{\nabla}\rightarrow i\vec{k}$ für Wirkung auf 1. Term $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}&\vec{k}\cdot\vec{E}_0=0 &\quad &\vec{k}\times\vec{E}_0=\frac{\omega}{c}\,\mu(\omega)\,\vec{H}_0\\ &\vec{k}\cdot\vec{H}_0=0 & &\vec{k}\times\vec{H}_0=-\frac{\omega}{c}\,\eta(\omega)\,\vec{E}_0\end{aligned} \qquad (13)$$

Gln. (13) dann und nur dann widerspruchsfrei, wenn

$$\boxed{\vec{k}^2\equiv\vec{k}\cdot\vec{k}\equiv k^2=\frac{\omega^2}{c^2}\,\eta(\omega)\,\mu(\omega)} \qquad (14)$$

Dispersionsbeziehung

i.a. komplex!

Beachte: Im Fall des Vakuums war $\vec{k}$ ein reeller Vektor ($\vec{k}=k\vec{n}$ mit reellem k und einem reellen Einheitsvektor $\vec{n}$) und es war $\vec{k}, \vec{E}, \vec{B}=\vec{H}$ ein orthog. Dreibein mit $|\vec{E}|=|\vec{B}|$ und $\vec{E}, \vec{B}$ in Phase.

Für festes t halten $\vec{E}, \vec{B}$ in allen Punkten einer festen Ebene $\perp \vec{n}$ gleiche Werte: ebene Welle

HIER:

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \qquad \vec{k} \times \vec{E}_0 = \frac{\omega}{c} \mu(\omega) \vec{H}_0$$

$$\vec{k} \cdot \vec{H}_0 = 0 \qquad \vec{k} \times \vec{H}_0 = -\frac{\omega}{c} \eta(\omega) \vec{E}_0$$

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = \vec{k}^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \eta(\omega) \mu(\omega)$$

$$\boxed{\vec{k} = \vec{k}_r + i \vec{k}_i \quad \text{i.a. komplexer Vektor}} \quad \Longrightarrow$$

$$\underline{\vec{k} \cdot \vec{k} = k^2 = k_r^2 - k_i^2 + 2i \vec{k}_r \cdot \vec{k}_i = \frac{\omega^2}{c^2} \eta(\omega) \mu(\omega)}$$

$$\underline{e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} = e^{i \vec{k}_r \cdot \vec{r}} \cdot e^{-\vec{k}_i \cdot \vec{r}}}$$

1) $|\vec{E}_0| \neq |\vec{H}_0|$

2) $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ i.a. nicht "in Phase"

3) Ebenen $\perp \vec{k}_r$ = Ebenen konstanter Phase

Ebenen $\perp \vec{k}_i$ = Ebenen konstanter Amplitude
(falls $\vec{k}_i \neq \vec{0}$) (Betrag)

Flächen, auf denen für festes t die Feldstärken selbst überall gleich sind, sind i.a. nicht einmal Ebenen!

"Ebene Welle" ist also für komplexes $\vec{k}$ nicht mehr als ein (unglücklicher) Name: man spricht im Falle eines komplexen $\vec{k}$-Vektors auch von einer "inhomogenen ebenen Welle".

4) $$\vec{k} \cdot \vec{k} = k_r^2 - k_i^2 + 2i \vec{k}_r \cdot \vec{k}_i = \frac{\omega^2}{c^2} \eta(\omega) \mu(\omega)$$

$$= k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(\varepsilon(\omega) + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right) \mu(\omega)$$

zeigt:

Dann und nur dann, wenn

$$\sigma = 0 \ , \quad \varepsilon(\omega), \mu(\omega) \text{ reell}$$

d.h.: Isolator und ω aus Transparenzbereich

gilt, ist $k = \sqrt{\vec{k}^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega) \mu(\omega)}$ reell und $\vec{k}$ reell ist möglich (s. Bemerkung 5!)

Für reelles $\vec{k}$ hat man es dann mit einer ungedämpften "gewöhnlichen" ebenen Welle mit Ausbreitungsrichtung $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k}$ (reeller Einheitsvektor) zu tun, und aus

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad , \vec{k} \times \vec{E}_0 = \frac{\omega}{c} \mu(\omega) \vec{H}_0$$

folgt $\vec{k}, \vec{E}, \vec{H}^{+)}$ orthogonales Dreibein (Rechtssystem) mit $\vec{E}, \vec{H}^{+)}$ in Phase und

$$|\vec{H}| = \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\mu(\omega)}} \, |\vec{E}| \quad \left(|\vec{B}| = \sqrt{\varepsilon(\omega) \mu(\omega)} \, |\vec{E}| \right)^{+)} \text{bzw. } \vec{B}$$

5) Die FG + MG besitzen aber auch im Fall

$$\sigma = 0 \ , \ \varepsilon(\omega), \ \mu(\omega) \text{ reell}$$

$$\Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{k} = k_r^2 - k_i^2 + 2i\vec{k}_r\cdot\vec{k}_i$$

$$= k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon(\omega)\mu(\omega) \quad \text{reell} > 0$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{k^2} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)} \quad \text{reell}$$

"inhomogene ebene Wellen" als Lösungen;

in $\quad \vec{k} = \vec{k}_r + i\vec{k}_i$

muß dann lediglich $\vec{k}_r\cdot\vec{k}_i = 0$ erfüllt sein.

Eine derartige "ebene Welle" spielt bei der Totalreflexion an der Grenzfläche zweier Dielektrika eine Rolle. (Exponentielles Abklingen in Richtung von $\vec{k}_i$ ohne Dissipation!) ●

Verallgemeinerter Brechungsindex

Definition: verallgemeinerter Brechungsindex

$$p(\omega) = \sqrt{\eta(\omega)\mu(\omega)} = \underset{\text{Re}\,p(\omega)}{n(\omega)} + i\underset{\text{Im}\,p(\omega)}{\kappa(\omega)} \tag{15}$$

$$\Rightarrow \boxed{k = \frac{\omega}{c}\,p(\omega) \quad \text{Dispersionsbeziehung}} \tag{16}$$

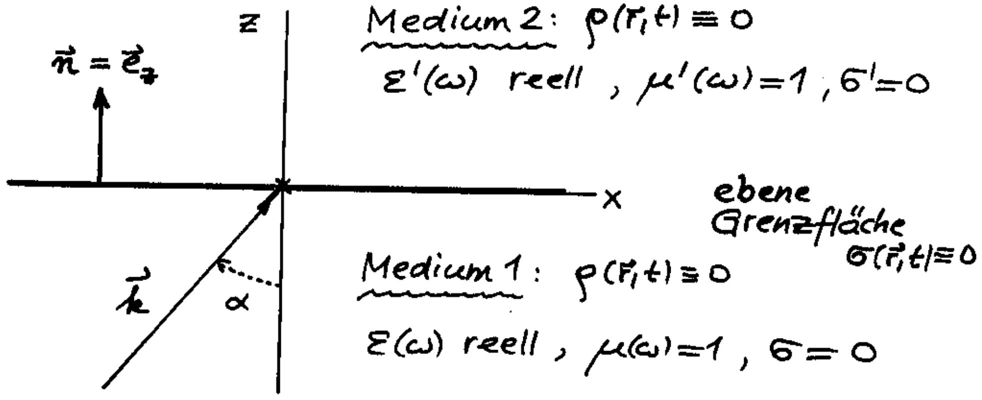
Spezialfall:

$$\sigma = 0 \ , \ \varepsilon(\omega), \ \mu(\omega) \text{ reell}$$

$$\Rightarrow p(\omega) = n(\omega) \qquad (\kappa(\omega) = 0) \tag{17}$$

$$k = \frac{\omega}{c}\,n(\omega) \quad \text{mit} \quad n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}$$

XIV. 2. Reflexion, Brechung und Totalreflexion an der ebenen Grenzfläche zweier Dielektrika (monochromatische Wellen, ω aus Transparenzbereich beider Medien)



Medium 2: $\rho(\vec{r},t) \equiv 0$
$\varepsilon'(\omega)$ reell, $\mu'(\omega) = 1$, $\sigma' = 0$

Medium 1: $\rho(\vec{r},t) \equiv 0$
$\varepsilon(\omega)$ reell, $\mu(\omega) = 1$, $\sigma = 0$

Vorgegeben: einfallende Welle = "gewöhnliche" monochromatische ebene Welle ($\vec{k}$ reeller Vektor)

$$\vec{k} = k\,(\sin\alpha, 0, \cos\alpha) \ , \ \alpha \in [0, \tfrac{\pi}{2})$$

Wahl des Koordinatensystems!

XIV. 2.A. Ansatz. Reflexions- und Brechungsgesetz

Einfallende Welle (vorgegeben)

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= \vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + c.c.\\ \vec{D}(\vec{r},t) &= \vec{D}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + c.c.\\ \vec{H}(\vec{r},t) &= \vec{H}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + c.c. \;=\; \vec{B}(\vec{r},t)\end{aligned}} \qquad (19a)$$

mit

$$\vec{k} = k\,\underbrace{(\sin\alpha,\, 0,\, \cos\alpha)}_{\text{reeller Einheitsvektor, gibt Ausbreitungsrichtung an}} \;,\quad \alpha\in[0,\tfrac{\pi}{2})$$

ebenfalls reell: $k = \frac{\omega}{c}\, n(\omega)$, $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$ (20-1), (21-1)

$$\vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0$$

$$\vec{D}_0 = \varepsilon(\omega)\,\vec{E}_0$$

$$\vec{H}_0 = \frac{c}{\omega}\,(\vec{k}\times\vec{E}_0) \qquad (22\text{-}1)$$

Erfüllt FG + MG im Medium 1.

Ansatz im Medium 1:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}_1(\vec{r},t) &= \vec{E}(\vec{r},t) + \vec{E}''(\vec{r},t)\\ \vec{D}_1(\vec{r},t) &= \vec{D}(\vec{r},t) + \vec{D}''(\vec{r},t)\\ \vec{H}_1(\vec{r},t) &= \vec{H}(\vec{r},t) + \vec{H}''(\vec{r},t) \;=\; \vec{B}_1(\vec{r},t)\end{aligned}}$$

einfallende + reflektierte Welle

mit der vorgegebenen einfallenden Welle und der zu bestimmenden reflektierten Welle

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}''(\vec{r},t) &= \vec{E}''_0\, e^{i(\vec{k}''\cdot\vec{r}-\omega t)} + c.c.\\ \vec{D}''(\vec{r},t) &= \vec{D}''_0\, e^{i(\vec{k}''\cdot\vec{r}-\omega t)} + c.c.\\ \vec{H}''(\vec{r},t) &= \vec{H}''_0\, e^{i(\vec{k}''\cdot\vec{r}-\omega t)} + c.c.\end{aligned}} \qquad (19b)$$

mit

$$k'' = k = \frac{\omega}{c}\, n(\omega) = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon(\omega)} \qquad (20\text{-}2)$$

$$\vec{k}''\cdot\vec{E}''_0 = 0$$

$$\vec{D}''_0 = \varepsilon(\omega)\,\vec{E}''_0$$

$$\vec{H}''_0 = \frac{c}{\omega}\,(\vec{k}''\times\vec{E}''_0) \qquad (22\text{-}2)$$

FG + MG linear!

Erfüllt FG + MG im Medium 1 ⇒ auch Ansatz für Gesamtfelder erfüllt FG + MG im Medium 1.

Bemerkungen:

1) $\vec{k}''$: voerst nur $\vec{k}''\cdot\vec{k}'' \equiv k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\omega)$ bekannt, "Rest" muß noch bestimmt werden (Anschlußbdgn!)

Ergebnis : $\vec{k}''$ reeller Vektor $\Rightarrow$ reflektierte Welle stets "gewöhnliche" ebene Welle (s. später)

$\vec{E}_0''$: muß ebenfalls aus Anschlußbedingungen bestimmt werden, wobei auch noch $\vec{k}''\cdot\vec{E}_0'' = 0$ erfüllt werden muß

2) $\left.\begin{array}{l}\text{FG linear}\\ \text{MG linear}\\ \text{Anschlußbdgn. linear}\\ \text{Fouriertransformation linear}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{alle Teilwellen}\\ \text{müssen gleiche}\\ \text{Frequenz}\\ \text{besitzen}\end{array}$

Ansatz im Skriptum mit $\omega, \omega', \omega''$ möglich, aber nicht erforderlich.

Ansatz im Medium 2 :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}_2(\vec{r},t) &= \vec{E}'(\vec{r},t) = \vec{E}_0'\, e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega t)} + c.c.\\ \vec{D}_2(\vec{r},t) &= \vec{D}'(\vec{r},t) = \vec{D}_0'\, e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega t)} + c.c.\\ \vec{H}_2(\vec{r},t) &= \vec{H}'(\vec{r},t) = \vec{H}_0'\, e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega t)} + c.c.\end{aligned}} \qquad (19c)$$

mit

$$k' = \frac{\omega}{c} n'(\omega) \quad , \quad n'(\omega) = \sqrt{\varepsilon'(\omega)} \qquad (20\text{-}3),$$

$$\vec{k}'\cdot\vec{E}_0' = 0 \qquad (21\text{-}3)$$

$$\vec{D}_0' = \varepsilon'(\omega)\,\vec{E}_0'$$

$$\vec{H}_0' = \frac{c}{\omega}\,(\vec{k}'\times\vec{E}_0') \qquad (22\text{-}3)$$

Erfüllt FG + MG im Medium 2.

Bemerkungen:

$\vec{k}'$: Vorerst nur $\vec{k}'\cdot\vec{k}' \equiv k'^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n'^2(\omega)$ bekannt, "Rest" muß aus Anschlußbdgn. bestimmt werden

Ergebnis wird sein (s. später):

a) falls $n'(\omega) > n(\omega)$: $\vec{k}'$ stets reeller Vektor

$\Rightarrow$ Welle im Medium 2 "gewöhnliche" ebene Welle : gebrochene Welle, da Lichtbrechung an Grenzfläche

b) falls $n'(\omega) < n(\omega)$:

Fallunterscheidung:

b1) $\alpha < \arcsin \frac{n'(\omega)}{n(\omega)} \Rightarrow \vec{k}'$ reeller Vektor

$\Rightarrow$ Welle im Medium 2 "gewöhnliche" ebene Welle : gebrochene Welle, da Lichtbrechung an Grenzfläche

b2) $\alpha > \arcsin \frac{n'(\omega)}{n(\omega)} \Rightarrow \vec{k}' = \vec{k}'_r + i\vec{k}'_i$ komplexer Vektor (mit $\vec{k}'_r \cdot \vec{k}'_i = 0$)

$\Rightarrow$ Welle im Medium 2 "inhomogene ebene Welle" : Lichthaut im Medium 2, Totalreflexion

Spricht man auch in diesem Fall von "Brechung" und "gebrochener Welle", So Sollte man Anführungszeichen anbringen.

$\vec{E}'_0$: muß ebenfalls aus Anschlußbedingungen bestimmt werden, wobei noch die Nebenbedingung $\vec{k}' \cdot \vec{E}'_0 = 0$ erfüllt werden muß ●

Anschlußbedingungen

Stetigkeit der Normalkomponenten = z-Komponenten von $\vec{D}$ (**keine freien Flächenladungen**) und $\vec{B} = \vec{H}$

$$\varepsilon(\omega) \left[\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{E}''(\vec{r},t) \right] \cdot \vec{e}_z = \varepsilon'(\omega) \vec{E}'(\vec{r},t) \cdot \vec{e}_z \qquad (23a)$$

$$\left[\vec{H}(\vec{r},t) + \vec{H}''(\vec{r},t) \right] \cdot \vec{e}_z = \vec{H}'(\vec{r},t) \cdot \vec{e}_z \qquad (23b)$$

Nur jeweils Terme mit $e^{-i\omega t}$ einsetzen!

für $z = 0$, $\forall x, y, \cancel{t}$

Stetigkeit der Tangentialkomponenten = x-, y-Komponenten von $\vec{E}$ und $\vec{H}$ (keine freien Flächenströme)

$$\left[\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{E}''(\vec{r},t) \right] \times \vec{e}_z = \vec{E}'(\vec{r},t) \times \vec{e}_z \qquad (23c)$$

$$\left[\vec{H}(\vec{r},t) + \vec{H}''(\vec{r},t) \right] \times \vec{e}_z = \vec{H}'(\vec{r},t) \times \vec{e}_z \qquad (23d)$$

für $z = 0$, $\forall x, y, \cancel{t}$

Bemerkung: $\cancel{t}$ Die Erfüllung für $\forall t$ ist gewährleistet, wenn die Bdgn. für irgendein t (z.B. $t=0$) erfüllt sind, da sich $e^{-i\omega t}$ "herauskürzt".

Hätte man in $\vec{E}, \vec{E}'', \vec{E}'$ Frequenzen $\omega, \omega'', \omega'$ angesetzt, hätte man hier aus der Forderung $\forall t \Rightarrow \omega'' = \omega' = \omega$ erhalten. ● (25)

Reflexions- und Brechungsgesetz

Notwendige Bedingungen für die Erfüllung der Anschlußbedingungen folgen aus der Forderung

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{i\vec{k}''\cdot\vec{r}} = e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}} \quad \underline{\text{für } z=0,} \quad \underline{\forall x,y} \qquad (24)$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, welche die Berechnung von $\vec{k}'', \vec{k}'$ gestatten, so sind die Anschlußbedingungen für $\forall x,y$ erfüllt, wofern sie (mit den gefundenen $\vec{k}'', \vec{k}'$) für $x=y=0$ erfüllt sind ("Herauskürzen" aller e-Potenzen). Zu erfüllen bleiben dann also noch

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon(\omega)\,(\vec{E}_0+\vec{E}_0'')\cdot\vec{e}_z &= \varepsilon'(\omega)\,\vec{E}_0'\cdot\vec{e}_z \\ (\vec{H}_0+\vec{H}_0'')\cdot\vec{e}_z &= \vec{H}_0'\cdot\vec{e}_z \\ (\vec{E}_0+\vec{E}_0'')\times\vec{e}_z &= \vec{E}_0'\times\vec{e}_z \\ (\vec{H}_0+\vec{H}_0'')\times\vec{e}_z &= \vec{H}_0'\times\vec{e}_z \end{aligned}}$$

mit $\vec{k}'', \vec{k}'$ von "oben"

mit $\vec{H}_0 = \frac{c}{\omega}(\vec{k}\times\vec{E}_0)$, $\vec{H}_0'' = \frac{c}{\omega}(\vec{k}''\times\vec{E}_0'')$

$\vec{H}_0' = \frac{c}{\omega}(\vec{k}'\times\vec{E}_0')$, $\vec{k}''\cdot\vec{E}_0'' = \vec{k}'\cdot\vec{E}_0' = 0$

Damit hat man dann notwendige und hinreichende Bdgn.

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{i\vec{k}''\cdot\vec{r}} = e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}}, \quad z=0, \forall x,y$$

$$\Rightarrow \quad \vec{k}\times\vec{e}_z = \vec{k}''\times\vec{e}_z = \vec{k}'\times\vec{e}_z \qquad (26)$$

d.h.

$$k_x'' = k_x' = k_x$$

$$k_y'' = k_y' = k_y = 0 \quad \text{(Wahl des KS)}$$

Konsequenzen

1) $\vec{k}''$

$$\vec{k} = (k_x, 0, k_z) = k\,(\sin\alpha, 0, \cos\alpha) \quad \underline{\text{gegeben}} \; (27\text{-}1)$$

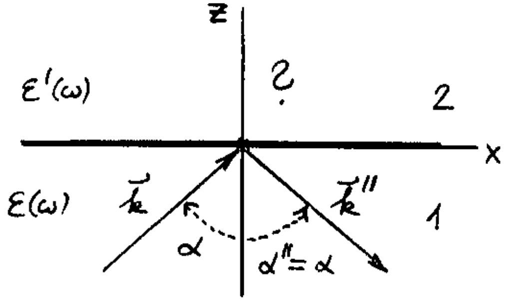
$$\vec{k}'' = (\underset{\uparrow}{k_x}, \underset{\uparrow}{0}, k_z'') \quad \underline{\text{gefragt}}$$

$$\vec{k}''\cdot\vec{k}'' \equiv \underline{k''^2} = \underline{k_x^2 + k_z''^2} = \underline{k^2} = \underline{k_x^2 + k_z^2} \quad \Rightarrow$$

$$k_z'' = \overset{(+)}{-}k_z$$

$$\boxed{\vec{k}'' = k\,(\sin\alpha, 0, -\cos\alpha) \quad \underline{\text{Reflexionsgesetz}}}$$

$\vec{k}''$ reeller Vektor ⇒ reflektierte Welle "gewöhnliche" ebene Welle



2) $\vec{k}'$

$\vec{k} = (k_x, 0, k_z) = k(\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$ gegeben

$\vec{k}' = (\underset{\uparrow}{k_x}, \underset{\uparrow}{0}, k_z')$ gefragt

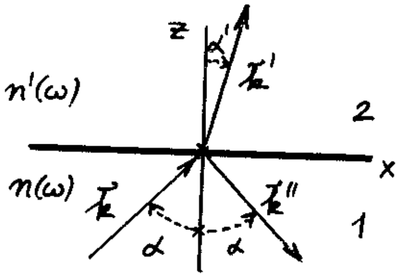
$$\vec{k}'\cdot\vec{k}' \equiv \underline{k'^2} = k_x^2 + k_z'^2 = \frac{\omega^2}{c^2}n'^2(\omega)\,,\quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}n^2(\omega)$$

$$= k^2\sin^2\alpha + k_z'^2 = k^2\,\frac{n'^2(\omega)}{n^2(\omega)} \Rightarrow$$

$$k_z'^2 = k^2\left(\frac{n'^2(\omega)}{n^2(\omega)} - \sin^2\alpha\right)$$

a) falls $n'(\omega) > n(\omega)$ Medium 2 "optisch dichter"

$\Longrightarrow \frac{n'(\omega)}{n(\omega)} > 1$ k_z' reell



$\vec{k}'$ reeller Vektor $\Rightarrow$ Welle im Medium 2 = gebrochene Welle "gewöhnliche" ebene Welle

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{k}' &= k'(\sin\alpha', 0, \cos\alpha') \\ \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} &= \frac{n'(\omega)}{n(\omega)} \quad \text{Brechungsgesetz}\end{aligned}}$$

mit $k'\sin\alpha' = k\sin\alpha$ (27-3), $k' = k\frac{n'(\omega)}{n(\omega)}$

(31b)

Brechung "zum Lot"

$$k_z'^2 = k^2\left(\frac{n'^2(\omega)}{n^2(\omega)} - \sin^2\alpha\right)$$

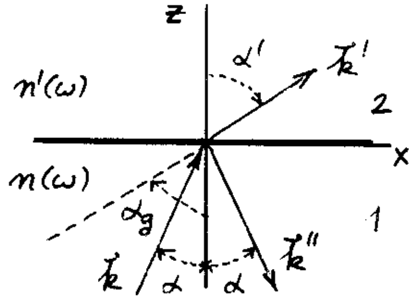
b) falls $n'(\omega) < n(\omega)$ Medium 2 "optisch dünner"

$\Longrightarrow \frac{n'(\omega)}{n(\omega)} < 1$

b1) Einfallswinkel kleiner als Grenzwinkel der Totalreflexion

$$\alpha < \alpha_g := \arcsin\frac{n'(\omega)}{n(\omega)} \qquad (51)$$

$\Longrightarrow \frac{n'(\omega)}{n(\omega)} = \sin\alpha_g > \sin\alpha$ k_z' reell



$\vec{k}'$ reeller Vektor $\Rightarrow$ Welle im Medium 2 = gebrochene Welle "gewöhnliche" ebene Welle

Rest wie bei Fall a)

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{k}' &= k'(\sin\alpha', 0, \cos\alpha') \\ \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} &= \frac{n'(\omega)}{n(\omega)} \quad \text{Brechungsgesetz}\end{aligned}}$$

(27-3)

(31b)

Brechung "vom Lot"

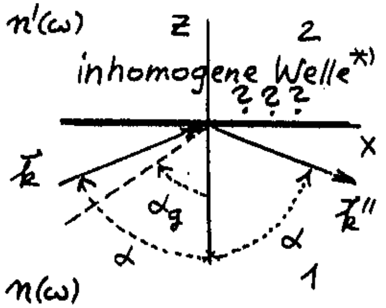
$\alpha \uparrow \alpha_g \Longrightarrow \alpha' \uparrow \frac{\pi}{2}$ "streifender Ausfall" der gebrochenen Welle

$$k_z'^2 = k^2 \left(\frac{n'^2(\omega)}{n^2(\omega)} - \sin^2\alpha \right)$$

b2) Einfallswinkel größer als Grenzwinkel der Totalreflexion

$$\alpha > \alpha_g = \arcsin \frac{n'(\omega)}{n(\omega)}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{n'(\omega)}{n(\omega)} = \sin\alpha_g < \sin\alpha \qquad k_z' \text{ imaginär}$$



$\vec{k}'$ kein reeller Vektor ⇒ Welle im Medium 2 ("gebrochene Welle") ist "Inhomogene Welle":

*) "Lichthaut" Diskussion später: "Totalreflexion"

$$\vec{k}' = (k\sin\alpha, 0, k_z')$$

$$k_z' = (\pm) ik \sqrt{\sin^2\alpha - \frac{n'^2(\omega)}{n^2(\omega)}}$$

Vorzeichenwahl so, daß $\vec{k}_i'$ in positive z-Richtung zeigt: inhomogene Welle klingt dann in positive z-Richtung exponentiell ab.

Ferner gilt $\vec{k}_r' = k\sin\alpha\,\vec{e}_x$, inhomogene Welle läuft also in positive x-Richtung, und es gilt wie erforderlich $\vec{k}_r' \cdot \vec{k}_i' = 0$.

"Trick", mit dem man es vermeidet, die weitere Auswertung der Anschlußbedingungen für die Fälle a), b1) einerseits, b2) andrerseits getrennt durchführen zu müssen

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{k}' = k'(\sin\alpha', 0, \cos\alpha') & \\ \dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \dfrac{n'(\omega)}{n(\omega)} \quad \text{"Brechungsgesetz"} & \\ \text{formal auch im Fall b2) (Totalreflexion) verwendet} & \end{array}}$$

(27-3)

(31b)

Beachte: Für $n'(\omega) < n(\omega)$ und

$$\underline{\sin\alpha > \sin\alpha_g} = \frac{n'(\omega)}{n(\omega)} \quad \text{gilt}$$

$$\underline{\sin\alpha'} = \frac{\sin\alpha}{\frac{n'(\omega)}{n(\omega)}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_g} \underline{> 1} \qquad \alpha' \text{ komplex!}$$

(52a)

Da aber Sinus und Cosinus analytische Funktionen im Komplexen sind, ist es erlaubt, in allen Rechnungen obigen Ausdruck für $\vec{k}'$ sowie das "Brechungsgesetz" auch für komplexes α' zu benützen.

$$\vec{k}' \cdot \vec{k}' = k'^2 (\sin^2\alpha' + \cos^2\alpha') = k'^2 \quad ✓$$

$$k_x' = k_x \quad ✓ \qquad k_z'^2 = k^2 \left(\frac{n'^2}{n^2} - \sin^2\alpha \right) \quad ✓$$

Die Fallunterscheidung muß dann erst bei der Diskussion der Endergebnisse getroffen werden!

XIV. 2.B. Anschlußbedingungen für die komplexen Amplitudenvektoren

(23):

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon(\omega)\,(\vec{E}_0+\vec{E}_0'')\cdot\vec{e}_z &= \varepsilon'(\omega)\,\vec{E}_0'\cdot\vec{e}_z \\ (\vec{H}_0+\vec{H}_0'')\cdot\vec{e}_z &= \vec{H}_0'\cdot\vec{e}_z \\ (\vec{E}_0+\vec{E}_0'')\times\vec{e}_z &= \vec{E}_0'\times\vec{e}_z \\ (\vec{H}_0+\vec{H}_0'')\times\vec{e}_z &= \vec{H}_0'\times\vec{e}_z \end{aligned}}$$

$\vec{H}_0+\vec{H}_0''=\vec{H}_0'$

mit (s.(22))

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{H}_0 = \frac{c}{\omega}\,(\vec{k}\times\vec{E}_0)\quad,\quad \vec{H}_0''=\frac{c}{\omega}\,(\vec{k}''\times\vec{E}_0'') \\ &\vec{H}_0' = \frac{c}{\omega}\,(\vec{k}'\times\vec{E}_0') \end{aligned}}$$

(s.(27) und (29))

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{k} &= k\,(\sin\alpha,\,0,\,\cos\alpha) \\ \vec{k}'' &= k\,(\sin\alpha,\,0,\,-\cos\alpha) \\ \vec{k}' &= k'\,(\sin\alpha',\,0,\,\cos\alpha') \end{aligned}}$$

$$\underline{k' = k\,\frac{n'(\omega)}{n(\omega)}}\quad,\quad \underline{\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{n'(\omega)}{n(\omega)} = \frac{k'}{k}}$$

$$\left(\vec{k}\cdot\vec{E}_0=\right)\underline{\vec{k}''\cdot\vec{E}_0'' = \vec{k}'\cdot\vec{E}_0' = 0}$$

---

bzw.

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon(\omega)\,(\vec{E}_0+\vec{E}_0'')\cdot\vec{e}_z &= \varepsilon'(\omega)\,\vec{E}_0'\cdot\vec{e}_z && (32) \\ (\vec{E}_0+\vec{E}_0'')\cdot\vec{e}_x &= \vec{E}_0'\cdot\vec{e}_x && \\ (\vec{E}_0+\vec{E}_0'')\cdot\vec{e}_y &= \vec{E}_0'\cdot\vec{e}_y && (33) \\ (\vec{k}\times\vec{E}_0)+(\vec{k}''\times\vec{E}_0'') &= \vec{k}'\times\vec{E}_0' && (34) \end{aligned}}$$

$\vec{H}_0+\vec{H}_0''=\vec{H}_0'$

$\cancel{\frac{c}{\omega}}$

mit

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{k} &= k\,(\sin\alpha,\,0,\,\cos\alpha) \\ \vec{k}'' &= k\,(\sin\alpha,\,0,\,-\cos\alpha) \\ \vec{k}' &= k'\,(\sin\alpha',\,0,\,\cos\alpha') \end{aligned}}$$

$$\underline{\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{k'}{k} = \frac{n'(\omega)}{n(\omega)}}$$

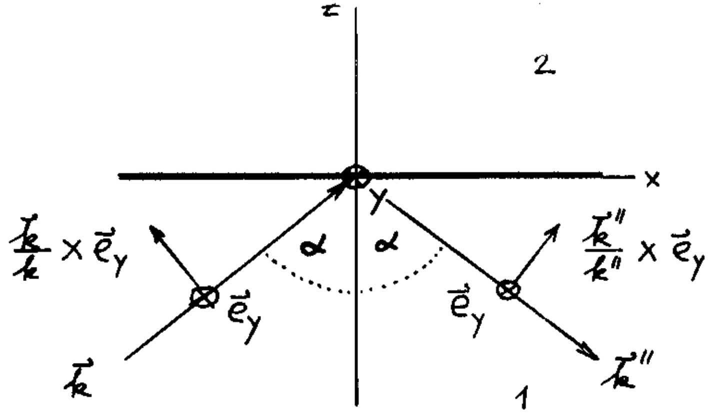
$$\left(\vec{k}\cdot\vec{E}_0=\right)\underline{\vec{k}''\cdot\vec{E}_0'' = \vec{k}'\cdot\vec{E}_0' = 0}$$

Zerlegung von $\vec{E}_0$, $\vec{E}_0''$ in Komponenten parallel und senkrecht zur Einfallsebene

$$\underline{\vec{E}_0 = E_s\,\vec{e}_y + E_p\left(\frac{\vec{k}}{k}\times\vec{e}_y\right)} \qquad (35)$$

$$\underline{\vec{E}_0'' = E_s''\,\vec{e}_y + E_p''\left(\frac{\vec{k}''}{k''}\times\vec{e}_y\right)} \qquad (37\text{-}1)$$

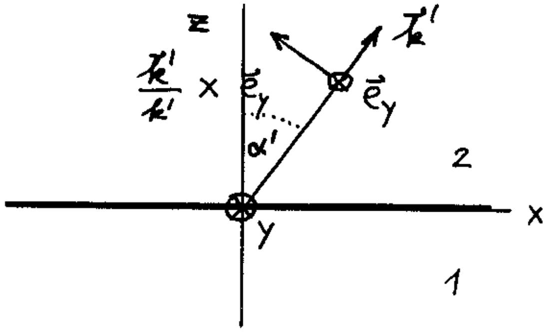
Damit $\vec{k}\cdot\vec{E}_0=0$, $\vec{k}''\cdot\vec{E}_0''=0$ "automatisch" erfüllt.



Zerlegung von $\vec{E}_0'$ in eine Komponente parallel und senkrecht zur Einfallsebene, falls $\vec{k}'$ = reeller Vektor (Brechung):

$$\vec{E}_0' = E_s'\,\vec{e}_y + E_p'\left(\frac{\vec{k}'}{k'}\times\vec{e}_y\right) \qquad (37\text{-}2)$$

Damit $\vec{k}'\cdot\vec{E}_0' = 0$ "automatisch" erfüllt.



Falls $\vec{k}'$ = komplexer Vektor (Totalreflexion):

Formal ebenfalls (37-2) verwendet, damit auch wieder $\vec{k}'\cdot\vec{E}_0' = 0$ gewährleistet, aber Zeichnung obsolet; E_p' dann als "Parallelkomponente" bezeichnet, aber keine anschauliche Bedeutung.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{E}_0 = E_s\,\vec{e}_y + E_p\left(\frac{\vec{k}}{k}\times\vec{e}_y\right) \\ \vec{k} = k\,(\sin\alpha, 0, \cos\alpha) \quad , \quad \alpha\in[0,\frac{\pi}{2}) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\vec{E}_0\cdot\vec{e}_x = E_p\left(\frac{\vec{k}}{k}\times\vec{e}_y\right)\cdot\vec{e}_x = \underbrace{E_p\,\frac{\vec{k}}{k}\cdot\underbrace{(\vec{e}_y\times\vec{e}_x)}_{-\vec{e}_z}}_{-\cos\alpha}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E}_0\cdot\vec{e}_x &= -E_p\cos\alpha \\ \vec{E}_0\cdot\vec{e}_y &= E_s \\ \vec{E}_0\cdot\vec{e}_z &= E_p\sin\alpha \end{aligned}} \qquad (36\text{-}1)$$

$$\vec{k}\times\vec{E}_0 = E_s\,(\vec{k}\times\vec{e}_y) + E_p\,\underbrace{\left[\vec{k}\times\left(\frac{\vec{k}}{k}\times\vec{e}_y\right)\right]}_{-k\vec{e}_y}$$

$$\boxed{\begin{aligned} (\vec{k}\times\vec{E}_0)\cdot\vec{e}_x &= -E_s\,k\cos\alpha \\ (\vec{k}\times\vec{E}_0)\cdot\vec{e}_y &= -E_p\,k \\ (\vec{k}\times\vec{E}_0)\cdot\vec{e}_z &= E_s\,k\sin\alpha \end{aligned}} \qquad (36\text{-}2)$$

Analoge Formeln mit

1) $\vec{E}_0 \longrightarrow \vec{E}_0''$, $\vec{k} \longrightarrow \vec{k}''$

$k \longrightarrow k'' = k$, $\sin\alpha \longrightarrow \sin\alpha'' = \sin\alpha$

$\cos\alpha \longrightarrow -\cos\alpha'' = -\cos\alpha$

(38-2)

2) $\vec{E}_0 \rightarrow \vec{E}_0'$, $\vec{k} \rightarrow \vec{k}'$

$k \rightarrow k'$, $\sin\alpha \longrightarrow \sin\alpha'$

$$\cos\alpha \longrightarrow \cos\alpha' \qquad (38\text{-}1)$$

Auswertung der Anschlußbedingungen für $\vec{E}_0, \vec{E}_0'', \vec{E}_0'$

a) zuerst Stetigkeit der Tangentialkomponenten von $\vec{E}$ und $\vec{H}$

(33):
$$(\vec{E}_0 + \vec{E}_0'') \cdot \vec{e}_x = \vec{E}_0' \cdot \vec{e}_x$$
$$(\vec{E}_0 + \vec{E}_0'') \cdot \vec{e}_y = \vec{E}_0' \cdot \vec{e}_y$$

gibt

$$\boxed{\begin{aligned} (-E_p + E_p'')\cos\alpha &= -E_p'\cos\alpha' \qquad (39a)\\ E_s + E_s'' &= E_s' \qquad (39b)\end{aligned}}$$

(34):
$$(\vec{k} \times \vec{E}_0) \cdot \vec{e}_x + (\vec{k}'' \times \vec{E}_0'') \cdot \vec{e}_x = (\vec{k}' \times \vec{E}_0') \cdot \vec{e}_x$$
$$(\vec{k} \times \vec{E}_0) \cdot \vec{e}_y + (\vec{k}'' \times \vec{E}_0'') \cdot \vec{e}_y = (\vec{k}' \times \vec{E}_0') \cdot \vec{e}_y$$

gibt

$$\left.\begin{aligned} (-E_s + E_s'')\, k\cos\alpha &= -E_s'\, k'\cos\alpha' \\ (-E_p - E_p'')\, k &= -E_p'\, k' \\ \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} &= \frac{k'}{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} (E_s - E_s'')\sin\alpha'\cos\alpha &= E_s'\sin\alpha\cos\alpha' \qquad (40a)\\ (E_p + E_p'')\sin\alpha' &= E_p'\sin\alpha \qquad (40b)\end{aligned}}$$

E_p, E_s, α gegeben $\Rightarrow$ α' durch Formel für $\vec{k}'$ und Brechungsgesetz (ohne oder mit " ") gegeben

E_p'', E_s'', E_p', E_s' sind zu berechnen

Wir haben schon 4 komplexe lineare inhomogene Gln. für diese 4 komplexen Unbekannten, womit diese schon eindeutig bestimmt sind.

b) Stetigkeit der Normalkomponenten von $\vec{D}$ und $\vec{B} = \vec{H}$

Falls die Lösungsansätze für die Feldstärken in den Medien 1, 2 nicht zum Widerspruch führen sollen (womit sie wertlos wären), müssen diese Anschlußbedingungen zu Gln. führen, welche zu den bereits erhaltenen Gln. redundant sind.

Das ist tatsächlich der Fall.

(32): $$\underbrace{\varepsilon(\omega)}_{n^2(\omega)}\ \underbrace{(\vec{E}_0+\vec{E}_0'')\cdot\vec{e}_z}_{(E_p+E_p'')\sin\alpha} = \underbrace{\underbrace{\varepsilon'(\omega)}_{n'^2(\omega)}}_{n^2(\omega)\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha'}}\ \underbrace{\vec{E}_0'\cdot\vec{e}_z}_{E_p'\sin\alpha'}$$

gibt mit

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{n'(\omega)}{n(\omega)} = \frac{k'}{k}$$

wieder Gl. (40b) (Stetigkeit der y-Komponente von $\vec{H}$):

$$(E_p + E_p'')\sin\alpha' = E_p'\sin\alpha \quad \checkmark$$

(34): $$\underbrace{(\vec{k}\times\vec{E}_0)\cdot\vec{e}_z}_{E_s k\sin\alpha} + \underbrace{(\vec{k}''\times\vec{E}_0'')\cdot\vec{e}_z}_{E_s'' k\sin\alpha} = \underbrace{(\vec{k}'\times\vec{E}_0')\cdot\vec{e}_z}_{E_s' k'\sin\alpha'}$$

gibt mit

$$k\sin\alpha = k'\sin\alpha'$$

wieder Gl. (39b) (Stetigkeit der y-Komponente von $\vec{E}$):

$$E_s + E_s'' = E_s' \quad \checkmark$$

XIV. 2.C. Fresnelsche Formeln

Parallelkomponenten

$$\boxed{\begin{aligned}(E_p - E_p'')\cos\alpha &= E_p'\cos\alpha' \\ (E_p + E_p'')\sin\alpha' &= E_p'\sin\alpha\end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ (elementare Rechnung ; s. Skriptum)

(42), (48-1)

$$\boxed{\begin{aligned}E_p'' &= E_p\,\frac{n'\cos\alpha - n\cos\alpha'}{n'\cos\alpha + n\cos\alpha'} = E_p\,\frac{\tan(\alpha-\alpha')}{\tan(\alpha+\alpha')} \\ E_p' &= E_p\,\frac{2n\cos\alpha}{n'\cos\alpha + n\cos\alpha'} = E_p\,\frac{2\sin\alpha'\cos\alpha}{\sin(\alpha+\alpha')\cos(\alpha-\alpha')}\end{aligned}}$$

Fresnelsche Formeln für die (43), (47-1)

Parallelkomponenten $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$, $n'(\omega) = \sqrt{\varepsilon'(\omega)}$

Normalkomponenten bzgl. der Einfallsebene

$$\boxed{\begin{aligned}E_s + E_s'' &= E_s' \\ (E_s - E_s'')\sin\alpha'\cos\alpha &= E_s'\sin\alpha\cos\alpha'\end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ Fresnelsche Formeln für "Senkrecht"-Komponenten

(45), (48-2)

$$\boxed{\begin{aligned}E_s'' &= E_s\,\frac{n\cos\alpha - n'\cos\alpha'}{n\cos\alpha + n'\cos\alpha'} = -E_s\,\frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha+\alpha')} \\ E_s' &= E_s\,\frac{2n\cos\alpha}{n\cos\alpha + n'\cos\alpha'} = E_s\,\frac{2\sin\alpha'\cos\alpha}{\sin(\alpha+\alpha')}\end{aligned}}$$

(46), (47-2)

Reflexions- und Transmissionskoeffizient

$\langle f \rangle$ Zeitmittel von $f(t)$ über eine Periode $\frac{2\pi}{\omega}$

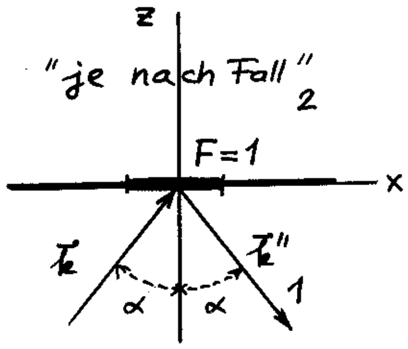
Definition:

Reflexionskoeffizient

$$R = \frac{\langle -S_z'' \rangle}{\langle S_z \rangle}$$

Transmissionskoeffizient

$$T = \frac{\langle S_z' \rangle}{\langle S_z \rangle} \qquad (48a)$$



Satz: Es gilt

$$R = \frac{|\vec{E}_0''|^2}{|\vec{E}_0|^2} = \frac{|E_p''|^2+|E_s''|^2}{|E_p|^2+|E_s|^2}$$

$$T = 1 - R$$

(48b), (48d)

Bemerkung: Alle hier für R, T angeschriebenen Formeln gelten allgemein (Brechung oder Totalreflexion). ●

Beweis: 1) $S_z = \frac{c}{4\pi}(E_x H_y - E_y H_x)$ einf. Welle

$$E_x H_y = E_{0x} H_{0y}^* + E_{0x} H_{0y}\, e^{2i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + c.c.$$

$$\langle E_x H_y \rangle = E_{0x} H_{0y}^* + c.c.$$

$$\langle S_z \rangle = \frac{c}{4\pi}(\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^*)_z + c.c.$$

$$\langle S_z \rangle = \frac{c}{4\pi}(\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^*)_z + c.c. \quad \text{reell!}$$

$$\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^* = \vec{E}_0 \times \frac{c}{\omega}(\vec{k} \times \vec{E}_0^*)$$

$$= \frac{c}{\omega}\Big[\vec{k}\,|\vec{E}_0|^2 - \vec{E}_0^* \underbrace{(\vec{k}\cdot\vec{E}_0)}_{0}\Big]$$

$$(\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^*)_z = \underbrace{\frac{c}{\omega}\overbrace{k\cos\alpha}^{k_z}}_{n(\omega)} |\vec{E}_0|^2 \quad \text{reell}$$

$$\langle S_z \rangle = \frac{c}{2\pi}\, n(\omega)\cos\alpha\, |\vec{E}_0|^2$$

$$\langle -S_z'' \rangle = \frac{c}{2\pi}\, n(\omega)\cos\alpha\, |\vec{E}_0''|^2$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{|\vec{E}_0''|^2}{|\vec{E}_0|^2} \quad \checkmark$$

(Bei Reflexion und Brechung analog

$$T = \frac{\overset{\uparrow !}{n'(\omega)}}{n(\omega)}\,\frac{\overset{\uparrow !}{\cos\alpha'}}{\cos\alpha}\,\frac{|\vec{E}_0'|^2}{|\vec{E}_0|^2}.$$

Nicht gültig bei Totalreflexion!)

2) $S_{1z} = S_{2z}$ für Grenzfläche $z=0$

(Stetigkeit von $\vec{E}_{tg}$ und $\vec{H}_{tg}$)

$$\Rightarrow \langle S_{1z} \rangle = \langle S_{2z} \rangle \quad \text{für Grenzfläche } z=0$$

$$\langle S_{2z} \rangle = S_z'$$

Zeige selbst:

$$\langle S_{1z} \rangle = \langle S_z \rangle + \langle S_z'' \rangle$$

Interferenzterm ist null!

$$\Rightarrow \langle S_z \rangle + \langle S_z'' \rangle = \langle S_z' \rangle \qquad (48c)$$

(da alle Terme von z unabhängig – s. oben – muß man nicht mehr "für z=0" dazusagen)

$$\langle S_z' \rangle = \langle S_z \rangle + \langle S_z'' \rangle$$

$$= \langle S_z \rangle - \langle -S_z'' \rangle \quad \Big| \cdot \frac{1}{\langle S_z \rangle}$$

$$T = 1 - R \quad \checkmark \qquad (48d)$$

XIV. 2.D. Reflexion unter dem Brewsterwinkel

Reflexion

$$E_p'' = E_p \frac{\tan(\alpha-\alpha')}{\tan(\alpha+\alpha')} \quad , \quad E_s'' = -E_s \frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha+\alpha')}$$

$\alpha + \alpha' = \frac{\pi}{2}$ (α heißt dann Brewsterwinkel α_B; s. später) (49)

$$\Rightarrow \tan(\alpha+\alpha') = +\infty$$

$$\boxed{E_p'' = 0}$$

Somit gilt für Reflexion unter dem Brewsterwinkel:

Ist die einfallende Welle linear polarisiert mit Schwingungsrichtung parallel zur Einfallsebene ($E_s = 0$), so gibt es überhaupt keine reflektierte Welle.

In allen anderen Fällen gibt es eine reflektierte Welle und diese ist linear polarisiert mit Schwingungsrichtung senkrecht zur Einfallsebene.

Formel für den Brewsterwinkel

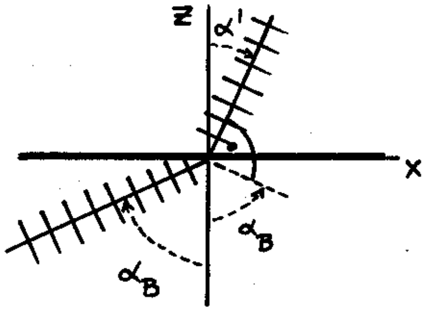
$$\alpha + \alpha' = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)} = \tan\alpha$$

$$= \frac{n'(\omega)}{n(\omega)}$$

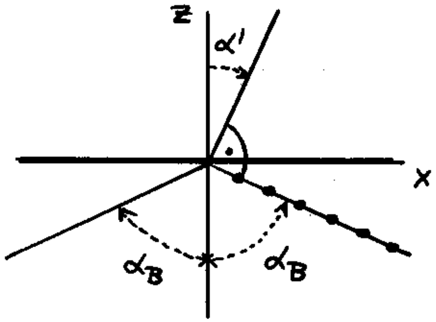
$$\Rightarrow \quad \alpha_B = \arctan\frac{n'(\omega)}{n(\omega)} \in [0, \tfrac{\pi}{2}) \qquad (50)$$

(Gl. besitzt für beliebige n', n eine Lösung[*])

Zeichnung für $n'(\omega) > n(\omega)$:



Interpretation!

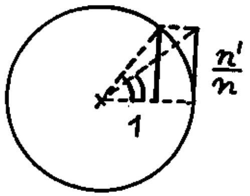


Erzeugung linear polarisierter Strahlung!

---

*) Beachte: Im Fall $n'(\omega) < n(\omega)$ gilt

$$\alpha_B < \alpha_g \text{ , da}$$



$$\sin\underset{\uparrow}{\alpha_g} = \tan\underset{\uparrow}{\alpha_B} = \frac{n'}{n} < 1 .$$

XIV.2.E*. Totalreflexion

$$\boxed{\begin{array}{l} n'(\omega) < n(\omega) \\ \alpha > \alpha_g = \arcsin \dfrac{n'(\omega)}{n(\omega)} \end{array}} \Rightarrow \sin\alpha > \sin\alpha_g = \frac{n'}{n}$$

$$\vec{k}' = k\left(\sin\alpha,\ 0,\ \underset{(-)}{+}\, i\sqrt{\sin^2\alpha - \frac{n'^2}{n^2}}\right) = \vec{k}'_r + i\vec{k}'_i\ ,\qquad \vec{k}'_r\cdot\vec{k}'_i = 0$$

inhomogene Welle im (optisch dünneren) Medium 2

$$e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega t)} = e^{-k\sqrt{\sin^2\alpha - \frac{n'^2}{n^2}}\,z}\ e^{i(k\sin\alpha\cdot x-\omega t)} \tag{53}$$

für $z > 0$

Mit der Geschwindigkeit

$$v'_{Ph} = \frac{\omega}{k\sin\alpha} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}}\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon'(\omega)}}\frac{\sin\alpha_g}{\sin\alpha} < \frac{c}{\sqrt{\varepsilon'(\omega)}}$$

in positive x-Richtung "laufende", in z-Richtung mit der Eindringtiefe

$$\delta' = \frac{1}{k\sqrt{\sin^2\alpha - \frac{n'^2}{n^2}}} = \frac{\sin\alpha_g}{\underbrace{\sqrt{\varepsilon'(\omega)}\,\frac{\omega}{c}}_{k' = \frac{2\pi}{\lambda'}}\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha_g}}$$

exponentiell abklingende Welle.

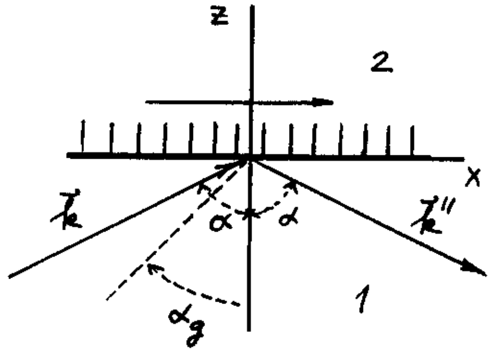
1) $\alpha \downarrow \alpha_g$: $v'_{Ph} \uparrow \frac{c}{\sqrt{\varepsilon'(\omega)}}$, $\delta' \uparrow \infty$

2) α nicht zu nahe bei α_g (einige Winkelminuten): $\delta' \sim \lambda'$ "Lichthaut"

$$\boxed{R = 1\ ,\ T = 0\quad \text{"Totalreflexion"}}$$

kein Energiestrom durch die Grenzfläche!

Beweis: Fresnelformeln (42), (45)



$$E''_p = E_p\,\frac{n'\cos\alpha - n\cos\alpha'}{n'\cos\alpha + n\cos\alpha'}$$

$$E''_s = E_s\,\frac{n\cos\alpha - n'\cos\alpha'}{n\cos\alpha + n'\cos\alpha'}$$

$$\vec{k}' = k'(\sin\alpha', 0, \cos\alpha')$$
$$= k(\sin\alpha, 0, i\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha_g})$$

$$\Rightarrow\quad \underset{k\sin\alpha_g}{\underset{\|}{k'}}\cos\alpha' = i\,k\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha_g}$$

$$\cos\alpha' = i\sqrt{\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_g}\right)^2 - 1} \tag{52b}$$

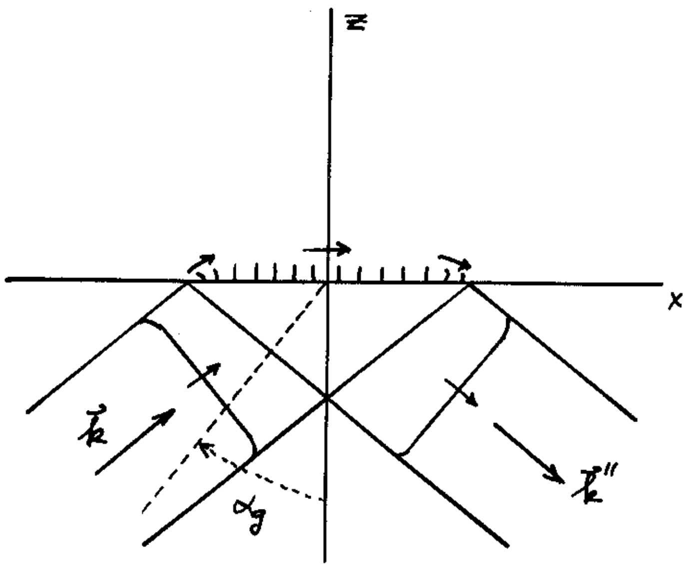
$\Rightarrow$ Faktoren bei E_p, E_s besitzen die Form

$$\frac{a - ib}{a + ib} = e^{-2i\arctan\frac{b}{a}}$$ (a, b bei E''_p, E''_s verschieden!)

$$\Rightarrow\quad \boxed{|E''_p| = |E_p|\ ,\quad |E''_s| = |E_s|} \tag{54}$$

$$\Rightarrow\quad R = \frac{|E''_p|^2 + |E''_s|^2}{|E_p|^2 + |E_s|^2} = 1,\quad T = 1 - R = 0\ \bullet$$

Frage: Wie kam die im Medium 2 in x-Richtung strömende Energie ins Medium 2 hinein?



<u>Bemerkung</u>: Die Ergebnisse unserer Rechnungen gelten in den Randzonen der Strahlen, in denen deformierte Wellenfronten vorliegen, nicht.

XIV.3. Elektrodynamik in homogenen isotropen Leitern, speziell in Metallen

XIV.3.A. "Verschwinden" einer freien Raumladungs=verteilung

Satz: In einem Materievolumen mit elektrisch leitender homogener Materie, für die die MG

$$\boxed{\vec{D}(\vec{r},t) = \varepsilon \vec{E}(\vec{r},t) \,,\; \vec{j}(\vec{r},t) = \sigma \vec{E}(\vec{r},t)}$$

gelten, kann es keine permanente von null verschiedene freie Raumladungsdichte geben.

Beweis:

$$\mathrm{div}\,\vec{D}(\vec{r},t) = 4\pi\rho(\vec{r},t) \quad , \quad \vec{D}(\vec{r},t) = \varepsilon\vec{E}(\vec{r},t)$$

$$\mathrm{div}\,\vec{j}(\vec{r},t) + \frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} = 0 \quad , \quad \vec{j}(\vec{r},t) = \sigma\vec{E}(\vec{r},t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} = -\sigma\,\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{E}(\vec{r},t)}_{\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho(\vec{r},t)} = -\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\rho(\vec{r},t) \qquad (57)$$

$$\Rightarrow \quad \rho(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},0)\,e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma} \qquad (58)$$

Die Relaxationszeit τ ist für Metalle extrem kurz:

$$\tau_{\text{Kupfer}} \sim 10^{-19}\,\text{s} \longleftrightarrow T_{UV} \sim 10^{-16}\,\text{s}$$

Bemerkung: Eine allfällige Nettoladung findet sich auf der Oberfläche wieder.

XIV.3.B. "Ebene Wellen" in Leitern. "Metalloptik"

Wiederholung von Abschnitt XIV.1.C:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + c.c.$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + c.c.$$

$$\boxed{\vec{k} = \vec{k}_r + i\vec{k}_i}$$

$$\vec{k}\cdot\vec{k} \equiv k^2 = k_r^2 - k_i^2 + 2i\vec{k}_r\cdot\vec{k}_i$$

$$\boxed{k = \frac{\omega}{c}\,p(\omega) \qquad \text{Dispersionsbeziehung}}$$

$$p(\omega) = n(\omega) + i\kappa(\omega) = \sqrt{\eta(\omega)\mu(\omega)} \qquad \text{Verallgem. Brechungsindex}$$

$$\eta(\omega) = \varepsilon(\omega) + i\,\frac{4\pi\sigma}{\omega} \qquad \text{Verallgemeinerte Dielektrizitätsfunktion}$$

$\vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0$	$\vec{k}\times\vec{E}_0 = \frac{\omega}{c}\mu(\omega)\vec{H}_0$
$\vec{k}\cdot\vec{H}_0 = 0$	$\vec{k}\times\vec{H}_0 = -\frac{\omega}{c}\eta(\omega)\vec{E}_0$

Annahme: $\boxed{\varepsilon(\omega)\,,\ \mu(\omega)\ \text{reell}}$

$$p = n + i\kappa = \sqrt{\left(\varepsilon + i\,\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)\mu} \qquad \text{"verallgemeinerter Brechungsindex"} \quad (60)$$

"Brechungsindex" "Extinktionskoeffizient"

⇒ (elementare Zwischenrechnung; s. Unterlagen)

$$\boxed{\begin{aligned} n^2(\omega) &= \frac{1}{2}\mu(\omega)\left(\sqrt{\varepsilon^2(\omega) + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)^2} + \varepsilon(\omega)\right) \\ \kappa^2(\omega) &= \frac{1}{2}\mu(\omega)\left(\sqrt{\varepsilon^2(\omega) + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)^2} - \varepsilon(\omega)\right) \end{aligned}} \quad (61)$$

n^2, κ^2 für $\sigma = 0$!

Bemerkung: Falls $\mu(\omega)$ reell, aber $\varepsilon(\omega)$ nicht reell, definiert man oft eine reelle frequenzabhängige Leitfähigkeit durch

$$\frac{4\pi\sigma(\omega)}{\omega} := \operatorname{Im}\varepsilon(\omega) + \frac{4\pi\sigma}{\omega}$$

Dann gelten analoge Beziehungen zu (61), aber mit

$$\varepsilon(\omega) \longrightarrow \operatorname{Re}\varepsilon(\omega)\ , \quad \sigma \longrightarrow \sigma(\omega).$$

●

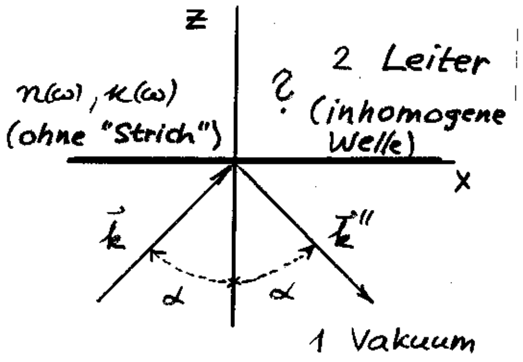
$$n^2 = \frac{1}{2}\mu\left(\sqrt{\varepsilon^2 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)^2} + \varepsilon\right)$$

$$\kappa^2 = \frac{1}{2}\mu\left(\sqrt{\varepsilon^2 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)^2} - \varepsilon\right)$$

Metalle: $\frac{4\pi\sigma}{\omega} \gg \varepsilon$ für $\omega \lesssim 10^{16}$ Hz (bis sichtbaren Bereich)

$$n^2(\omega) \approx \kappa^2(\omega) \approx \frac{2\pi\sigma}{\omega}\mu(\omega) \quad (62)$$

Reflexion und Brechung an einer ebenen Grenzfläche Vakuum–Leiter



Ansätze für $\vec{E}(\vec{r},t), \vec{E}''(\vec{r},t), \vec{E}'(\vec{r},t)$ wie in Abschnitt XIV.2.A, aber mit

$$\boxed{\begin{aligned} k &= k'' = \frac{\omega}{c} \\ k' &= \frac{\omega}{c}\left(n(\omega) + i\kappa(\omega)\right) \end{aligned}} \quad (63)$$

⇒ Reflexionsgesetz unverändert ✓

"Brechungsgesetz" formal unverändert, $\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{k'}{k}$,

wenn man $\vec{k}'$ formal gleich ansetzt

$$\vec{k} = k(\sin\alpha, 0, \cos\alpha) \qquad \Rightarrow \vec{k}'\cdot\vec{k}' = k'^2\ ✓$$

$$\vec{k}' = k'(\sin\alpha', 0, \cos\alpha') \quad \text{komplexer Vektor}$$

$$\boxed{\sin\alpha' = \frac{\sin\alpha}{n(\omega) + i\kappa(\omega)}} \quad \text{komplex} \qquad (64a)$$

Rechnungen viel komplizierter als bei Dielektrikum, deshalb beschränken wir uns auf die Diskussion von

$$\underline{\underline{e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega t)}}} \qquad \text{(inhomogene Welle!)}$$

$$\vec{k}' = k'(\sin\alpha', 0, \cos\alpha')$$

$$i\vec{k}'\cdot\vec{r} = i\underbrace{k'\sin\alpha'}\cdot x + i\underbrace{k'\cos\alpha'}_{?}\cdot z$$

$$k\sin\alpha = \frac{\omega}{c}\sin\alpha$$

$$\underline{\cos\alpha' = \sqrt{1-\sin^2\alpha'} = \sqrt{1-\left(\frac{\sin\alpha}{n+i\kappa}\right)^2}} \qquad (64b)$$

$$\underline{=: q\,e^{i\gamma} = q(\cos\gamma + i\sin\gamma)}$$

Wurzel im Komplexen zweideutig $\Rightarrow$

Bestimmungsgleichungen für q, γ *) (zweideutig):

$$\underline{q^2\cos 2\gamma = 1-\left(\frac{\sin\alpha}{n^2+\kappa^2}\right)^2(n^2-\kappa^2)}$$

$$\underline{q^2\sin 2\gamma = 2n\kappa\left(\frac{\sin\alpha}{n^2+\kappa^2}\right)^2} \qquad (68)$$

q, γ von α abhängig!

Beachte: Hier wären noch n, κ durch die komplizierten Ausdrücke in ε, μ und σ zu ersetzen! ●

---

*) s. Unterlagen

$$i\vec{k}'\cdot\vec{r} = i\frac{\omega}{c}\sin\alpha\cdot x + i\underbrace{k'\cos\alpha'}\cdot z$$

$$k'\cos\alpha' = \frac{\omega}{c}(n+i\kappa)\,q\,(\cos\gamma + i\sin\gamma)$$

$$= \frac{\omega}{c}q\,[(n\cos\gamma - \kappa\sin\gamma)$$

$$+ i(n\sin\gamma + \kappa\cos\gamma)]$$

$$\boxed{\begin{aligned} e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega t)} &= e^{-\frac{\omega}{c}\overset{\downarrow}{q}(n\sin\overset{\downarrow}{\gamma}+\kappa\cos\overset{\downarrow}{\gamma})z}\,\cdot \\ &\cdot\, e^{i\{\frac{\omega}{c}[\sin\underset{\uparrow}{\alpha}\cdot x + \underset{\uparrow}{q}(n\cos\underset{\uparrow}{\gamma}-\kappa\sin\underset{\uparrow}{\gamma})z]-\omega t\}} \end{aligned}} \qquad (65)$$

$n(\omega)$, $\kappa(\omega)$, $q(\omega;\alpha)$, $\gamma(\omega;\alpha)$ ↑ von α abhängig

Lösung der Gln. für q, γ so gewählt, daß

$q(n\sin\gamma + \kappa\cos\gamma) > 0$ ist.

$$\delta = \delta(\alpha) = \frac{c}{\omega q(n\sin\gamma + \kappa\cos\gamma)} \qquad \underline{\text{Eindringtiefe}}$$

Nach elementarer Rechnung findet man, wenn man $\mu(\omega) = 1$ setzt für schlechte Leiter, d.h. $\frac{4\pi\sigma}{\omega} \ll \varepsilon$

$$\delta(\alpha) \approx \frac{c}{2\pi\sigma}\sqrt{\varepsilon - \sin^2\alpha} \xrightarrow[\sigma\downarrow 0]{} +\infty \qquad \text{Eindringtiefe groß}$$

α fest: δ wird mit wachsendem σ kleiner

σ fest: δ wird mit wachsendem α kleiner für sehr gute Leiter (Metalle), d.h. $\frac{4\pi\sigma}{\omega} \gg \varepsilon$

$$\delta(\phi) \approx \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}$$ sehr klein (s.auch "Skineffekt" in Abschnitt XIV.3.C)

$$e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega t)} = e^{-\frac{\omega}{c} q(n\sin\gamma + \kappa\cos\gamma)z} \cdot$$

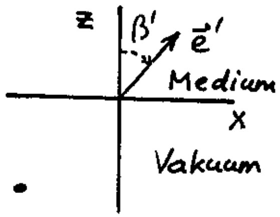
$$\cdot\, e^{i\{\frac{\omega}{c}[\sin\alpha\cdot x + q(n\cos\gamma - \kappa\sin\gamma)z]-\omega t\}}$$

1) Ebenen konstanter Amplitude (maximaler Betrag von $\vec{E}$) parallel zur Grenzebene

2) t fest : Ebenen konstanter Phase :

$$\sin\alpha\cdot x + q\,(n\cos\gamma - \kappa\sin\gamma)\,z = \text{konst.} \tag{66a}$$

Normalenrichtung dieser Ebenen gibt Ausbreitungsrichtung $\vec{e}'$ der inhomogenen Welle :



$$\vec{e}' = (\sin\beta', 0, \cos\beta')$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sin^2\alpha + q^2(n\cos\gamma - \kappa\sin\gamma)^2}} \cdot \tag{66b}$$

$$\cdot\,(\sin\alpha,\ 0,\ q\,(n\cos\gamma - \kappa\sin\gamma))$$

$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta'}$ berechnet

x – Komponente :

Brechungsgesetz für die Phasenebenen :

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta'} = \sqrt{\sin^2\alpha + q^2(\alpha)\,(n\cos\gamma(\alpha) - \kappa\sin\gamma(\alpha))^2}} \tag{67}$$

"rechte Seite" formal: "von α abhängiger Brechungsindex"

Abermals : Nach elementarer Rechnung findet man, wenn man $\mu(\omega)=1$ setzt :

für schlechte Leiter :

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta'} \approx \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \sin^2\alpha}\,\frac{1}{8}\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}$$

$\sigma = 0$: Dielektrikum

$\alpha' = \beta'$, gewöhnliches Brechungsgesetz

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = n$$ (Übergang Vakuum → Dielektrikum)

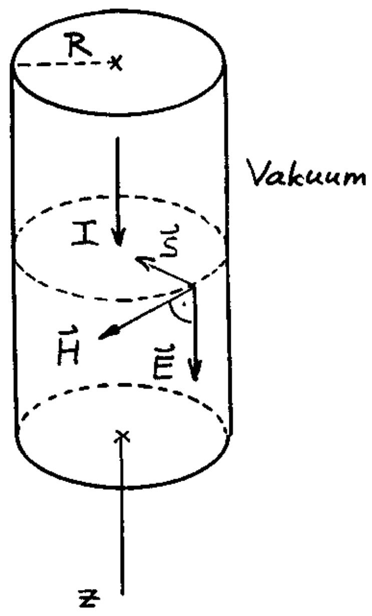
α fest : β' wird mit wachsendem σ kleiner

für sehr gute Leiter (Metalle) :

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta'} \approx \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}} \Rightarrow \sin\beta' \approx \frac{\sin\alpha}{\sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}} \approx \beta' \approx 0$$

Welle läuft bei beliebigem α praktisch in z- Richtung!

XIV. 3.C. Skineffekt für einen von einem Wechselstrom durchflossenen kreiszylinderförmigen metallischen Leiter



Feld an der Oberfläche qualitativ wie bei einer senkrecht auf ein Metall auftreffenden und eindringenden elm. Welle.

Deshalb (für $\underline{\mu = 1}$) wieder Eindringtiefe

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}$$

erwartet, falls $\delta \ll R$ gilt.

Wenn

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \sigma \vec{E}(\vec{r},t) \quad \text{gilt},$$

bedeutet dies, daß im Falle $\delta \ll R$ der Strom I nur in einer dünnen Oberflächenschicht fließt: "Skineffekt".

Annahme: MG

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \varepsilon \vec{E}(\vec{r},t) \quad , \quad \vec{H}(\vec{r},t) = \vec{B}(\vec{r},t)$$

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \sigma \vec{E}(\vec{r},t) \qquad (\omega \lesssim 10^{12} Hz)$$

gelten $\Rightarrow$ $(\rho = 0)$

Telegraphengleichung (s. Gl. (3a))

$$\Delta \vec{E}(\vec{r},t) = \cancel{\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t^2}} + \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t} \qquad (69)$$

gilt

metallischer Leiter (und nicht zu hohe Frequenzen):

$$\frac{4\pi\sigma}{\omega} \gg \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad /$$

im Leiter Vernachlässigbar

$(\omega \lesssim 10^{16} Hz)$

Ansatz für $\vec{E}$-Feld im Draht:

$$\rho \le R: \quad \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\rho,\phi,z,t) = \left(E(\rho) \overset{\downarrow}{e^{-i\omega t}} + c.c.\right) \vec{e}_z \qquad (70)$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} \right\} E(\rho) = -i\omega \frac{4\pi\sigma}{c^2} E(\rho)$$

$$\left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} + i \underbrace{\frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}}_{=: \frac{2}{\delta^2}} \right\} E(\rho) = 0 \qquad (71)$$

(dann δ wie oben)

$$\underbrace{\left\{\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right.}_{\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\rho\frac{d}{d\rho}} \left. + \underset{\frac{2i}{\delta^2}}{\underset{\parallel}{\alpha^2}} \right\} E(\rho) = 0 \quad \Rightarrow \alpha = \frac{1+i}{\delta} \qquad (73)$$

Lsgsbasis : $\underbrace{J_0(\alpha\rho)}_{J_0(0)=1}$, $\cancel{N_0(\alpha\rho)}$ (Besselfktn.)

Singulär für $\rho = 0$
(auch für komplexes α)

$$\Longrightarrow \quad \underline{E(\rho) = E(0)\, J_0\left(\frac{1+i}{\delta}\rho\right)}$$

bzw. wenn man statt $E(0)$ das experimentell zugängliche Feld $E(R)$ einführt :

$$\boxed{E(\rho) = E(R)\, \frac{J_0\left(\frac{1+i}{\delta}\rho\right)}{J_0\left(\frac{1+i}{\delta}R\right)}} \quad \text{mit} \quad \delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}} \qquad (72)$$

$\Rightarrow$ Gesamtstrom durch den Leiter

$$\underline{I(t) = I\, e^{-i\omega t} + \text{c.c.}}$$

(Beachte : Zeitfaktor $e^{-i\omega t}$ — anders als in Elektrotechnik !)

$$I = \int_{\text{Querschnitt}} d^2f\, \underbrace{\sigma E(\rho)}_{j(\rho)} = 2\pi\sigma \int_0^R d\rho\, \underbrace{\rho E(\rho)}_{} \qquad (74a)$$

s. ganz oben : $\quad -\frac{\delta^2}{2i}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dE(\rho)}{d\rho}\right)$

$$I = -\frac{\delta^2}{2i}\, 2\pi\sigma\, \rho\, \frac{dE(\rho)}{d\rho}\Bigg|_0^R$$

$$\underline{I = i\pi\sigma\delta^2 R\, E'(R)}$$

Definition : komplexer Widerstand eines Drahtstückes der Länge ℓ

$$Z(\omega) = \frac{E(R)\,\ell}{I} \qquad (74b)$$

Bemerkung : Im Gleichstromfall wäre $E(R) = E(0) = E$ und $E\cdot\ell$ der Spannungsabfall U.

$$\Rightarrow \quad \underline{Z(\omega) = -i\,\frac{\ell}{\pi R\sigma\delta^2}\,\frac{E(R)}{E'(R)}}$$

Vergleich mit Gleichstromwiderstand [+)]

$$\underline{Z(0) = \frac{\ell}{\pi R^2\sigma}} \qquad (77)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\frac{Z(\omega)}{Z(0)} = -i\,\frac{R}{\delta^2}\,\frac{E(R)}{E'(R)}}$$

+) $Z(0)$ geschrieben, da Buchstabe R schon "vergeben"

Skineffekt für $\delta \ll R$

$$E(\rho) = E(R)\,\frac{J_0\left(\frac{1+i}{\delta}\rho\right)}{J_0\left(\frac{1+i}{\delta}R\right)}\,, \quad J_0((1+i)\xi) \underset{\xi\to+\infty}{\propto} \frac{e^{-i\xi}\,e^{\xi}}{\sqrt{\xi}}$$

$\Rightarrow$ für jene ρ, für die $E(\rho)$ merklich von null verschieden ist (Oberflächenschicht) gilt

$$E(\rho) \approx E(R)\,e^{-\frac{R-\rho}{\delta}}\,e^{i\frac{R-\rho}{\delta}} \qquad (75)$$

↑
Rechtfertigung der Bezeichnung Eindringtiefe für δ

$$\Rightarrow \quad E'(R) = \frac{1-i}{\delta}\,E(R)$$

$$\frac{E(R)}{E'(R)} = \frac{\delta}{1-i} = \frac{(1+i)\delta}{2}$$

$$\frac{Z(\omega)}{Z(0)} = -i\,\frac{R}{\delta^2}\,\frac{E(R)}{E'(R)} = \frac{1-i}{2}\,\frac{R}{\delta(\omega)} \qquad (78)$$

Starke Erhöhung des Ohmschen Widerstandes durch den Skineffekt und zusätzlicher induktiver Widerstand (Zeitfaktor $e^{-i\omega t}$!)

Kupfer: $\sigma \approx 5 \cdot 10^{17}\ s^{-1} \Rightarrow \delta = \frac{7}{\sqrt{f}}$ cm (f Frequenz)

f	50 Hz	5 kHz	0,5 MHz	50 MHz
δ	1 cm	1 mm ↑	0,1 mm	0,01 mm

XV. INTERFERENZ UND BEUGUNG ELEKTROMAGNETISCHER WELLEN

XV.1. Interferenzerscheinungen

XV.1.A*. Intensität einer monochromatischen Welle. Interferenz von elm. Wellen

Wellenausbreitung im Vakuum oder in einem Medium mit $\sigma = 0$, $\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$ reell (ω aus Transparenzbereich) betrachtet

Definition: Intensität einer monochromatischen Welle

$$I(\vec{r}) = \langle |\vec{S}(\vec{r},t)| \rangle \qquad (2)$$

$\langle \ldots \rangle$ Zeitmittel über Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Satz: Für die Intensität einer (gewöhnlichen, d.h. homogenen) monochromatischen ebenen Welle

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + c.c.$$

gilt

$$\boxed{I = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\mu(\omega)}}\,|2\vec{E}_0|^2} \qquad (2a$$