

FOLIEN VON D. GRAU ZUR
VORLESUNG "ELEKTRODYNAMIK
UND RELATIVITÄTSTHEORIE"
nach dem Skriptum von H. Nowotny

Kapitel 11

Fehlender Beweisschritt:

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} \times \text{rot } \vec{A})_i &= \epsilon_{ijk} \mu_j \text{rot}_k \vec{A} \\
 &= \underbrace{\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm}}_{\text{Die } \delta_{im} - \delta_{jm}} \mu_j \frac{\partial A_m}{\partial x_l} = \mu_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \mu_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i}
 \end{aligned}$$

Bemerkungen:

1) Wir könnten also tatsächlich MX-Gln., relativistische BG und Lorentzkräftgesetz aus einem einzigen Postulat (Lagrangefunktion
 $L_{ft} + L_{em} + L_{ww}$) herleiten.

2) In Viererschreibweise lautet die BG

$$\frac{dp^\mu}{dt} = \underbrace{\sum_k F^{\mu\nu} u_\nu}_{\text{Vierer-Lorentzkraft } F^\mu}$$

bzw. ma^μ

3) Die erhaltene BG ist — wie vorausgesagt — eichinvariant.

ELEKTRODYNAMIK RUHENDER

MATERIE ("Makroskopische Elektrodynamik")
 = Elektrodynamik kontinuierlicher Medien)

XI. GRUNDGLEICHUNGEN FÜR RUHENDE MATERIE

XI.1. Aufteilung der Quellen in "freie" und "gebundene" Quellen.

"Übergang von der "mikroskopischen" zur "makroskopischen" Elektrodynamik

XI.1.A. Übersicht

"Mikroskopische" Elektrodynamik:

Ladungen und Ströme im Vakuum

Materie vom mikroskopischen Standpunkt:

Elektronen und Kerne im Vakuum,

in dauernder rascher Bewegung (auch im Ruhesystem eines Materiestückes).

Auf mikroskopischer Skala räumlich stark

Schwankende und auch zeitlich sehr rasch veränderliche mikroskopische elm. Felder.

Historisch mikroskopische Elektrodynamik der Materie
 von Lorentz als "Elektronentheorie" bezeichnet,
 da Lorentz die Ladungen nicht als Elektronen
 und Kerne, sondern als "Punkte" oder
 "Elektronen" bezeichnete (Lorentz 1902).

Aufteilung der Quellen

"freie" Quellen: sind direkt experimentell steuerbar
 (z.B. Leitungsstrom in einem elektrischen
 Leiter)

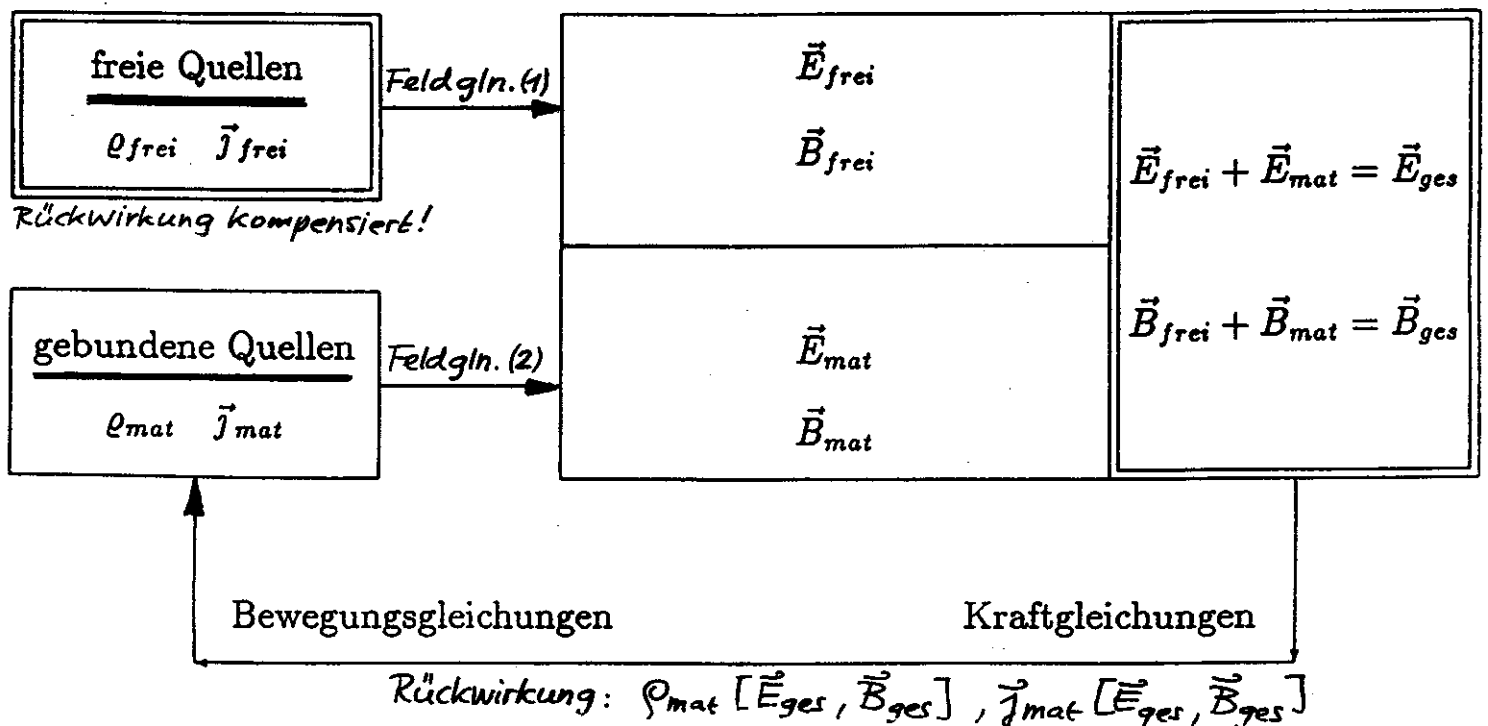
"gebundene" Quellen der Materie: sind nicht

direkt experimentell steuerbar
 (z.B. Ampèresche Kreisströme in
 Atomen und Molekülen), daher
Rückwirkung der elm. Felder
nicht kompensierbar

Siehe logischen Schema der
 "mikroskopischen" Elektrodynamik!

Logisches Schema der "mikroskopischen" Elektrodynamik

Aufteilung der Quellen, Rückwirkung auf die "gebundenen" Quellen der Materie



Feldgleichungen (1): kann man für sich lösen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E}_{\text{frei}} &= 4\pi \rho_{\text{frei}} & , & \operatorname{rot} \vec{E}_{\text{frei}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_{\text{frei}} & , \\ \operatorname{rot} \vec{B}_{\text{frei}} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{frei}} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_{\text{frei}} & , & \operatorname{div} \vec{B}_{\text{frei}} = 0 & . \end{aligned} \quad (1)$$

Feldgleichungen (2): kann man nicht für sich lösen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E}_{\text{mat}} &= 4\pi \rho_{\text{mat}} & , & \operatorname{rot} \vec{E}_{\text{mat}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_{\text{mat}} & , \\ \operatorname{rot} \vec{B}_{\text{mat}} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{mat}} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_{\text{mat}} & , & \operatorname{div} \vec{B}_{\text{mat}} = 0 & . \end{aligned} \quad (2)$$

Addition gibt: $\rho_{\text{mat}} [\vec{E}_{\text{ges}}, \vec{B}_{\text{ges}}], \vec{j}_{\text{mat}} [\vec{E}_{\text{ges}}, \vec{B}_{\text{ges}}] !$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E}_{\text{ges}} &= 4\pi (\rho_{\text{frei}} + \rho_{\text{mat}}) & , & \operatorname{rot} \vec{E}_{\text{ges}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_{\text{ges}} & , \\ \operatorname{rot} \vec{B}_{\text{ges}} &= \frac{4\pi}{c} (\vec{j}_{\text{frei}} + \vec{j}_{\text{mat}}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_{\text{ges}} & , & \operatorname{div} \vec{B}_{\text{ges}} = 0 & . \end{aligned} \quad (3)$$

XI.1.B. Übergang zur "makroskopischen"

Elektrodynamik durch "Ausmitteln" der Atomistik

Räumliche Mittelung über mikroskopisch große,

makroskopisch kleine Bereiche:

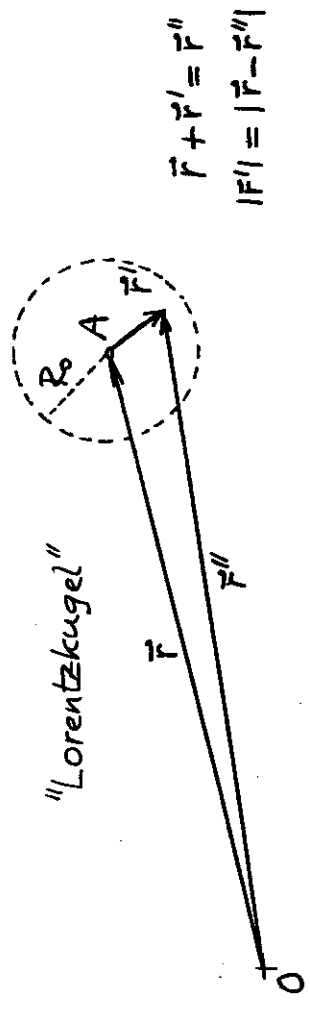
qualitativ: gemittelte Feldgröße $\langle F(\vec{r}, t) \rangle$

im Aufpunkt \vec{r} zum Zeitpunkt $t =$ Mittelwert

der entsprechenden mikroskopischen Feldgröße

$F(\vec{r}', t)$ über Kugelvolumen $|\vec{r} - \vec{r}'| \leq R_0 \sim 100 \text{ \AA}$

(enthält $\sim 10^6$ Elektronen und Kerne)



Formal mit auf 1 normierter Mittelungsfunktion

(Gewichtsfunktion) $f(\vec{r}')$ angeschrieben:

$$\begin{aligned} \langle F(\vec{r}, t) \rangle &:= \int d^3r' F(\vec{r} + \vec{r}', t) f(\vec{r}') \\ \text{mit } \int d^3r' f(\vec{r}') &= 1 \end{aligned} \quad (5)$$

Bemerkungen:

- 1) Über die damit verbundenen Grenzen der Anwendbarkeit des Kontinuumsmodells der makroskopischen Elektrodynamik s. Später (Abschnitt XI.3.A).
- 2) Durch eine rein räumliche Mittelung dieser Art werden i.a. auch die mit der Atomistik der Materie verbundenen mikroskopischen zeitlichen Schwankungen weggemittelt, da diese i.a. nicht über makroskopische Distanzen korreliert sind.
Wird aber durch die Felder $\vec{E}_{\text{frei}}, \vec{B}_{\text{frei}}$ eine zeitlich rasche korrelierte mikroskopische Bewegung hervorgerufen (z.B. Elm. Welle trifft auf das Medium auf), so "überleben" die dazugehörigen Fourierkomponenten die räumliche Mittelung. (S. Jackson Auflage 1981).
Würde man auch eine zeitliche Mittelung durchführen, würde man unerwünschterweise auch derartige rasche zeitliche Änderungen wegmitteln.

$$\langle F(\vec{r}, t) \rangle = \int d^3r' F(\vec{r} + \vec{r}', t) f(\vec{r}') \Rightarrow \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} \langle F \rangle$$

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle F \rangle$$

Gemittelte Feldgleichungen

(1):

$$\text{div } \vec{E}_{\text{frei}} = 4\pi \rho_{\text{frei}} \qquad \text{rot } \vec{E}_{\text{frei}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_{\text{frei}}$$

$$\text{rot } \vec{B}_{\text{frei}} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{frei}} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_{\text{frei}} \qquad \text{div } \vec{B}_{\text{frei}} = 0$$

$\text{div } \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle = 4\pi \rho$ $\text{rot } \langle \vec{B}_{\text{frei}} \rangle = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle$	$\text{rot } \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{B}_{\text{frei}} \rangle$ $\text{div } \langle \vec{B}_{\text{frei}} \rangle = 0$
--	--

mit $\rho := \langle \rho_{\text{frei}} \rangle$ (makroskopische) freie Ladungsdichte

$\vec{j} := \langle \vec{j}_{\text{frei}} \rangle$ (makroskopische) freie Stromdichte (innerhalb der Materie; Leitungsstromdichte)

Werden experimentell "gesteuert"

(6)

(2): analog \Rightarrow

XI-8

$\text{div} \langle \vec{E}_{\text{mat}} \rangle = 4\pi \langle \rho_{\text{mat}} \rangle$ $\text{rot} \langle \vec{B}_{\text{mat}} \rangle = \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j}_{\text{mat}} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{E}_{\text{mat}} \rangle$	$\text{rot} \langle \vec{E}_{\text{mat}} \rangle = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{B}_{\text{mat}} \rangle$ $\text{div} \langle \vec{B}_{\text{mat}} \rangle = 0$
---	---

(7)

$\langle \rho_{\text{mat}} \rangle$, $\langle \vec{j}_{\text{mat}} \rangle$ als Funktionale von

$\vec{E} := \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle + \langle \vec{E}_{\text{mat}} \rangle$ $\vec{B} := \langle \vec{B}_{\text{frei}} \rangle + \langle \vec{B}_{\text{mat}} \rangle$

(makroskopische)
elektrische Feldstärke
Skriptum:
magnetische Induktion, besser
ist: (makroskopische)
magnetische
Feldstärke

benötigt: $\langle \rho_{\text{mat}} \rangle [\vec{E}, \vec{B}]$, $\langle \vec{j}_{\text{mat}} \rangle [\vec{E}, \vec{B}]$

Addition (6) + (7):

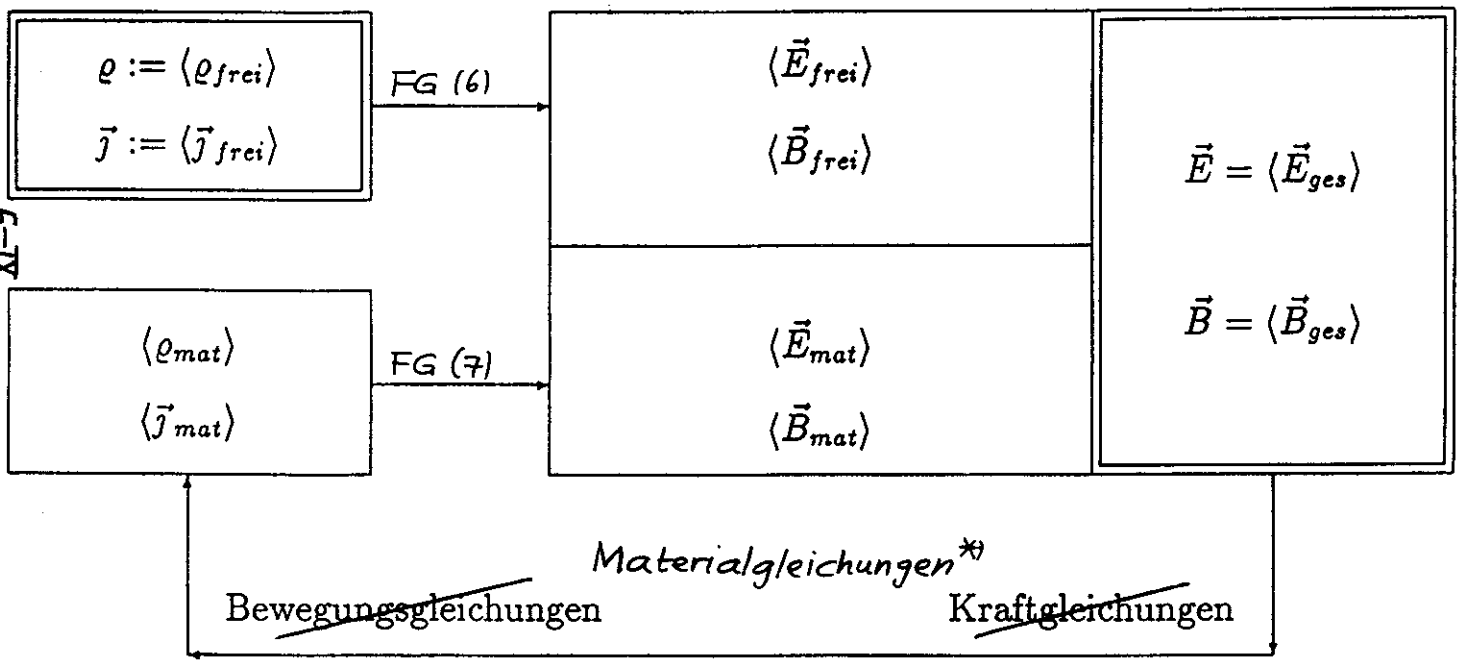
$\text{div} \vec{E} = 4\pi (\rho + \langle \rho_{\text{mat}} \rangle)$ $\text{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \langle \vec{j}_{\text{mat}} \rangle) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$	$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\text{div} \vec{B} = 0$
---	--

(8)

Logisches Schema der "makroskopischen" Elektrodynamik

Gemittelte Quellen und Felder

XI-9



Rückwirkung: $\langle \rho_{\text{mat}} \rangle [\vec{E}, \vec{B}]$, $\langle \vec{j}_{\text{mat}} \rangle [\vec{E}, \vec{B}]$

* Sind unter Zugrundelegung eines klassischen oder quantenmechanischen mikroskopischen Modells abzuleiten, was nur näherungsweise möglich ist.

Zum Vergleich: phänomenologische Feldgln. für \vec{E}, \vec{B} (s. Folie XI-13):

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi (\rho - \operatorname{div} \vec{P})$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \vec{M} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Zu zeigen bleibt also "nur" mehr:

$$\langle \rho_{\text{mat}} \rangle = -\operatorname{div} \vec{P} = \rho_P$$

$$\langle \vec{j}_{\text{mat}} \rangle = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \vec{M} = \vec{j}_P + \vec{j}_M$$

XI-10 XI.1.C. Modifikation der Teilfelder

Ziel der folgenden Umformungen:

Phänomenologische makroskopische Feld- und Materialgleichungen mit den Feldgrößen $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}$ und \vec{H} bzw. $\vec{E}, \vec{B}, \vec{P}$ und \vec{M} und den Quellen ρ, \vec{j}

Historische Bezeichnungen:

\vec{D} dielektrische Verschiebung, elektrische Verschiebung, elektrische Induktion;
besser ist es, einfach \vec{D} -Feld zu sagen

\vec{H} magnetische Feldstärke;
besser ist es, einfach \vec{H} -Feld zu sagen,
und \vec{B} magnetische Feldstärke zu nennen

\vec{P} Polarisation, elektrische Polarisation

\vec{M} Magnetisierung, magnetische Polarisation

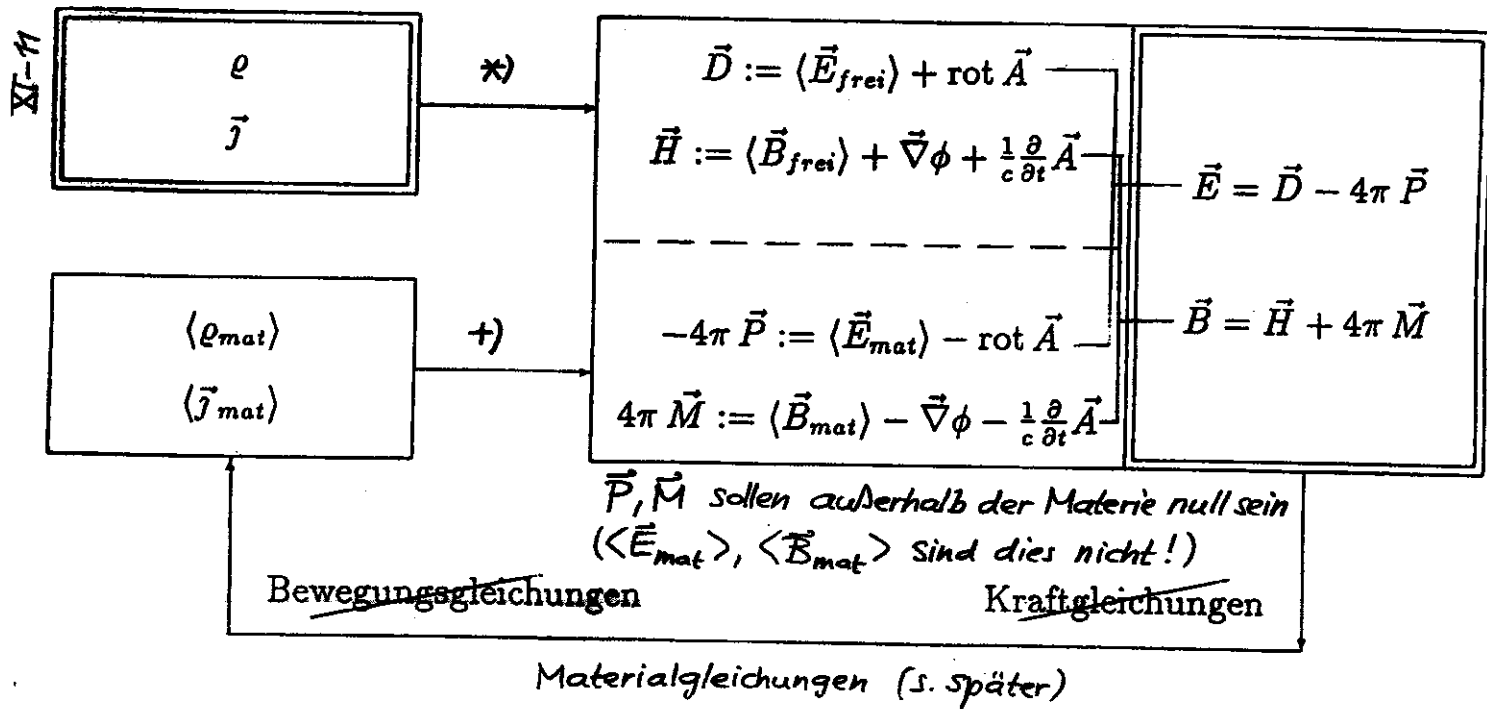
Beachte für das Folgende:

^{*)} ebenfalls in Verwendung:
magnetische Induktion,
magnetische Verschiebung

$\langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle, \langle \vec{B}_{\text{frei}} \rangle$ sind die durch ρ, \vec{j} verursachten Felder

$\langle \vec{E}_{\text{mat}} \rangle, \langle \vec{B}_{\text{mat}} \rangle$ sind die durch $\langle \rho_{\text{mat}} \rangle, \langle \vec{j}_{\text{mat}} \rangle$ verursachten Felder

Modifikation der Teilfelder: ϕ, \vec{A} "Umformungsgrößen"



- *) Soll bedeuten: in die FG für \vec{D}, \vec{H} gehen neben den Umformungsgrößen ϕ, \vec{A} nur die Quellen ρ, \vec{j} ein
- +) Soll bedeuten: in die FG für \vec{P}, \vec{M} gehen neben den Umformungsgrößen ϕ, \vec{A} nur die Quellen $\langle \rho_{\text{mat}} \rangle, \langle \vec{j}_{\text{mat}} \rangle$ ein

\vec{D}, \vec{H} : $\vec{D} = \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle + \text{rot } \vec{A}$
 $\vec{H} = \langle \vec{B}_{\text{frei}} \rangle + \text{grad } \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$\text{div } \vec{D} = \text{div } \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle = 4\pi \rho$
 $\text{rot } \vec{H} = \text{rot } \langle \vec{B}_{\text{frei}} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} - \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle)$
 $= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$\text{rot } \vec{D} = \text{rot } \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle + \text{rot rot } \vec{A}$
 $= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{B}_{\text{frei}} \rangle + \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}$

$\vec{H} - \text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$
 $= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \text{grad} (\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}) - \Delta \vec{A}$
 $\text{div } \vec{H} = \text{div } \langle \vec{B}_{\text{frei}} \rangle + \text{div} (\text{grad } \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$

\vec{P}, \vec{M} : $-4\pi \vec{P} = \langle \vec{E}_{\text{mat}} \rangle - \text{rot } \vec{A}$
 $4\pi \vec{M} = \langle \vec{B}_{\text{mat}} \rangle - \vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$
 ⇒ analoge Rechnung

Ergebnisse: s. XI-13

Beispiel: Dielektrische Kugel in einem (Zuvor) homogenen elektrostatischen Feld

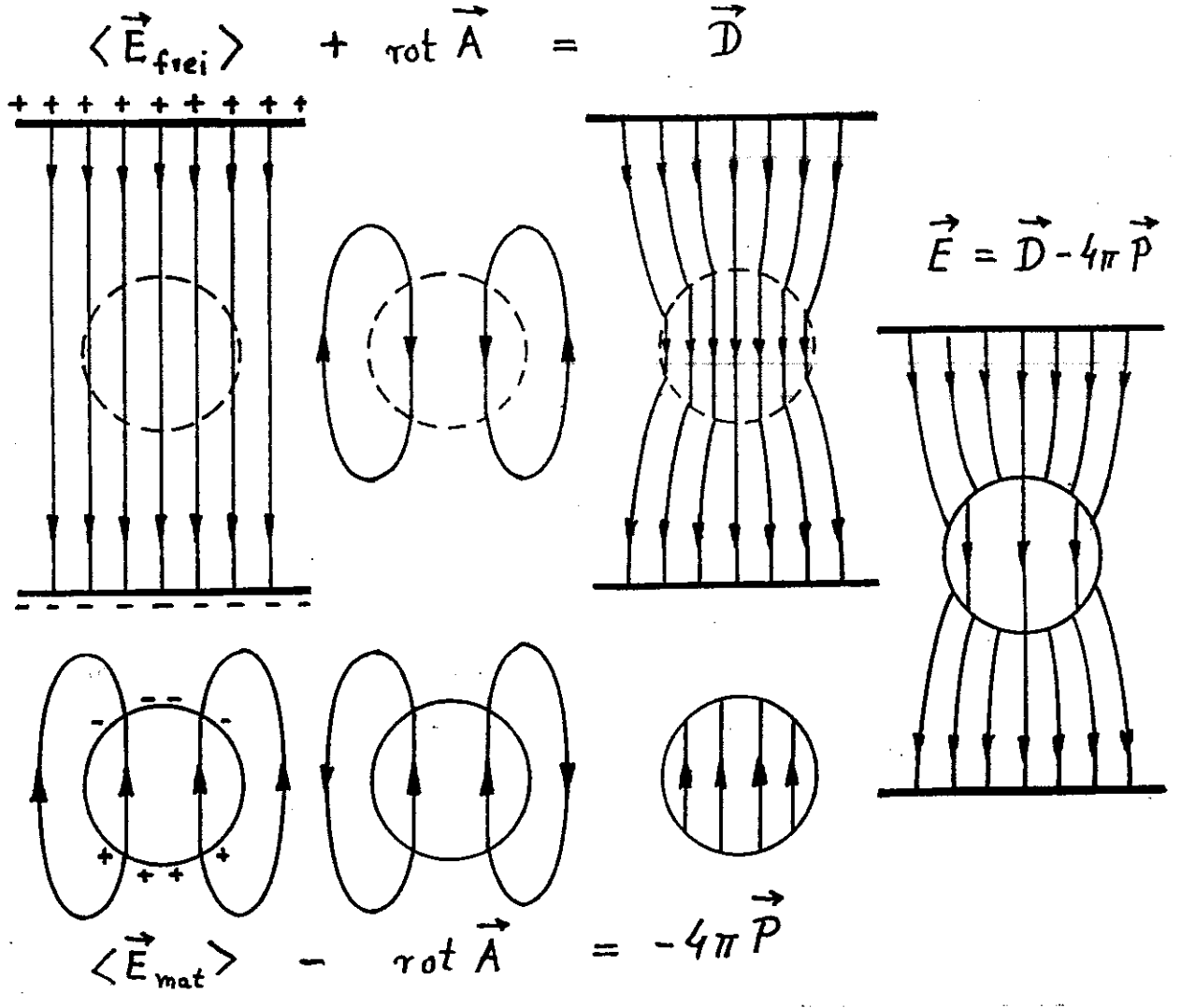


Fig. 11.1

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}, \quad \vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}$$

$$\text{div } \vec{D} = 4\pi\rho$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

(9a)

FG1

$$\text{rot } \vec{D} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \text{grad}(\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}) - \square \vec{A}$$

$$\text{div } \vec{H} = \text{div}(\text{grad } \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$$

"Vergessen" wir

(Festlegung von \vec{P}, \vec{M} !)

$$-\frac{1}{4\pi} \square \vec{A}$$

(12)

$$\text{div } \vec{P} = -\langle \rho_{\text{mat}} \rangle$$

$$\text{rot } \vec{M} = \frac{1}{c} \langle \vec{j}_{\text{mat}} \rangle - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

liefern die gesuchten Ausdrücke für

$\langle \rho_{\text{mat}} \rangle, \langle \vec{j}_{\text{mat}} \rangle$ (s. Folie XI-8')

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi(\rho + \langle \rho_{\text{mat}} \rangle)$$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \langle \vec{j}_{\text{mat}} \rangle) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

(11)

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

(9b)

FG2

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi(\rho - \text{div } \vec{P})$$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \text{rot } \vec{M}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

FG1'

FG1' + FG2 + MG	$\vec{P}[\vec{E}, \vec{B}]$
ODER	$\vec{M}[\vec{E}, \vec{B}]$
FG1 + FG2 + MG	$\vec{D}[\vec{E}, \vec{B}]$
	$\vec{H}[\vec{E}, \vec{B}]$

XI-14

Weitere aus der phänomenologischen makroskopischen

Elektrodynamik bekannte Bezeichnungen:

$$\rho_P := \langle \rho_{\text{mat}} \rangle \quad \text{Polarisationsladungsdichte}$$

$$\vec{j}_P := \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad \text{Polarisationsstromdichte} \quad (15)$$

$$\vec{j}_M := \langle \vec{j}_{\text{mat}} \rangle - \vec{j}_P \quad \text{Magnetisierungstromdichte}$$

Damit:

$$\text{div } \vec{P} = -\rho_P$$

$$\text{rot } \vec{M} = \frac{1}{c} \langle \vec{j}_{\text{mat}} \rangle - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (16)$$

$$\text{div } \vec{P} = -\rho_P$$

$$\text{rot } \vec{M} = \frac{1}{c} \vec{j}_M$$

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi(\rho + \rho_P)$$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \vec{j}_P + \vec{j}_M) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Beachte: KG

$$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

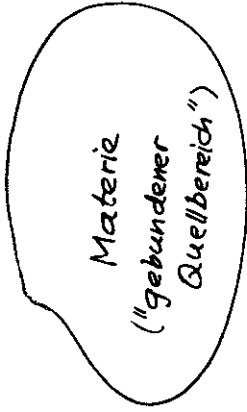
$$\text{div } \vec{j}_P + \frac{\partial \rho_P}{\partial t} = 0$$

$$\text{div } \vec{j}_M = 0$$

Festlegung von \vec{P} und \vec{M}

XI-15

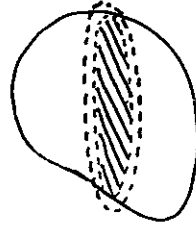
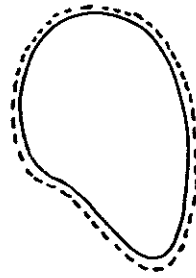
ruhende Materie



$$\int d^3r \rho_p(\vec{r}, t) = 0, \quad \int d^2\vec{f} \cdot \vec{j}_M(\vec{r}, t) = 0 \quad (17)$$

Integration über Volumen, welches die Materie im Inneren enthält
Gesamtladung der Materie null

Integration "über beliebige Fläche, welche einen Materiequerschnitt ganz enthält"



1. Schritt, um \vec{P}, \vec{M} festzulegen: Forderung

$$\vec{P} \equiv \vec{0}, \quad \vec{M} \equiv \vec{0} \quad \text{außerhalb der Materie}$$

Dies ist unter den Voraussetzungen (17) möglich,

XI-16

denn es gilt:

$$(16): \quad \text{div } \vec{P} = -\rho_p$$

$$\Rightarrow \int d^3r \text{div } \vec{P} = \oint d^2\vec{f} \cdot \vec{P} = - \underbrace{\int d^3r \rho_p}_0 \quad \checkmark$$

$$\text{rot } \vec{M} = \frac{1}{c} \vec{j}_M$$

$$\Rightarrow \int d^2\vec{f} \cdot \text{rot } \vec{M} = \oint d\vec{r} \cdot \vec{M} = \frac{1}{c} \underbrace{\int d^2\vec{f} \cdot \vec{j}_M}_0 \quad \checkmark$$

2. Schritt, um \vec{P}, \vec{M} festzulegen: Forderung

\vec{P} elektrisches Dipolmoment / Volumseinheit

\vec{M} magnetisches Dipolmoment / Volumseinheit

innerhalb der Materie

(makroskopische Größen)

Dies ist möglich, denn es gilt:

$$(16): \quad \text{div } \vec{P} = -\rho_p \Rightarrow -\vec{r} \cdot \text{div } \vec{P} = \vec{r} \rho_p \quad (18a)$$

$$-\int d^3r x_i \frac{\partial}{\partial x_j} P_j = - \int d^3r \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (x_i P_j) - P_j \right]$$

$$= \int d^3r P_j = \int d^3r x_i \rho_p$$

XI.2. Phänomenologische makroskopische

Elektrodynamik

XI.2.A. Phänomenologische Maxwellgleichungen

Wurden bereits auf XI-13 angeschrieben:
s. FG1 + FG2 bzw. FG1' + FG2

XI.2.B. Phänomenologische Materialgleichungen

Historisch hat man \vec{E} und \vec{H} als ^{historische} primäre Feldgrößen angesehen (deshalb auch die Bezeichnung magnetische Feldstärke für \vec{H}).

Entsprechend hat man die zu den FG benötigten ^{historisch} MG in der Form

$\vec{P}[\vec{E}, \vec{H}], \vec{M}[\vec{E}, \vec{H}]$ (25)

angegeben.

Einfachste Form: in isotroper Materie (homogen oder inhomogen)

$\vec{P} = \chi_e \vec{E}, \vec{M} = \chi_m \vec{H}$ (26)

Frage: Warum hier nicht noch ein Term in \vec{H} (bzw. \vec{B})?

$\int d^3r \vec{P}(\vec{r}, t) = \int d^3r \vec{P}_p(\vec{r}, t)$ (19a)

$\text{rot } \vec{M} = \frac{1}{c} \vec{j}_M$ (18b)

$\int d^3r (\vec{r} \times \text{rot } \vec{M})_i = \int d^3r \epsilon_{ijk} x_j \text{rot}_k \vec{M}$
 $\epsilon_{kjm} \frac{\partial}{\partial x_e} M_m$

$= \int d^3r (x_j \frac{\partial M_i}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial M_j}{\partial x_i})$

$\frac{\partial}{\partial x_i} (x_j M_j) - M_i \frac{\partial}{\partial x_j} (x_j M_i) - 3M_i$

$= 2 \int d^3r M_i$

$\int d^3r \vec{M}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2c} \int d^3r (\vec{r} \times \vec{j}_M(\vec{r}, t))$ (19b)

Bemerkung: Ohne diese Festlegung wäre \vec{P} in der

Materie nur bis auf einen Rotor und

\vec{M} nur bis auf einen Gradienten bestimmt.

in anisotroper Materie (z.B. nichtkubischer Einkristall)

$$\vec{P} = \vec{\chi}_e \vec{E}, \quad \vec{M} = \vec{\chi}_m \vec{H} \quad (26')$$

Brauchbar sind diese MG für nicht zu starke, zeitlich nicht zu rasch veränderliche makroskopische Felder (lineare Näherung, Vernachlässigung der Dispersion).

χ_e bzw. $\vec{\chi}_e$ (symm. Tensor) elektrische Suszeptibilität

χ_m bzw. $\vec{\chi}_m$ (symm. Tensor) magnet. Suszeptibilität

Äquivalent dazu:

$$\vec{D}[\vec{E}, \vec{H}], \quad \vec{B}[\vec{E}, \vec{H}]$$

Speziell (nur für isotrope Materie angeschrieben)

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad (27)$$

Wegen

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \vec{E} + 4\pi \vec{P} = (1 + 4\pi \chi_e) \vec{E} \\ \vec{B} &= \vec{H} + 4\pi \vec{M} = (1 + 4\pi \chi_m) \vec{H} \end{aligned} \quad \text{folgt}$$

$$\epsilon = 1 + 4\pi \chi_e, \quad \mu = 1 + 4\pi \chi_m \quad (28)$$

- ϵ Dielektrizitätskonstante, elektrische Permeabilität
- μ Permeabilitätskonstante, magnetische Permeabilität

Vom logischen Aufbau der Theorie stellen aber \vec{E}, \vec{B} die primären Feldgrößen dar, denn es

gilt
$$\vec{B} = \langle \vec{B}_{\text{frei}} \rangle + \langle \vec{B}_{\text{mat}} \rangle = \langle \vec{B}_{\text{ges}} \rangle.$$

Deshalb haben wir in den früheren Abschnitten die erforderlichen Funktionale immer als

$$\vec{P}[\vec{E}, \vec{B}], \quad \vec{M}[\vec{E}, \vec{B}]$$

bzw. als

$$\vec{D}[\vec{E}, \vec{B}], \quad \vec{H}[\vec{E}, \vec{B}]$$

geschrieben.

Speziell:

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E}, \quad \vec{M} = \chi_m \vec{B}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$$

$$\epsilon = 1 + 4\pi \chi_e, \quad \frac{1}{\mu} = 1 - 4\pi \chi_m$$

$$\epsilon \leftrightarrow \frac{1}{\mu}, \quad 1 - 4\pi \chi_m = \frac{1}{1 + 4\pi \chi_m}$$

Bezeichnung von Materialien "mit linearen Materialgleichungen"

im Hinblick auf die elektrische Polarisation:

$\epsilon > 1$ dielektrisches Material

im Hinblick auf die magnetische Polarisation:

$\mu < 1$ diamagnetisches Material ($\frac{1}{\mu} \leftrightarrow \epsilon$)

$\mu > 1$ paramagnetisches Material

im Hinblick auf die elektrische Stromleitung:

bei Vorhandensein von freien Strömen in der Materie

$\vec{j} = \sigma \vec{E}$ Leiter (Ohm) $[\sigma] = T^{-1}$

$\sigma_{\text{Kupfer}} \approx 10^{20}$ elektrische Leitfähigkeit
 $\sigma_{\text{Porzellan}} \approx \frac{1}{\sigma}$ spezifischer elektr. Widerstand

Porzellan: "Nichtleiter"

Formal: $\sigma = 0$ Nichtleiter

Bemerkungen: Bei ferroelektrischen Materialien (Elektreten)

und bei ferromagnetischen Materialien sind

die MG nichtlinear ("Hysteresis", "Gedächtnis",

Remanenz^{*)}), doch gibt es dann Bereiche

für \vec{E} bzw. für \vec{B} in denen die MG

näherungsweise linear ist mit $\epsilon \gg 1$ bzw.

mit $\mu \gg 1$.

^{*)} S. das Beispiel in den Abschnitten XII.3.C, XII.3.D

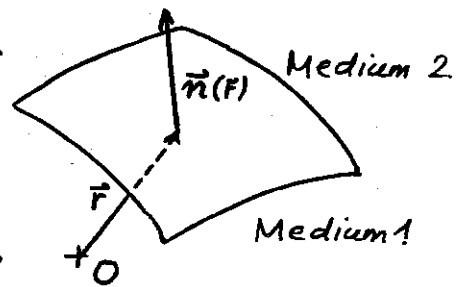
XI.2.C. Anschlußbedingungen an der Grenzfläche zweier Medien

FG: $\text{div } \vec{D} = 4\pi \rho$

$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}$

$\text{div } \vec{B} = 0$

$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}$



in integraler Form:

$\oint_{\mathcal{V}(V)} d^3r \cdot \vec{D} = 4\pi \int_V d^3r \rho$

$\oint_{\mathcal{C}(F)} d\vec{r} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_F d^2\vec{f} \cdot \vec{B}$

(29)

$\oint_{\mathcal{V}(V)} d^2\vec{f} \cdot \vec{B} = 0$

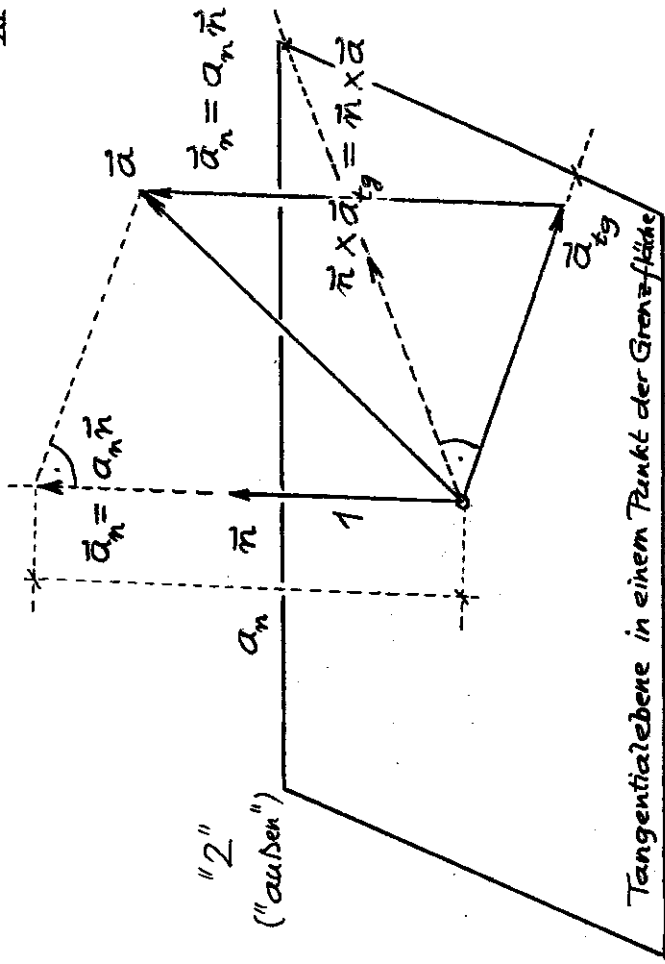
$\oint_{\mathcal{C}(F)} d\vec{r} \cdot \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \int_F d^2\vec{f} \cdot \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_F d^2\vec{f} \cdot \vec{D}$

⇒ (Beweis folgt)

Anschlußbedingungen an der Grenzfläche: für beliebige Medien gültig! (FG!)

$\text{Div } \vec{D} \equiv \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 4\pi \sigma$	$\text{Rot } \vec{E} \equiv \vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$
$\text{Div } \vec{B} \equiv \vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$	$\text{Rot } \vec{H} \equiv \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \vec{k}$

(30)



"1" $a_n := \vec{n} \cdot \vec{a}$, $\vec{a}_n := a_n \vec{n}$

$\vec{a}_{tg} := \vec{a} - \vec{a}_n$, d.h. $\vec{a} = \vec{a}_{tg} + \vec{a}_n$

$\vec{n} \times \vec{a}_{tg} = \vec{n} \times \vec{a}$ Vektor in der Tangentialebene

$\vec{n} \times \vec{a} = 0 \iff \vec{a}_{tg} = 0$

Falls \vec{a} bei Durchgang durch Fläche im Flächenpunkt nicht stetig sein muß, kann

$\text{Div } \vec{a} := \vec{n} \cdot (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) = a_{2,n} - a_{1,n}$
oder (und) "außen minus innen"

$\text{Rot } \vec{a} := \vec{n} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) = \vec{n} \times (\vec{a}_{2,tg} - \vec{a}_{1,tg})$

von 0 bzw. $\vec{0}$ verschieden sein. Rot \vec{a} Vektor in der Tangentialebene

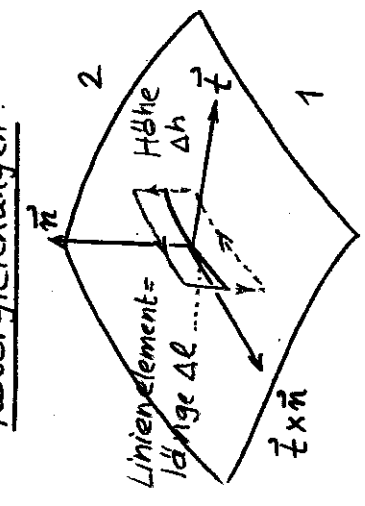
- 6 * Flächenladungsdichte
- 7 * Flächenstromdichte

XI-23

Analog für \vec{B} , ebenso "unten" analog für \vec{E} .

Rotorgleichungen:

\vec{E} Einheitsvektor in Tangentialebene $\perp \vec{e}_z$
Linienelement



$$\oint_{\mathcal{C}(\mathcal{F})} d\vec{r} \cdot \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \int_{\mathcal{F}} d^2\vec{r} \cdot \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}} d^2\vec{r} \cdot \vec{D}$$

Bis auf höhere Ordnungen in $\Delta l, \Delta h$ gilt:

$$(\vec{E} \times \vec{n}) \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \Delta \mathcal{A} = \frac{4\pi}{c} \int_{-\frac{\Delta h}{2}}^{+\frac{\Delta h}{2}} \vec{j} \cdot \vec{E} dh \Delta \mathcal{A} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} (\vec{D}_2 \cdot \vec{E} \frac{\Delta h}{2} \Delta \mathcal{A} + \vec{D}_1 \cdot \vec{E} \frac{\Delta h}{2} \Delta \mathcal{A})$$

mus für beliebige Linienelemente durch den Flächenpunkt, also für beliebiges \vec{E} , gelten

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \int_{-\frac{\Delta h}{2}}^{+\frac{\Delta h}{2}} \vec{j} dh$$

$$\Delta l \rightarrow 0, \Delta h \rightarrow 0: \quad \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

mit $\vec{k} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{-\frac{\Delta h}{2}}^{+\frac{\Delta h}{2}} \vec{j} dh$

(Physikalisch: über "Grenzschicht")

- 6 * Flächenladungsdichte
- 7 * Flächenstromdichte

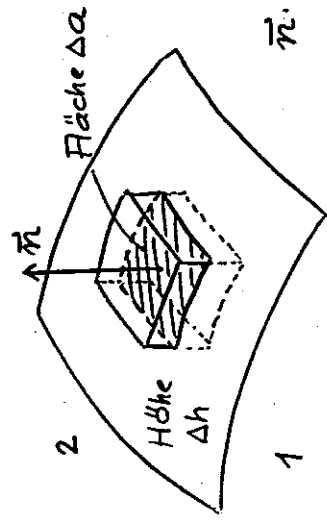
XI-23

Sind σ und \vec{k} null (z.B. Grenzfläche zweier Dielektrika), so lauten die Anschlussbedingungen

Stetigkeit der
Normalkomponenten von \vec{D} und \vec{B}
und der
Tangentialkomponenten von \vec{E} und \vec{H}

Beweis: "skizziert"

$$\oint_{\mathcal{F}(\sigma)} d^2\vec{r} \cdot \vec{D} = 4\pi \int_{\sigma} d^3r \rho$$



Bis auf höhere Ordnungen in $\Delta a, \Delta h$ gilt:

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Delta a = 4\pi \int_{-\frac{\Delta h}{2}}^{+\frac{\Delta h}{2}} \rho dh \Delta a$$

$\Delta a \rightarrow 0, \Delta h \rightarrow 0:$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 4\pi \sigma$$

mit $\sigma = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{-\frac{\Delta h}{2}}^{+\frac{\Delta h}{2}} \rho dh$

(Physikalisch: über "Grenzschicht")

XI. 3. Materialeigenschaften.
Dispersionsrelationen

XI. 3. A. Grenzen der Anwendbarkeit der makroskopischen Elektrodynamik.
Grenzen der Anwendbarkeit des Permeabilitätsbegriffes

Makroskopische Elektrodynamik:

MATERIE ALS KONTINUUM behandelt

a Größenordnung atomarer Abstände in Materie
(z.B. Gitterkonstante): $a \sim 1 \text{ \AA}$

R₀ Radius des Mittelungsvolumens für das "Ausmitteln" der Atomistik:

$R_0 \gg a$ erforderlich: $R_0 \sim 100 \text{ \AA}$

Damit ist es nicht sinnvoll, in der makroskopischen Elektrodynamik elm. Felder zu betrachten, welche sich auf räumlichen Distanzen $\leq R_0$ merklich ändern.

Bei zeitlich harmonischen freien Quellen:

ω Kreisfrequenz
 $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ Wellenlänge

folgt $\lambda \gtrsim R_0 \gg a$ (31)

\Rightarrow Freie Quellen dürfen sich zeitlich nicht zu rasch ändern:

Frequenzen müssen kleiner sein als Frequenzen langwelliger Röntgenstrahlung

Bemerkungen:

1) Man kann also z.B. Wellenausbreitung für Rundfunk, Mikrowellen, IR, sichtbaren Bereich und UV im Rahmen der makroskop. Elektrodynamik behandeln.

2) Für höhere als die zugelassenen Frequenzen müßte man auch bereits den quantenhaften Charakter des elm. Feldes berücksichtigen (hohe Quantenenergien $h\nu$). •

Permeabilitätsbegriff:

T_{Umlauf} "Umlaufzeit" eines Elektrons in einem Atom:

$T_{\text{Umlauf}} \sim \frac{a}{v}$ mit $m_0^2 \sim \frac{e^2}{a}$

$\Rightarrow T_{\text{Umlauf}} \sim \frac{a}{c} \sqrt{\frac{a}{r_e}}$ mit $r_e = \frac{e^2}{m_e^2 c^2}$

$\sim 10^{-17} \dots 10^{-16} \text{ s}$
 $= 3 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$

Zur Ausbildung neuer magnetischer Momente als Reaktion auf zeitlich veränderliche freie Felder müssen Zeiten von mehreren Elektronenumläufen zur Verfügung stehen, währenddessen dürfen sich aber die freien Felder nicht merklich ändern.

Bei zeitlich periodischen freien Quellen:

$$T = \frac{\lambda}{c} \gg T_{\text{Umlauf}} \sim \frac{a}{c} \sqrt{\frac{\alpha}{\epsilon}} \sim 10^{-17} \dots 10^{-16}$$

$$\lambda \gg a \sqrt{\frac{\alpha}{\epsilon}} \sim 1000 \text{ \AA} \quad (32)$$

Die Benützung der MG $\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$ hat nur einen Sinn, wenn die Frequenzen kleiner sind als die Frequenzen aus dem sichtbaren Bereich.

Für zeitlich rascher veränderliche freie Felder hat man $\vec{H} = \vec{B}$ (also $\vec{M} = \vec{O}$) zu setzen. (Formal: $\mu = 1$)

XI.3.B*: Beziehung zwischen der molekularen Polarisierbarkeit χ_{mol} und der elektrischen Suszeptibilität χ_e

Elektrostatik der Dielektrika: freie Ladungsdichte zeitunabhängig \Rightarrow makroskopische Quellen und Felder zeitunabhängig
nicht aber die mikroskopischen;
deshalb auch mittleres Dipolmoment $\langle \vec{p}_{\text{mol}} \rangle$
eines herausgegriffenen Moleküls betrachtet

ferner: Substanz soll keine permanenten Dipole enthalten

Wahl des Koordinatenursprungs:

Koordinatenursprung = Ort des herausgegriffenen Moleküls

Dann gilt in weitem Feldstärkenbereich

$$\langle \vec{p}_{\text{mol}} \rangle = \chi_{\text{mol}} \vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{O}) \quad [1]$$



$\langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle(\vec{O}) +$ elstat. Feld in \vec{O} , welches von allen übrigen Molekülen des Materiestücks verursacht wird, welche durch Dipole mit Momenten $\langle \vec{p}_{j,\text{mol}} \rangle$ beschrieben werden

XI-28

Feldbeiträge der anderen Moleküle

am Ort des herausgegriffenen Moleküls:
(nur Dipolfeldanteile berücksichtigt)

Mit der Abkürzung $\vec{P}_j \equiv \langle \vec{p}_{j,mol} \rangle$ gilt dann

$$\vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0}) = \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle(\vec{0}) + \sum_j \frac{3(\vec{p}_j \cdot \vec{r}_j) \vec{r}_j - r_j^2 \vec{p}_j}{r_j^5} \quad [2]$$

Kontaktterme sind im Ursprung null!
 $\vec{r}_j \neq \vec{0}, \forall j$

Außerhalb der "Lorentzkugel" (Mittelungsbereich für Übergang zur makroskopischen Elektrodynamik) kann man von der molekularen Struktur absehen

$(R_0 \sim 100 \text{Å} \gg a)$ und die Materie als

polarisiertes Kontinuum betrachten:

$$\vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0}) = \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle(\vec{0}) + \sum_j \frac{3(\vec{p}_j \cdot \vec{r}_j) \vec{r}_j - r_j^2 \vec{p}_j}{r_j^5} \quad 0 < r_j < R_0 \quad [3]$$

$\vec{P}(\vec{r}) \equiv \vec{0}$
außerhalb der Materie

$$+ \int_{r > R_0} d^3r \frac{3(\vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{P}(\vec{r})}{r^5}$$

Beachte: Ursprung liegt nicht im Integrationsbereich, deshalb im Integranden Kontaktterm

$$- \frac{4\pi}{3} \vec{P}(\vec{0}) \delta(\vec{r}) \quad \text{nicht benötigt.}$$

XI-29

Ziel: $\vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0})$ - wenn möglich - näherungsweise durch $\vec{E}(\vec{0})$ und $\vec{P}(\vec{0}) = \chi_e \vec{E}(\vec{0})$ ausdrücken

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{0}) &= \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle(\vec{0}) + \langle \vec{E}_{\text{mat}} \rangle(\vec{0}) \\ &= \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle(\vec{0}) + \int d^3r \left[\frac{3(\vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{P}(\vec{r})}{r^5} \right. \\ &\quad \left. \text{ganze Materie einschließen} - \frac{4\pi}{3} \vec{P}(\vec{0}) \delta(\vec{r}) \right] \end{aligned} \quad [4]$$

$$= \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle(\vec{0}) - \frac{4\pi}{3} \vec{P}(\vec{0})$$

$$+ \int d^3r \frac{3(\vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{P}(\vec{r})}{r^5}$$

hier ausrechnen und in $\vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0})$ einsetzen:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0}) &= \vec{E}(\vec{0}) + \frac{4\pi}{3} \vec{P}(\vec{0}) \\ &+ \sum_j \frac{3(\vec{p}_j \cdot \vec{r}_j) \vec{r}_j - r_j^2 \vec{p}_j}{r_j^5} \quad 0 < r_j < R_0 \\ &- \int_{r < R_0} d^3r \frac{3(\vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{P}(\vec{r})}{r^5} \end{aligned} \quad [5]$$

$$\int_{r < R_0} d^3r \frac{3(\vec{P}(r) \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{P}(r)}{r^5} \approx \vec{0}$$

(Winkelintegral null) [6]

$\vec{P}(r) \approx \vec{P}(\vec{0}) = \text{konst}$
(makroskopisches Feld)

Somit:

$$\vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0}) = \vec{E}(\vec{0}) + \frac{4\pi}{3} \vec{P}(\vec{0})$$

[7]

$$+ \underbrace{\sum_{\substack{j \\ 0 < r_j < R_0}} \frac{3(\vec{p}_j \cdot \vec{r}_j)\vec{r}_j - r_j^2 \vec{p}_j}{r_j^5}}_{\text{strukturabhängiger Term}}$$

strukturabhängiger Term

Lorentz: Term ist null für

$\vec{p}_j = \vec{p}, \forall j$, und einfaches kubisches Gitter; s. Greiner (Ursprung Gitterpunkt!)

Plausible Annahme: Term auch

null für regellose Anordnungen (amorphe Stoffe, Flüssigkeiten, Gase)

"Arbeitshypothese" (Jackson):

Term auch unbedeutend, wenn $\neq \vec{0}$

XI-31

Damit: Beziehung von Lorentz

$$\vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0}) = \vec{E}(\vec{0}) + \frac{4\pi}{3} \vec{P}(\vec{0})$$

[8]

Mit

$$\vec{P}(\vec{r}) = \chi_e \vec{E}(\vec{r})$$

[9]

und

$$\vec{P}(\vec{0}) = N \langle \vec{p}_{\text{mol}} \rangle$$

[10]

N Anzahl der Moleküle / Volumseinheit

$$\vec{P}(\vec{0}) = N \chi_{\text{mol}} \underbrace{\vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0})}_{\langle \vec{p}_{\text{mol}} \rangle}$$

folgt

$$= N \chi_{\text{mol}} (\vec{E}(\vec{0}) + \frac{4\pi}{3} \vec{P}(\vec{0}))$$

\Rightarrow

$$\vec{P}(\vec{0}) = \underbrace{\frac{N \chi_{\text{mol}}}{1 - \frac{4\pi}{3} N \chi_{\text{mol}}}}_{\chi_e} \vec{E}(\vec{0})$$

$$\chi_e = \frac{N \chi_{\text{mol}}}{1 - \frac{4\pi}{3} N \chi_{\text{mol}}}$$

$$= \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \quad (35b)$$

\Rightarrow

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} N \chi_{\text{mol}} \quad (36b)$$

Clausius-Mosotti
(mit $n = \sqrt{\epsilon}$)

Lorentz-Lorenz!

$$\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} = \frac{4\pi}{3} N \chi_{\text{mol}} \propto \text{Dichte der Substanz}$$

"dielektrische Zustandsgleichung"

gut erfüllt für Gase $\epsilon = \epsilon(\bar{v})$
 schlechter für Flüssigkeiten und
 Festkörper, insbesondere für
 Stoffe mit großem ϵ *)

Beziehung
 ~~~~~

Massendichte

Grund: unphysikalische  
 "Sättigung"

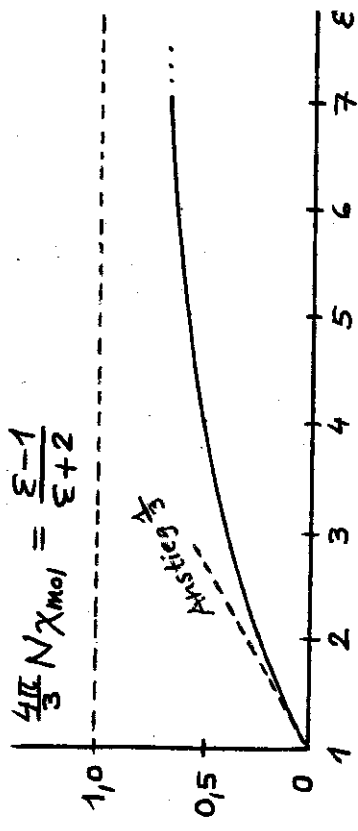
Grund: unphysikalische  
 "Sättigung"

$$\frac{4\pi}{3} N \chi_{\text{mol}} = \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \rightarrow 1$$

$\epsilon \rightarrow \infty$

(maximale Polarizierbarkeit  
 unphysikalisch)

Ursachen des "Versagens":  
 Näherungen, nichtlineare Effekte



\*) Substanzen mit großem  $\epsilon$  sind i.a. polare Substanzen, die wir bei der Ableitung von vornherein ausgeschlossen haben!

XI. 3. C. Orientierungspolarisierbarkeit

Nicht gebracht. (S. Statistische Mechanik.)  
 Nicht Prüfungsstoff.

XI. 3. D. Kramers-Kronig Dispersions-  
relationen

Für zeitlich "sehr rasch veränderliche" <sup>\*)</sup>freie Felder  
macht sich die Trägheit der Materie bemerkbar.

Die Materialgleichung

\*) Substanz =  
spezifisch!

$$\vec{P}(r,t) = \chi_e \vec{E}(r,t)$$

bzw.

$$\vec{D}(r,t) = \epsilon \vec{E}(r,t), \quad \epsilon = 1 + 4\pi\chi_e$$

ist dann nicht mehr brauchbar: Dispersion!  
Absorption!

Die allgemeinste räumlich lokale, lineare,  
kausale Materialgleichung (für homogene  
isotrope Materie) lautet <sup>\*)</sup>

$$\vec{P}(r,t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau G(\tau) \vec{E}(r,t-\tau)$$

"zeitliche  
Dispersion"

bzw.

$$\vec{D}(r,t) = \vec{E}(r,t) + \int_0^{+\infty} d\tau G(\tau) \vec{E}(r,t-\tau)$$

(38)

Und was ist  
mit  $M$  und  
 $H$  ?

$G(\tau)$  Relaxationsfunktion

$\tau \in [0, +\infty)$  reellwertige Materialfunktion

\*) Wenn der Einfluss von  $\vec{B}$  vernachlässigbar ist!

Man kann auch

$$\vec{P}(F,t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau G(\tau) \vec{E}(F,t-\tau)$$

mit  $G(\tau)$ ,  $\tau \in (-\infty, +\infty)$ , schreiben.

Für eine so definierte Relaxationsfunktion ergibt dann die Kausalitätsforderung

$$G(\tau) = 0 \text{ für } \tau < 0.$$

Da es keinen physikalischen Grund für einen Sprung oder eine andere Unstetigkeit der Materialfunktion  $G(\tau)$  für  $\tau = 0$  gibt, erwarten wir

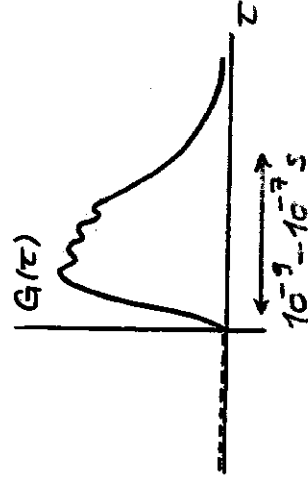
$$\underline{G(0+) = 0} \quad (\text{Jackson: } G(0-) \neq G(0+) \text{ "wäre unphysikalisch"})$$

Ferner erwarten wir

$$G(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{"eher stark"})^*)$$

Das Zeitintervall, für das  $G(\tau)$  "wesentlich von Null verschieden" ist, ist durch die Größenordnung der Relaxationszeiten der von den freien Feldern in der Materie ausgelösten Prozesse bestimmt:

$$10^{-9} - 10^{-7} \text{ s.}$$



\*) VS: Nichtleiter bzw. Leiter, bei dem ein allfälliger Gleichstrom nicht von  $G(\tau)$  "mitbeschrieben" wird (s. Folie XI-41 Gl. (46)).

$$\vec{P}(F,t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} d\tau G(\tau) \vec{E}(F,t-\tau)$$

Fouriertransformation bzgl. der Zeitvariablen:

$$\begin{aligned} \vec{P}(F,\omega) &= \int_{\mathbb{R}} dt e^{i\omega t} \vec{P}(F,t) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} d\tau G(\tau) e^{i\omega\tau} \int_{\mathbb{R}} dt' e^{i\omega(t-\tau)} \vec{E}(F,t-\tau) \end{aligned}$$

Somit:

$$\vec{P}(F,\omega) = \chi_e(\omega) \vec{E}(F,\omega)$$

$$\chi_e(\omega) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} d\tau e^{i\omega\tau} G(\tau)$$

$$\boxed{\vec{D}(F,\omega) = \epsilon(\omega) \vec{E}(F,\omega)}$$

(40)

$$\begin{aligned} \epsilon(\omega) &= 1 + 4\pi\chi_e(\omega) \\ &= 1 + \int_0^{+\infty} d\tau e^{i\omega\tau} G(\tau) \end{aligned}$$

komplexwertige Dielektrizitätsfunktion  
Dispersionsgesetz des Mediums

Symmetrie von  $\operatorname{Re} E(\omega)$ ,  $\operatorname{Im} E(\omega)$   
bzgl.  $\omega \rightarrow -\omega$  (für reelles  $\omega$ )

$$E(\omega) = 1 + \int_0^{+\infty} dt e^{i\omega t} \underbrace{G(t)}_{\text{reellwertig}}$$

$$\Rightarrow E^*(\omega) = E(-\omega)$$

$\operatorname{Re} E(\omega)$  gerade Funktion  
 $\operatorname{Im} E(\omega)$  ungerade Funktion  
 (für reelles  $\omega$ )

Analytizitätseigenschaften in der komplexen

$\omega$ -Ebene

$E(\omega)$ ,  $\omega \in \mathbb{C}$ , betrachtet

1)

$$E(\omega_+ + i\omega_i) = 1 + \int_0^{+\infty} dt e^{i\omega_+ t} \underbrace{G(t)}_{\text{endlich } \forall \tau} e^{-\omega_i t}$$

Ann.: endlich  $\forall \tau$

$$G(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow +\infty} 0 \text{ stärker als } \frac{1}{\tau}$$

$\Rightarrow$  Integral  $\exists$  für  $\omega_i \geq 0$ , also

$E(\omega)$  in der "oberen" Halbebene und  
 auf der reellen Achse endlich

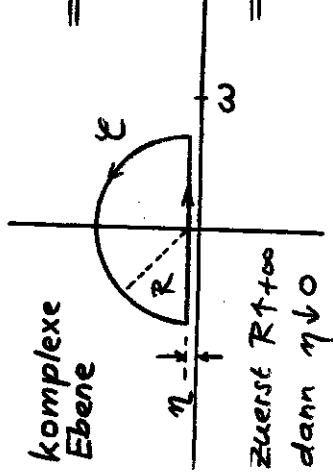
2)

$$\frac{dE(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega = \omega_+ + i\omega_i} = i \int_0^{+\infty} dt e^{i\omega_+ t} \tau G(\tau) e^{-\omega_i t}$$

$\Rightarrow$  Integral  $\exists$  für  $\omega_i > 0$

1) + 2)  $\Rightarrow$

$E(\omega') - 1$ ,  $\omega' \in \mathbb{C}$ , ist in der "oberen" Halbebene  
 regulär (analytisch) und auf der reellen Achse  
 endlich



$$\Rightarrow \frac{E(\omega') - 1}{\omega' - \omega}, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

regulär in der "oberen" Halbebene

$\Rightarrow$  für gewähltes  $\zeta$  gilt

Cauchyscher Integralsatz

$$\oint_{\zeta} \frac{E(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' = 0 \quad \text{für } \omega \in \mathbb{R}$$

Weitere Annahme:

Taylorentwicklung von  $G(\tau) \exists$  für  $\tau = 0+$

$$G(\tau) = \underbrace{G(0+)}_0 + \tau G'(0+) + \dots, \quad \tau > 0$$

$\Rightarrow$  (kurze elementare Rechnung)

Für große  $|\omega'|$ ,  $\operatorname{Im} \omega' > 0$ , gilt

$$E(\omega') - 1 = -\frac{G'(0+)}{\omega'^2} + O\left(\frac{1}{|\omega'|^3}\right) \quad *)$$

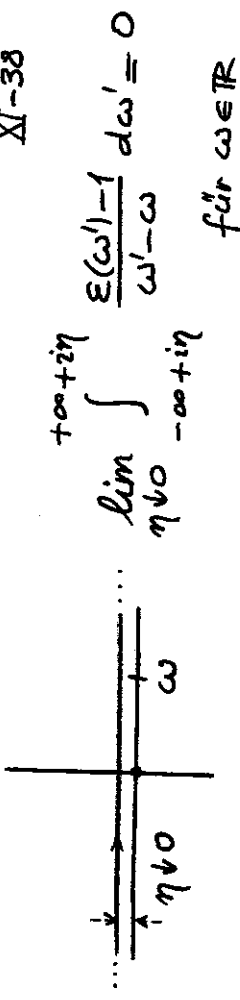
$\Rightarrow$  Integral über Halbkreis ( $\omega' = Re^{i\varphi} + i\eta$ )

"verschwindet" für  $R \uparrow +\infty$  wie  $\frac{1}{R^2}$

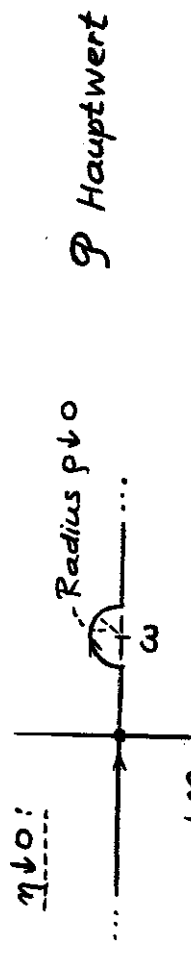
$$\Rightarrow \int_{-\infty + i\eta}^{+\infty + i\eta} \frac{E(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' = 0 \quad \text{für } \omega \in \mathbb{R}$$

\*) "Erwartung": Verhalten gilt auch für reelles  $\omega$ ; s. später





Beachte:  $\epsilon(\omega)$  endlich auf reeller Achse



$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' + \int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' = 0 \quad \text{für } \omega \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d\omega'}{\omega' - \omega} = i d\varphi \iff \begin{cases} \omega' - \omega = \rho e^{i\varphi} \\ d\omega' = i \rho e^{i\varphi} d\varphi \end{cases}$$

Eigenschaften von  $\epsilon(\omega')$ !

Integral  $\int_{\rho_0}^{\rho_1}$  gibt  $i [\epsilon(\omega) - 1] \int_0^{\pi} d\varphi$

Ergebnis:

$$\epsilon(\omega) - 1 = \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega'$$

für reelle  $\omega$

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{i}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega', \quad \omega \text{ reell}$$

$$\text{Re } \epsilon(\omega) + i \text{Im } \epsilon(\omega) = \text{Re } \epsilon(\omega') + i \text{Im } \epsilon(\omega')$$

$$\downarrow \text{Re } \epsilon(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im } \epsilon(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$

$$\downarrow \text{Im } \epsilon(\omega) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Re } \epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' \quad \omega \text{ reell} \quad (44)$$

$$\text{Re } \epsilon(-\omega) = \text{Re } \epsilon(\omega), \quad \text{Im } \epsilon(-\omega) = -\text{Im } \epsilon(\omega) \quad (\omega \text{ reell})$$

$$\begin{aligned} \text{Re } \epsilon(\omega) &= 1 + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\omega' \text{Im } \epsilon(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \\ \text{Im } \epsilon(\omega) &= -\frac{2\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\text{Re } \epsilon(\omega') - 1}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \end{aligned} \quad (45)$$

Kramers-Kronig

Dispersionsrelationen

$$\omega \text{ reell} \geq 0$$

physikal. Frequenzbereich

Bedeutung? Physikal. Zusammenhang zwischen

DISPERSION - (primär) verantwortlich:  $\text{Re } \epsilon(\omega)$

und ABSORPTION (Dissipation von Energie durch dielektrische Verluste) - verantwortlich:  $\text{Im } \epsilon(\omega)$

in einem Medium (s. später).

Leiter

Im Kapitel XIV (Wellen in Materie) wird gezeigt:  
 Leiter können (unter bestimmten VS) durch die  
 verallgemeinerte Dielektrizitätsfunktion

$$\eta(\omega) = \epsilon(\omega) + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$$

beschrieben werden.

gleiche Analytizitätseigen = zusätzliche  
 scharfen wie bei Isolatoren Dissipation von  
 (da gleiche physikalische Energie (Joulesche  
 Mechanismen) Wärme)

Einsetzen von  $\epsilon(\omega) = \eta(\omega) - i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$  in die

Kramers-Kronig Relationen für  $\epsilon(\omega)$  liefert die  
 folgenden

Kramers-Kronig Dispersionsrelationen für  $\eta(\omega)$ :

$$\text{Re } \eta(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \omega' \frac{\text{Im } \eta(\omega') - 4\pi\sigma}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

$$\text{Im } \eta(\omega) = \frac{4\pi\sigma}{\omega} - \frac{2\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\text{Re } \eta(\omega') - 1}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

(47)

Bemerkung: Vielfach wird dann statt

$\eta(\omega)$  wieder  $\epsilon(\omega)$  geschrieben, d.h. für  
 Leiter wird einfach  $\frac{4\pi\sigma}{\omega}$  "zusätzlich" in  
 den Imaginärteil von  $\epsilon(\omega)$  "integriert"  
 (s. z.B. Jackson). In den FG ist dann  
 der Term  $\frac{4\pi\sigma}{\omega} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E}$  wegzulassen und

für die entsprechende Relaxationsfunktion

$$\text{gilt dann } G(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow +\infty} 4\pi\sigma \quad (46)$$

XI.3.E. Normale und anomale Dispersion.

Summenregeln

Definition: Gilt für alle  $\omega$  aus einem  
 Frequenzbereich

$$\frac{d}{d\omega} \text{Re } \epsilon(\omega) > 0 \quad (< 0),$$

so spricht man von einem Frequenzbereich  
 mit normaler (anomaler) Dispersion.

In Abschnitt XI.4.C wird gezeigt:

$$\text{Im } \epsilon(\omega) > 0, \quad \forall \omega > 0$$

Definition: Ein Frequenzbereich, in dem  $\text{Im } \epsilon(\omega) \ll \text{Re } \epsilon(\omega)$  gilt, in dem daher  $\text{Im } \epsilon(\omega)$  null gesetzt werden kann, heißt Transparenzbereich der Substanz.

Satz: Transparenzbereiche sind Bereiche mit normaler Dispersion.

Beweis:

$$\text{Re } \epsilon(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\omega' \text{Im } \epsilon(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

mit  $\omega$  aus Transparenzbereich  $\Rightarrow$  Beiträge zum Integral nur für  $\omega'$  außerhalb dieses Frequenzbereiches, d.h. keine Beiträge für  $\omega'$  aus Umgebung von  $\omega \Rightarrow$

$\frac{d}{d\omega}$  und  $\mathcal{P} \int_0^{+\infty}$  vertauschbar  
 "überflüssig"

$$\frac{d}{d\omega} \text{Re } \epsilon(\omega) = \frac{4\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\omega' \text{Im } \epsilon(\omega')}{(\omega'^2 - \omega^2)^2} d\omega' > 0 \bullet$$

Summenregeln

Gezeigt wurde: Für große  $|\omega|$ ,  $\text{Im } \omega > 0$  gilt

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{G'(0)}{\omega^2} + O\left(\frac{1}{\omega^3}\right)$$

"Erwartung": Für reelles  $\omega$  gilt

$$\text{Re } \epsilon(\omega) - 1 \sim_{\omega \rightarrow +\infty} O\left(\frac{1}{\omega^2}\right)$$

gerade Fkt.

$$\text{Im } \epsilon(\omega) \sim_{\omega \rightarrow +\infty} O\left(\frac{1}{\omega^3}\right)$$

ungerade Fkt.

Was können wir für reelles  $\omega$  beweisen?

Satz: Gilt für reelles  $\omega$

$$\text{Im } \epsilon(\omega) \sim_{\omega \rightarrow +\infty} O\left(\frac{1}{\omega^3}\right),$$

so folgt daraus

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} [(\epsilon(\omega) - 1)\omega^2] = -\omega_p^2$$

mit  $\omega_p^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} d\omega' \omega' \text{Im } \epsilon(\omega')$  (51)

$\omega_p$  Plasmafrequenz "1. Summenregel"

Beweis:

$$\text{Re } \epsilon(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\omega' \text{Im } \epsilon(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

wegen  $\omega' \text{Im } \epsilon(\omega') \sim O\left(\frac{1}{\omega'^2}\right)$ :  
 $\omega' \rightarrow +\infty$

$$-\frac{1}{\omega^2} \underbrace{\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \omega' \text{Im } \epsilon(\omega') d\omega'}_{=: \omega_p^2} + O\left(\frac{1}{\omega^4}\right)$$

$$\text{Re } \epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + O\left(\frac{1}{\omega^4}\right) \text{ für große } \omega \quad \checkmark$$

Bemerkungen:

1)  $\omega_p$  heißt Plasmafrequenz (spielt eine Rolle bei Plasmaschwingungen)

2) Zusammen mit

$$\text{Im } \epsilon(\omega) \sim O\left(\frac{1}{\omega^3}\right) \text{ für große } \omega$$

folgt

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \epsilon(\omega) = 1$$

Trägheit der Materie:

Der Polarisationsmechanismus "kommt" bei zu raschen zeitlichen Änderungen der freien Felder mit diesen nicht mehr "mit", keine "Reaktion" mehr.

Experimentell:  $\epsilon(\omega) \rightarrow 1$  am "oberen

Ende" des UV-Bereiches (s. Beispiel NaCl Folie XI-46)  
 [Ende des Anwendungsbereiches der makrosk. Theorie!]

Satz: Gilt für reelles  $\omega$

$$\text{Im } \epsilon(\omega) \sim O\left(\frac{1}{\omega^3}\right), \quad \omega \rightarrow +\infty$$

$$\text{so gilt } \int_0^{+\infty} d\omega [\text{Re } \epsilon(\omega) - 1] = 0 \quad (52)$$

("2. Summenregel", "Superkonvergenzrelation")  
und umgekehrt.

Beweis mit 2. Kramers-Kronig Relation: s. Jackson

Beachte: Die Aussagen der Abschnitte XI.3.D,

XI.3.E wurden modellunabhängig ausgehend von wenigen allgemeinen Annahmen (Kausalität, Taylorentwickelbarkeit von  $G(\tau)$ , Verswinden von  $G(\tau)$  für  $\tau \rightarrow +\infty$ ) abgeleitet!

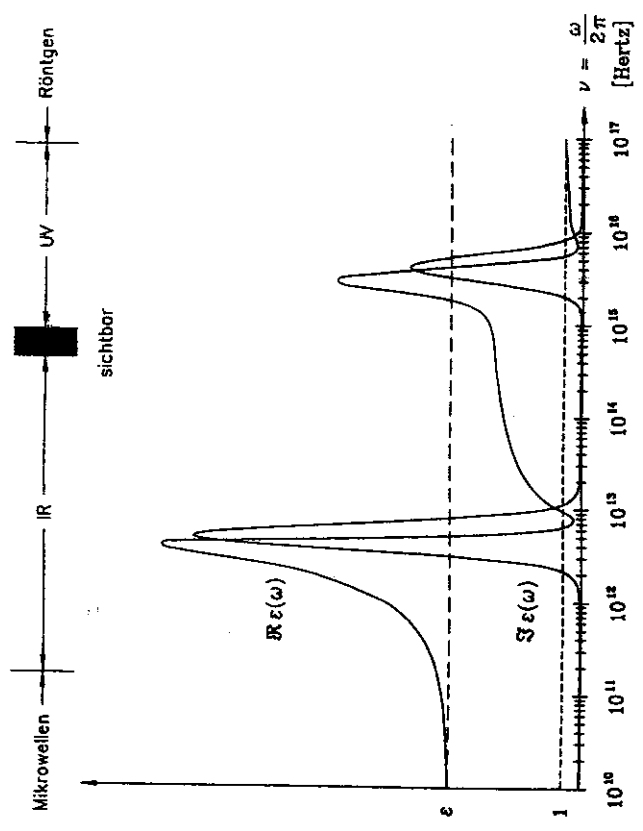
Oszillatormodell

$\omega_0$  Eigenfrequenz der gebundenen Elektronen,  
 $f$  Dämpfungskonstante,  $N$  Elektronen / Volumseinheit

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

$\omega_p = ?$ ,  $G(\tau) = ?$  usw. SELBST ANSCHAUEN...

Dielektrizitätsfunktion für NaCl



XI.4. Energie- und Impulsbilanz

XI-47

XI.4.A. Vom makroskopischen Feld an den freien Quellen geleistete Arbeit und auf die freien Quellen ausgeübte Kräfte

Makroskopische FG

$$\begin{aligned}
 \text{div } \vec{D} &= 4\pi\rho & \text{rot } \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\
 \text{div } \vec{B} &= 0 & \text{rot } \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}
 \end{aligned}
 \Rightarrow (54)$$

Leistungsdichte  $\vec{j} \cdot \vec{E}$  der vom makroskopischen Feld an den freien Quellen geleisteten Arbeit

$$\begin{aligned}
 \vec{j} \cdot \vec{E} &= \frac{c}{4\pi} \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H} - \frac{1}{4\pi} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\
 0 &= -\frac{c}{4\pi} \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} - \frac{1}{4\pi} \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}
 \end{aligned}
 \quad (55)$$

---


$$\vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{c}{4\pi} \underbrace{(\vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H})}_{\text{div } (\vec{E} \times \vec{H})} - \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t})$$

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{c}{4\pi} \text{div } (\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \quad (57)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Kraftdichte  $\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$  der vom makroskopischen Feld auf die freien Quellen ausgeübten Kräfte

$$\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi} (\operatorname{div} \vec{D}) \vec{E} + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{H} \times \vec{B} - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \times \vec{B} \quad (56)$$

$$\vec{0} = \frac{1}{4\pi} (\operatorname{div} \vec{B}) \vec{H} + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{E} \times \vec{D} + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \times \vec{D}$$

$$\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \operatorname{div} \vec{D} + \vec{H} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{D} \times \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{H})$$

$$(\vec{b} \operatorname{div} \vec{a} - \vec{a} \times \operatorname{rot} \vec{b})_k = \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i b_k) - a_i \frac{\partial b_i}{\partial x_k} - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \times \vec{B})$$

$$(\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B})_k = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{4\pi} (D_i E_k + B_i H_k) - \frac{1}{4\pi} (D_i \frac{\partial E_i}{\partial x_k} + B_i \frac{\partial H_i}{\partial x_k}) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi c} (\vec{D} \times \vec{B})_k \quad (58)$$

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = -\operatorname{div} \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \quad (57)$$

$$(\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B})_k = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{4\pi} (D_i E_k + B_i H_k) - \frac{1}{4\pi} (D_i \frac{\partial E_i}{\partial x_k} + B_i \frac{\partial H_i}{\partial x_k}) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi c} (\vec{D} \times \vec{B})_k \quad (58)$$

— "Problemterme"

rechte Gleichungsseiten n.a. nicht als Summen von reinen "Ableitungstermen" darstellbar, daher Interpretationsproblem! Einfache Verhältnisse nur bei allereinfachsten MG.

Gründe: In allgemeiner Materie gibt es neben der Jouleschen Wärme noch andere dissipative Mechanismen<sup>\*)</sup> (dielektrische Verluste, Ummagnetisierungsverluste usw.), durch welche Wärme entstehen kann.

In inhomogener Materie führt dies zu mechanische Spannungen und Deformationen (Materietransport) sowie zu einem Wärmestrom. Alle diese Beiträge sind noch auf den rechten Gleichungsseiten enthalten!

\*) s. Abschnitt XI.4.C

XI. 4. B. Lokale Bilanzgleichungen für lineare <sup>homogene</sup> Medien ohne Dispersion

( $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  oder  $\vec{D} = \vec{\epsilon} \vec{E}$ , analog für  $\vec{H}, \vec{B}$ )  $\epsilon$  bzw.  $\vec{\epsilon}$  und  $\mu$  bzw.  $\vec{\mu}$  dürfen nicht ortsabhängig sein!

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = - \operatorname{div} \underbrace{\frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H})}_{=: \vec{S}_{(mat)}} - \underbrace{\frac{1}{4\pi} (\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t})}_{=: \omega_{(mat)}} \dots \text{gilt auch für } \epsilon(\vec{r}), \mu(\vec{r})$$

$$\begin{aligned} (\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B})_k &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{4\pi} (D_i E_k + B_i H_k) - \frac{1}{4\pi} (D_i \frac{\partial E_i}{\partial x_k} + B_i \frac{\partial H_i}{\partial x_k}) - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (D \times B)_k \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \delta_{ik} \frac{1}{8\pi} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) \dots \text{gilt nicht für } \epsilon(\vec{r}), \mu(\vec{r}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{4\pi} [D_i E_k + B_i H_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})] - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi c} (D \times B)_k \\ &=: T_{(mat)ik}^{(M)} \qquad \qquad \qquad =: g_{(mat)k} \end{aligned}$$

Zusammenfassung: lineare homogene Medien ohne Dispersion  
elm. Energiedichte in Materie

$$\omega_{(mat)}(\vec{r}, t) := \frac{1}{8\pi} [\vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) + \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{H}(\vec{r}, t)] \quad (63)$$

elm. Energiestromdichte in Materie

$$\vec{S}_{(mat)}(\vec{r}, t) := \frac{c}{4\pi} [\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)] \quad (62)$$

lokale Energiebilanz

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \omega_{(mat)} - \operatorname{div} \vec{S}_{(mat)} \quad (64)$$

elm. Impulsdichte in Materie

$$\vec{g}_{(mat)}(\vec{r}, t) := \frac{1}{4\pi c} [\vec{D}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)] \neq \frac{\vec{S}_{(mat)}}{c^2} \quad (66)$$

Maxwell'scher Spannungstensor in Materie  
(= - Impulsstromdichte in Materie)

$$\vec{T}_{(mat)}^{(M)}(\vec{r}, t) := \frac{1}{4\pi} [\vec{D}(\vec{r}, t) \circ \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{B}(\vec{r}, t) \circ \vec{H}(\vec{r}, t)] - \vec{I} \omega_{(mat)}(\vec{r}, t) \quad (65)$$

lokale Impulsbilanz

$$\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{g}_{(mat)} - \vec{\nabla} \cdot (-\vec{T}_{(mat)}^{(M)}) \quad (67)$$

Energie-Impuls-Vierertensor: Minkowskitensor

Bei Anschreiben der Grundgleichungen der makroskopischen Elektrodynamik in Viererschreibweise (s. Kapitel XVI) treten die Größen

$$\frac{1}{c^2} W_{(mat)}, \frac{S_{(mat)i}}{c^2}, g_{(mat)i}, -\frac{1}{c} T_{(mat)i}^{(M)}$$

als Komponenten des sog. Minkowskitensors auf, welcher als elm. Energie-Impuls-Vierertensor in linearer Materie mit  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$  interpretiert wird:

$$(T_{(mat)}^{ik}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2} W_{(mat)} & \frac{1}{c^2} S_{(mat)1} & \frac{1}{c^2} S_{(mat)2} & \frac{1}{c^2} S_{(mat)3} \\ g_{(mat)1} & g_{(mat)11} & g_{(mat)12} & g_{(mat)13} \\ g_{(mat)2} & g_{(mat)21} & g_{(mat)22} & g_{(mat)23} \\ g_{(mat)3} & g_{(mat)31} & g_{(mat)32} & g_{(mat)33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2} W_{(mat)} & \frac{1}{c} S_{(mat)1} & \frac{1}{c} S_{(mat)2} & \frac{1}{c} S_{(mat)3} \\ -\frac{1}{c} T_{(mat)1} & & & \end{pmatrix}$$

Beachte: Dieser Vierertensor ist nicht symmetrisch, was zahlreiche Versuche ausgelöst hat, alternative Ausdrücke abzuleiten.

ABER: Nur Gesamt-Energie-Impuls-Vierertensor eines abgeschlossenen Systems muß symmetrisch sein!

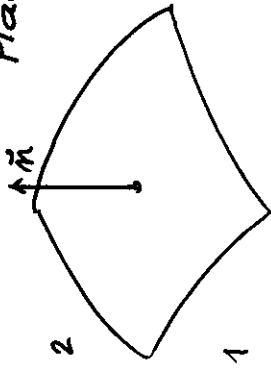
Literatur dazu: H. Miller Elektrodynamik B.I. 1980

XI.4.C. Dissipative Medien

elm. Energiestromdichte in beliebigen Medien

$$\vec{S}_{(mat)}(F,t) = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}(F,t) \times \vec{H}(F,t)] \quad (69)$$

Plausibilitätsbetrachtung dazu:  
Beachte: Grenzbedingungen  
 falls in Grenzfläche kein freier Flächenstrom fließt:



$$\vec{E}_{tg,1} = \vec{E}_{tg,2} \quad [1]$$

$$\vec{H}_{tg,1} = \vec{H}_{tg,2} \quad (\vec{a} \times \vec{b})_n \quad [2]$$

Ferner:  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a}_n \times \vec{b}_n + \vec{a}_{tg} \times \vec{b}_{tg} + \vec{a}_n \times \vec{b}_{tg} + \vec{a}_{tg} \times \vec{b}_n$

$$\Rightarrow (\vec{E} \times \vec{H})_n = \vec{E}_{tg} \times \vec{H}_{tg} + (\vec{a} \times \vec{b})_{tg}$$

Fließt in der Grenzfläche kein freier Flächenstrom, so wird in der Grenzfläche keine Energie dissipiert (keine Joulesche Wärme in der Grenzfläche) und die Normalkomponente von S muð stetig sein, was mit der Beziehung (69) wegen [1], [2] gewährleistet ist.

Demerkung: Ist ein Flächenstrom vorhanden, so besitzt  $\vec{H}_{tg}$  und damit  $S_n$  einen Sprung. Letzterer gibt dann gerade die in der Grenzfläche dissipierte Energie an.  $\bullet$   $\int_{S_1} \vec{H} \times \vec{e}_n = \int_{S_2} \vec{H} \times \vec{e}_n$



Dielektrische und magnetische Verluste  
in einem Nichtleiter in einem zeitlich harmonischen  
makroskopischen Feld

Gl. (57) für  $\vec{j}(F,t) \equiv \vec{0}$ :

$$\text{div } \vec{S}_{(mat)}(F,t) = \frac{1}{4\pi} \left[ \vec{E}(F,t) \cdot \frac{\partial \vec{D}(F,t)}{\partial t} + \vec{H}(F,t) \cdot \frac{\partial \vec{B}(F,t)}{\partial t} \right] \quad (70)$$

Annahme 1: MG

$$\vec{D}(F,\omega) = \epsilon(\omega) \vec{E}(F,\omega), \quad \vec{H}(F,\omega) = \frac{1}{\mu(\omega)} \vec{B}(F,\omega)$$

Annahme 2: Felder zeitlich harmonisch, also

$$\vec{E}(F,t) = \vec{E}(F) e^{-i\omega t} + c.c., \quad \text{usf.} \quad (71)$$

Stationärer Vorgang! Setzt systematische Energiezufuhr von externen Quellen voraus!

$$\vec{E}(F,t) = \vec{E}(F) e^{-i\omega t} + \vec{E}^*(F) e^{i\omega t}$$

$$\vec{D}(F,t) = \epsilon(\omega) \vec{E}(F) e^{-i\omega t} + \epsilon^*(\omega) \vec{E}^*(F) e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial \vec{D}(F,t)}{\partial t} = -i\omega \epsilon(\omega) \vec{E}(F) e^{-i\omega t} + i\omega \epsilon^*(\omega) \vec{E}^*(F) e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(F,t) \cdot \frac{\partial \vec{D}(F,t)}{\partial t} = i\omega \epsilon^*(\omega) |\vec{E}(F)|^2 - i\omega \epsilon(\omega) \vec{E}^2(F) e^{-2i\omega t} + c.c.$$

Zeitmittel über eine Periode  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\left\langle \vec{E}(F,t) \cdot \frac{\partial \vec{D}(F,t)}{\partial t} \right\rangle = \underbrace{(i\omega \epsilon^*(\omega) + c.c.)}_{2\omega \text{Im} \epsilon(\omega)} |\vec{E}(F)|^2$$

$$-\langle \text{div } \vec{S}_{(mat)}(F,t) \rangle = \frac{1}{4\pi} \left[ \langle \vec{E}(F,t) \cdot \frac{\partial \vec{D}(F,t)}{\partial t} \rangle + \langle \vec{H}(F,t) \cdot \frac{\partial \vec{B}(F,t)}{\partial t} \rangle \right]$$

gibt mit

$$\langle \vec{E}(F,t) \cdot \frac{\partial \vec{D}(F,t)}{\partial t} \rangle = 2\omega \text{Im} \epsilon(\omega) |\vec{E}(F)|^2$$

und (analog)

$$\langle \vec{H}(F,t) \cdot \frac{\partial \vec{B}(F,t)}{\partial t} \rangle = 2\omega \text{Im} \mu(\omega) |\vec{H}(F)|^2$$

$$\text{die folgende Bilanzgleichung:} \quad (= -2\omega \text{Im} \frac{1}{\mu(\omega)} |\vec{B}(F)|^2)$$

$$-\langle \text{div } \vec{S}_{(mat)}(F,t) \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \left[ \text{Im} \epsilon(\omega) |\vec{E}(F)|^2 + \text{Im} \mu(\omega) |\vec{H}(F)|^2 \right] \quad (73)$$

Von den externen Quellen im Zeitmittel pro Zeit- und Volumeneinheit zugeführte Energie

mittlere Wärmeleistungsdichte des (nichtleitenden) Mediums,  $> 0, \forall \omega \neq 0$ , aus thermodynamischen Gründen

Beachte: Im stationären Fall wird natürlich die gesamte zugeführte Energie zur Deckung der Dissipation "verbraucht".

Folgerungen: 1) dielektrische Verluste sind durch

$$\text{Im} \epsilon(\omega) \text{ bestimmt}$$

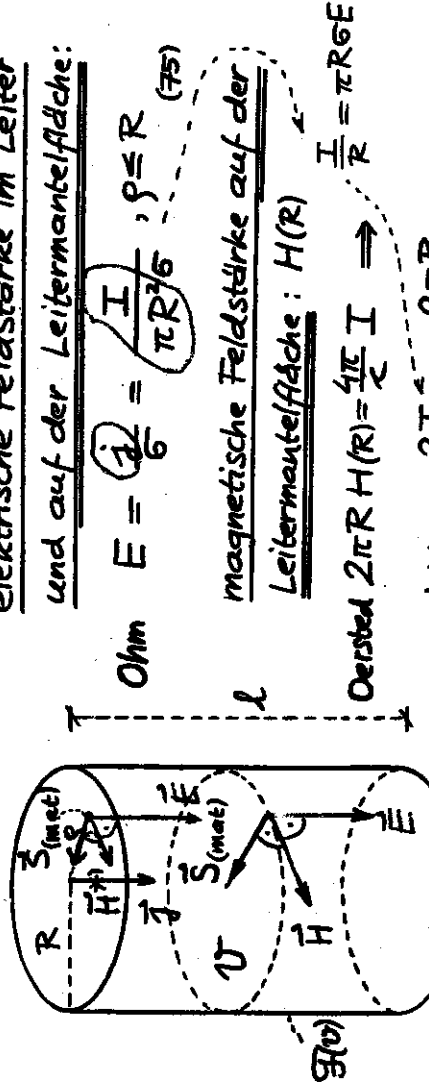
$$2) \text{Im} \epsilon(\omega) > 0, \forall \omega > 0 \quad (74)$$

Analoge Aussagen gelten bzgl.  $\mu(\omega)$ , doch kann man für die meisten Dia- und Paramagneta bis in den IR-Bereich  $\mu(\omega) = \mu$  (reell, statischer Wert) setzen, und im sichtbaren und UV-Bereich ist  $\vec{M} \equiv \vec{0}$  also  $\vec{H} \equiv \vec{B}$  zu setzen (s. Abschnitt IX.3.A).

Stromdurchflossener Leiter (Stationärer Strom)

(57):  $\vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\text{div } \vec{S}_{(mat)}(\vec{r})$

Teilstück der Länge  $l$  eines unendlich langen zylindrischen Leiters betrachtet:



elektrische Feldstärke im Leiter und auf der Leitermantelfläche:

Ohm  $E = \frac{j}{\sigma} = \frac{I}{\pi R^2 \sigma}, \rho = R$  (75)

magnetische Feldstärke auf der Leitermantelfläche:  $H(R)$

Oersted  $2\pi R H(R) = \int_C \vec{j} \cdot d\vec{s} \Rightarrow \frac{I}{R} = \pi R \sigma E$  (76)

$H(R) = \frac{2I}{R\sigma} = \frac{2\pi R}{c} \sigma E$  (76)

\*) Beachte:  $H(\rho) = H(R) \frac{\rho}{R}$  für  $\rho < R$ .

Energiestromdichte auf der Leitermantelfläche:  $S_{(mat)}(R)$

$S_{(mat)}(R) = \frac{c}{4\pi} E H(R) = \frac{1}{2} R \sigma E^2$  (76a)

Energiebilanz für das Leiterstück der Länge  $l$

$\int_V d^3r \vec{j} \cdot \vec{E} = - \int_V d^3r \text{div } \vec{S}_{(mat)} = - \oint_{S(V)} d^2f \cdot \vec{S}_{(mat)}$  (77)

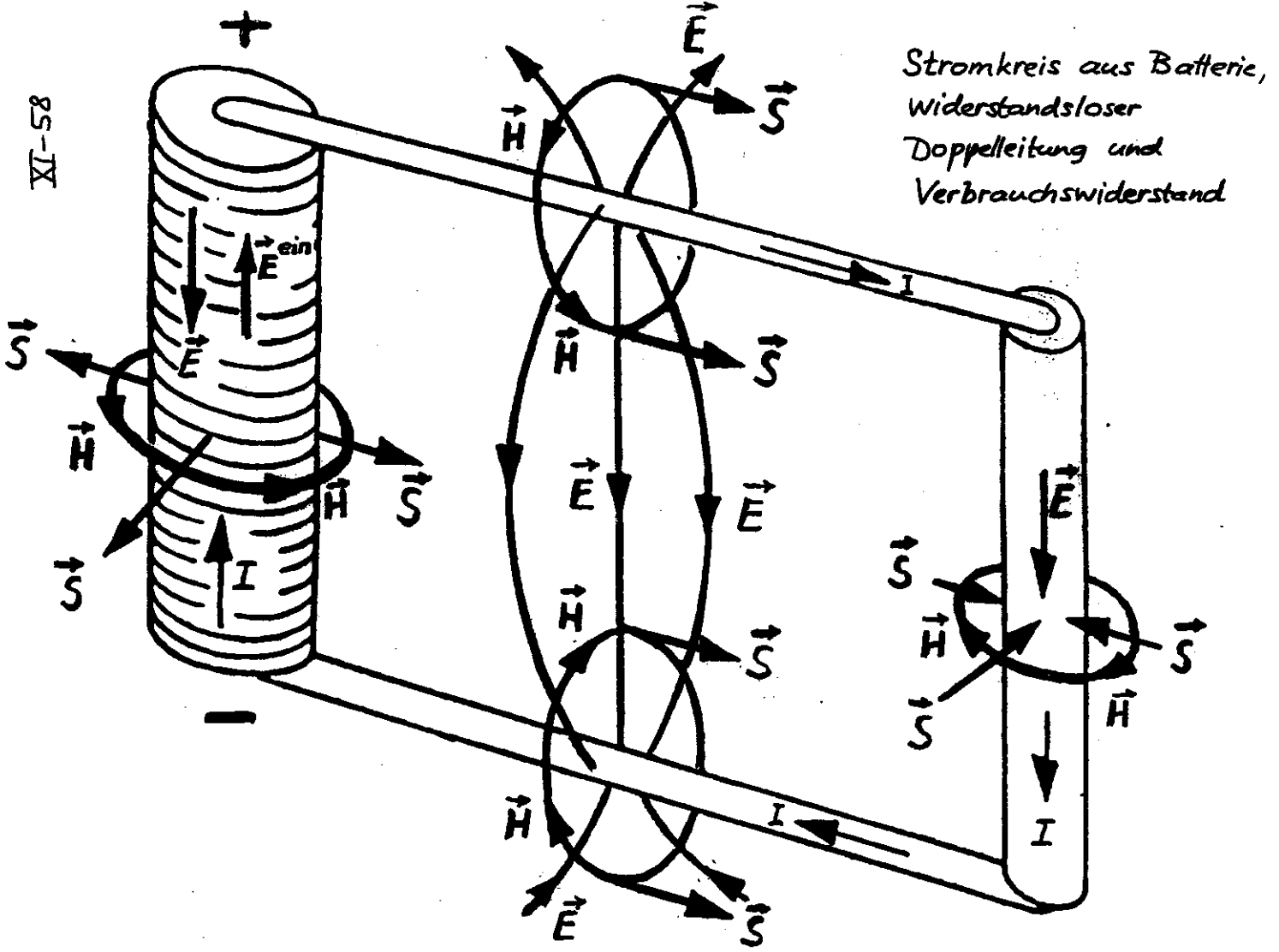
0 auf Grund- und Deckfläche  
 $- d^2f \frac{1}{2} R \sigma E^2$  auf Mante!

RESÜMEE?  $2\pi R l \frac{1}{2} R \sigma E^2$  ✓

Die gesamte im betrachteten Leiterstück in Joulesche Wärme umgewandelte Energie ist aus dem Feld durch die Mantelfläche eingeströmt.

Der Energietransport erfolgt nicht im Leiterinneren, sondern durch das elm. Feld außerhalb des Leiters.

Frage: Wie sehen die Energieströmungsverhältnisse für einen ganzen Stromkreis aus? (Stationärer Fall)



Stromkreis aus Batterie,  
Widerstandsloser  
Doppelleitung und  
Verbrauchswiderstand