

FOLIEN VON D. GRAU ZUR  
VORLESUNG "ELEKTRODYNAMIK  
UND RELATIVITÄTSTHEORIE"  
*nach dem Skriptum von H. Nowotny*

Kapitel 13

XIII. ELEKTROTECHNIK: LINEARE STROMKREISE  
MIT OHMSCHEN WIDERSTÄNDEN, KONDENSATOREN,  
INDUKTIONSSPULEN UND SPANNUNGSQUELLEN  
IM QUASISTATIONÄREN FALL

FRAGE: Wie kommt man von

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{D}(\vec{r}, t) &= 4\pi \rho(\vec{r}, t) \\ \text{div } \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0 \\ \text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{H}(\vec{r}, t) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

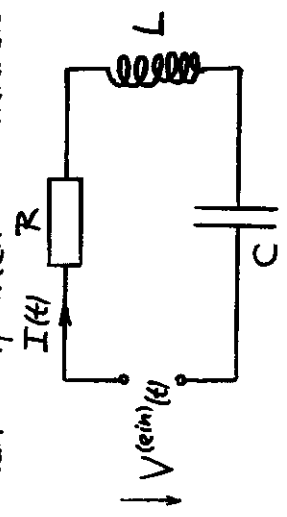
$$\begin{aligned} \vec{D}(\vec{r}, t) &= \epsilon \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\mu} \vec{B}(\vec{r}, t) \\ \vec{j}(\vec{r}, t) &= \sigma \vec{E}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

Brauchbar für  $\omega \lesssim 10^{12}$  Hz.

(Techn. Wechselströme:

$$\omega \lesssim 20 \text{ kHz} = 2 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

für den einfachen Stromkreis



"allgem. Ohmsches Gesetz"

$$RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I(t') dt' = V^{(ein)}(t) \quad ?$$

auf

$$\vec{f}(\vec{r}) = \rho \vec{E}(\vec{r}) - \frac{1}{8\pi} \vec{E}^2(\vec{r}) \text{grad } \epsilon(\vec{r}) + \frac{1}{8\pi} \text{grad} (\vec{E}^2(\vec{r}) \frac{d\epsilon}{d\sigma}(\vec{r}) \sigma(\vec{r}))$$



$$\vec{f}(\vec{r}) = -\frac{1}{8\pi} \vec{H}^2(\vec{r}) \text{grad } \mu(\vec{r}) + \frac{1}{8\pi} \text{grad} (\vec{H}^2(\vec{r}) \frac{d\mu}{d\sigma}(\vec{r}) \sigma(\vec{r})) \quad (77b)$$

Magnetostraktion

Bezüglich des Maxwellschen Spannungstensors

$\vec{T}_{(mat)}$ ( $\vec{r}$ ) in der Magnetostatik für

isotrope inhomogene Materie ( $\mu = \mu(\vec{r})$ )

gilt ein analoger Kommentar wie bei den Dielektrika.

# XIII.1. Das quasistationäre elektromagnetische Feld

## XIII.1.A\*. Grundgleichungen

### 1) Lokalisierte Quellverteilung im Vakuum

In Coulombbeziehung gilt (s. Abschnitt II.2.C):

$$\underline{\underline{\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_C(\vec{r},t) + \vec{E}_T(\vec{r},t)}}$$

C... longitudinaler oder Coulomb-  
anteile

T... transversaler oder induzierter  
Anteil

mit

$\text{div } \vec{E}_C(\vec{r},t) = 4\pi\rho(\vec{r},t)$ $\text{rot } \vec{E}_C(\vec{r},t) = \vec{0}$ $\text{div } \vec{E}_T(\vec{r},t) = 0$ $\text{rot } \vec{E}_T(\vec{r},t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}$	$\text{div } \vec{B}(\vec{r},t) = 0$ $\text{rot } \vec{B}(\vec{r},t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r},t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}$
---	--

XIII-2

Potentiale:  $\phi_C(\vec{r},t)$ ,  $\vec{A}_T(\vec{r},t)$  mit  $\text{div } \vec{A}_T(\vec{r},t) = 0$

$$\vec{E}_C(\vec{r},t) = -\text{grad } \phi_C(\vec{r},t)$$

$$\Delta \phi_C(\vec{r},t) = -4\pi\rho(\vec{r},t)$$

$$\vec{E}_T(\vec{r},t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_T(\vec{r},t)}{\partial t}$$

$$\phi_C(\vec{r},t) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \text{rot } \vec{A}_T(\vec{r},t)$$

$$\square \vec{A}_T(\vec{r},t) = -\frac{4\pi}{c} \left[ \vec{j}(\vec{r},t) - \frac{1}{4\pi} \text{grad } \frac{\partial \phi_C(\vec{r},t)}{\partial t} \right]$$

$$=: \vec{j}_T(\vec{r},t)$$

$$\vec{A}_T(\vec{r},t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}_T(\vec{r}',t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

quasistationärer Fall

d charakteristische Linedimension der Quellverteilung

$\omega$  charakteristische Kreisfrequenz für die zeitliche Änderung der Quellverteilung,  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$  zugehörige Wellenlänge

ANNAHME  $d \ll \lambda$

z.B.: LW-Bereich:  $\omega \sim 10^6 \text{ Hz} = 1 \text{ MHz}$ ,  $d \ll 2 \text{ km}$

UKW-Bereich:  $\omega \sim 10^9 \text{ Hz} = 1 \text{ GHz}$ ,  $d \ll 2 \text{ m}$

XIII-3

⇒ Retardierung für Aufpunkte in nicht zu großer Entfernung von der Quellverteilung und insbesondere innerhalb der Quellverteilung vernachlässigbar, d.h.

$$\Rightarrow \vec{A}_T(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}_T(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Welcher Vernachlässigung in den FG für  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  entspricht dies? Es bedeutet, daß

$$\Delta \vec{A}_T(\vec{r}, t) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_T(\vec{r}, t)$$

gilt, also Vernachlässigung von

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_T(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_T(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

gegen den in  $\frac{4\pi}{c} \vec{j}_T(\vec{r}, t)$  enthaltenen Term

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_c(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\frac{4\pi}{c} \vec{j}_T(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \text{grad} \frac{\partial \phi_c(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

nur Coulombanteil des Maxwellterms!

⇒ Grundgleichungen für den quasistationären Fall (Vakuum)

$\text{div} \vec{E}_c(\vec{r}, t) = 4\pi \rho(\vec{r}, t)$ $\text{rot} \vec{E}_c(\vec{r}, t) = \vec{0}$ $\text{div} \vec{E}_T(\vec{r}, t) = 0$ $\text{rot} \vec{E}_T(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$	$\text{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$ $\text{rot} \vec{B}(\vec{r}, t) = \underbrace{\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t)}_{\frac{4\pi}{c} \vec{j}_T(\vec{r}, t)} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_c(\vec{r}, t)}{\partial t}$
--	--

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_c(\vec{r}, t) + \vec{E}_T(\vec{r}, t)$$

$$\vec{E}_c(\vec{r}, t) = -\text{grad} \phi_c(\vec{r}, t) \quad \text{mit} \quad \phi_c(\vec{r}, t) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_T(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_T(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \text{rot} \vec{A}_T(\vec{r}, t) \end{aligned} \right\} \quad \text{mit} \quad \vec{A}_T(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}_T(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Weg:  $\rho \rightarrow \phi_c \rightarrow \vec{E}_c$ ,  $\vec{j}, \vec{E}_c \rightarrow \vec{j}_T \rightarrow \vec{A}_T \rightarrow \vec{E}_T, \vec{B}$

2) Materie mit linearen MG, freie und gebundene Quellen lokalisiert

XIII-6

MG:  $\vec{P}(\vec{r}, t) = \chi_e \vec{E}(\vec{r}, t)$

quasistationärer Fall

konsequenterweise von  $\rho_p(\vec{r}, t) = -\text{div} \vec{P}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{j}_p(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{P}(\vec{r}, t)}{\partial t}$

ebenfalls nur Coulombanteil beibehalten

Dann gilt ( $\rho, \vec{j}$  freie Quellen):

$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_c(\vec{r}, t) + \vec{E}_T(\vec{r}, t)$

$\chi_e \frac{\partial \vec{E}_c(\vec{r}, t)}{\partial t} + \chi_e \frac{\partial \vec{E}_T(\vec{r}, t)}{\partial t}$   
 $-\chi_e \text{div} \vec{E}_c(\vec{r}, t) - \chi_e \text{div} \vec{E}_T(\vec{r}, t)$

FG:

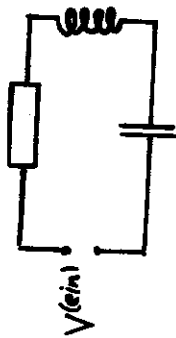
$\text{div} \vec{D}_c(\vec{r}, t) = 4\pi \rho(\vec{r}, t)$   
 $\text{rot} \vec{E}_c(\vec{r}, t) = \vec{0}$   
 $\text{div} \vec{E}_T(\vec{r}, t) = 0$   
 $\text{rot} \vec{E}_T(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$   
 $\text{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$   
 $\text{rot} \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}_c(\vec{r}, t)}{\partial t}$   
 $=: \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t)$

MG:  $\vec{D}_c(\vec{r}, t) = \epsilon \vec{E}_c(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu} \vec{B}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{j}(\vec{r}, t) = \sigma \vec{E}(\vec{r}, t)$

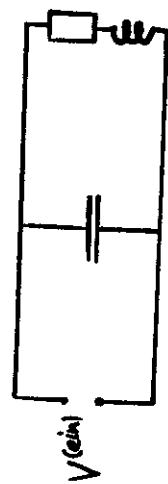
XIII-7

Diese Gleichungen bilden die physikalische Basis für die (näherungsweise) Behandlung elektrotechnischer Stromkreise.

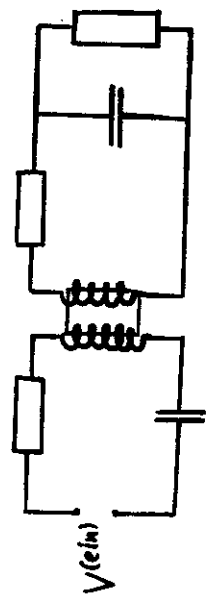
Einfachster Fall: ein linearer Stromkreis ohne Verzweigungen; z.B.



"Nächstkomplizierter" Fall: ein linearer Stromkreis mit Verzweigungen; z.B.



Allgemeiner Fall: mehrere, untereinander induktiv oder (und) kapazitiv gekoppelte Stromkreise mit oder ohne Verzweigungen; z.B.



Beachte: Die Forderung der Quasistationarität bedeutet für  $d \sim 1m \Rightarrow \omega \lesssim 10 \text{ MHz}$ .

XIII. 1. B\* Linearer Stromkreis ohne Verzweigungen

Wegen  $\text{rot } \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{J}(\vec{r}, t)$

ist die durch

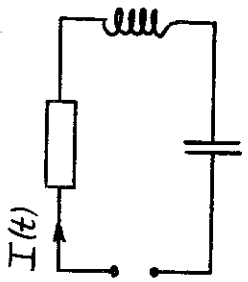
$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}_c(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

definierte "Stromdichte" quellenfrei:

$$\text{div } \vec{J}(\vec{r}, t) = 0$$

⇒

Die durch  $I(t) = \int_{\text{Querschnitt}} d^2\vec{f} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t)$  definierte "Stromstärke" ist für gegebenes  $t$  für jeden Querschnitt gleich (Querschnitt = Drahtquerschnitt bzw. Querschnitt eines Kondensators) [Umlaufsinn festlegen!]



Bemerkung zu  $\vec{J}(\vec{r}, t)$ : Grund für "..."

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \underbrace{\vec{j}(\vec{r}, t)}_{\text{Coulombanteil des Polarisationsstromes}} + \underbrace{\frac{\partial \vec{P}_c(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}_c(\vec{r}, t)}{\partial t}}_{\text{Coulombanteil des Maxwelltermes (des "Verschiebungsstromes" des Vakuums)}}$$

$\vec{j}(\vec{r}, t)$  Coulombanteil des Maxwelltermes (des "Verschiebungsstromes" des Vakuums)

Coulombanteil des sog. "Verschiebungsstromes" im Medium

Ferner ist wegen

$$\text{rot } \vec{E}_c(\vec{r}, t) = \vec{0}$$

Gilt nur für  $\vec{E}_c$  nicht für  $\vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_T$ !

$\oint \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = 0$  für einen beliebigen geschlossenen Weg, insbesondere bei Integration über den (über die Spannungsquelle) geschlossenen Stromkreis

Die "integralen" Beziehungen

$$I(t) = \int_{\text{Querschnitt}} d^2\vec{r} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) \quad \text{gleich f\u00fcr alle Querschnitte}$$

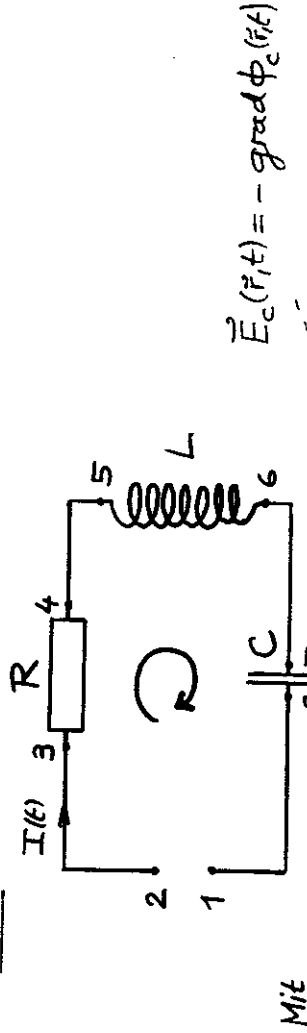
$$\oint \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = 0 \quad \text{bei Integration l\u00e4ngs des Stromkreises inklusive Spannungsquelle}$$

n\u00fctzen wir f\u00fcr die Ableitung des sog.

allgemeinen Ohmschen Gesetzes

$$RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I(t') dt' = V^{(ein)}(t)$$

aus.



$$\int_1^8 \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} \equiv \int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^5 + \int_5^6 + \int_6^7 + \int_7^8 + \int_8^1 = - \int_1^2$$

zu: "Summe aller Spannungsabf\u00e4lle <sup>\*)</sup> an Leitungen, Ohmschen Widerst\u00e4nden, Induktionsspulen und Kondensatoren = eingepre\u00dfte Spannung"; s. sp\u00e4ter <sup>\*) bzgl.  $\phi_c(\vec{r}, t)$</sup>

Spannungsquelle

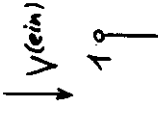
(hier)

Der interne Aufbau wird nicht behandelt und daher wird nicht berechnet. Vielmehr wird

$$- \int_1^2 \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = \phi_{c2}(t) - \phi_{c1}(t) =: V^{(ein)}(t)$$

gesetzt.

Symbolisch:



Bemerkung: Ist es nicht m\u00f6glich, eine solche Beziehung (n\u00e4herungsweise) anzuschreiben, so steht dem betreffenden Element des Stromkreises nicht der Name "Spannungsquelle" zu. Die Frage der Realisierung ist eine andere. •

Zuleitungsdr\u00e4hte, Ohmscher Widerstand,

Induktionsspule und Kondensator

F\u00fcr diese "Wegst\u00fccke" wird  $\int_i \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r}$  berechnet,

was aber nur unter weiteren N\u00e4herungsannahmen m\u00f6glich ist.

Näherungsannahmen:

1) In den Zuleitungsdrähten, Ohmschen Widerständen und Spulendrähten wird

$$\vec{J}(r,t) = \vec{j}(r,t) = \sigma (\vec{E}_c(r,t) + \vec{E}_T(r,t))$$

gesetzt, d.h. der "Verschiebungsstrom" wird gegen den Leitungsstrom vernachlässigt.

Physikalisch bedeutet dies die Vernachlässigung der Kapazität dieser Stromkreisteile.

Bemerkung: Für einen Wechselstrom gilt ( $\omega$  Kreisfrequenz)

$$\left| \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| = \left| \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right| = \frac{\epsilon \omega}{4\pi \sigma}$$

die Näherung ist also für

$$\omega \ll \frac{4\pi \sigma}{\epsilon} \sim 10^{18} \text{ Hz für metallische Leiter}$$

gerechtfertigt. Wegen der Forderung der Quasistationarität mussten wir aber schon für  $d \sim 1 \text{ m}$  die Erfüllung von  $\omega \ll 10 \text{ MHz} = 10^7 \text{ Hz}$  verlangen. ●

2) In den Zuleitungsdrähten und

Spulendrähten wird die Leitfähigkeit gegenüber jener in den Ohmschen Widerständen als so groß angenommen, daß in den Zuleitungs- und Spulendrähten

$$\vec{E}(r,t) = \vec{E}_c(r,t) + \vec{E}_T(r,t) = \vec{0}$$

gesetzt werden kann.

Physikalisch bedeutet dies die Vernachlässigung des Ohmschen Widerstandes dieser Stromkreisteile.

3) In den Zuleitungsdrähten wird überdies

$$\vec{E}_T(r,t) = \vec{0}$$

gesetzt.

Physikalisch bedeutet dies die Vernachlässigung der Auswirkungen der Induktion auf die Zuleitungen (Skinneffekt und Induktivität)

Bemerkung: In Abschnitt XII.3.C wird gezeigt, daß der Skinneffekt für einen Kupferdraht mit 1 mm Durchmesser vernachlässigt werden kann, wofem  $\omega \ll 10 \text{ kHz} = 10^4 \text{ Hz}$  ist.

Für  $\omega \gtrsim 20 \text{ kHz}$  spricht man i.a. von Hochfrequenztechnik.



4) Die Ohmschen Widerstände seien an solchen Stellen in den Stromkreis eingebaut, daß man (unter den angenommenen Bedingungen für die betrachteten Frequenzen) auch in ihnen

$$\underline{\vec{E}_T(\vec{r}, t) = \vec{0}}$$

setzen kann.

Physikalisch bedeutet dies die Vernachlässigung der Induktion in den Ohmschen Widerständen.

5) Auch die Kondensatoren seien an solchen Stellen eingebaut, daß man zwischen ihren

Platten

$$\underline{\vec{E}_T(\vec{r}, t) = \vec{0}}$$

setzen kann.

Zuleitungsdrähte

$$\left. \begin{array}{l} 2) \\ 3) \end{array} \right\} \vec{E}_c(\vec{r}, t) = \vec{0}$$



$$\Rightarrow \int_j^k \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = \phi_{cj}(t) - \phi_{ck}(t) = 0$$

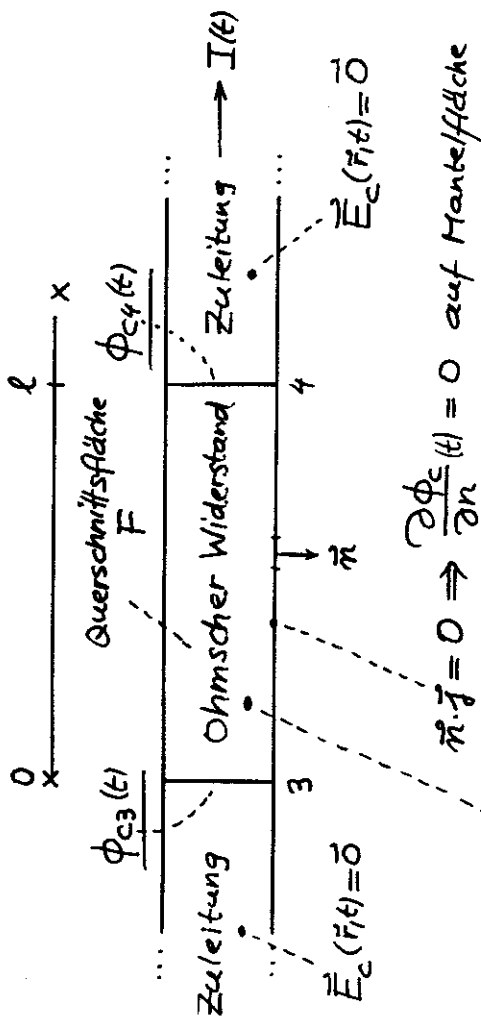
kein Spannungsabfall bezgl.  $\phi_c(\vec{r}, t)$

Ohmscher Widerstand

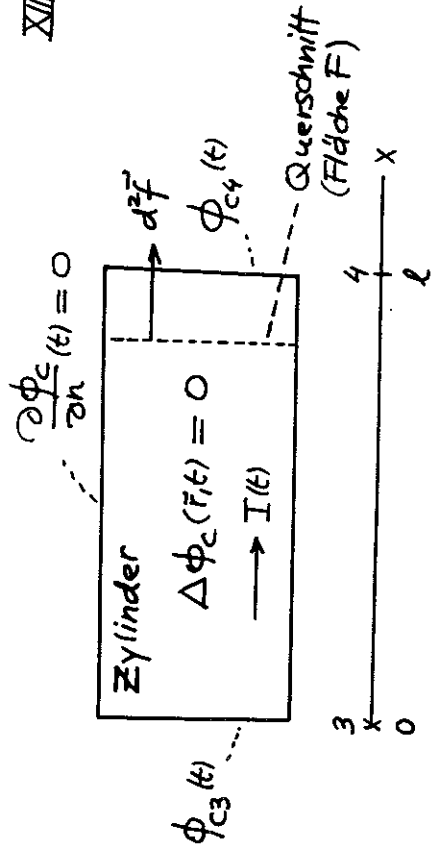


$$\int_3^4 \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = \phi_{c3}(t) - \phi_{c4}(t) = ?$$

Spezialfall betrachtet: Kreiszyylindergeometrie



$$\begin{aligned} \text{div } \vec{j}(\vec{r}, t) &= \text{div } \vec{j}(\vec{r}, t) = \sigma \text{ div } \vec{E}_c(\vec{r}, t) \\ &= -\sigma \Delta \phi_c(\vec{r}, t) = 0 \end{aligned}$$



Zeige selbst: Daraus folgt, daß im Inneren des Ohmschen Widerstandes

ein homogenes zeitabhängiges Feld

$$\vec{E}_c(r,t) = \frac{1}{l} [\phi_{c3}(t) - \phi_{c4}(t)] \vec{e}_x$$

herrscht. ( $\phi_c = \phi_c(x,t)$  lineare Fkt. von x)

$$\Rightarrow \int_3^4 \vec{E}_c(r,t) \cdot d\vec{r} = \phi_{c3}(t) - \phi_{c4}(t) \quad \text{Werten wir schon...}$$

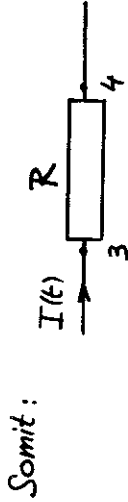
Damit können wir aber auch den Zusammenhang zwischen Spannungsabfall am Widerstand und Stromstärke I(t) herstellen:

$$I(t) = \int_{\text{Querschnitt}} d^2\vec{f} \cdot \vec{j}(r,t) = \int_{\text{Querschnitt}} d^2\vec{f} \cdot \vec{j}(r,t)$$

$$= \sigma \int_{\text{Querschnitt}} d^2\vec{f} \cdot \vec{E}_c(r,t) = \sigma F \frac{1}{l} [\phi_{c3}(t) - \phi_{c4}(t)] =: \frac{1}{R} \cdot R \text{ Ohmscher Widerstand (Zylinder)}$$

$$\phi_{c3}(t) - \phi_{c4}(t) = RI(t)$$

Ohmsches Gesetz im engeren Sinne



$$\int_3^4 \vec{E}_c(r,t) \cdot d\vec{r} = \phi_{c3}(t) - \phi_{c4}(t) = RI(t)$$

Spannungsabfall am Ohmschen Widerstand

Induktionsspu/e



im Spulendraht gemäß Näherung 2) (s. XIII-13)

$$\vec{E}(r,t) = \vec{E}_c(r,t) + \vec{E}_T(r,t) = \vec{0} \quad \text{gilt; somit:}$$

$$\int_5^6 \vec{E}_c(r,t) \cdot d\vec{r} = - \int_5^6 \vec{E}_T(r,t) \cdot d\vec{r}$$

Der technisch konstruktive Sinn einer "Induktions-Spule" besteht darin, im unmittelbaren Spulenbereich ein großes "induziertes" Feld  $\vec{E}_T(r,t)$  zu "erzeugen", während  $\vec{E}_T(r,t)$  außerhalb der Spule vernachlässigbar klein ist - ausgenommen bei der induktiven

Koppelung an einen anderen Stromkreis,  
 wo das "Hinauswirken" beabsichtigt ist  
 und durch einen gemeinsamen magnetisierbaren  
 Spulenkern mit einer Induktionsspule des  
 anderen Stromkreises erzielt wird.

Deshalb kann man statt  $\int_5^6 \vec{E}_T(r,t) \cdot d\vec{F}$

→  $\oint \vec{E}_T(r,t) \cdot d\vec{F}$  schreiben, wobei der Weg

durch den Spulendraht von "5" nach "6"

durch einen beliebigen Weg außerhalb der

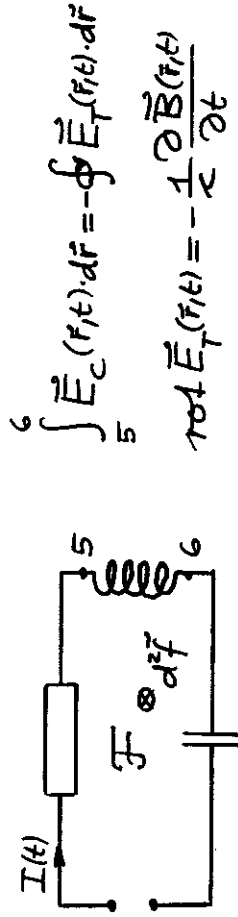
Spule verlaufenden Weg geschlossen wird.

Auf Grund der Näherungsannahmen 3), 4), 5)

und einer analogen Annahme für die

Spannungsquelle kann man auch über

den gegebenen Stromkreis integrieren:



⇒  $\oint \vec{E}_T(r,t) \cdot d\vec{F} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int d^2\vec{f} \cdot \vec{B}(r,t) =: V(\text{ind})$

$\underbrace{\Phi(t)}_{\text{magnetischer Fluss durch } \vec{F}}$

In der Magnetostatik (stationärer Strom) hatten wir in Abschnitt IV.3

$\text{div } \vec{B}(r) = 0$

$\text{rot } \vec{B}(r) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(r)$

⇒ für Stromkreis gilt  $\frac{1}{c} \Phi = LI$

mit dem Selbstinduktionskoeffizienten

$L = \frac{1}{c^2} \oint \oint \frac{d\vec{F} \cdot d\vec{F}'}{|\vec{F} - \vec{F}'|}$

HIER GILT:

$\text{div } \vec{B}(r,t) = 0$

$\text{rot } \vec{H}(r,t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(r,t)$

$\vec{B}(r,t) = \mu \vec{H}(r,t)$

⇒ für Stromkreis gilt

$\frac{1}{c} \Phi(t) = LI(t)$

mit

$L = \frac{\mu}{c^2} \oint \oint \frac{d\vec{F} \cdot d\vec{F}'}{|\vec{F} - \vec{F}'|}$

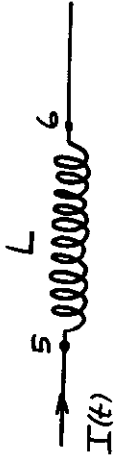
Bemerkung: Unter den gegebenen Bedingungen

ist der Selbstinduktionskoeffizient L des

Stromkreises (näherungsweise) der Spule

zuzuordnen, weshalb man L zur Spule schreibt.

Somit:

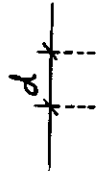


$$\int_5^6 \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = \phi_{c5}(t) - \phi_{c6}(t)$$

$$= \frac{1}{L} \frac{d\Phi(t)}{dt} = -V^{(ind)}(t) = L \frac{dI(t)}{dt}$$

Kondensator Spezialfall betrachtet: Plattenkondensator

$$\int_7^8 \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = \phi_{c7}(t) - \phi_{c8}(t)$$



$$I(t) = \int_{P_2} d^2\vec{f} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{P_2} d^2\vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{D}_c(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{P_2} d^2\vec{f} \cdot \underbrace{\frac{\vec{D}_c(\vec{r}, t)}{4\pi}}_{d^2\vec{f} \cdot \epsilon(\vec{r}, t)}$$

$$Q_1(t) = Q(t) \quad Q_2(t) = -Q(t)$$

$$\Rightarrow Q(t) = -\int_{t_0}^t I(t') dt'$$

mit  $Q(t_0) = 0$

In der Elektrostatik hatten wir in Abschnitt III-3

$$\text{div } \vec{E}(F) = 4\pi\rho$$

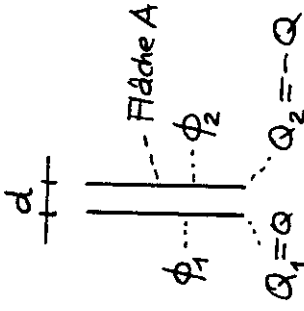
$$\text{rot } \vec{E}(F) = \vec{0}$$

$\Rightarrow$  für Plattenkondensator gilt

$$Q = C (\phi_1 - \phi_2)$$

mit der Kapazität

$$C = \frac{A}{4\pi d}$$



HIER GILT:

$$\text{div } \vec{D}_c(\vec{r}, t) = 4\pi\rho(\vec{r}, t)$$

$$\text{rot } \vec{E}_c(\vec{r}, t) = \vec{0}$$

$$\vec{D}_c(\vec{r}, t) = \epsilon \vec{E}_c(\vec{r}, t)$$

$\Rightarrow$  für Plattenkondensator folgt

$$Q(t) = C (\phi_1(t) - \phi_2(t))$$

mit

$$C = \frac{\epsilon A}{4\pi d}$$

$$\phi_2(t) \parallel \phi_1(t)$$

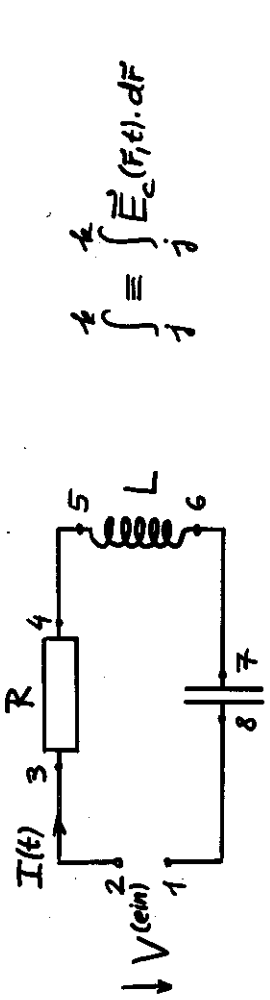


Somit:

$$\int_7^8 \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = \phi_{c7}(t) - \phi_{c8}(t)$$

$$= -\frac{1}{C} Q(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I(t') dt'$$

Zusammenfassung:



$$\begin{aligned}
 & \int_1^4 \equiv \int_2^4 \vec{E}_e(F,t) \cdot d\vec{F} \\
 & \int_3^3 + \int_4^4 + \int_5^5 + \int_6^6 + \int_7^7 + \int_8^8 = 0 \\
 & \int_2^3 \equiv 0 \quad \int_4^4 \equiv 0 \quad \int_5^6 \equiv 0 \quad \int_6^7 \equiv 0 \quad \int_7^8 \equiv 0 \\
 & \int_1^2 \equiv - \int_2^1 \equiv - \int_1^2 V^{(ein)}(t) \\
 & \int_3^4 \equiv RI(t) \quad \int_5^6 \equiv L \frac{dI(t)}{dt} \quad \int_7^8 \equiv \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I(t') dt'
 \end{aligned}$$

$$\boxed{RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I(t') dt' = V^{(ein)}(t)} \quad (18)$$

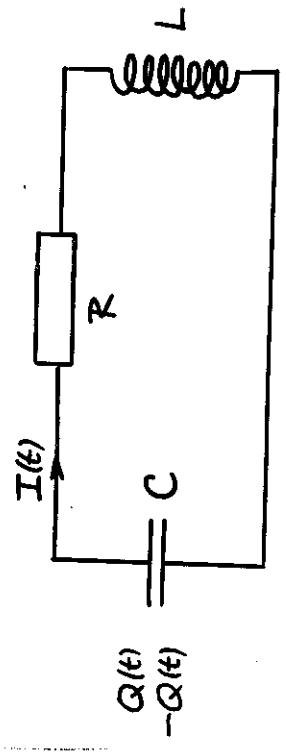
allgemeines Ohmsches "Gesetz"

$t_0 \dots$  Kondensator ungeladen

XIII.1.C. Beispiel: Kondensatorentladung

Über Ohmschen Widerstand und Induktionsspule

(in Serie geschaltet)



$$RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} - \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I(t') dt' = 0 \quad (19a)$$

AB.:  $Q(0) = \int_0^{+\infty} I(t') dt' = Q_0, \quad I(0) = 0$

$$\Rightarrow L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = 0 \quad (19b)$$

Ansatz:  $I(t) = e^{-\alpha t}$  (20)

charakteristische Gl.:

$$L\alpha^2 - R\alpha + \frac{1}{C} = 0 \quad (21a)$$

Lösungen:

$$\alpha_{1/2} = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (21b)$$

(Definitionen:  $= \delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$  ; s. XIII-23)

Definitionen:

$$\delta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (22)$$

Fall 1:  $\delta \geq \omega_0$ : aperiodische Entladung

$$\delta > \omega_0: \quad \underline{I(t) = e^{-\delta t} \left[ I_1 e^{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} + I_2 e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} \right]} \quad (23a)$$

$\delta = \omega_0$  (Grenzfall):

$$\underline{I(t) = (A + Bt) e^{-\delta t}}$$

Fall 2:  $\delta < \omega_0$ : gedämpfte periodische Entladung

$$\underline{I(t) = I_p e^{-\delta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t + \varphi_p)} \quad (23b)$$

$\delta \ll \omega_0$ : schwache Dämpfung

$$I(t) \approx I_p e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \varphi_p)$$

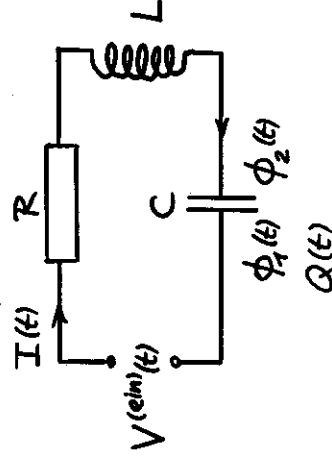
Bemerkung: Die Bestimmung der Integrations=

konstanten  $I_1, I_2$  bzw.  $A, B$  bzw.  $I_p, \varphi_p$

erfolgt mit Hilfe der  $AB$ . ●

### XIII. 1. D\* Energiesatz

(s. Skriptum XIII. 2. B 1. Teil.)



$$I(t) \cdot \left[ RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} + [\phi_2(t) - \phi_1(t)] \right] = V^{(ein)}(t) \quad (31a)$$

$$\underline{RI^2(t) + LI(t) \frac{dI(t)}{dt} + I(t) [\phi_2(t) - \phi_1(t)] = I(t) V^{(ein)}(t)}$$

$$\frac{dQ_2(t)}{dt} = - \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{d}{dt} C [\phi_2(t) - \phi_1(t)] \quad (31b)$$

$$\boxed{I(t) V^{(ein)}(t) = RI^2(t) + \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} LI^2(t) + \frac{1}{2} C [\phi_2(t) - \phi_1(t)]^2 \right\}} \quad (32)$$

1... von der Spannungsquelle in der Zeiteinheit zugeführte Energie (von der Spannungsquelle zugeführte Leistung)

2... in der Zeiteinheit als Joulesche Wärme dissipierte Energie

3... Zunahme der gespeicherten Feldenergie in der Zeiteinheit (vgl. mit den Gln. (III.53) und (IV.48))

XIII. 2. Elektrotechnik der Wechselstrom-Netzwerke (eingeschwungener Zustand)

XIII. 2.A. Kirchhoffsche Gesetze

Zeitlich harmonische Vorgänge:

alle Quellen und Feldstärken und damit alle Spannungen und Stromstärken zeitlich harmonisch mit der Kreisfrequenz  $\omega$

komplexe Schreibweise: • Zeitfaktor  $e^{+i\omega t}$  (!)

• Rechnen mit komplexen Größen, solange man es mit in den Spannungen und Strömen linearen Beziehungen zu tun hat

• die physikalischen Größen werden aus solchen Gleichungen erhalten, indem man den Realteil bildet (vorher Zeitfaktor  $e^{i\omega t}$  hinzufügen, wenn dieser schon "weggelassen", d.h. herausgekürzt wurde)

• Übergehen zu den Realteilen bevor man in den Spannungen und Strömen nichtlineare Ausdrücke (z.B. die Leistung) berechnet

Beispiel:

$$RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int I(t) dt = V^{(ein)}(t)$$

(eingeschwungener Zustand vorausgesetzt!) wird zu

$$(R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}) I = V^{(ein)} \quad (25)$$

Ohmscher induktiver kapazitiver Widerstand

$$R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C}) =: Z(\omega)$$

$$Z(\omega) I = V^{(ein)}$$

allgemeines Ohmsches Gesetz (gilt wenn Zweipol an Spannungsquelle angeschlossen ist)

Kirchhoffsche Gesetze für Wechselstrom-Netzwerke

1) Aus  $\text{div } \vec{J}(\vec{r}, t) = 0$

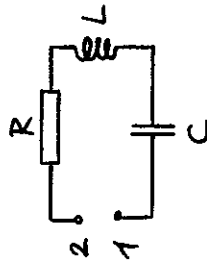
folgt:

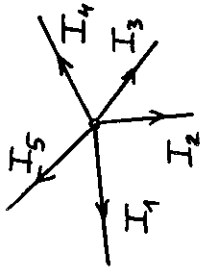
1. Kirchhoffsches Gesetz ("Knotensatz"):

Die Summe aller von einem Netzwerk-"Knoten" wegfließenden Ströme ist null:

$$\sum_n I_n = 0$$

komplexer Gesamtwiderstand bzw. Impedanz des speziellen "Zweipols"





$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 0$$

2) Aus  $\oint \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = 0$  für einen beliebigen geschlossenen Weg

und den für Ohmsche Widerstände, Induktionsspulen und Kondensatoren für die Spannungsabfälle

$$\int \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = \phi_{cj}(t) - \phi_{ck}(t)$$

gefundenen Ausdrücken folgt:

2. Kirchhoffsches Gesetz ("Maschensatz"):

In einer geschlossenen Stromschleife ("Masche") innerhalb eines Netzwerkes ist die Summe der Spannungsabfälle an Ohmschen, induktiven und kapazitiven Widerständen gleich der Summe der eingepprägten Spannungen:

$$\sum_m Z_m(\omega) I_m = \sum_l V_l^{(ein)} \tag{27}$$

[Umlaufsinn!]

Dabei ist:

$I_m$  der durch den Teilwiderstand  $Z_m(\omega)$  fließende Teilstrom

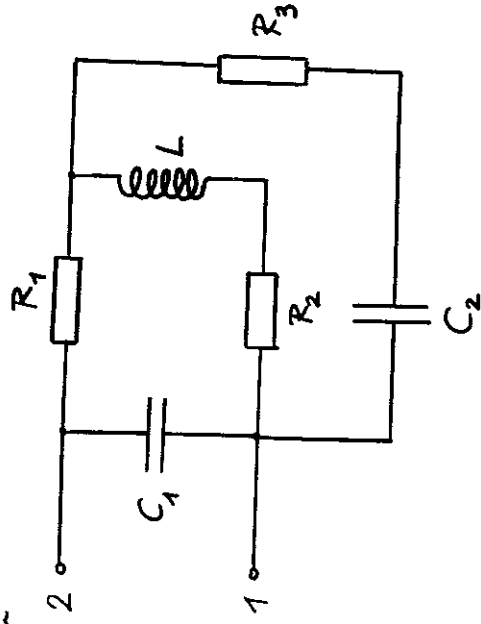
$$Z_m(\omega) = \begin{cases} R & \text{für einen Ohmschen Widerstand} \\ i\omega L & \text{für eine Induktionsspule} \\ \frac{1}{i\omega C} & \text{für einen Kondensator} \end{cases}$$

Beispiele: s. Abschnitt XIII.2.C - also später (28)

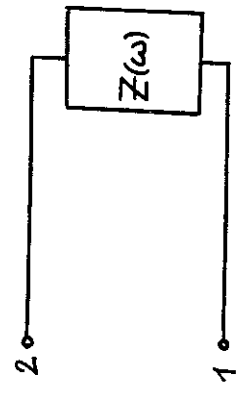
Passiver Zweipol

Beliebig verzweigtes lineares Netzwerk, welches nur "passive Elemente", d.h. Ohmsche Widerstände, Induktionsspulen und Kondensatoren enthält, und zwei offene Enden (Anschlüsse) besitzt.

Z.B.:







$$Z(\omega) = R(\omega) + iX(\omega)$$

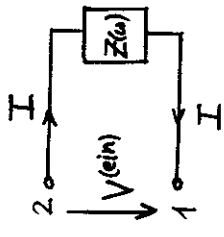
Wirkwiderstand, Resistanz  
Blindwiderstand, Reaktanz

komplexer Gesamt-  
widerstand, Impedanz  
des passiven Zweipols

Bei Anlegen einer Spannungsquelle an den Polen 1,2 gilt dann:

$$Z(\omega) I = V^{(ein)}$$

allgemeines Ohmsches Gesetz  
bzw.  $I = Y(\omega) V^{(ein)}$



mit

$$Y(\omega) = \frac{1}{Z(\omega)} = G(\omega) + iB(\omega)$$

(29a)

Admittanz  
elektrischer Leitwert,  
Wirkleitwert, Konduktanz

Blindleitwert,  
Suszeptanz

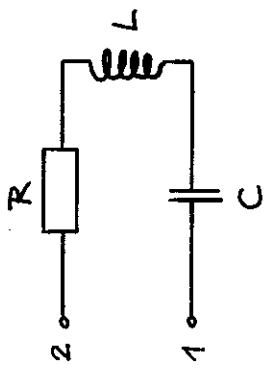
$|Z(\omega)|$  Scheinimpedanz,  $|Y(\omega)|$  Scheinleitwert

Darstellung von  $Z(\omega) = R(\omega) + iX(\omega)$

in der komplexen Ebene als Kurve mit  $\omega$  als

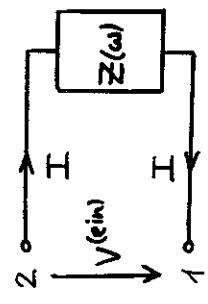
Kurvenparameter: "Ortskurve" für den Zweipol

Beispiel: Berechne alle hier definierten Größen und zeichne die Ortskurve für den Fall



XIII. 2. B. Wirkleistung und Blindleistung einer Spannungsquelle an einem passiven Zweipol

$$I(t) = I_0 e^{i\omega t}, \quad V^{(ein)}(t) = V_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t} \quad (33)$$



$I_0, V_0$  reell  $> 0$   
 $\frac{V_0}{I_0}$ ,  $\varphi$  durch  $Z(\omega)$  bestimmt (s. später)

von der Spannungsquelle zugeführte Leistung (in der Zeiteinheit zugeführte Energie)

$$P(t) = \text{Re} I(t) \cdot \text{Re} V^{(ein)}(t)$$

$$= I_0 \cos \omega t \cdot V_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$= I_0 V_0 \cos \varphi \cos^2 \omega t - I_0 V_0 \sin \varphi \sin^2 \omega t \quad (34)$$

$P(t) = I_0 V_0 \cos \varphi \cos^2 \omega t - I_0 V_0 \sin \varphi \sin^2 \omega t$   
 $2P_{\text{Wirk}}$  ; s. unten  $2P_{\text{Blind}}$  ; s. unten  
 Von der Spannungsquelle im Zeitmittel über eine Periode zugeführte Leistung = Wirkleistung

$$P_{\text{Wirk}} := \langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} I_0 V_0 \cos \varphi \quad (36)$$

effektive Stromstärke und Spannung

$$I_{\text{eff}} := \sqrt{\langle (\text{Re } I(t))^2 \rangle} = I_0 \sqrt{\langle \cos^2 \omega t \rangle} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad (37)$$

$$V_{\text{eff}} := \sqrt{\langle (\text{Re } V(t))^2 \rangle} = V_0 \sqrt{\langle \cos^2 (\omega t + \varphi) \rangle} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow P_{\text{Wirk}} = I_{\text{eff}} V_{\text{eff}} \cos \varphi \quad (38)$$

Blindleistung

$$P_{\text{Blind}} := \langle \text{Re } V^{(\text{ein})}(t) \cdot \text{Re } \frac{dI(t)}{d(\omega t)} \rangle = \dots \text{ (s. Unter-  
 lagen)}$$

$$= \frac{1}{2} I_0 V_0 \sin \varphi$$

$$P_{\text{Blind}} = I_{\text{eff}} V_{\text{eff}} \sin \varphi \quad (39)$$

$$P(t) = P_{\text{Wirk}} (1 + \cos 2\omega t) - P_{\text{Blind}} \sin 2\omega t$$

"tatsächlich zugeführt" "pendelt"

Zusammenhang zwischen Phasenverschiebung  $\varphi$  und komplexem Widerstand des passiven Zweipols

$$V^{(\text{ein})} = Z(\omega) I = (R(\omega) + iX(\omega)) I$$

$$V_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t} = \underbrace{\sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)}}_{|Z(\omega)| \text{ Scheinimpedanz}} e^{i \arctan \frac{X(\omega)}{R(\omega)}} I_0 e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} V_{\text{eff}} = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} I_{\text{eff}} \quad (40)$$

$$\tan \varphi = \frac{X(\omega)}{R(\omega)}$$

$$\Rightarrow \sin \varphi = \frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

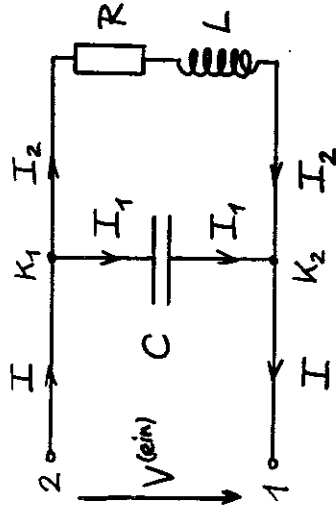
$$V_{\text{eff}} = \sqrt{R^2 + X^2} I_{\text{eff}}$$

$$V_{\text{eff}} \cos \varphi = R I_{\text{eff}}, \quad V_{\text{eff}} \sin \varphi = X I_{\text{eff}}$$

$$P_{\text{Wirk}} = I_{\text{eff}} V_{\text{eff}} \cos \varphi = R I_{\text{eff}}^2 \quad \text{Wirkwiderstand} \quad R(\omega)$$

$$P_{\text{Blind}} = I_{\text{eff}} V_{\text{eff}} \sin \varphi = X I_{\text{eff}}^2 \quad \text{Blindwiderstand} \quad X(\omega) \quad (41)$$

XIII.2.C. Beispiel: Parallelresonanzkreis



Knotensatz:

Knoten  $K_1$ :  $I = I_1 + I_2$  (42)

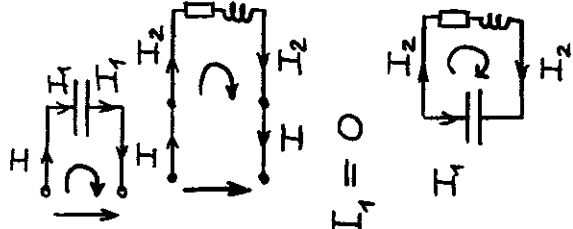
Knoten  $K_2$ :  $I = I_1 + I_2$

Maschensatz:

Masche  $M_1$ :  $\frac{1}{i\omega C} I_1 = V^{(ein)}$  (43a)

Masche  $M_2$ :  $RI_2 + i\omega LI_2 = V^{(ein)}$  (43b)

Masche  $M_3$ :  $RI_2 + i\omega LI_2 - \frac{1}{i\omega C} I_1 = 0$  (43c)



$(R + i\omega L)I_2 + i\frac{1}{\omega C}I_1 = 0$   
 $\parallel$   
 $I - I_1$

$(R + i\omega L)I = [R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})]I_1$

$V^{(ein)} = -i\frac{1}{\omega C}I_1 = \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{R + i\omega L}}I$  (44)

$\Rightarrow Z(\omega) = \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{R + i\omega L}}$  Impedanz

$Y(\omega) = i\omega C + \frac{1}{R + i\omega L}$  Admittanz

Mit  $\tau := RC$ ,  $\omega_0 := \frac{1}{\sqrt{LC}}$  (45b)

folgt

$Z(\omega) = \frac{R}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + \tau^2\omega^2} + i \underbrace{\frac{\omega L (1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + \tau^2\omega^2}}_{X(\omega) \text{ Reaktanz}}$  (45a)

$Y(\omega) = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + i \underbrace{(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2})}_{B(\omega) \text{ Suszeptanz}}$  (46)  
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{G(\omega) \text{ Konduktanz}}$