FOLIEN VON D. GRAU ZUR VORLESUNG "ELEKTRODYNAMIK UND RELATIVITÄTSTHEORIE"

nach dem Skriptum von H. Nowotny

Kapitel 10

X. RELATIVISTISCHE HAMILTON= FUNKTIONEN

X.1. Lagrange- und Hamiltonformalismus

X.1.A. Grundlagen

Rekapitulation aus der klassischen Mechanik:

Newtonsche Dynamik
Nebenbedingungen, Zwangskräfte
verallgemeinerte Koordinaten und Kräfte
d'Alembertsches Prinzip
Lagrangesche Gleichungen 1. Art, 2. Art

s. Skriptum

X.1.B. Hamiltonsches Prinzip

(Extremalprinzip für die Wirkung)

für ein mechanisches System

System mit endlich vielen Freiheitsgraden = mechanisches System

$q_1, q_2, \dots, q_f$ verallgemeinerte Koordinaten

$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f$ verallgemeinerte Geschwindigkeiten

f Anzahl der Freiheitsgrade (endlich)

Ein mechanisches System ist durch eine Funktion

$$L(q_1, q_2, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f, t)$$

$$\equiv L(q, \dot{q}, t) \, ,$$

die Lagrangefunktion, charakterisiert.

Hamiltonsches Prinzip: Nimmt das System zu den Zeitpunkten t_1, t_2 bestimmte Lagen

$$q_r(t_1) = q_r^{(1)} \, , \quad q_r(t_2) = q_r^{(2)} \, , \quad r = 1, 2, \dots, f \, ,$$

ein, so erfolgt die Bewegung des Systems zwischen diesen beiden Lagen so, daß die Wirkung

$$S := \int_{t_1}^{t_2} dt \, L(q, \dot{q}, t)$$

einen extremalen Wert annimmt.

Bemerkung: Meist spricht man vom "Prinzip der kleinsten Wirkung", obwohl es sich nur für genügend kleine Abschnitte der Bewegung um ein Minimum handeln muß. ●

Variationsproblem

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) \, dt = 0$$

mit den Nebenbedingungen (8)

$$\delta q_r(t_1) = \delta q_r(t_2) = 0 \, , \qquad r = 1, 2, \dots, f$$

liefert als Bedingungen für einen extremalen Wert von S (sog. Eulersche Dgln. des Variations=problems) die

Lagrangeschen Gleichungen (2. Art)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \, , \qquad r = 1, 2, \dots, f \qquad (9)$$

Simultansystem von f gewöhnlichen Dgln. 2. Ordnung für $q_1(t), q_2(t), \dots, q_f(t)$

AB: $q_r(t_0)$, $\dot{q}_r(t_0)$, $r = 1, 2, \dots, f$

Beachte:

$$L(q,\dot{q},t) \longrightarrow L(q,\dot{q},t) + \frac{d}{dt} f(q,t)$$

läßt die BG unverändert.

Energie des Systems: Definition

$$E(q,\dot{q},t) := \sum_{r=1}^{f} \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - L(q,\dot{q},t)$$

Spezialfall: Nichtrelativistisches abgeschlossenes System oder nichtrelativistisches nichtabgeschlossenes System in einem konservativen äußeren Kraftfeld

Für ein solches System kann man zeigen*):

$$L(q,\dot{q}) = \underbrace{\sum_{r,s=1}^{f} \frac{1}{2} a_{rs}(q)\dot{q}_r \dot{q}_s}_{\equiv T(q,\dot{q})} - V(q) \qquad (6a)$$

kinetische Energie

potentielle Energie

Grund für Namen s. nächste Folie

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

*) s. z.B. Landau–Lifschitz; s. auch Folie X-9'.
Benützt werden Homogenität und Isotropie des Raumes und Homogenität der Zeit sowie die GT.
In der Relativitätstheorie (LT!) können daher weder T noch L diese Form haben! (s. später)

$T(q,\dot{q})$ homogene Funktion vom Grad 2 in den $\dot{q}_r$ $\Rightarrow$ Eulersche Dgl. für homogene Fktn. gilt

$$\sum_{r=1}^{f} \dot{q}_r \underbrace{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}}_{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}} = 2T \qquad (14a)$$

, somit $E = \underbrace{\sum_{r=1}^{f} \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}}_{2T} - L$

$\Rightarrow$ Energie des Systems

$$\begin{aligned} E(q,\dot{q}) &= 2T(q,\dot{q}) - L(q,\dot{q}) \\ &= T(q,\dot{q}) + V(q) \qquad (14b) \\ &= \text{Erhaltungsgröße}^{*)} \end{aligned}$$

X.1.C. Hamiltonformalismus für ein mechanisches Problem

Definition: Verallgemeinerter Impuls (kanonischer Impuls) p_r zur verallgemeinerten Koordinate q_r

$$p_r = \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_r} = p_r(q,\dot{q},t), \qquad r=1,2,\dots,f \qquad (10)$$

*) Wie man beweisen kann; s. X-8.

$$p_r = p_r(q,\dot q,t)\ , \quad r=1,2,\dots,f$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\dot q_r = \dot q_r(q,p,t)} \quad , \quad r=1,2,\dots,f$$

<u>Übergang vom Variablensatz $q,\dot q$ auf den</u>
<u>Variablensatz q,p durch eine</u> <u><u>Legendretransformation</u></u>

$$H(q,p,t) := \sum_{r=1}^{f} p_r \dot q_r - L(q,\dot q,t) \qquad (11)$$

Hamiltonfunktion des Systems

$$\left.\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot q_r} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \dot p_r = \frac{\partial L}{\partial q_r}$$

$$dH(q,p,t) = \sum_r \left(\frac{\partial H}{\partial q_r} dq_r + \frac{\partial H}{\partial p_r} dp_r\right) + \underline{\frac{\partial H}{\partial t} dt}$$

$$= \sum_r \left(\cancel{p_r d\dot q_r} + \dot q_r dp_r - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_r}}_{\dot p_r} dq_r - \cancel{\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_r}}_{p_r} d\dot q_r}\right) \underline{- \frac{\partial L}{\partial t} dt}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot q_r &= \frac{\partial H}{\partial p_r} \\ \dot p_r &= -\frac{\partial H}{\partial q_r} \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \underline{\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{Hamiltonsche Gleichungen}} \\ \text{(kanonische BG)} \\ \qquad \dot q_r = \dfrac{\partial H}{\partial p_r} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad r=1,2,\dots,f \\ \qquad \dot p_r = -\dfrac{\partial H}{\partial q_r} \end{array}} \qquad (12)$$

Simultansystem von $2f$ gewöhnlichen Dgln. 1. Ordnung für $q_1(t), q_2(t), \dots, q_f(t)$

AB: $\underline{q_r(t_0)}$, $\underline{p_r(t_0)}$, $\underline{r=1,2,\dots,f}$

$$\frac{dH}{dt} = \sum_r \left(\cancel{\underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_r}}_{-\dot p_r} \dot q_r} + \cancel{\underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_r}}_{\dot q_r} \dot p_r}\right) + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \qquad (13), (15)$$

<u>Energie des Systems</u>

$$E(q,\dot q,t) = \sum_{r=1}^{f} \dot q_r \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_r}}_{p_r} - L(q,\dot q,t)$$

$$H(q,p,t) = E(q,\dot q(q,p,t),t)$$

Spezialfall von Folie X-4, X-5:

Wegen $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

folgt für diesen Fall aus Gl. (13), (15), d.h. aus

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} ,$$

daß

$$H(q,p) = E(q,\dot{q}(q,p)) = T(q,\dot{q}(q,p)) + V(q)$$

Erhaltungsgröße

ist.

Bedeutung des Hamiltonprinzips (Extremalprinzips der Wirkung) und des Lagrange- und Hamiltonformalismus für die SRT

1) Ohne Beweis: L-invariante Wirkung führt auf L-kovariante BG.

2) Formalismus läßt sich auf klassische "freie" Felder (z.B. klassisches elm. Strahlungsfeld*) und "freie" Quantenfelder (z.B. quantisiertes elm. Strahlungsfeld, Dirac-Feld) verallgemeinern: Felder = Systeme mit nicht abzählbar unendlich vielen Freiheitsgraden.

*) ≡ Wellenfeld

3) Formalismus läßt sich auf klassische wechselwirkende Teilchen-Feld-Systeme verallgemeinern

Beispiel: elektrisch geladenes Punktteilchen im elm. Feld; allgemeiner: Mx-L-Theorie; aus einem einzigen Postulat (Lagrangefunktion) können die Mx-Gln. und die relativistische(n) BG inklusive Lorentzkraft abgeleitet werden!

4) Formalismus läßt sich auf wechselwirkende Quantenfelder verallgemeinern

Beispiel: Quantenelektrodynamik
(elm. Strahlungsfeld [Photonen]
+ Diracfeld [Elektronen, Positronen])

X.2. Lagrange- und Hamiltonfunktion für ein kräftefreies Punktteilchen

X.2.A. Nichtrelativistisches kräftefreies Punktteilchen

$\underline{q_i(t) = x_i(t)}$, $\underline{\dot{q}_i(t) = u_i(t)}$, $i = 1,2,3 \;\hat{=}\; x\ y\ z$ (kartes. Koo)

$L(\cancel{\vec{r}}, \vec{u}, \cancel{t})$ wegen Kräftefreiheit (Forderung der räuml. Translations- u. Drehinvarianz u. der zeitl. Translationsinvarianz)

nur $|\vec{u}|$

$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\vec{u})$ <u>muß G-invariant sein</u> (damit BG G-kovariant sind)

$\Rightarrow$ <u>$L(\vec{u})$ muß proportional zu $\vec{u}^2 \equiv u^2$ sein</u>

(s. Landau-Lifschitz Bd.1)

$$\boxed{L = L(\vec{u}) = T(\vec{u}) = \tfrac{1}{2} m \vec{u}^2 = \sum_{i=1}^{3} \tfrac{1}{2} m u_i^2}\ {}^{*)} \tag{16}$$

$$\underline{p_i} = \frac{\partial L}{\partial u_i} = \underline{m u_i} \tag{17}$$

kanon. Impuls = nichtrel. mechan. Impuls (Newtonscher Impuls)

$$H = \vec{p}\cdot\vec{u} - L = \frac{\vec{p}^2}{m} - \frac{\vec{p}^2}{2m} \quad ; \quad \vec{p}^2 \equiv p^2$$

$$\boxed{H = H(\vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} = \sum_{i=1}^{3} \frac{p_i^2}{2m}} \tag{18}$$

---

*) m in nichtrelativistischer Mechanik als $\underline{\underline{G}}$-invariant betrachtet!

$$H = \sum_{i=1}^{3} \frac{p_i^2}{2m}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \qquad \text{AB: } q_i(t_0),\ p_i(t_0) \qquad (19)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \vec{p}(t) = \vec{p}(t_0) \\ \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \frac{\vec{p}(t_0)}{m}(t-t_0) \end{array}}$$

X.2.B, X.2.C. Relativistisches kräftefreies Punktteilchen

q_i, $\dot{q}_i$ wie in Abschnitt X.2.A

$L(\cancel{\vec{r}}, \vec{u}, \cancel{t})$ wegen Kräftefreiheit

nur $|\vec{u}|$ (Begründung wie in Abschnitt X.2.A)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\vec{u}) \quad \text{muß L-invariant sein}$$

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma(u)} = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\, dt$$

Eigenzeitdifferential für das Teilchen = L-invariant

$$\Longrightarrow$$

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\, \gamma(u) L(\vec{u}) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \underbrace{\frac{L(\vec{u})}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}}_{\text{muß L-invariant sein}} \qquad (20)$$

(21)

Einzige L-Invariante, die man aus u_x, u_y, u_z bilden kann: $u_\nu u^\nu = c^2$

$$\Longrightarrow \quad \gamma(u) L(\vec{u}) = \frac{L(\vec{u})}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

muß von $\vec{u}$ unabhängig sein: L-invariante Konstante (22a)

Setzt man

$$\frac{L(\vec{u})}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = -mc^2$$

(m invariante Masse = Ruhmasse des Teilchens),

so folgt

nur $|\vec{u}|$ ✓

$$\boxed{L(\vec{u}) = -mc^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad (22b)$$

$$L(\vec{u}) = -mc^2 + \underline{\tfrac{1}{2}mu^2} + \dots \qquad L(\vec{u}) \text{ nichtrel.}$$

$$L(\vec{u}) = -mc^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = -\frac{mc^2}{\gamma(u)}$$

$$\underline{p_i} = \frac{\partial L}{\partial u_i} = \underline{\gamma(u)\,m u_i} \qquad (23)$$

p_i, u_i: hier kart. Komp. von $\vec{p}, \vec{u}$ (nicht kovariante Komp.)

kanonischer Impuls = relativistischer mechanischer Impuls

$$H = \vec{p}\cdot\vec{u} - L = \gamma(u)\,mu^2 + \frac{mc^2}{\gamma(u)}$$

$$= \gamma(u)\,mc^2\left[\frac{u^2}{c^2} + \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\right] = \underbrace{\gamma(u(\vec{p}))}_{?}\,mc^2 \qquad (24)$$

(23): $\quad p^2 = \gamma^2(u)\,m^2u^2 \qquad \vec{p}^{\,2} \equiv p^2$

$$\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)p^2 = m^2u^2\,, \quad \frac{u^2}{c^2} = \frac{p^2}{p^2+m^2c^2}$$

$$\frac{1}{\gamma^2(u)} = 1-\frac{u^2}{c^2} = \frac{m^2c^2}{p^2+m^2c^2}$$

$$\underline{\gamma(u(\vec{p})) = \frac{\sqrt{p^2+m^2c^2}}{mc}} \qquad (25)$$

$$\boxed{H = H(\vec{p}) = \sqrt{m^2c^4+c^2\vec{p}^{\,2}}} \qquad (26)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{c p_i}{\sqrt{m^2c^2+\vec{p}^{\,2}}}\,, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \qquad (27)$$

AB: $q_i(t_0)$, $p_i(t_0)$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\vec{p}(t) &= \vec{p}(t_0)\\ \vec{r}(t) &= \vec{r}(t_0) + \frac{c\vec{p}(t_0)}{\sqrt{m^2c^2+\vec{p}^{\,2}(t_0)}}(t-t_0)\end{aligned}}$$

X.3. Freies elm. Feld

X.3.A. Lagrange- und Hamiltonformalismus für Felder in der SRT

Feld = System mit nicht abzählbar unendlich vielen Freiheitsgraden

Formalismus läßt sich in weitgehender Analogie zu jenem für Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden aufbauen

Annahme: Das betrachtete Feld werde durch n Feldfunktionen ϕ_a, $a = 1, 2, \ldots, n$, beschrieben ("n-komponentiges Feld")

Bemerkung: Für das freie elm. Feld kann man das Viererpotential (A^μ) benützen, man hat dann also vier Feldfunktionen A^0, A^1, A^2, A^3.

KORRESPONDENZ

Index r, Variable t $\longrightarrow$ $(x^\mu) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$, a

Koordinate q_r $\longrightarrow$ $\phi_a(x^\mu) \equiv \phi_a(\vec{r}, t)$

__Lagrangefunktion__

$$L(q, \dot{q}) \longrightarrow L(t) = \int d^3r\, \mathcal{L}(\phi(x^\mu), \partial^\nu \phi(x^\mu))$$

Lagrangedichte

__Wirkung__

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q, \dot{q}) \longrightarrow$$

$$S[\phi, \partial^\nu\phi] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(t)$$

L-invariant

muß Viererskalarfeld sein (28)

$$= \frac{1}{c} \int_\Omega d^4x\, \mathcal{L}(\phi(x^\mu), \partial^\nu \phi(x^\mu))$$

Ω begrenzt von den Zeithyperebenen $\Sigma_1 \dots x^0 = ct_1$, $\Sigma_2 \dots x^0 = ct_2$ und einer "Seitenhyperfläche" Γ (fest)

__Variation__

$$\delta S = 0 \quad \text{mit} \quad \delta q_r(t_1) = \delta q_r(t_2) = 0 \longrightarrow \qquad r = 1, 2, \dots, f$$

$$\delta S = 0 \quad \text{mit} \quad \delta\phi_a(\vec{r}, t_1) = \delta\phi_a(\vec{r}, t_2) = 0$$

$$\delta\phi_a\big|_\Gamma = 0 \quad , \quad a = 1, 2, \dots, n \qquad (29)$$

__Lagrangegleichungen__

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \longrightarrow \partial^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu \phi_a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} = 0 \qquad (30)$$

$r = 1, 2, \dots, f$ $\qquad$ $a = 1, 2, \dots, n$

__"Unbestimmtheit" der Lagrangefunktion__

$$L(q, \dot{q}) \longrightarrow L(q, \dot{q}) + \frac{d}{dt} f(q) \longrightarrow$$

$$\mathcal{L}(\phi(x^\mu), \partial^\nu\phi(x^\mu)) \longrightarrow \mathcal{L}(\phi(x^\mu), \partial^\nu\phi(x^\mu)) + \partial^\alpha f_\alpha(\phi(x^\mu))$$

__Hamiltonfunktion__

kanonischer Impuls $p_r := \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \longrightarrow$

kanonische Impulsdichte $\pi_a(x^\mu) := \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a}$ (32)

Hamiltonfunktion $H(q, p) := \sum_{r=1}^{f} p_r \dot{q}_r - L(q, \dot{q}) \longrightarrow$

$$H(t) = \int d^3r\, \mathcal{H}(\phi(x^\mu), \pi(x^\mu)) \qquad (33)$$

$$\text{mit} \quad \mathcal{H}(\phi, \pi) := \sum_{a=1}^{n} \pi_a \dot{\phi}_a - \mathcal{L}(\phi, \partial^\nu \phi)$$

Hamiltondichte

__Bemerkung:__ $\mathcal{H}$ transformiert wie "00-Komponente" eines Tensorfeldes

X.3.B, X.3.C. Anwendung des Formalismus auf das freie elm. Feld

1) ϕ_a, $a=1,2,\dots,n$ $\longrightarrow$ A^α, $\alpha=0,1,2,3$

Funktionen, welche beim Wirkungsprinzip variiert werden

2) $\underline{\mathcal{L}}$ darf von den Potentialen nur in der Form

$$F^{\alpha\beta} \doteq \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$$

abhängen (Unabhängigkeit von der Eichung)

3) Damit sich lineare Feldgleichungen (=Lagrangegln.) ergeben, muß $\underline{\mathcal{L}}$ eine quadratische Form in den $F^{\alpha\beta}$ sein.

4) $\underline{\mathcal{L}}$ muß ein L-invariantes Feld (Viererskalarfeld) sein. Dies ist nicht nur für eigentliche LT, sondern auch für LT mit Spiegelungen (uneigentliche LT) zu fordern.

(IX.34): $\quad F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -2(\vec{E}^2-\vec{B}^2)$ = Viererskalarfeld (auch bei LT mit Spiegelung)

scheidet aus $\quad \cancel{F^{\mu\nu}\hat{F}_{\mu\nu} = -4(\vec{E}\cdot\vec{B})}$ = Viererskalarfeld bei eigentlichen LT. Pseudoskalar bei Spiegelung

1)–4) $\Longrightarrow$ $\mathcal{L} = a\,F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$

L-invariante Konstante, Wahl $a=-\frac{1}{16\pi}$ liefert richtigen Faktor $\frac{1}{8\pi}$ bei Hamiltondichte ≙ Energiedichte im Gaußschen Maßsystem

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2-\vec{B}^2) \qquad (34)$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\partial^\sigma A^\tau)$$

$$= -\frac{1}{16\pi}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \qquad (35)$$

$$= -\frac{1}{16\pi}g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

Lagrangegleichungen

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\sigma A^\tau)} = -\frac{1}{16\pi}g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\left[(\delta^\alpha_\sigma\delta^\beta_\tau - \delta^\beta_\sigma\delta^\alpha_\tau)F^{\mu\nu} + F^{\alpha\beta}(\delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\tau - \delta^\nu_\sigma\delta^\mu_\tau)\right]$$

$$= -\frac{1}{16\pi}\left[g_{\sigma\mu}g_{\tau\nu}F^{\mu\nu} - g_{\tau\mu}g_{\sigma\nu}F^{\mu\nu} + g_{\alpha\sigma}g_{\beta\tau}F^{\alpha\beta} - g_{\alpha\tau}g_{\beta\sigma}F^{\alpha\beta}\right]$$

$$= -\frac{1}{16\pi}\left[F_{\sigma\tau} - \underbrace{F_{\tau\sigma}}_{-F_{\sigma\tau}} + F_{\sigma\tau} - \underbrace{F_{\tau\sigma}}_{-F_{\sigma\tau}}\right]$$

$$= -\frac{1}{4\pi}F_{\sigma\tau}$$

$$\partial^\sigma \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\sigma A^\tau)}}_{-\frac{1}{4\pi} F_{\sigma\tau}} - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\tau}}_{0} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\partial^\sigma F_{\sigma\tau} = 0} \qquad (36)$$

Dies sind die <u>Maxwellgleichungen</u> (IX.15)

$$\partial^\sigma F_{\sigma\tau} = \frac{4\pi}{c} j_\tau$$

mit $j_\tau = 0$ (freies elm. Feld).

Die restlichen Maxwellgleichungen (IX.18a) bzw. (IX-19)

$$\boxed{\partial^\sigma \hat{F}_{\sigma\tau} = 0} \text{ bzw. } \partial^\sigma F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\sigma} + \partial^\nu F^{\sigma\mu} = 0$$

sind keine BG im Sinne der Lagrangegln., sie sind – wie im Kapitel IX bewiesen – eine mathematische Konsequenz der Definition von $\overleftrightarrow{F}$.

Hamiltondichte und Hamiltonfunktion

$$\pi_\tau = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^\tau} = \frac{1}{c} \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 A^\tau)}}_{-\frac{1}{4\pi} F_{0\tau}} \qquad (37)$$

$$\pi_\tau = -\frac{1}{4\pi c} F_{0\tau}$$

$$(F_{\sigma\tau}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi_0(\vec{r},t) \equiv 0 \quad , \quad \pi_i(\vec{r},t) = -\frac{1}{4\pi c} E_i(\vec{r},t) \qquad (38)$$

$$\mathcal{H} = \pi_\tau \dot{A}^\tau - \mathcal{L} = \pi_i \dot{A}^i - \mathcal{L} \qquad (39)$$

$$= -\frac{1}{4\pi c} \vec{E} \cdot \underbrace{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}_{-c \operatorname{grad}\phi - c\vec{E}} - \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)$$

$$= \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \frac{1}{4\pi} \underbrace{\vec{E}\cdot \operatorname{grad}\phi}_{\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{E}),\text{ da}} \qquad (40a)$$

$\operatorname{div}\vec{E} = 0$ (freies Feld)

$$\mathcal{H}(\vec{r},t) = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2(\vec{r},t) + \vec{B}^2(\vec{r},t)\right) + \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\cdot\left(\phi(\vec{r},t)\vec{E}(\vec{r},t)\right)$$

$$\updownarrow$$

$$w_{em}(\vec{r},t) = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2(\vec{r},t) + \vec{B}^2(\vec{r},t)\right)$$

Sind die (freien!) Felder auf ein endliches Raumgebiet beschränkt:

$$H(t) = \int d^3r\, \mathcal{H}(\vec{r},t) = \frac{1}{8\pi}\int d^3r \left(\vec{E}^2(\vec{r},t) + \vec{B}^2(\vec{r},t)\right) \tag{40b}$$

X.4. Geladenes Teilchen im elm. Feld

Dann gilt

$$S = \underbrace{S_{ft}}_{\text{freies Teilchen}} + \underbrace{S_{em}}_{\text{freies Feld}} + \underbrace{S_{ww}}_{\text{Wechselwirkung Teilchen-Feld}}$$

bzw.

$$L = L_{ft} + L_{em} + L_{ww}$$

mit

$$L_{ft}(t) = -mc^2\sqrt{1-\frac{u^2(t)}{c^2}} \qquad \text{s. X.2.B}$$

$$L_{em}(t) = \int d^3r\, \mathcal{L}_{em}\left(\partial^\sigma A^\tau(x^\mu)\right) \qquad \text{s. X.3.B}$$

$$L_{ww}(t) = \int d^3r\, \mathcal{L}_{ww}(\cdot) \qquad \text{noch zu finden}$$

Bemerkung:

1) Für die Ableitung der Maxwellgln. mit Quelltermen $\partial_\sigma F^{\sigma\tau} = \frac{4\pi}{c} j^\tau$ benötigt man lediglich $\mathcal{L}_{em} + \mathcal{L}_{ww}$, L_{ft} ist dafür irrelevant.

2) Für die Ableitung der Bewegungsgleichung für das geladene Teilchen $m\frac{d}{d\tau}u^\mu = \frac{q}{c}F^{\mu\nu}u_\nu$ benötigt man lediglich $L_{ft} + L_{ww}$, L_{em} ist dafür irrelevant. ●

X.4.A. Lagrangedichte und Lagrangefunktion der Wechselwirkung

1) Das elm. Feld muß durch $A^\alpha(x^\mu)$ beschrieben werden.

2) Die Quelldichten, welche das geladene Teilchen verursacht, sind durch $j^\alpha(x^\mu)$ zu beschreiben.

3) $\mathcal{L}_{ww}$ muß ein L-invariantes Feld (Viererskalarfeld) sein.

4) Damit sich lineare Feldgleichungen ergeben, muß $\mathcal{L}_{ww}$ in $j^\alpha(x^\mu)$ linear sein.

1) – 4) $\Rightarrow \mathcal{L}_{WW} = b A^\alpha j_\alpha$

L-invariante Konstante; Wahl $b = -\frac{1}{c}$ führt (zusammen mit $\mathcal{L}_{em}$) zu den im Gaußschen System richtigen Faktoren in den Mx-Gln. mit Quelltermen

$$\mathcal{L}_{WW}(x^\mu) = -\frac{1}{c} A^\alpha(x^\mu) j_\alpha(x^\mu) \qquad (41)$$

$$(A^\mu) = (\phi, \vec{A}) \quad , \quad (j^\mu) = (c\rho, \vec{j}) \qquad (42)$$

$$\mathcal{L}_{WW}(\vec{r},t) = -\rho(\vec{r},t)\phi(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\vec{j}(\vec{r},t)\cdot\vec{A}(\vec{r},t) \qquad (43)$$

Beachte: Obwohl sich $\mathcal{L}_{WW}$ bei Umeichung der Potentiale ändert, sind die aus $\mathcal{L}_{em} + \mathcal{L}_{WW}$ abgeleiteten Feldgleichungen und die aus $L_{ft} + L_{WW}$ abgeleitete BG eichinvariant, wie dies gefordert werden muß. Grund:

$$A^\alpha \longrightarrow A^\alpha + \partial^\alpha \psi \quad \Rightarrow$$

$$A^\alpha j_\alpha \longrightarrow A^\alpha j_\alpha + \underbrace{j_\alpha \partial^\alpha \psi}_{\partial^\alpha(\psi j_\alpha)} \text{, da } \partial^\alpha j_\alpha = 0$$

L_{WW} für Punktladung

$$\mathcal{L}_{WW}(\vec{r},t) = -\rho(\vec{r},t)\phi(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\vec{j}(\vec{r},t)\cdot\vec{A}(\vec{r},t)$$

mit

$$\rho(\vec{r},t) = q\,\delta(\vec{r}-\vec{r}(t))$$
$$\vec{j}(\vec{r},t) = q\vec{u}(t)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}(t)) \qquad (44)$$

gibt

$$L_{WW}(t) = \int d^3r\, \mathcal{L}_{WW}(\vec{r},t)$$
$$= -q\,\phi(\vec{r}(t),t) + \frac{q}{c}\vec{u}(t)\cdot\vec{A}(\vec{r}(t),t) \qquad (45)$$
$$= -\frac{q}{c}\frac{1}{\gamma(u(t))} A^\alpha(x^\mu(\tau))\, u_\alpha(\tau)$$

$\Rightarrow$

$$\gamma(u(t))\, L_{WW}(t) = L\text{-Invariante} \ \checkmark$$

X.4.B. "Bewegungsgleichungen" für das elm. Feld

Nur $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_{em} + \mathcal{L}_{WW}$ benötigt!

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(A^\tau, \partial^\sigma A^\tau)$$
$$= -\frac{1}{16\pi} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$
$$-\frac{1}{c} j_\alpha A^\alpha \qquad (46)$$

$$\partial^\sigma \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\sigma A^\tau)}}_{\substack{\text{wie bei freiem Feld:}\\ -\frac{1}{4\pi}F_{\sigma\tau}}} - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\tau}}_{\substack{\text{nun} \neq 0:\\ -\frac{1}{c} j_\tau}} = 0 \Longrightarrow \qquad (47a)$$

$$\boxed{\partial^\sigma F_{\sigma\tau} = \frac{4\pi}{c} j_\tau} \qquad (47b)$$

Restliche Mx-Gln. wie bei freiem Feld, da rein mathematische Folge der Definition von $\overleftrightarrow{F}$.

$$\underline{\pi_\tau} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^\tau} = \underline{-\frac{1}{4\pi c} F_{o\tau}}$$ ebenfalls wie bei freiem Feld (48)

X.4.C. Bewegungsgleichung für die Punktladung

Nur $L \equiv L_{ft} + L_{WW}$ benötigt!

$$L = L(\vec{r}, \vec{u}, t) \qquad (49)$$

$$= -mc^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} - q\phi(\vec{r},t) + \frac{q}{c}\vec{u}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)$$

Beschreibung der Bewegung durch

$\vec{r}(t)$, $\dot{\vec{r}}(t) = \vec{u}(t)$

Mechanischer und kanonischer Impuls des Teilchens

mechanischer Impuls

$$\vec{p} = \gamma(u) m\vec{u} \qquad (51)$$

$$L(\vec{r},\vec{u},t) = -mc^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} - q\phi(\vec{r},t) + \frac{q}{c}\vec{u}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)$$

kanonischer Impuls

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial u_i} = \underbrace{\gamma m u_i}_{p_i} + \frac{q}{c}A_i \qquad (50)$$

$$\boxed{\vec{P} = \vec{p} + \frac{q}{c}\vec{A}}$$

Hamiltonfunktion

$$H = \vec{P}\cdot\vec{u} - L$$

$$= \gamma(u) m u^2 + \cancel{\frac{q}{c}\vec{u}\cdot\vec{A}} + \frac{mc^2}{\gamma(u)} + q\phi - \cancel{\frac{q}{c}\vec{u}\cdot\vec{A}}$$

$\gamma(u) mc^2$

$u(\vec{P})$

$$\underline{H = \gamma(u) mc^2 + q\phi} \qquad (52)$$

(25):
$$\gamma(u(\vec{p})) = \frac{\sqrt{p^2+m^2c^2}}{mc} \Longrightarrow$$

$$\underline{\gamma(u(\vec{P})) = \frac{\sqrt{(\vec{P}-\frac{q}{c}\vec{A})^2+m^2c^2}}{mc}} \qquad (53)$$

$$H(\vec r,\vec P,t) = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\vec P - \frac{q}{c}\vec A(\vec r,t)\right)^2} + q\,\phi(\vec r,t) \qquad (54a)$$

Nichtrelativistische Näherung

$$H(\vec r,\vec P,t) = mc^2 + \frac{\left(\vec P - \frac{q}{c}\vec A(\vec r,t)\right)^2}{2m} + q\,\phi(\vec r,t) \qquad (54b)$$

Bewegungsgleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_i} = \frac{c^2\left(P_i - \frac{q}{c}A_i\right)}{\sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\vec P - \frac{q}{c}\vec A\right)^2}}$$

$$\frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = +\frac{c^2\left(P_j - \frac{q}{c}A_j\right)\frac{q}{c}\frac{\partial A_j}{\partial x_i}}{\sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\vec P - \frac{q}{c}\vec A\right)^2}} - q\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

1. Gl. nichts Neues, denn wir hatten bereits

$$P_i - \frac{q}{c}A_i = p_i = \gamma m u_i$$

$$\sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\vec P - \frac{q}{c}\vec A\right)^2} = \gamma m c^2 ,$$

was bei Einsetzen

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i = \frac{\gamma m c^2 u_i}{\gamma m c^2} \quad \checkmark \quad \text{ergibt.}$$

2. Gl.

$$\frac{dP_i}{dt} = \frac{c^2\left(P_j - \frac{q}{c}A_j\right)}{\sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\vec P - \frac{q}{c}\vec A\right)^2}}\,\frac{q}{c}\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - q\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

liefert mit

$$P_j - \frac{q}{c}A_j = p_j = \gamma m u_j$$

$$\sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\vec P - \frac{q}{c}\vec A\right)^2} = \gamma m c^2$$

für $\frac{dp_i}{dt}$:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(P_i - \frac{q}{c}A_i\right) = \frac{dP_i}{dt} - \frac{q}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x_j}u_j - \frac{q}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}$$

$$\frac{\cancel{\gamma m c^2} u_j}{\cancel{\gamma m c^2}}\,\frac{q}{c}\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - q\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{q}{c}\underbrace{\left(u_j\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - u_j\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)}_{\substack{(\vec u \times \mathrm{rot}\,\vec A)_i \\ = (\vec u \times \vec B)_i}} + q\underbrace{\left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}\right)}_{E_i}$$

Beweis folgt

$$\boxed{\frac{d\vec p(t)}{dt} = q\left[\vec E(\vec r(t),t) + \frac{\vec u(t)}{c}\times\vec B(\vec r(t),t)\right]} \qquad (57)$$

Fehlender Beweisschritt:

$$(\vec{u} \times \mathrm{rot}\,\vec{A})_i = \varepsilon_{ijk}\, u_j \underbrace{\mathrm{rot}_k \vec{A}}_{\varepsilon_{klm} \frac{\partial A_m}{\partial x_l}}$$

$$= \underbrace{\varepsilon_{kij}\, \varepsilon_{klm}}_{\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}} u_j \frac{\partial A_m}{\partial x_l} = u_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - u_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j}$$

Bemerkungen:

1) Wir konnten also tatsächlich Mx-Gln., relativistische BG und Lorentzkraftgesetz aus einem einzigen Postulat (Lagrangefunktion $L_{ft} + L_{em} + L_{ww}$) herleiten.

2) In Viererschreibweise lautet die BG

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu$$

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} \text{ bzw. } m a^\mu$$

Vierer-Lorentzkraft F^μ

3) Die erhaltene BG ist – wie vorausgesagt – eichinvariant.

ELEKTRODYNAMIK RUHENDER MATERIE ("Makroskopische Elektrodynamik" = Elektrodynamik kontinuierlicher Medien)

XI. GRUNDGLEICHUNGEN FÜR RUHENDE MATERIE

XI.1. Aufteilung der Quellen in "freie" und "gebundene" Quellen.

Übergang von der "mikroskopischen" zur "makroskopischen" Elektrodynamik

XI.1.A. Übersicht

"Mikroskopische" Elektrodynamik:

Ladungen und Ströme im Vakuum

Materie vom mikroskopischen Standpunkt:

Elektronen und Kerne im Vakuum, in dauernder rascher Bewegung (auch im Ruhsystem eines Materiestückes).

Auf mikroskopischer Skala räumlich stark schwankende und auch zeitlich sehr rasch veränderliche mikroskopische elm. Felder.