FOLIEN VON D. GRAU ZUR VORLESUNG "ELEKTRODYNAMIK UND RELATIVITÄTSTHEORIE"

nach dem Skriptum von H. Nowotny

Kapitel 12

XII. ELEKTRO- UND MAGNETOSTATIK

XII.1. Elektrostatik

XII.1.A. Feld- und Materialgleichungen. Grenzbedingungen

FG:

$$\operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r})$$
$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \qquad (1)$$

mit $$\vec{D}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) + 4\pi\vec{P}(\vec{r}) \qquad (2a)$$

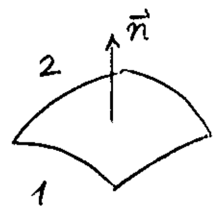
MG:
z.B. innerhalb eines Raumbereiches mit homogenem isotropem Dielektrikum

$$\vec{P}(\vec{r}) = \chi_e \vec{E}(\vec{r}) \quad \text{bzw.} \quad \vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon \vec{E}(\vec{r}) \qquad (2b)$$

GB an der Grenzfläche zweier Materialien:

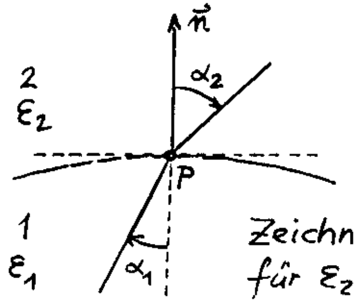
$$\operatorname{Div} \vec{D} \equiv \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 4\pi\sigma$$
$$\operatorname{Rot} \vec{E} \equiv \vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0} \qquad (3)$$

bzw. $$D_{2,n} - D_{1,n} = 4\pi\sigma$$
$$\vec{E}_{2,tg} - \vec{E}_{1,tg} = \vec{0}$$



σ freie Flächenladungsdichte

"Brechung der Feldlinien" für $\sigma \equiv 0$ und Dielektrika



Zeichnung für $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$

—— Tangenten an die Feldlinien bei Annäherung an den Flächenpunkt P

$$D_{2,n} = D_{1,n} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_2 E_2 \cos\alpha_2 = \varepsilon_1 E_1 \cos\alpha_1$$

$$\vec{E}_{2,tg} = \vec{E}_{1,tg} \quad \Rightarrow \quad E_2 \sin\alpha_2 = E_1 \sin\alpha_1 \qquad (8)$$

$$\frac{\tan\alpha_2}{\varepsilon_2} = \frac{\tan\alpha_1}{\varepsilon_1} \qquad (9)$$

$\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ $[\varepsilon_2 < \varepsilon_1]$ $\Rightarrow$ "Brechung" der Richtung von $\vec{D}$ = Richtung von $\vec{E}$ vom Lot [zum Lot]

Bemerkung: Spricht man von "Brechung der Feldlinien", so muß man beachten, daß zwar die Feldlinien von $\vec{D}$ alle "durch die Grenzfläche durchgehen", die Feldlinien von $\vec{E}$ jedoch teilweise an der Grenzfläche (an Polarisationsflächenladungen) enden!

Potential

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\operatorname{grad}\phi(\vec{r})} \qquad (4)$$

FG für das Potential innerhalb eines Raumbereiches mit homogener Materie*):

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho(\vec{r}) \qquad \text{Poissongl.} \qquad (5)$$

*) homogenes isotropes Dielektrikum

Lösung:

$$\Delta\phi_{hom}(\vec{r}) = 0 \qquad (7)$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon}\int_V d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \phi_{hom}(\vec{r}) \qquad (6)$$

V: betreffender Raumbereich mit homogener Materie

$\phi_{hom}(\vec{r})$ für Erfüllung der Grenzbedingungen (zu anderer Materie oder zum Vakuum) benötigt.

XII.1.B. Lösungsmethoden

Potentialmethode

Bereits skizziert; Beispiel folgt

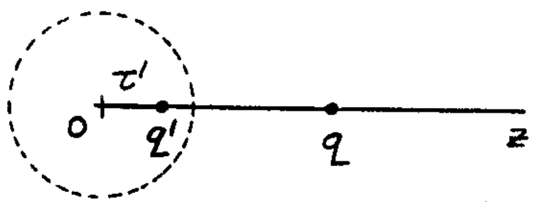
Bildladungsmethode — NICHT SO UNIVERSELL!
Eigentliches Problem durch Ersatzproblem mit fiktiven Bildladungen ersetzt; Beispiel folgt

Bemerkung "außer Konkurrenz":

"Elementare Bildladungmethode" (Bildladungen zu Punktladungen ebenfalls Punktladungen u.ä.) auch nicht für soviele Probleme anwendbar wie in Elektrostatik der Leiter.

Methode z.B. für dielektrische Kugel + Punktladung nicht zielführend

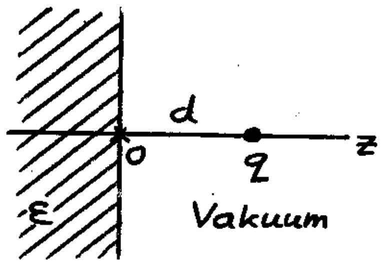
z.B. für Außenraumproblem bzgl. der Kugel:
dielektrische Kugel müßte durch fiktive Punktladung + fiktive Linienladungsverteilung ersetzt werden



Dabei τ' überdies noch z-abhängig!
$\left(\tau'(z) \propto z^{-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}}\right)$

XII.1.C. Beispiel zur Bildladungsmethode: Punktladung im Vakuum vor einem dielektrischen Halbraum

Eigentliches Problem:



$z>0$: Vakuum

FG:

$$\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r}) = 4\pi q\,\delta(x)\delta(y)\delta(z-d)$$
$$\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$$

$z<0$: Dielektrikum

FG: $\operatorname{div}\vec{D}(\vec{r}) = 0$, $\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$ MG: $\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon\vec{E}(\vec{r})$

FG + MG $\Rightarrow$ FG für $\vec{E}(\vec{r})$: $\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r}) = 0 \Rightarrow \rho_p(\vec{r}) = 0$
$\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$

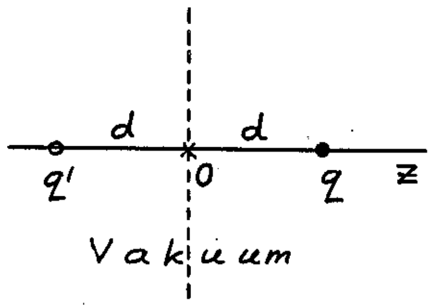
Bemerkung: Allgemein gilt in einem homogenen isotropen Dielektrikum $\operatorname{div}\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon \operatorname{div}\vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r})$ und $\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r}) = 4\pi(\rho(\vec{r}) + \rho_p(\vec{r}))$, woraus
$$\rho_p(\vec{r}) = -\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\rho(\vec{r})$$
folgt. ●

Asymptotische Bedingung:
$$\vec{E}(\vec{r}) \xrightarrow[r\to+\infty]{} \vec{0}$$

Grenzbedingungen:
$$\operatorname{Div}\vec{D} = 0, \quad \operatorname{Rot}\vec{E} = \vec{0} \quad \text{für } z=0$$

Ersatzproblem:

1) für Ansatz für $\vec{E}(\vec{r})$ im Raumbereich $z>0$:



Die fiktive Ladung q' soll also hinsichtlich der Wirkung auf den Halbraum $z>0$ das beim eigentlichen Problem bei $z<0$ befindliche (durch q polarisierte!) Dielektrikum "vertreten".

$$\vec{E}(\vec{r}) = q\,\frac{\vec{r}-d\vec{e}_z}{|\vec{r}-d\vec{e}_z|^3} + q'\,\frac{\vec{r}+d\vec{e}_z}{|\vec{r}+d\vec{e}_z|^3} \quad \text{für} \quad z>0 \tag{11}$$

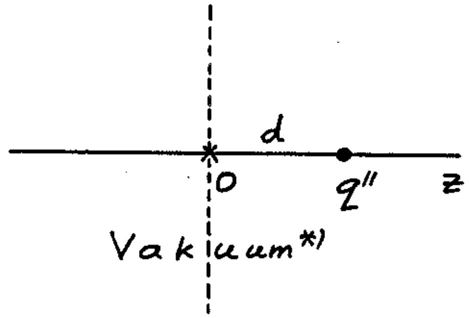
Ansatz erfüllt FG des eigentlichen Problems im Bereich $z>0$:

$$\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r}) = 4\pi q\,\delta(x)\delta(y)\delta(z-d) \quad \checkmark$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \quad \checkmark$$

Ansatz erfüllt asymptotische Bedingung für $z>0$ ✓

2) für Ansatz für $\vec{E}(\vec{r})$ im Raumbereich $z<0$:



Die fiktive Ladung q'' soll also hinsichtlich der Wirkung auf den Halbraum $z<0$ die beim eigentlichen Problem an dieser Stelle befindliche Ladung q und das bei $z<0$ befindliche (durch q polarisierte) Dielektrikum "vertreten".

$$\vec{E}(\vec{r}) = q''\,\frac{\vec{r}-d\vec{e}_z}{|\vec{r}-d\vec{e}_z|^3} \quad \text{für} \quad z<0 \tag{13}$$

Ansatz erfüllt FG + MG des eigentlichen Problems im Bereich $z<0$:

$$\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad \checkmark$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \quad \checkmark$$

Ansatz erfüllt asymptotische Bedingung für $z<0$. ✓

Zu erfüllen bleiben lediglich noch die Grenzbedingungen des eigentlichen Problems

$\Longrightarrow$ Bestimmungsgleichungen für q', q'' in Abhängigkeit von q, ε (falls kein Widerspruch!)

---

*) man könnte auch ein einheitliches Medium mit ε nehmen

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{z<0}:\quad & \vec{E}(\vec r) = q'' \frac{\vec r - d\vec e_z}{|\vec r - d\vec e_z|^3} \\ \underline{z>0}:\quad & \vec{E}(\vec r) = q \frac{\vec r - d\vec e_z}{|\vec r - d\vec e_z|^3} + q' \frac{\vec r + d\vec e_z}{|\vec r + d\vec e_z|^3} \end{aligned}}$$

Grenzbedingungen:

$\mathrm{Div}\,\vec D = 0$, d.h. Stetigkeit der Normalkomponente von $\vec D$ für $z=0$:

$z=0$: $\quad \vec r \mp d\vec e_z = \underbrace{x\vec e_x + y\vec e_y}_{tg} \underbrace{\mp d\vec e_z}_{n}$

$$|\vec r \mp d\vec e_z| = \sqrt{\underbrace{x^2+y^2}_{\rho^2}+d^2}$$

$$\varepsilon q'' \frac{-d}{(\rho^2+d^2)^{3/2}} = q \frac{-d}{(\rho^2+d^2)^{3/2}} + q' \frac{d}{(\rho^2+d^2)^{3/2}} \quad \forall \rho \tag{15}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{-\varepsilon q'' = -q + q'}$$

$\mathrm{Rot}\,\vec E = \vec 0$, d.h. Stetigkeit der Tangentialkomponente von $\vec E$ für $z=0$:

$$q'' \frac{x\vec e_x + y\vec e_y}{(\rho^2+d^2)^{3/2}} = q \frac{x\vec e_x + y\vec e_y}{(\rho^2+d^2)^{3/2}} + q' \frac{x\vec e_x + y\vec e_y}{(\rho^2+d^2)^{3/2}} \quad \forall x,y \tag{14}$$

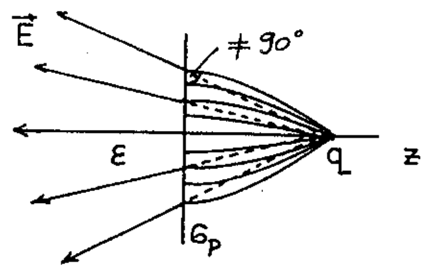
$$\Rightarrow \quad \underline{q'' = q + q'}$$

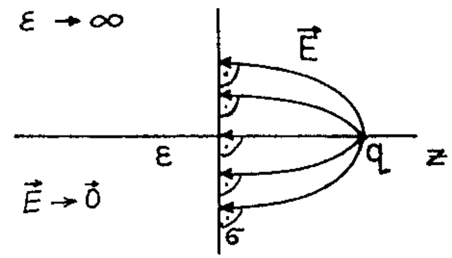
$$\Rightarrow \quad \boxed{q' = -q\,\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\,,\quad q'' = q\,\frac{2}{\varepsilon+1}} \tag{16}$$

$$q' = -q\,\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\,,\quad q'' = q\left(\frac{2}{\varepsilon+1}\right) < 1$$

Verlauf der $\vec E$-Feldlinien:

$\underline{\varepsilon\to\infty}$: $\quad q' \to -q$, $\quad q'' \to 0$

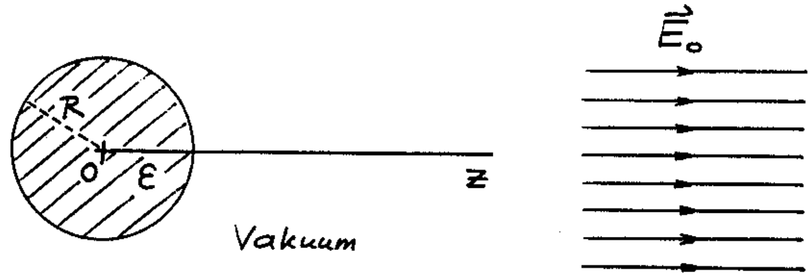




Selbst rechnen: 1) $\underline{\sigma_p(\rho) = P_z(\rho,0)}$ (d.i. $\sigma_p = -\mathrm{Div}\,\vec P$)

2) Kraft auf Punktladung q

XII.1.D. Beispiel zur Potentialmethode: Dielektrische Kugel in einem (ursprünglich) homogenen elektrostatischen Feld $\vec E_0 = E_0\vec e_z$



asymptotische Bedingung für $\vec E(\vec r)$:

$$\vec E(\vec r) \xrightarrow[r\to+\infty]{} \vec E_0 = E_0\vec e_z$$

axiale Symmetrie bzgl. z-Achse

Keine freien Ladungen im Endlichen $\Rightarrow$

Potential genügt für $r<R$ (Index i)

und für $r>R$ (Index a) der Laplacegleichung:

$r<R$: $\phi(r,\vartheta,\varphi) \equiv \phi_i(r,\vartheta,\varphi)$

Bemerkung: eigentlich überflüssig, da axiale Symmetrie •

$$\Delta\phi_i(r,\vartheta,\varphi) = 0 \qquad (17)$$

$\Rightarrow$ (Regularität)
$$\phi_i(r,\vartheta,\varphi) = -\sum_{lm} b_{lm} r^l Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \qquad (18)$$

Bemerkung: Entwicklung nach $P_l(\cos\vartheta)$ würde genügen •

$r>R$: $\phi(r,\vartheta,\varphi) \equiv \phi_a(r,\vartheta,\varphi)$

$$\Delta\phi_a(r,\vartheta,\varphi) = 0 \qquad (19)$$

asymptotische Bedingung:

$$\vec{E}_a(\vec{r}) = -\operatorname{grad}\phi_a(\vec{r}) \xrightarrow[r\to+\infty]{} E_0\vec{e}_z = \operatorname{grad}(E_0 z) \qquad (20)$$
$$= -\operatorname{grad}(-E_0 r\cos\vartheta)$$

$$\phi_a(r,\vartheta,\varphi) \underset{r\to+\infty}{\sim} -E_0 r \underbrace{\cos\vartheta}_{\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,Y_{10}(\vartheta,\varphi)}$$

(additive Konstante willkürlich Null gesetzt)

$$\phi_a(r,\vartheta,\varphi) = -\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,E_0 r\, Y_{10}(\Omega) + \sum_{lm} \frac{a_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\Omega) \qquad (21)$$

Damit sind FG + MG + asymptotische Bdg. berücksichtigt, es sind nur noch die Grenzbedingungen für $r=R$ zu erfüllen.

Beachte: Da es keine freien Ladungen im Endlichen gibt, geht ε nur über die Grenzbedingungen ein! •

Grenzbedingungen für $r=R$:

$$\operatorname{Div}\vec{D}=0 \Rightarrow \varepsilon \left.\frac{\partial\phi_i}{\partial r}\right|_R = \left.\frac{\partial\phi_a}{\partial r}\right|_R \qquad (22a)$$

$$\operatorname{Rot}\vec{E}=\vec{0} \Rightarrow \left.\frac{\partial\phi_i}{\partial\vartheta}\right|_R = \left.\frac{\partial\phi_a}{\partial\vartheta}\right|_R \qquad (22b)$$

$$\left.\frac{\partial\phi_i}{\partial\varphi}\right|_R = \left.\frac{\partial\phi_a}{\partial\varphi}\right|_R \qquad (22c)$$

(22b) + (22c) kann man wegen (22a)*) durch

$$\phi_i|_R = \phi_a|_R \qquad (22d)$$

ersetzen.

*) Wegen (22a) darf $\frac{\partial\phi}{\partial r}$ für $r=R$ nur einen Sprung besitzen!

$$\phi_i(r,\vartheta,\varphi) = -\sum_{lm} b_{lm} r^l Y_{lm}(\Omega)$$

$$\phi_a(r,\vartheta,\varphi) = -\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,E_0 r\, Y_{10}(\Omega) + \sum_{lm} \frac{a_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\Omega)$$

$$\phi_i(R,\vartheta,\varphi) = \phi_a(R,\vartheta,\varphi)$$

$$-\sum_{lm} b_{lm} R^l Y_{lm}(\Omega) = -\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,E_0 R\, Y_{10}(\Omega) + \sum_{lm} \frac{a_{lm}}{R^{l+1}} Y_{lm}(\Omega)$$

$$\varepsilon \frac{\partial\phi_i}{\partial r}\bigg|_R = \frac{\partial\phi_a}{\partial r}\bigg|_R$$

$$-\varepsilon\sum_{lm} l\, b_{lm} R^{l-1} Y_{lm}(\Omega) = -\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,E_0\, Y_{10}(\Omega) - \sum_{lm} (l+1)\frac{a_{lm}}{R^{l+2}} Y_{lm}(\Omega)$$

Koeffizientenvergleich bei den $Y_{lm}(\Omega)$ gibt zwei Gln. für die a_{lm}, b_{lm} mit festem l, m:

s. Skriptum; Lösung:

$$\underline{a_{lm} = b_{lm} = 0} \quad \underline{\text{für } (l,m) \neq (1,0)} \qquad (23b)$$

$$\underline{a_{10} = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} R^3 \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,E_0}\,, \quad \underline{b_{10} = \frac{3}{\varepsilon+2}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,E_0} \qquad (24b)$$

Einsetzen gibt:

$$\boxed{\phi_i(\vec r) = -\frac{3}{\varepsilon+2} E_0 \underbrace{r\cos\vartheta}_{z}} \qquad (25a\text{-}1)$$

$$\phi_a(\vec r) = -E_0 \underbrace{r\cos\vartheta}_{z} + \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} R^3 E_0 \underbrace{\frac{\cos\vartheta}{r^2}}_{\frac{z}{r^3}} \quad \frac{\vec E_0\cdot\vec r}{r^3}$$

Mit

$$\boxed{\vec p := \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} R^3 E_0 \vec e_z = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} R^3 \vec E_0} \qquad (25b)$$

gilt

$$\boxed{\phi_a(\vec r) = -E_0 r\cos\vartheta + \frac{\vec p\cdot\vec r}{r^3}} \qquad (25a\text{-}2)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \vec E_i(\vec r) &= \frac{3}{\varepsilon+2}\vec E_0 = \vec E_0 \overbrace{- \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\vec E_0}^{*)} \\ \vec E_a(\vec r) &= \vec E_0 + \underbrace{\frac{3(\vec p\cdot\vec r)\vec r - r^2\vec p}{r^5}}_{*)} \end{aligned}}$$

*) verursacht von Polarisationsflächenladungs=dichte auf Kugeloberfläche

Nach <u>außen</u> wirkt die polarisierte dielektrische Kugel wie ein <u>Punktdipol</u> <u>mit Moment $\vec p$ im Kugelmittelpunkt.</u>

$r < R$: Polarisation $\vec{P}$

$$\vec{D}_i(\vec{r}) = \varepsilon \vec{E}_i(\vec{r}) = \vec{E}_i(\vec{r}) + 4\pi \vec{P}(\vec{r})$$

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \vec{E}_i(\vec{r}) \quad , \quad \vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{3}{\varepsilon + 2} \vec{E}_0$$

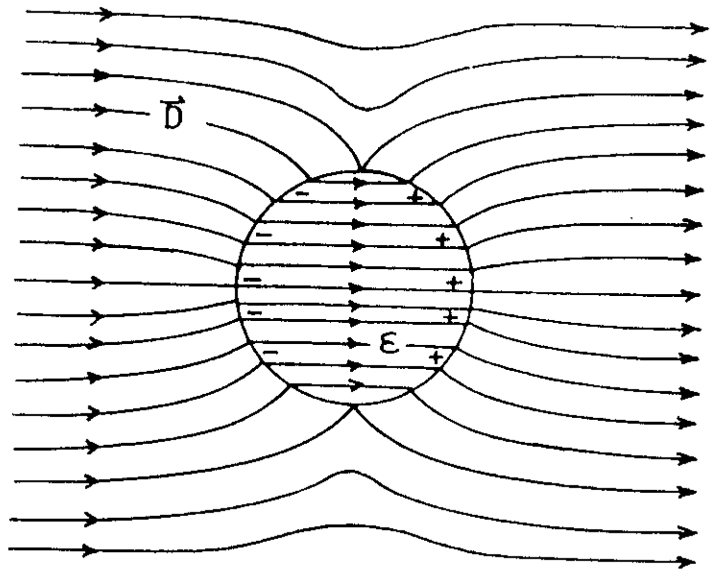
$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{P}(\vec{r}) = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \vec{E}_0}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{\text{Kugel}} d^3r\, \vec{P}(\vec{r}) = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} R^3 \vec{E}_0 = \vec{p}$$

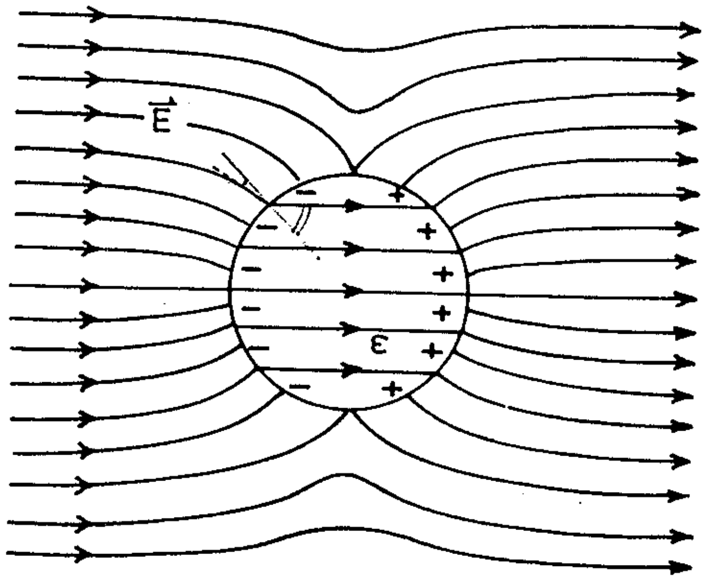
$\vec{p}$ ist also das gesamte induzierte Dipolmoment der dielektrischen Kugel.

$$\rho_P(\vec{r}) = -\operatorname{div} \vec{P}(\vec{r}) = 0$$

$$\sigma_P(\vartheta) = -\operatorname{Div} \vec{P} = P_r(R, \vartheta)$$ selbst ausrechnen!



"Brechungsgesetz" der Feldlinien!



XII. 2. Dielektrika mit linearer Materialgleichung: elektrostatische Energie und elektrostatische Kräfte

Dielektrikum soll isotrop sein, kann aber inhomogen sein:

MG: $\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon(\vec{r})\,\vec{E}(\vec{r})$

XII. 2. A. Elektrostatische Energie

(XI.63): Ausdruck gilt auch für $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$!

$$W = \frac{1}{8\pi}\int d^3r\, \vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{D}(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi}\int d^3r\, \frac{\vec{D}^2(\vec{r})}{\varepsilon(\vec{r})} \qquad (26)$$

"Serviceleistung" für den nächsten Abschnitt:

Änderung der Feldenergie bei einer kleinen virtuellen Änderung von $\rho(\vec{r})$ und $\varepsilon(\vec{r})$

(z.B. bedingt durch eine virtuelle Verschiebung des Dielektrikums)

$$\delta W = \frac{1}{8\pi}\int d^3r\, \delta\,\frac{\vec{D}^2}{\varepsilon} = \frac{1}{8\pi}\int d^3r\, \underbrace{\left[\frac{2\vec{D}\cdot\delta\vec{D}}{\varepsilon} - \frac{\vec{D}^2\,\delta\varepsilon}{\varepsilon^2}\right]}_{2\vec{E}\cdot\delta\vec{D} - \vec{E}^2\,\delta\varepsilon}$$

$$\vec{E}\cdot\delta\vec{D} = -\,\mathrm{grad}\,\phi\cdot\delta\vec{D} = -\underbrace{\vec{\nabla}(\phi\,\delta\vec{D})}_{0} + \phi\,\underbrace{\mathrm{div}\,\delta\vec{D}}_{4\pi\,\delta\rho}$$

$$-\delta W = -\int d^3r\, \phi(\vec{r})\,\delta\rho(\vec{r}) + \frac{1}{8\pi}\int d^3r\, \vec{E}^2(\vec{r})\,\delta\varepsilon(\vec{r}) \qquad (28)$$

XII. 2. B. Kraftdichte im Dielektrikum

Betrachtet wird eine ortsabhängige virtuelle Verschiebung $\delta\vec{s}(\vec{r})$ der Materie, d.h. nicht eine Verschiebung der Materie als starres Ganzes.

Bilanz: $f(\vec{r})$ (gesuchte) Kraftdichte im Dielektrikum, abhängig von $\vec{E}(\vec{r}), \rho(\vec{r}), \varepsilon(\vec{r}), \ldots$

$$\int d^3r\, \vec{f}(\vec{r})\cdot\delta\vec{s}(\vec{r}) = -\delta W \qquad (29)$$

Arbeit der Kraft am Volumselement d^3r bei der virtuellen Verschiebung $\delta\vec{s}(\vec{r})$, integriert über den ganzen Raum*) = vom Feld an der Materie bei der virtuellen Verschiebung insgesamt geleistete Arbeit

Abnahme der gesamten Feldenergie

*) formal; $\delta\vec{s}(\vec{r})$!

Ziel: $-\delta W$ auf die Form $-\delta W = \int d^3r\, \vec{a}(\vec{r})\cdot\delta\vec{s}(\vec{r})$ bringen $\Rightarrow$ $\vec{f}(\vec{r}) = \vec{a}(\vec{r})$ "ablesen":

Bemerkung: $\int d^3r\, \vec{f}(\vec{r}) \cdot \delta\vec{s}(\vec{r}) = -\delta W$ aus,
reicht nur dann zur eindeutigen Bestimmung von $\vec{f}(\vec{r})$:
Wenn beliebige ortsabhängige Verschiebungen zugelassen werden. Bei ortsunabhängigem $\delta\vec{s}$ hätte man

$$\int d^3r\, [\vec{f}(\vec{r}) + \operatorname{grad}\psi(\vec{r})] \cdot \delta\vec{s}$$

$$= \int d^3r\, \vec{f}(\vec{r}) \cdot \delta\vec{s} + \int d^3r\, \underbrace{\operatorname{grad}\psi(\vec{r}) \cdot \delta\vec{s}}_{\vec{\nabla}(\psi(\vec{r})\delta\vec{s}) \to 0}$$

für beliebiges außerhalb des Dielektrikums verschwindendes $\psi(\vec{r})$

und man könnte nur die Gesamtkraft

$$\int d^3r\, \vec{f}(\vec{r})$$

berechnen. ●

Zusammenhang zwischen $\delta\rho(\vec{r})$ und $\delta\vec{s}(\vec{r})$:

ΔV ... beliebiger raumfester Volumsbereich

$$-\int_{\Delta V} d^3r\, \delta\rho(\vec{r}) = \oint_{F(\Delta V)} d^2\vec{f} \cdot \rho(\vec{r})\, \delta\vec{s}(\vec{r}) \quad \text{(Isolator!)} \qquad (30a')$$

Abnahme der Ladung in ΔV

$$= \int_{\Delta V} d^3r\, \operatorname{div}(\rho(\vec{r})\, \delta\vec{s}(\vec{r}))$$

ΔV beliebig

$$\Rightarrow \quad \delta\rho(\vec{r}) = -\operatorname{div}(\rho(\vec{r})\, \delta\vec{s}(\vec{r})) \qquad (31)$$

Zusammenhang zwischen $\delta\varepsilon(\vec{r})$ und $\delta\vec{s}(\vec{r})$:

Ein solcher Zusammenhang läßt sich nur unter der Annahme herstellen, daß ε eine eindeutige Funktion der Massendichte σ ist: "dielektrische Zustandsgleichung" $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$
(z.B. Clausius – Mossotti Beziehung)

Dann folgt

$$\delta\varepsilon(\vec{r}) = \frac{d\varepsilon}{d\sigma}(\vec{r})\, \delta\sigma(\vec{r}) \qquad (32b)$$

mit

$$\delta\sigma(\vec{r}) = -\operatorname{div}(\sigma(\vec{r})\, \delta\vec{s}(\vec{r})) \qquad (30b)$$

<u>Zusammenfassung:</u> $\int d^3r\, \vec{f}(\vec{r}) \cdot \delta\vec{s}(\vec{r}) = -\delta W$

$$= -\int d^3r\, \phi \underbrace{\delta\rho}_{-\operatorname{div}(\rho\,\delta\vec{s})} + \frac{1}{8\pi}\int d^3r\, \vec{E}^2 \underbrace{\delta\varepsilon}_{-\frac{d\varepsilon}{d\sigma}\operatorname{div}(\sigma\,\delta\vec{s})}$$

$$= \int d^3r\, \underbrace{\phi\, \vec{\nabla}(\rho\,\delta\vec{s})}_{\underbrace{\vec{\nabla}(\phi\rho\,\delta\vec{s})}_{0} - \rho\,\delta\vec{s}\cdot\underbrace{\vec{\nabla}\phi}_{-\vec{E}}} - \frac{1}{8\pi}\int d^3r\, \underbrace{\vec{E}^2 \frac{d\varepsilon}{d\sigma}\, \vec{\nabla}(\sigma\,\delta\vec{s})}_{\underbrace{\vec{\nabla}\left(\vec{E}^2 \frac{d\varepsilon}{d\sigma}\sigma\,\delta\vec{s}\right)}_{0} - \sigma\,\delta\vec{s}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{E}^2\frac{d\varepsilon}{d\sigma}\right)}$$

$$= \int d^3r\, \underbrace{\left[\rho(\vec{r})\,\vec{E}(\vec{r}) + \frac{\sigma(\vec{r})}{8\pi}\,\vec{\nabla}\left(\vec{E}^2(\vec{r})\,\frac{d\varepsilon}{d\sigma}(\vec{r})\right)\right]}_{\text{"ablesen": } \vec{f}(\vec{r})} \cdot \delta\vec{s}(\vec{r}) \qquad (33a)$$

<u>2. Term:</u>

$$\vec{\nabla}\varepsilon(\vec{r}) \qquad -\frac{1}{8\pi}\,\vec{E}^2(\vec{r})\,\frac{d\varepsilon}{d\sigma}(\vec{r})\,\vec{\nabla}\sigma(\vec{r}) + \frac{1}{8\pi}\,\vec{\nabla}\left(\vec{E}^2(\vec{r})\,\frac{d\varepsilon}{d\sigma}(\vec{r})\,\sigma(\vec{r})\right)$$

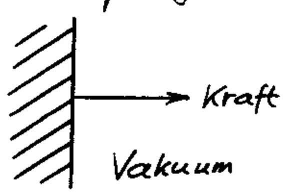
$$\boxed{\vec{f}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\,\vec{E}(\vec{r}) - \frac{1}{8\pi}\,\vec{E}^2(\vec{r})\,\operatorname{grad}\varepsilon(\vec{r}) + \frac{1}{8\pi}\,\operatorname{grad}\left(\vec{E}^2(\vec{r})\,\frac{d\varepsilon}{d\sigma}(\vec{r})\,\sigma(\vec{r})\right)} \qquad (33b)$$

<u>"erwartete" Kraftwirkung auf die wahren Ladungen</u>

<u>Wirksam, wo ε räumlich variiert:</u>

1) bei inhomogenem Medium im Inneren <u>und</u> auf Oberfläche

2) bei homogenem Medium <u>nur</u> auf Oberfläche, wo ε "springt"



<u>trägt nichts zur Gesamtkraft</u>

<u>$\int d^3r\, \vec{f}(\vec{r}) = \vec{F}$</u>

<u>bei</u>, da $\sigma(\vec{r}) \equiv 0$ "außerhalb";

gibt <u>Elektrostriktion</u>

(Form- und Volumsänderung im elektrostatischen Feld)

Bemerkung: Der Maxwellsche Spannungstensor Gl. (XI. 65) wurde unter der Annahme eines homogenen linearen Mediums abgeleitet und daher liefert er gemäß

$$f_k(\vec r) = \frac{\partial}{\partial x_i} T_{ik}^{(mat)}(\vec r) \qquad (34a)$$

in der Elektrostatik auch nur den 1. Term, d.h.

$$\rho(\vec r) E_k(\vec r) .$$

Mit der nun gefundenen "neuen" Kraftdichte kann man für die Elektrostatik isotroper inhomogener Dielektrika $(\varepsilon = \varepsilon(\vec r))$ einen für isotrope inhomogene Medien gültigen Tensor $\overleftrightarrow{T}_{(mat)}(\vec r)$ ableiten (s. Becker/Sauter Bd1).

●

XII. 2. C. Beispiel: Homogenes Dielektrikum in einem Plattenkondensator

Dielektrikum nur teilweise eingeschoben:

Feldenergieänderung bei Verschiebung des Dielektrikums

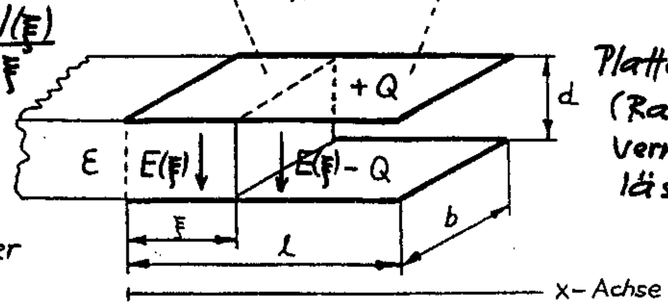
Kraft auf das Dielektrikum

Fall 1: Gesamtladung $+Q, -Q$ auf den Platten konstant gehalten

LW1: $W(\xi)$,

$$F_x(\xi) = -\frac{dW(\xi)}{d\xi}$$

$$\sigma'(\xi) = \frac{\varepsilon E(\xi)}{4\pi} \qquad \sigma(\xi) = \frac{E(\xi)}{4\pi} \quad *)$$



Platten "groß" (Randeffekte vernachlässigt)

ξ Parameter

Ladung Q über Platte nicht mehr gleichmäßig verteilt: Flächenladungsdichte $\sigma'(\xi) = \varepsilon \sigma(\xi)$

(Beachte: Feldstärke im eingeschobenen Teil des Dielektrikums wie im Vakuum wegen $\mathrm{Rot}\,\vec E = \vec 0$.)

$$Q = \xi b \sigma'(\xi) + (l-\xi) b \sigma(\xi)$$

$$= \frac{1}{4\pi} E(\xi)\, b\, \underbrace{[\varepsilon\xi + (l-\xi)]}_{l+(\varepsilon-1)\xi} = \text{fest}$$

$\Rightarrow$

$$E(\xi) = 4\pi Q \frac{1}{b} \frac{1}{l+(\varepsilon-1)\xi} \qquad (36)$$

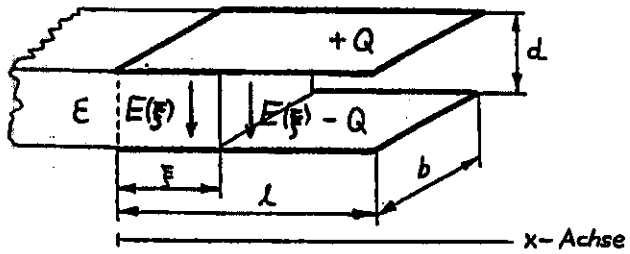
Wird mit wachsendem ξ kleiner

*) Formel $\mathrm{Div}\,\vec D = 4\pi\sigma$ einmal für Grenzfläche Leiter–Dielektrikum und einmal für Grenzfläche Leiter–Vakuum verwendet

Feldenergie: Energiedichte $\frac{1}{8\pi} ED$

$$W(\xi) = \frac{1}{8\pi}\left[\varepsilon E^2(\xi)\,\xi bd + E^2(\xi)(\ell-\xi)bd\right]$$

$$W(\xi) = \frac{1}{8\pi} E^2(\xi)\, bd\,[\ell + (\varepsilon-1)\xi] \qquad (35)$$



$$W(\xi) = \frac{1}{8\pi}\, 16\pi^2 Q^2 \frac{1}{b^2} \frac{1}{[\ell+(\varepsilon-1)\xi]^2}\,[\ell+(\varepsilon-1)\xi]\, bd$$

$$W(\xi) = 2\pi Q^2 \frac{d}{b} \frac{1}{\ell+(\varepsilon-1)\xi} \qquad (37)$$

wird mit wachsendem ξ kleiner

Kraft auf das Dielektrikum: $F_x\,\delta\xi = -\delta W$, also

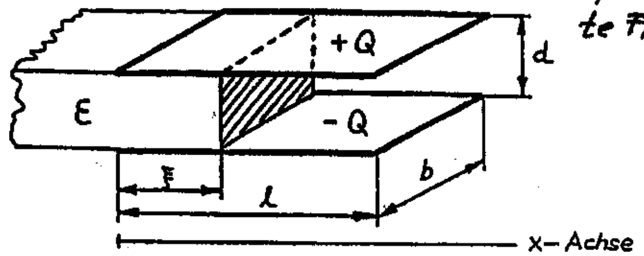
$$F_x(\xi) = -\frac{dW(\xi)}{d\xi} = 2\pi Q^2 \frac{d}{b} \frac{\varepsilon-1}{[\ell+(\varepsilon-1)\xi]^2} > 0 \qquad (38)$$

wird mit wachsendem ξ kleiner ($\xi < \ell$)

LW2: $F_x(\xi) = bd \int_0^\ell dx\, f_x(x;\xi)$

Nur Beitrag von Stelle $x = \xi$! (Flächenkraft auf schraffierte Fläche)

$$f_x(x;\xi) = -\frac{1}{8\pi} E^2(\xi)\, \frac{\partial \varepsilon(x;\xi)}{\partial x}$$



$$\varepsilon(x;\xi) = \varepsilon\,\Theta(\xi - x) + \Theta(x-\xi)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \varepsilon(x;\xi)}{\partial x} = -\varepsilon\,\delta(\xi-x) + \delta(x-\xi)$$

$$= -(\varepsilon-1)\,\delta(x-\xi) \qquad (39)$$

$$f_x(x;\xi) = \frac{1}{8\pi} E^2(\xi)\,(\varepsilon-1)\,\delta(x-\xi)$$

$$F_x(\xi) = \frac{1}{8\pi} E^2(\xi)\,(\varepsilon-1)\, bd \qquad (40)$$

Mit

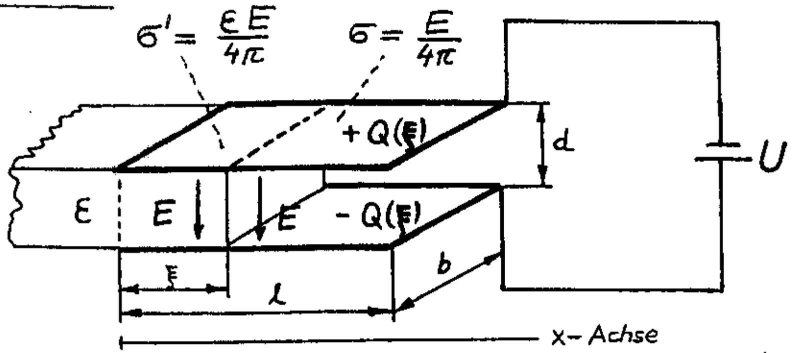
$$E^2(\xi) = 16\pi^2 Q^2 \frac{1}{b^2} \frac{1}{[\ell+(\varepsilon-1)\xi]^2}$$

folgt wieder

$$F_x(\xi) = 2\pi Q^2 \frac{d}{b} \frac{\varepsilon-1}{[\ell+(\varepsilon-1)\xi]^2} \quad \checkmark$$

Fall 2: Spannung U konstant gehalten

$\Rightarrow \quad E = \frac{U}{d}$ ändert sich mit wachsendem ξ nicht



$$Q(\xi) = \frac{1}{4\pi} E b \left[\ell + (\varepsilon - 1)\xi\right] = \frac{1}{4\pi} U \frac{b}{d} \left[\ell + (\varepsilon-1)\xi\right] \tag{43}$$

nimmt mit wachsendem ξ zu, d.h. Batterie "liefert" Ladung "nach"

Verschiebung um $\delta\xi$:

Ladung erhöht sich um

$$\delta Q = \frac{1}{4\pi} U \frac{b}{d} (\varepsilon - 1)\, \delta\xi \quad \Rightarrow$$

Batterie führt die Energie

$$\delta E_B = U\,\delta Q = \frac{1}{4\pi} U^2 \frac{b}{d} (\varepsilon-1)\,\delta\xi$$

zu

Feldenergie:

$$W(\xi) = \frac{1}{8\pi} E^2 b d \left[\ell + (\varepsilon-1)\xi\right] = \frac{1}{8\pi} U^2 \frac{b}{d} \left[\ell + (\varepsilon-1)\xi\right] \tag{41}$$

wird mit wachsendem ξ größer!

Kraft auf das Dielektrikum: Formel von Fall 1 LW2

$$F_x = \frac{1}{8\pi} E^2 (\varepsilon - 1)\, b d = \frac{1}{8\pi} U^2 \frac{b}{d} (\varepsilon - 1)$$

bleibt bei wachsendem ξ unverändert

Beachte: HIER

$$F_x = + \frac{dW(\xi)}{d\xi}$$

Verschiebung um $\delta\xi$: $\quad \delta E_B = \frac{1}{4\pi} U^2 \frac{b}{d} (\varepsilon-1)\,\delta\xi$

Feldenergie $\quad W(\xi) = \frac{1}{8\pi} U^2 \frac{b}{d} \left[\ell + (\varepsilon-1)\xi\right]$

erhöht sich um

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} U^2 \frac{b}{d} (\varepsilon-1)\,\delta\xi = \frac{1}{2}\,\delta E_B$$

und am Dielektrikum wird die Arbeit

$$\delta A = F_x\,\delta\xi = \frac{1}{8\pi} U^2 \frac{b}{d} (\varepsilon-1)\,\delta\xi = \frac{1}{2}\,\delta E_B$$

(gegen eine das Dielektrikum im Gleichgewicht haltende Kraft, z.B. Feder) geleistet

XII. 3. Magnetostatik

XII. 3. A. Feld- und Materialgleichungen. Grenzbedingungen

FG:

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad (45)$$

mit

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r}) - 4\pi \vec{M}(\vec{r}) \qquad (46a)$$

MG:

z.B. innerhalb eines Raumbereiches mit homogenem isotropen Dia- oder Paramagnetikum

$$\vec{M}(\vec{r}) = \chi_m \vec{H}(\vec{r}) \quad \text{bzw.} \quad \vec{M}(\vec{r}) = \bar{\chi}_m \vec{B}(\vec{r})$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu}\vec{B}(\vec{r}) \qquad (46b)$$

GB an der Grenzfläche zweier Materialien:

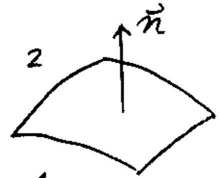
$$\operatorname{Div} \vec{B} \equiv \vec{n}\cdot(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

$$\operatorname{Rot} \vec{H} \equiv \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c}\vec{k}$$

bzw.

$$B_{2,n} - B_{1,n} = 0$$

$$\vec{H}_{2,tg} - \vec{H}_{1,tg} = \frac{4\pi}{c}\vec{k} \times \vec{n} \qquad (47)$$

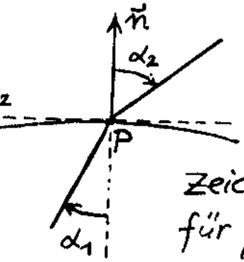


$\vec{k}$ freie Flächenstromdichte

"Brechung der Feldlinien" für $\vec{k} \equiv \vec{0}$ und Dia- bzw. Paramagnetika

2 μ_2

1 μ_1



Zeichnung für $\mu_2 > \mu_1$

—— Tangenten an die Feldlinien bei Annäherung an den Flächenpunkt P

$$B_{2,n} = B_{1,n} \implies B_2 \cos\alpha_2 = B_1 \cos\alpha_1$$

$$\vec{H}_{2,tg} = \vec{H}_{1,tg} \implies \frac{1}{\mu_2} B_2 \sin\alpha_2 = \frac{1}{\mu_1} B_1 \sin\alpha_1 \qquad (52)$$

$$\frac{\tan\alpha_2}{\mu_2} = \frac{\tan\alpha_1}{\mu_1} \qquad (53)$$

Kommentar analog wie bei Dielektrika.

Vektorpotential

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}) = 0 \implies \boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r})} \qquad (48)$$

FG für das Vektorpotential innerhalb eines Raumbereiches mit homogener Materie*):

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{c}\mu \vec{j}(\vec{r}) \qquad (49b)$$

*) homogenes isotropes Dia- oder Paramagnetikum

Beachte: Auf der "Ebene der Potentiale" hat man $\varepsilon \longleftrightarrow \frac{1}{\mu}$.

Lösung

$$\Delta\vec{A}_{hom}(\vec{r}) = \vec{0} \qquad (51)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{c}\int_V d^3r' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \vec{A}_{hom}(\vec{r}) \qquad (50)$$

betreffender Raumbereich mit homogener Materie

$\vec{A}_{hom}(\vec{r})$ für Erfüllung der Grenzbedingungen (zu anderer Materie oder zum Vakuum) benötigt.

XII. 3.B. Lösungsmethoden

Methode der direkten Integration der FG für $\vec{H}, \vec{B}$ unter Berücksichtigung der MG

Integrale Form der FG $\text{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$ (Stokesscher Satz); anwendbar bei hoher Symmetrie (z.B. unendlich langer strom= durchflossener kreiszylindrischer Leiter)

Vektorpotentialmethode

Bereits skizziert.

Methode des skalaren magnetischen Potentials

Sind im Endlichen keine freien Ströme vorhanden (Beispiel: dia- oder paramagnetischer Körper

in einem [von freien Strömen im Unendlichen verursachten] [ursprünglich] homogenen Feld $\vec{B}_0$), so gilt $\text{rot}\,\vec{H}(\vec{r}) = \vec{0}$ und man kann ein magnetisches skalares Potential einführen:

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\,\text{grad}\,\phi_M(\vec{r}) \qquad (54)$$

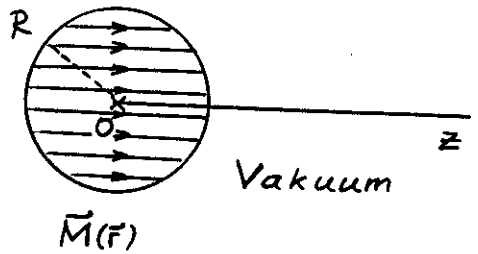
Bildstrommethode — NUR IN SONDERFÄLLEN ANWENDBAR

Eigentliches Problem durch Ersatzproblem mit fiktiven Strömen ersetzt.

XII. 3.C. Homogen magnetisierte Kugel

Vorgegeben

$$\vec{M}(\vec{r}) = \begin{cases} M\vec{e}_z & \text{für } r<R \\ 0 & \text{für } r>R \end{cases} \qquad (55)$$



axiale Symmetrie bzgl. z-Achse

Gefragt: Das von dieser magnetisierten Kugel für $r<R$ und $r>R$ verursachte Magnetfeld.

Kommentar: Was haben wir uns physikalisch vorzustellen?

Mehrere Möglichkeiten:

Fall 1: Kugel ist Permanentmagnet

Die MG $\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B}$ gilt dann nicht.
Die im folgenden berechneten Felder sind die vorhandenen Gesamtfelder, da es keine weiteren "Feldverursacher" gibt (auch nicht im Unendlichen).

Fall 2: Dia- oder paramagnetische Kugel in äußerem Magnetfeld

Es gilt die MG $\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B}$.
Die im folgenden berechneten Felder sind nicht die vorhandenen Gesamtfelder. Die Kugel kann nur dann eine Magnetisierung $\vec{M} \neq \vec{0}$ besitzen, wenn sie in ein (ursprünglich) homogenes äußeres Magnetfeld $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ gebracht wurde.
Zu dem im folgenden berechneten $\vec{B}$-Feld (verursacht von der magnetisierten Kugel) ist daher $\vec{B}_0$ (verursacht von freien Strömen im Unendlichen) zu addieren (FG linear!).
Ferner muß die durch $\vec{B}_0$ induzierte Magnetisierung durch $\vec{B}_0$ und μ ausgedrückt werden können ($\vec{M} = \vec{0}$ für $\vec{B}_0 = \vec{0}$). Damit

lassen sich auch die vorhandenen Gesamtfelder durch $\vec{B}_0$ und μ ausdrücken.
Fall 2: Beispiel in Abschnitt XII.3.D fortgesetzt.

Fall 3: Ferromagnetische Kugel in äußerem Magnetfeld

Die MG $\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B}$ gilt nicht, sie ist durch einen nichtlinearen Zusammenhang zu ersetzen.
Ansonst ist alles weitgehend analog wie im Fall 2, doch kann eine Restmagnetisierung nach "Ausschalten" (Zurücknehmen) des äußeren Magnetfeldes $\vec{B}_0$ zurückbleiben, womit man beim Fall 1 ist.
Fall 3: Beispiel in Abschnitt XII.3.D fortgesetzt.

Berechnung des von der homogen magnetisierten Kugel verursachten Feldes

$r < R$: FG
$$\operatorname{div} \vec{B}_i(\vec{r}) = 0 \qquad \vec{H}_i(\vec{r}) = \vec{B}_i(\vec{r}) - 4\pi\vec{M}$$
$$\operatorname{rot} \vec{H}_i(\vec{r}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{H}_i(\vec{r}) = -\operatorname{grad} \phi_{Mi}(\vec{r}) \qquad (56)$$

$$\operatorname{div} \vec{H}_i(\vec{r}) = -\Delta\phi_{Mi}(\vec{r}) = \underbrace{\operatorname{div} \vec{B}_i(\vec{r})}_{\text{FG: } 0} - 4\pi \underbrace{\operatorname{div} \vec{M}}_{\substack{0 \\ \text{da homogen} \\ \text{magnetisiert}}}$$

$$\Delta\phi_{Mi}(\vec{r}) = 0 \qquad (59)$$

$$\Delta\phi_{Mi}(\vec r) = 0$$

<u>Ansatz</u> (gedankliche "Anleihe" bei XII.1.D):

$$\phi_{Mi}(\vec r) = b\,\underbrace{r\cos\vartheta}_{z} \qquad (60a)$$

$r>R$: FG

$$\operatorname{div}\vec B_a(\vec r) = 0$$

$$\operatorname{rot}\vec B_a(\vec r) = \vec 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec B_a(\vec r) = -\operatorname{grad}\phi_{Ma}(\vec r) \qquad (56)$$

$$\Delta\phi_{Ma}(\vec r) = 0 \qquad (59)$$

<u>Ansatz</u> (gedankliche "Anleihe" bei XII.1.D):

$$\phi_{Ma}(\vec r) = \frac{a}{r^2}\cos\vartheta = a\,\frac{z}{r^3} \qquad (60b)$$

<u>asymptotische Bedingung</u>:

$$\vec B_a(\vec r) \xrightarrow[r\to+\infty]{} \vec 0 \quad \checkmark$$

<u>Grenzbedingungen für $r=R$</u>:

$$M_r = \vec M\cdot\frac{\vec r}{r} = M\,\underbrace{\vec e_z\cdot\frac{\vec r}{r}}_{\cos\vartheta}$$

$$\underline{\operatorname{Div}\vec B = 0} \Rightarrow B_{i,r} = B_{a,r}$$

$$H_{i,r} + 4\pi M_r = B_{a,r} \qquad (61a)$$

$$-\left.\frac{\partial\phi_{Mi}}{\partial r}\right|_R + 4\pi M\cos\vartheta = -\left.\frac{\partial\phi_{Ma}}{\partial r}\right|_R$$

$$\underline{\operatorname{Rot}\vec H = \vec 0} \Rightarrow H_{i,\vartheta} = B_{a,\vartheta}$$

$$(H_{i,\varphi} = B_{a,\varphi})$$

$$-\left.\frac{\partial\phi_{Mi}}{\partial\vartheta}\right|_R = -\left.\frac{\partial\phi_{Ma}}{\partial\vartheta}\right|_R \qquad (61b)$$

<u>Bemerkung:</u>
Gleichwertig:
(61a) plus
$\phi_{Mi}(R,\vartheta) = \phi_{Ma}(R,\vartheta)$

$$\phi_{Mi}(\vec r) = br\cos\vartheta\,,\quad \phi_{Ma}(\vec r) = \frac{a}{r^2}\cos\vartheta$$

$$-\left.\frac{\partial\phi_{Mi}}{\partial r}\right|_R + 4\pi M\cos\vartheta = -\left.\frac{\partial\phi_{Ma}}{\partial r}\right|_R$$

$$-\left.\frac{\partial\phi_{Mi}}{\partial\vartheta}\right|_R = -\left.\frac{\partial\phi_{Ma}}{\partial\vartheta}\right|_R$$

$$\Rightarrow \quad -b\cancel{\cos\vartheta} + 4\pi M\cancel{\cos\vartheta} = \frac{2a}{R^3}\cancel{\cos\vartheta}$$

$$bR\cancel{\sin\vartheta} = \frac{a}{R^2}\cancel{\sin\vartheta} \qquad (62a)$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{4\pi R^3}{3}M\,,\quad b = \frac{4\pi}{3}M \qquad (62b)$$

$$\boxed{\phi_{Mi}(\vec r) = \frac{4\pi}{3}M\,\overbrace{r\cos\vartheta}^{z}} \qquad (63a\text{-}1)$$

$$\phi_{Ma}(\vec r) = \frac{4\pi R^3}{3}\,\frac{M\cos\vartheta}{r^2} \qquad \frac{\vec M\cdot\vec r}{r^3}$$

bzw. mit

$$\boxed{\vec m := \frac{4\pi R^3}{3}\vec M} \qquad (63b)$$

<u>gesamtes magnetisches Dipolmoment der Kugel</u>

$$\boxed{\phi_{Ma}(\vec r) = \frac{\vec m\cdot\vec r}{r^3}} \qquad (63a\text{-}2)$$

$$\phi_{Mi}(\vec r) = \frac{4\pi}{3} M \overbrace{r\cos\vartheta}^{z}$$

$$\vec H_i(\vec r) = -\operatorname{grad}\phi_{Mi}(\vec r) = -\frac{4\pi}{3}\vec M$$

$$\vec B_i(\vec r) = \vec H_i(\vec r) + 4\pi\vec M = +\frac{8\pi}{3}\vec M$$

$$\boxed{\vec H_i = -\frac{4\pi}{3}\vec M \quad\Big|\quad \vec B_i = \frac{8\pi}{3}\vec M}$$ homogen (64)

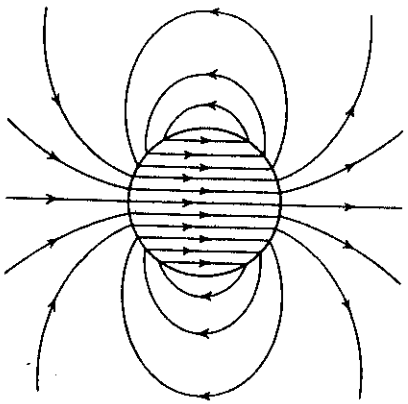
$$\phi_{Ma}(\vec r) = \frac{\vec m\cdot\vec r}{r^3}$$

$$\boxed{\vec B_a(\vec r) = \frac{3(\vec m\cdot\vec r)\vec r - r^2\vec m}{r^5}}$$ Dipolfeld

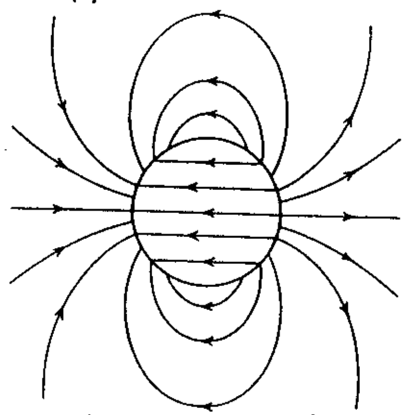
$$\vec J_M(\vec r) = c\,\operatorname{rot}\vec M(\cancel{\vec r}) = \vec 0$$

$$\vec k_M(\vartheta) = c\,\operatorname{Rot}\vec M = -c\left(\frac{\vec r}{r}\times\vec M\right)\Big|_R$$ selbst ausrechnen!

$\vec B$



$\vec H$



$$\operatorname{Rot}\vec B = \frac{4\pi}{c}\vec k_M(\vartheta) \qquad \operatorname{Div}\vec H = -4\pi\operatorname{Div}\vec M = 4\pi M_r(\vartheta) = 4\pi M\cos\vartheta$$

XII. 3. D. Dia-, para- oder ferromagnetische Kugel in einem (ursprünglich) homogenen magnetostatischen Feld $\vec B_0 = B_0\vec e_z$

Das (von freien Strömen im Unendlichen verursachte) Feld $\vec B_0 = B_0\vec e_z$ "induziert" in einer magnetisierbaren Kugel eine Magnetisierung $\vec M(\vec r) = M\vec e_z$.

(S. die analoge elektrostatische Problemstellung in Abschnitt XII. 1. D.): $\vec M[\vec B_0]$

Der Zusammenhang zwischen $\vec M$ und $\vec B_0$ ist natürlich für ein Ferromagnetikum ein anderer als für ein Dia- oder Paramagnetikum; s. später

Gemeinsam gilt:

Gesamtes Magnetfeld: FG linear $\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec B_i &= \underset{\uparrow}{\vec B_0} + \underset{\Uparrow}{\frac{8\pi}{3}\vec M} \quad \text{homogen} \qquad && \vec M[\vec B_0] \quad (66\text{-}1)\\ \vec B_a(\vec r) &= \underset{\uparrow}{\vec B_0} + \underset{\Uparrow}{\frac{3(\vec m\cdot\vec r)\vec r - r^2\vec m}{r^5}} && \vec m[\vec B_0] \\ & && \vec m = \frac{4\pi R^3}{3}\vec M \end{aligned}}$$

$\uparrow$ verursacht von freien Strömen im Unendlichen

$\Uparrow$ verursacht von Magnetisierungsstrom $\vec k_M(\vartheta)$ auf Kugeloberfläche, d.h. von magnetisierter Kugel

$$\boxed{\vec{H}_i = \vec{B}_i - 4\pi\vec{M} = \vec{B}_0 - \frac{4\pi}{3}\vec{M}}$$

homogen

Nun Fallunterscheidung nötig:

Dia- oder paramagnetische Kugel

MG: $\vec{B}_i = \mu\vec{H}_i$ 1) linear   2) eineindeutig (67)

$$\Rightarrow \quad \vec{B}_0 + \frac{8\pi}{3}\vec{M} = \mu\left(\vec{B}_0 - \frac{4\pi}{3}\vec{M}\right)$$

$\Rightarrow$ $\vec{M}[\vec{B}_0]$: $\boxed{\vec{M} = \frac{3}{4\pi}\frac{\mu-1}{\mu+2}\vec{B}_0}$ $\mu<1$ dia- $\mu>1$ para- (69)

$\vec{m}[\vec{B}_0]$: $\boxed{\vec{m} = \frac{\mu-1}{\mu+2}R^3\vec{B}_0}$ (*)

$$\boxed{\vec{B}_i = \frac{3\mu}{\mu+2}\vec{B}_0 \;^{*)}} \quad \boxed{\vec{H}_i = \frac{3}{\mu+2}\vec{B}_0}$$

$$\vec{B}_a(\vec{r}) = \vec{B}_0 + \frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5} \quad \text{mit } \vec{m} \text{ Gl.(*)}$$

Bei "Zurücknehmen" von $\vec{B}_0$ auf null wird $\vec{M} = \vec{0}$ und $\vec{B} = \vec{0}$ im ganzen Raum.

*) $\vec{B}_i = \frac{3}{1+\frac{2}{\mu}}\vec{B}_0$

Ferromagnetische Kugel

MG: $\vec{B}_i = \vec{B}_i(\vec{H}_i)$ bzw. $\vec{H}_i = \vec{H}_i(\vec{B}_i)$ (70)

1) komplizierte nichtlineare Funktion; experimentell: "Magnetisierungskurve"

2) für gegebenes H_i gibt es i.a. zwei Werte von $\vec{B}_i$ (und umgekehrt), welcher Wert zu nehmen ist, hängt von der "Vorgeschichte" (Vergangenheit) der Probe ab: "Magnetisierungskurve" zeigt "Hysteresis"

(66): $\vec{B}_i = \vec{B}_0 + \frac{8\pi}{3}\vec{M}$

$\vec{H}_i = \vec{B}_0 - \frac{4\pi}{3}\vec{M}$ $\quad |\cdot 2$ Elimination von $\vec{M}$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{B}_i + 2\vec{H}_i = 3\vec{B}_0 \\ \text{MG: } \vec{B}_i = \vec{B}_i(\vec{H}_i) \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad (71)$$

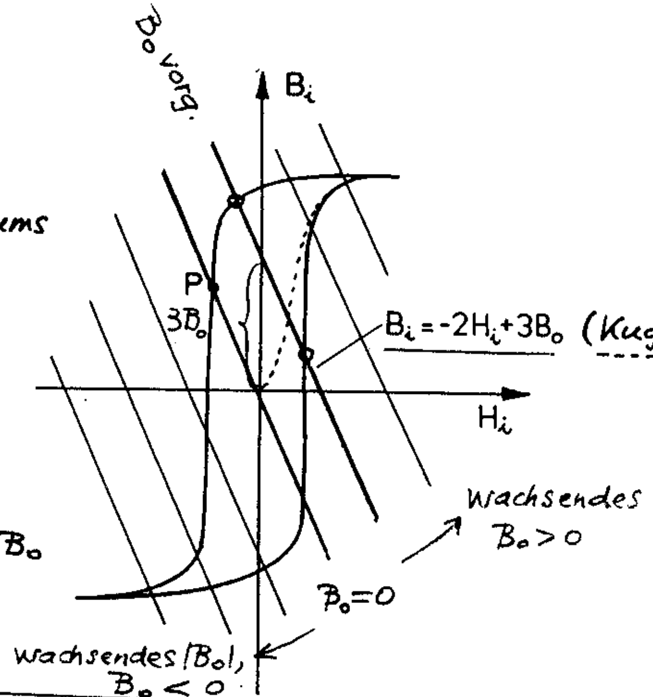
$\vec{B}_i, \vec{H}_i$ zu gegebenem $\vec{B}_0$: zwei Lösungspaare, von denen je nach "Vorgeschichte" das eine oder das andere zu nehmen ist

Hat man das zu gegebenem $\vec{B}_o$ gehörige $\vec{B}_i$ (und $\vec{H}_i$), so kann man das zu $\vec{B}_o$ gehörige $\vec{M}$ z.B. aus $\frac{8\pi}{3}\vec{M} = \vec{B}_i - \vec{B}_o$ berechnen.

Hysteresis eines Ferromagnetikums

$\vec{B}_o = B_o \vec{e}_z$

- Lösungen für B_i, H_i bei vorgegebenem B_o



Bei "Zurücknehmen" von $\vec{B}_o$ auf $\vec{B}_o = \vec{0}$ bleibt eine Restmagnetisierung und ein zugehöriges Magnetfeld $\vec{B}, \vec{H}$. Ließ man beispielsweise zuerst in $\vec{B}_o = B_o \vec{e}_z$, $B_o > 0$ anwachsen und dann auf $B_o = 0$ zurückgehen, so landet man im Punkt P der Hysteresiskurve.

XII.4. Nichtleitende magnetisierbare Materie mit linearer Materialgleichung: magnetostatische Energie und Kraftdichte

Materie soll isotrop sein, kann aber inhomogen sein:

MG: $\vec{B}(\vec{r}) = \mu(\vec{r})\,\vec{H}(\vec{r})$

Für nichtleitende Materie gilt im Bereich der Materie

$$\operatorname{rot}\vec{H}(\vec{r}) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{H}(\vec{r}) = -\operatorname{grad}\phi_M(\vec{r})$$

XII.4.A, XII.4.B: Vollkommen analog zur Elektrostatik!

$$W = \frac{1}{8\pi}\int d^3r\, \vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{D}(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi}\int d^3r\, \frac{\vec{D}^2(\vec{r})}{\varepsilon(\vec{r})} \longrightarrow$$

$$W = \frac{1}{8\pi}\int d^3r\, \vec{H}(\vec{r})\cdot\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi}\int d^3r\, \frac{\vec{B}^2(\vec{r})}{\mu(\vec{r})} \qquad (72)$$

$$\delta W = \int d^3r\, \phi(\vec{r})\,\delta\rho(\vec{r}) - \frac{1}{8\pi}\int d^3r\, \vec{E}^2(\vec{r})\,\delta\varepsilon(\vec{r}) \longrightarrow$$

$$\delta W = -\frac{1}{8\pi}\int d^3r\, \vec{H}^2(\vec{r})\,\delta\mu(\vec{r}) \qquad (74)$$

$$\vec{f}(\vec{r}) = \rho \vec{E}(\vec{r}) - \frac{1}{8\pi}\vec{E}^2(\vec{r})\,\mathrm{grad}\,\varepsilon(\vec{r}) + \frac{1}{8\pi}\,\mathrm{grad}\left(\vec{E}^2(\vec{r})\frac{d\varepsilon}{d\sigma}(\vec{r})\,\sigma(\vec{r})\right)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\vec{f}(\vec{r}) = -\frac{1}{8\pi}\vec{H}^2(\vec{r})\,\mathrm{grad}\,\mu(\vec{r}) + \frac{1}{8\pi}\,\mathrm{grad}\left(\vec{H}^2(\vec{r})\frac{d\mu}{d\sigma}(\vec{r})\,\sigma(\vec{r})\right)} \quad (77b)$$

Magnetostriktion

Bezüglich des Maxwellschen Spannungstensors $\overleftrightarrow{T}_{(mat)}(\vec{r})$ in der Magnetostatik für isotrope inhomogene Materie ($\mu = \mu(\vec{r})$) gilt ein analoger Kommentar wie bei den Dielektrika.

XIII. ELEKTROTECHNIK: LINEARE STROMKREISE MIT OHMSCHEN WIDERSTÄNDEN, KONDENSATOREN, INDUKTIONSSPULEN UND SPANNUNGSQUELLEN IM QUASISTATIONÄREN FALL

FRAGE: Wie kommt man von

FG:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{div}\,\vec{D}(\vec{r},t) &= 4\pi\rho(\vec{r},t) \\ \mathrm{div}\,\vec{B}(\vec{r},t) &= 0 \\ \mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r},t) &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t} \\ \mathrm{rot}\,\vec{H}(\vec{r},t) &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}(\vec{r},t)}{\partial t} \end{aligned}}$$

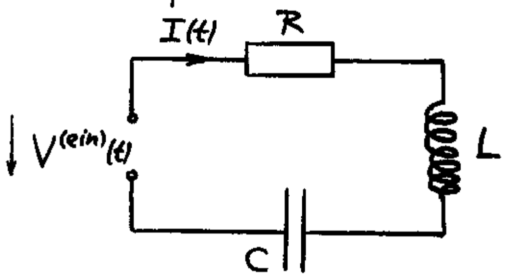
MG:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{D}(\vec{r},t) &= \varepsilon \vec{E}(\vec{r},t) \\ \vec{H}(\vec{r},t) &= \frac{1}{\mu}\vec{B}(\vec{r},t) \\ \vec{j}(\vec{r},t) &= \sigma \vec{E}(\vec{r},t) \end{aligned}}$$

Brauchbar für $\omega \lesssim 10^{12}$ Hz.

(Techn. Wechselströme: $\omega \lesssim 20\,\mathrm{kH} = 2\cdot 10^4\,\mathrm{Hz}$)

für den einfachen Stromkreis



"allgem. Ohmsches Gesetz"

auf

$$\boxed{R I(t) + L\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} I(t')\,dt' = V^{(ein)}(t)}\ ?$$